软生物组织的分数阶横观各向同性功能梯度特性

G.Sachin[a], S. Natarajan[a], O. Barrera*[,b,c]

[a]*Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology Madras, Chennai, 600036, India.*
[b]*School of Engineering, Computing and Mathematics, Oxford Brookes University, Headington, Oxford OX3 0BP, United Kingdom.*[c]*Department of Engineering Science, University of Oxford, Parks Road, OX1 3PJ, Oxford, United Kingdom.*

arXiv:2301.02032v1 [math.NA] 5 Jan 2023

摘要

本文着重探讨半月板组织孔弹性各向异性行为的成因及其空间变化特性。我们展示了从组织的三个部分（中央体、前角和后角）沿三种方向（周向、径向和垂直方向）取样所进行的受限压缩蠕变试验结果。结果表明，采用非整数阶算子（分数阶达西定律）描述流体流动演变的孔弹性模型，能够与实验蠕变数据准确吻合。我们还利用另外两组实验数据对模型进行了验证：应力松弛数据，以及通过重量减少测得的固结过程中的流体损失。结果表明，半月板可视为横观各向同性孔弹性材料。这种行为是由于半月板体部区域周向的流体流速约为径向和垂向的三倍。在前角，弹性特性呈横观各向同性，总模量在径向上高于周向和垂直方向。三维分数阶孔弹性模型已在有限元软件中实现，并用于确定固结过程中间质液通量等难以通过实验测量的量。

关键词： 半月板、分数阶孔弹性、受限压缩试验、反常扩散、有限元模拟

1. 引言

生物软组织，例如半月板组织（图1），具有层级多孔固体基质，间质液则流入孔隙 [1–5]。整体力学行为不仅取决于固体基质的变形，也取决于变形过程中流体进出孔隙的运动。此外，构成固体基质和胶原的结构内部构造，决定了弹性特性和传输特性的各向异性行为 [6]。本文采用孔弹性理论对双相组织的响应进行建模，以更好地理解半月板的各向异性特性对膝关节功能的影响。

*通讯作者*Email addresses:* me21d011@smail.iitm.ac.in (G. Sachin), snatarajan@smail.iitm.ac.in (S. Natarajan), olga.barrera@eng.ox.ac.uk, +44 7585041147. (O. Barrera)

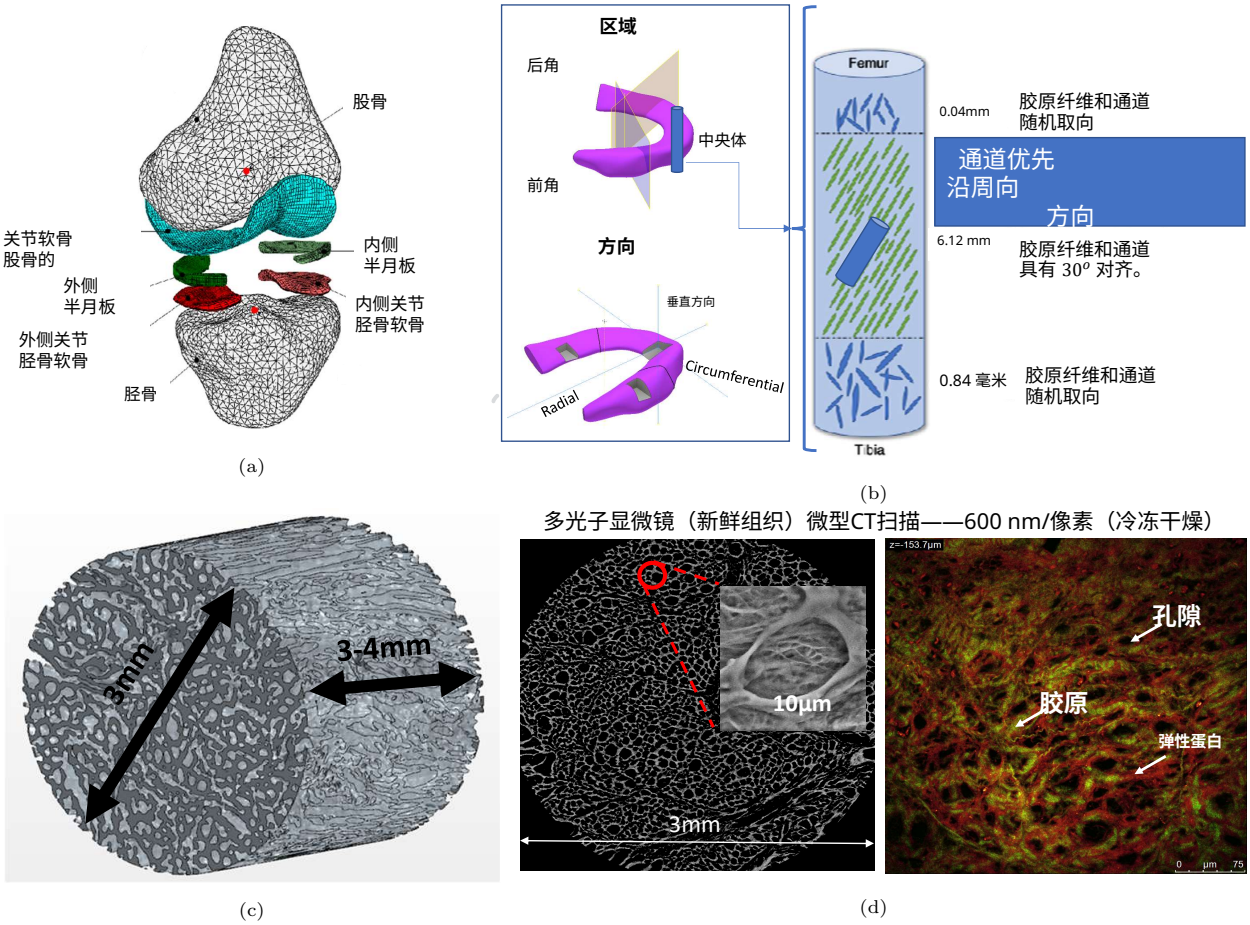


图1：（a）膝关节中的外侧和内侧半月板，（b）半月板中的区域和方向，（c）半月板圆柱形样品的三维多孔微观结构，（d）半月板组织的微型计算机断层扫描和多光子显微镜图像。

膝关节股骨软骨与胫骨软骨之间的半月板（图1a）有三个主要区域，即前角、中央体和后角（图1b）。半月板具有多种功能，例如承载、润滑、能量吸收和维持稳定性 [7, 8]。结合我们近期的实验、理论和数值研究 [1, 2, 9–11], ，我们认识到各区域的功能各不相同。在[1, 2], 中，我们讨论了体部区域独特的结构如何实现承载和能量吸收功能。该功能由一种夹层结构实现：两层薄而坚硬的外层承担载荷，厚而柔软的内层则起到能量吸收元件的作用，是一种有效的天然阻尼器 [2, 11]。胶原基质固体的构筑方式似乎有所不同，并且在外层和内层之间逐渐变化。外层中的胶原纤维分布密集、取向随机，且平均直径较小。其弹性模量比内层高一个数量级。相比之下，半月板内层依托于层级各向异性网络，其中胶原通道主要沿周向排列，流体在生理变形过程中沿这些通道流动（图1）。在 [5], 中，我们已表明，渗透率从前角/后角到体部区域逐渐变化，且体部区域的渗透率更高。本文进一步表明，该区域的渗透率张量也呈横观各向同性，并且周向（胶原通道的优先方向）的渗透率高于其他两个方向（图1）。通道内的流体流动决定了组织的时间依赖性行为。组织在载荷作用下发生变形时，这些通道的形态会改变，导致渗透率随通道尺寸、孔隙率和曲折度而变化。因此，

这使渗透率张量不仅取决于压力，还会由于所施加压力梯度的局部变化而在空间和时间上发生变化。近期针对人类膝关节的有限元研究表明，前角和后角可能具有稳定性功能 [10, 12] ，因为它们发生变形，使半月板能够向外挤出，从而使体部区域与软骨具有更大的接触面积，进而承受大部分载荷。

在一系列加载条件下，对半月板组织不同部分的流体流动行为进行适当建模，对于深入了解组织的生物力学功能以及设计合适的人工组织替代物至关重要。目前影响迄今为止相关器械临床和功能结局的障碍 [13] 在于，人们仍未充分理解天然组织的传输与结构-性能关系。尤其是，半月板的“微观/纳米”尺度组成和结构与其粗尺度各向异性行为结构之间的关系，仍是一个悬而未决的问题 [14]。

目前，研究人员使用受限压缩试验（应力松弛和/或蠕变）等实验测试来表征材料参数，例如平衡状态下的弹性模量和渗透率。用于确定这两个参数的主要模型基于双相理论。在 [15], 中，作者通过受限压缩试验考察了软骨中的流体承受外加载荷的效应，发现其承受的载荷可达 90%。他们使用线性双相模型，根据总模量和渗透率确定材料性质。在 [16], 中，作者对不同动物物种半月板的不同区域进行了蠕变压痕试验。通过使用双相模型拟合实验数据，估算了总模量、泊松比、剪切模量和渗透率等不同材料性质。

我们近期对人类半月板样本开展的实验发现，双相模型不足以再现观察到的实验行为 [5]。为解决这一问题， [17]提出了一种孔弹性模型，其中通过采用涉及分数阶导数的修正达西定律，推导出孔隙压力扩散方程。因此，水力渗透率呈现“反常”特性，流体流动速率由导数阶数决定。由此可见，反常水力渗透率、导数张量的阶数及其各向异性，决定了流体在半月板复杂多孔结构中的输运，是半月板组织的关键性质。尽管 [17], 报道了分数阶孔弹性模型的有限元实现，但该模型仅限于估算孔隙压力场。

本文旨在首次展示在半月板组织的不同区域（前角、中央体部和后角）以及不同方向（径向、周向和垂直方向）进行受限压缩试验所得的蠕变数据。我们采用 [5, 17] 中提出的分数阶孔弹性模型拟合实验数据，以反演总模量、异常渗透率和导数阶数，并研究它们对方向的依赖性（总模量、异常渗透率和导数阶数张量）。我们还首次使用通过拟合蠕变曲线反演得到的参数，对模型在应力、失重和位移场方面进行了验证，使模型能够匹配同一样品的另外两组数据，即应力松弛和失重数据。分数阶孔弹性模型通过 UMATHT 和 UMAT 在商业软件 Abaqus 中实现。数值模拟结果显示，无论是位移场还是孔隙压力场，均与解析解吻合良好，而这方面的结果此前在文献中尚有缺失。这使我们能够通过数值方法进行固结试验，并计算固结过程中的间质液通量等场量；这类量难以通过实验测得。此外，我们采用方差分析法对参数进行统计分析，以比较不同方向上材料参数的变化。

2. 材料与方法

2.1. 受限固结蠕变试验

半月板取自接受全膝关节置换术的患者，所采用的方案经伦理批准，具体如 [5]所述。经外科医生肉眼检查标记为“退化”的样品均被弃用。半月板在磷酸盐缓冲液（PBS）中解冻三十分钟，以恢复其水合状态。共获取29个半月板测试样品。这些样品呈圆柱形，

直径为3毫米，高度为3至4毫米。样品分别沿各主方向，即周向、径向和垂直方向，从中央体、前角和后角区域提取（图1）。

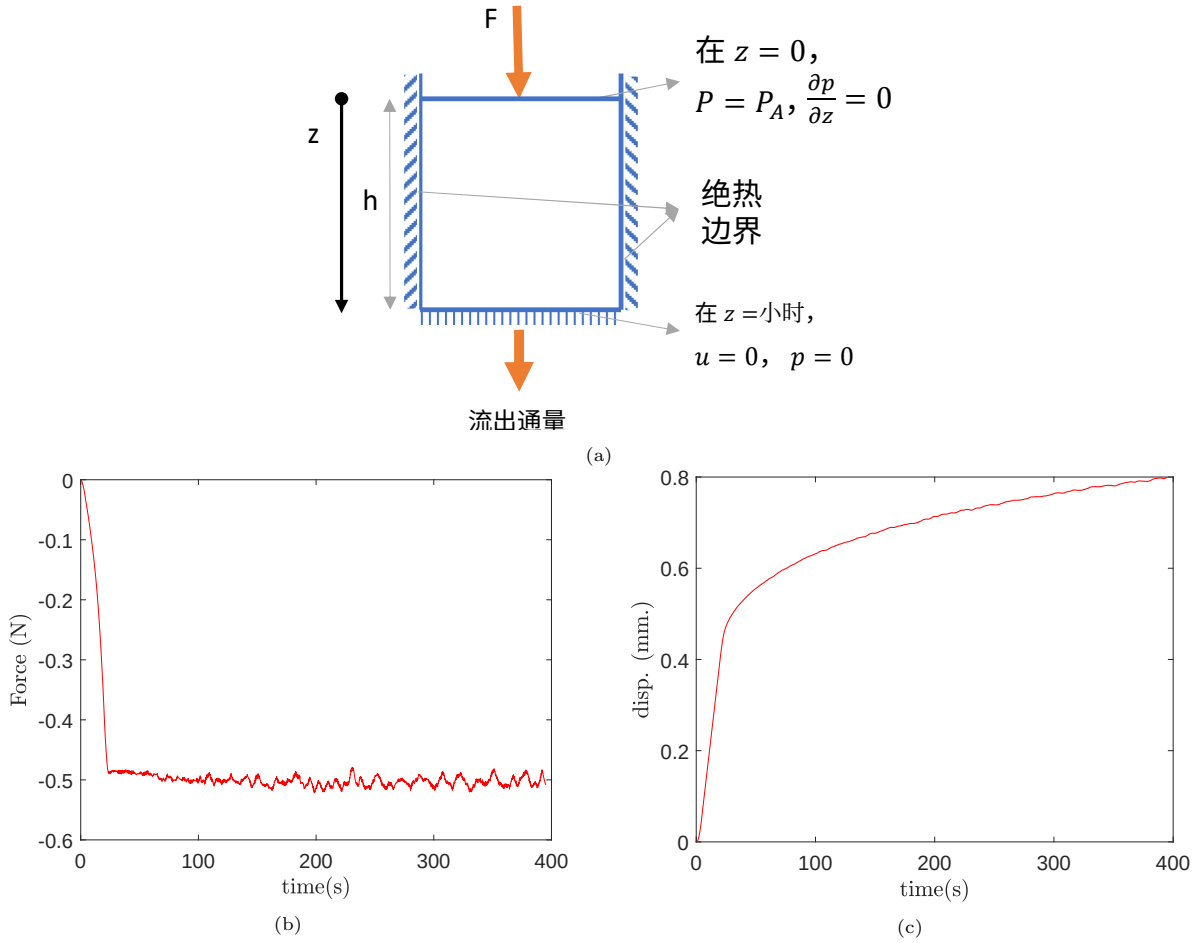


图2：(a) 受限压缩试验示意图；(b) 受限压缩蠕变试验所施加的载荷；(c) 测得的位移。

受限压缩试验装置由一个腔室构成，腔室壁透明且隔热，底部设有一块多孔板（图2a）。待测样品被限制在腔室内。在腔室顶部施加0.5 N的载荷（对应约0.07 兆帕的应力，这是半月板的生理值 [18]）。载荷通过活塞施加，活塞以样品高度的0.3%为加载台速度移动，直至载荷达到0.5 N；随后载荷保持恒定400秒，如图2所示。施加的力以及测得的位移分别如图2b和图2c所示，位移在顶面测量。

2.2. 分数阶固结——控制方程与有限元实现

控制方程。考虑一种占据 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的孔弹性材料，其边界为 $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$，其中$d=1$，2，3。该边界可分解如下：$\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$和 $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$，其中分别在 $\partial\Omega_N$ 和 $\partial\Omega_D$ 上施加诺伊曼边界条件和狄利克雷边界条件。在

不存在体力和惯性的情况下，孔弹性材料的控制微分方程为：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_p=0 \tag{1b}$$

并补充以下边界条件：$\mathbf{u}=\hat{}\mathbf{u}$，且 $p=\hat{}p$ 在 $\partial\Omega_D$ 上，以及 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=F$，且 $\mathbf{J}_p\cdot\mathbf{n}=0$ 在 $\partial\Omega_N$ 上。在方程（1）中，ζ 为流体含量的变化量，p 为孔隙压力，$\mathbf{J}_p$ 为流体通量，$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力。应力、位移与压力之间，以及通量与压力之间的关系如下：

$$\boldsymbol{\sigma}=2G\boldsymbol{\epsilon}+\lambda\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I}-\alpha p\mathbf{I} \tag{2a}$$

$$\mathbf{J}_p=-\lambda_\beta\,{}_0D_t^\beta\boldsymbol{\nabla}p \tag{2b}$$

其中 $\lambda=(3K-2G)$ 3 是 Lam´e 常数，G，K 分别为剪切模量和体积模量，α 为比奥系数，${}_0D_t^\beta$ 为关于时间的 β 阶分数阶导数。需要注意的是，当 $\beta=0$ 时，λ_β的量纲为 $[L]^4[F]^{-1}[T]^{-1}$。当 $\beta\neq0$ 时，λ_β的量纲为$[L]^4[F]^{-1}[T]^{\beta-1}$。用体积应变 ϵ_d 表示的孔隙压力扩散方程（参见方程（2b））为：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{K_u-K}{\alpha^2}\lambda_\beta\,{}_0D_t^\beta\boldsymbol{\nabla}^2p-\frac{K_u-K}{\alpha}\frac{\partial\epsilon_d}{\partial t} \tag{3}$$

其中，K_u 为不排水体积模量。

在受限压缩试验中，将一段半月板组织圆柱体放入带有多孔底座的圆柱形腔室内，几何形状和边界条件见图2a。对样品顶部施加压力后，样品内的流体将从底部流出。由于仅 ϵ_{zz}为非零应变分量，因此可将方程（2）建模为一维形式。方程（2）将修改为 [17]:

$$\left(K+\frac{4G}{3}\right)\frac{\partial\epsilon_{zz}}{\partial z}-\alpha\frac{\partial p}{\partial z}=0 \tag{4a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{K_u-K}{\alpha^2}\lambda_\beta\,{}_0D_t^\beta\frac{\partial^2p}{\partial z^2}-\frac{K_u-K}{\alpha}\frac{\partial\epsilon}{\partial t} \tag{4b}$$

相应的边界条件为：$\forall\ 0\leq z\leq h$, $p(z,t=0)=\gamma P_A$；$P(z=0,t)=P_A$，$p(z=h,t)=0$，$\left.\dfrac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0}=0$ 以及 $u(z=h,t)=0.$，其中 h 为样品的初始高度。沿 $z-$ 方向对圆柱体施加恒定压应力 $\sigma_{zz}(z=0,t)$，施加载荷的位置为 $z=0$。假设材料在加载初始时刻处于不排水条件下，据此推导初始孔隙压力，得：

$$p(z,t=0)=P_A\frac{3(K_u-K)}{\alpha\,(4G+3K_u)} \tag{5}$$

结果表明，孔隙压力的解析解为 [17]:

$$p(z,t)=P_A\gamma\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)c_n\cos\frac{n\pi z}{2h} \tag{6}$$

其中，$E_{1-\beta,1}$ 是米塔格-莱夫勒函数，且

$$\begin{aligned}\gamma&=\frac{3\,(K_u-K)}{\alpha\,(4G+3K_u)};\qquad c_n=\frac{4}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\\ \bar{\lambda}&=\lambda_\beta\frac{(4G+3K)\,(K_u-K)}{\alpha^2\,(4G+3K_u)}\end{aligned} \tag{7}$$

位移的解析解为:

$$u(z,t)=\frac{3P_A}{3K+4G}\left[(h-z)+\gamma\alpha\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{8h}{(n\pi)^2}\left\{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi z}{2h}-1\right\}\right] \tag{8}$$

详细推导见附录 A.

通量的表达式可通过将孔隙压力的解（参见方程（6））代入通量定义式（参见方程（2b）），并按如下方式求解分数阶导数得到:

$$J_p=\lambda_\beta P_A\gamma t^{-\beta}\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1-\beta}\left(\frac{-n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{2}{h}\sin\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) \tag{9}$$

样品随时间变化的重量 $W(t)$ 与样品的初始重量 W_0 和流体通量J_p 之间的关系如下:

$$W(t)=W_0-\int_0^t J_p\cdot w_s\ \boldsymbol{A}\ \mathrm{d}t \tag{10}$$

其中， w_s 为流体的比重， $\boldsymbol{A}$ 为流体流出的横截面。将公式（9）代入公式（10）并对积分进行解析求值，可得到以下关系:

$$W(t)=W_0-P_AAw_s\gamma\frac{2}{h}\sum_{n=1,3}^{\infty}\left[\lambda_\beta t^{1-\beta}E_{1-\beta,2-\beta}\left(-\frac{\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\right] \tag{11}$$

详细推导请参阅附录 B。

有限元实现与验证。 采用 Barrera [17]提出的方法，通过 UMATHT 和 UMAT 子程序在 Abaqus 中实现采用分数阶达西定律的比奥模型。 [17]仅讨论了孔隙压力场；本文首次展示孔隙压力场和位移场均与解析解一致。利用热弹性与孔弹性控制方程的相似性 [17], ，采用 Abaqus 的 UMATHT 来处理孔弹性问题；该程序通常用于热弹性。在 Abaqus 中，温度可视为孔隙压力，热通量可视为流体通量。UMAT 用于将应力数据传递给 UMATHT，以模拟耦合行为。UVARM 可用于传递应力值。然而，由于 Abaqus 中的实现顺序为弹性模型-UMATHT-UVARM，UVARM 输出的应力值要到下一次迭代才会传递至 UMATHT，从而导致计算误差。为避免这一误差，采用 UMAT，以便在同一增量内共享应力值。UMAT 针对线弹性模型编写。应变与孔隙压力之间的耦合系数 $\alpha_T=\alpha/3K$ 设为热膨胀系数。通过与理论解进行比较，对 Abaqus 模型进行验证，验证对象为一

表1：材料参数

体积模量 ，K	1.67×10^{5}Pa
剪切模量， G	7.69× 10^4 Pa（$E=0.2\times10^6$Pa， $\nu=0.3$）
斯凯普顿系数， B	0.88
比奥系数 ，α	0.65
渗透率， λ_β	8.33×10^{-8}m^4/Ns$^{1-\beta}$
分数阶， β	0、0.1、0.2、0.4

材料性质如表 1 [17] 所示的有限压缩试验。为此，考虑一个高度为 $h=3$mm、直径为 $d=3$mm 的圆柱形计算模型。计算域采用每个节点具有 4 个自由度的 8节点三线性六面体单元（C3D8T单元）进行离散。三个

方向上的位移均在底面受到约束，侧面上的位移则受到侧向约束。底部的孔隙压力为零，并在顶面施加 $P_A = 0.07$ 兆帕的瞬时荷载。基于系统研究，发现总数为 28,110 个八节点六面体单元足以模拟孔弹性响应。将数值模拟得到的位移和孔隙压力与理论结果进行比较。图3a–3b显示了对于不同时间步， $\beta = 0$ 在理论解与数值计算之间随深度变化的孔隙压力和位移函数对比。 β 对孔隙压力和位移的影响如图3c–3d所示。从图3可以看出，数值结果与理论解吻合良好，且分数阶对孔隙压力和位移具有显著影响。图3c、3d中初始时间孔隙压力和位移的大幅跳变，是由于在第一个时间增量中采用斜坡函数对阶跃函数进行数值近似所致。

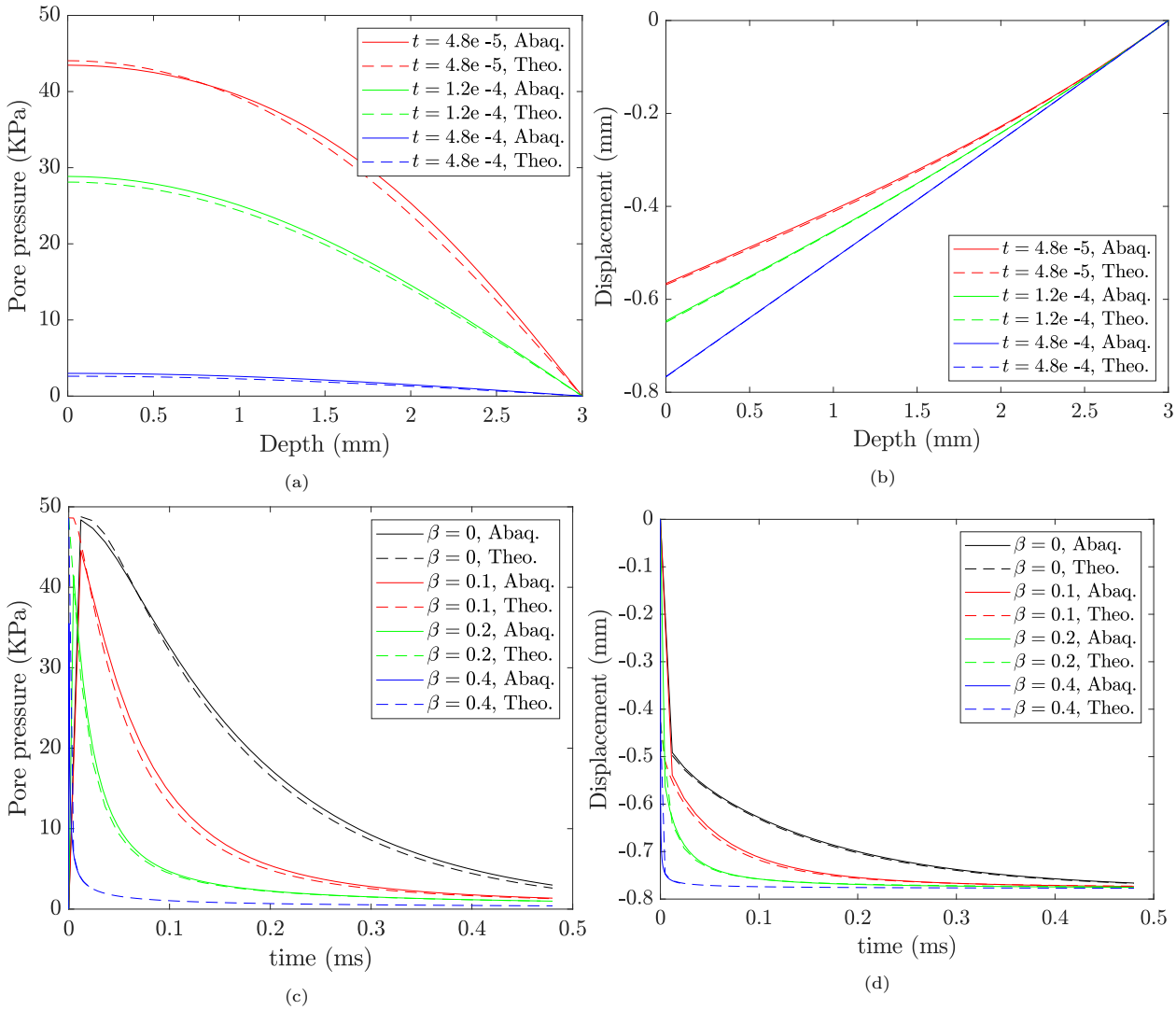


图3：数值结果与理论结果的比较：（a-b）不同时间步下孔隙压力和位移随深度的变化，以及 $\beta = 0$ ；（c-d）顶面上一点的孔隙压力和位移随时间的变化受 β 的影响。

3. 结果

3.1 材料参数：异常渗透率、导数阶数和总模量

所提出的分数阶孔弹性模型用于表征半月板的响应。为此，我们使用公式（8）中的表达式拟合实验数据。由于半月板被假定为不可压缩材料，因此 $B = 1, \alpha = 1,$ 并且 $K_u \to \infty$ ，公式（8）可简化为:

$$u(z,t) = \frac{P_A}{M}\left[(h-z) + \sum_{n=1,3}^{\infty} E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\lambda_\beta M t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{8h}{(n\pi)^2}\left((-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi z}{2h} - 1\right)\right] \tag{12}$$

其中， $M = (3K + 4G)/3$为总模量。通过将公式（12）与蠕变位移随时间变化的数据进行拟合，求得半月板组织的材料性质。值得注意的是，该模型仅需要三个材料性质，即总模量（M）、分数阶（β）和渗透率（λ_β）。取 $\beta = 0$时，该理论转化为经典比奥理论。实验采用位移控制，即使用恒定的活塞速度，直至载荷达到所需值。因此，拟合时忽略斜坡加载，并将其近似为阶跃加载。将实验中测得的位移与 $z = 0$处的解析解公式（12）进行拟合，即

$$u = \frac{P_A}{M}\left[h - \sum_{n=1,3}^{\infty} E_{1-\beta,1}\left(\frac{-n^2\pi^2\lambda_\beta M t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{8h}{(n\pi)^2}\right] \tag{13}$$

使用 MATLAB 内置函数“fminsearch”进行拟合，将材料性质作为变量，并将解析数据与实验数据之间的均方根误差作为待最小化的函数。图5展示了四个样品的拟合曲线。表2列出了根据实验结果得到的半月板材料性质，样品取自体部和前角，并涵盖三个不同方向，即周向、垂直方向和径向。样品名称的最后两个字符表示位置和方向信息，例如，BC 表示体部环形。其他采用的标记为：A：前角，P：后角，R：径向，V：垂向。

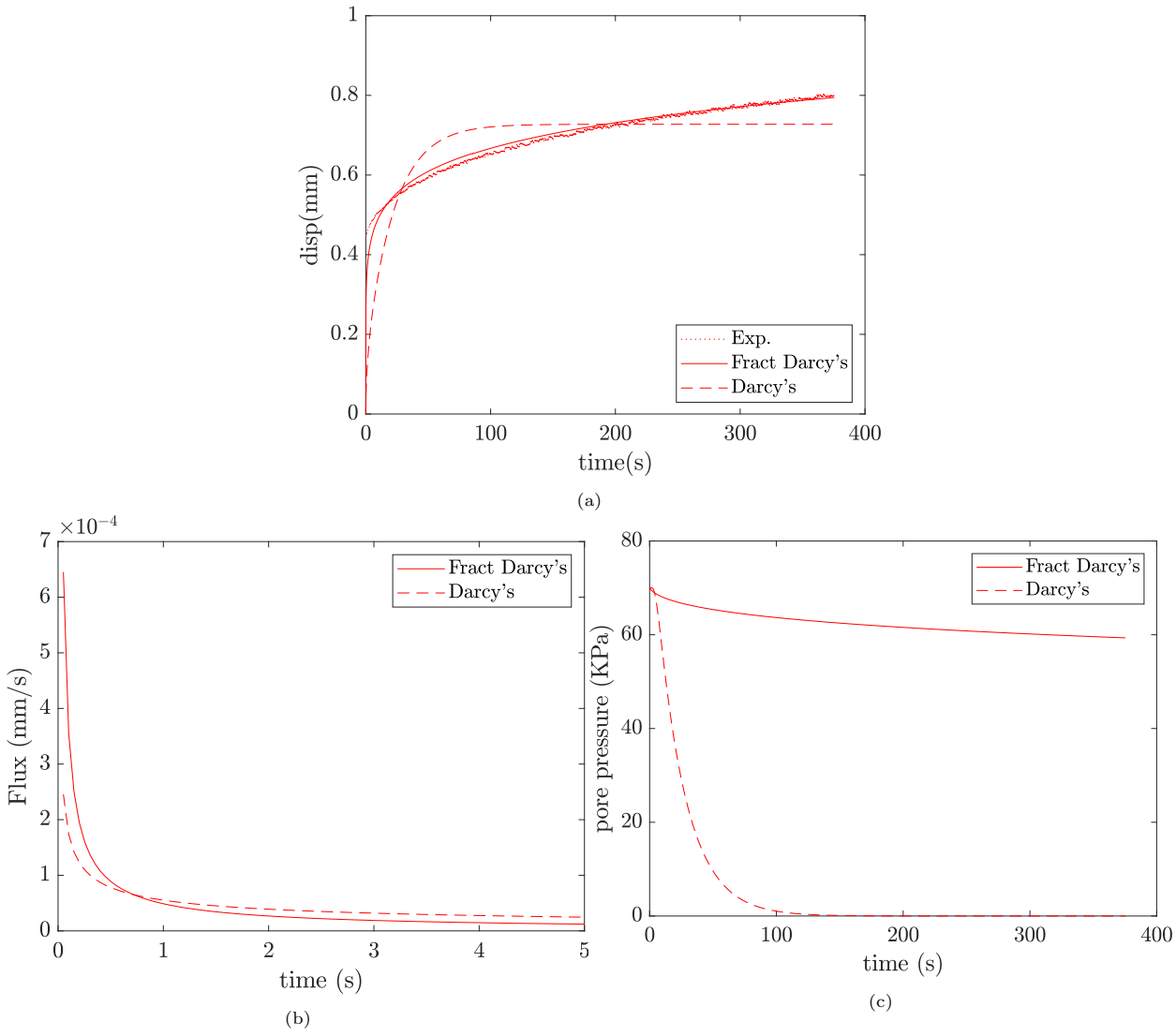
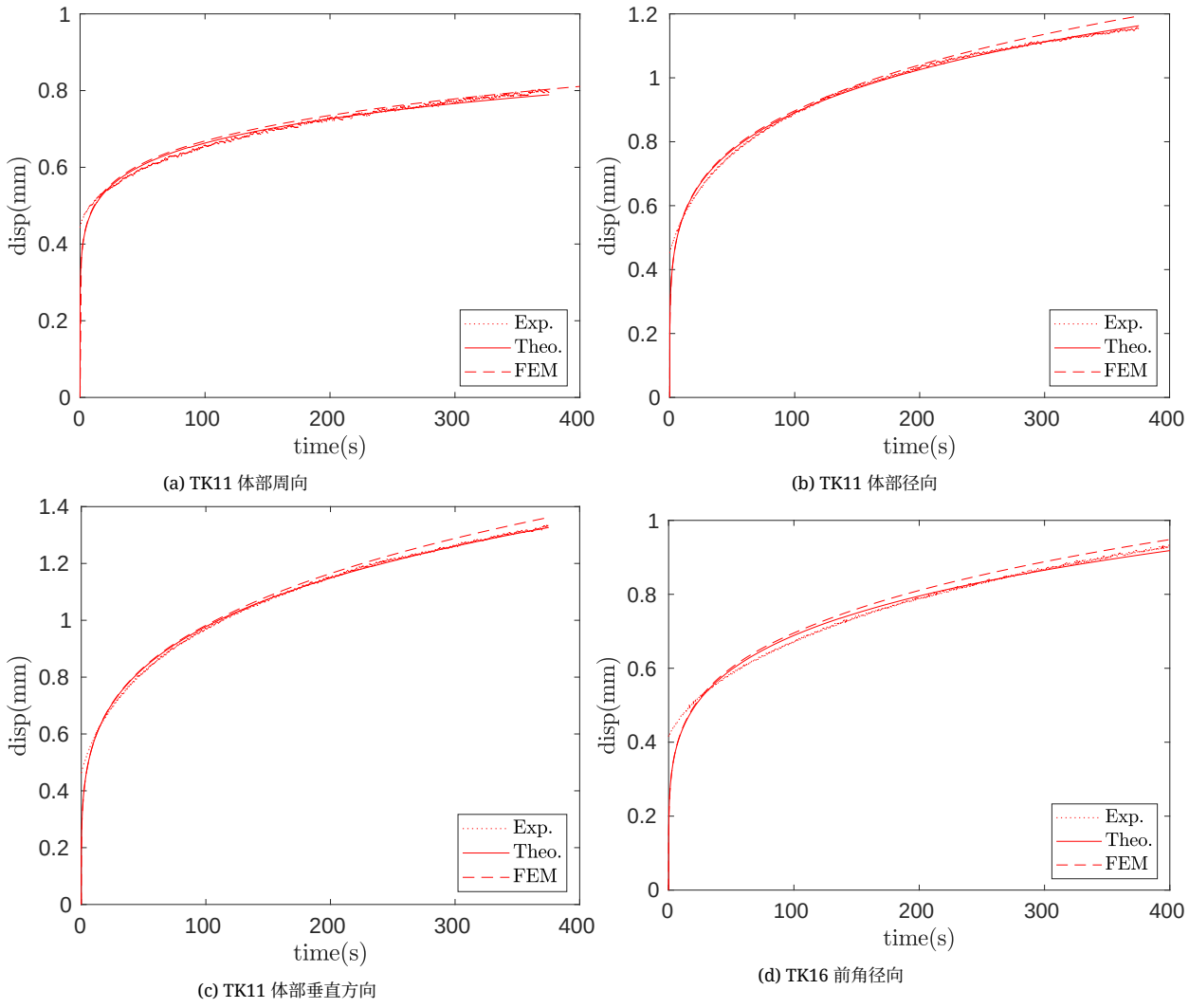


图4：比较采用经典达西定律和分数阶达西定律的Biot理论对蠕变位移实验数据的拟合效果。

为了解分数阶的影响，我们比较了经典比奥特孔弹性模型与所提出的模型（参见第2.2节）。通过拟合样品 TK11BC 得到的经典比奥模型材料性质为[1] $M = 3.56\times10^{-1}$ 兆帕和 $\lambda = 6.95\times10^{-13}$ m^4/Ns，而分数阶框架下的材料性质为： $M = 1.27\times10^{-1}$ 兆帕、 $\beta = 0.73$ 和 $\lambda_\beta = 2.95\times10^{-12}$ $\mathrm{m}^4/\mathrm{Ns}^{1-\beta}$。采用经典比奥理论时，均方根误差为 6.53×10^{-5}；采用结合分数阶达西定律的比奥理论时，均方根误差为 1.42×10^{-5}。图4比较了经典比奥理论和分数阶模型的位移、流出通量及孔隙压力随时间的变化，并与实验结果进行了对比。可以认为，经典比奥模型无法很好地拟合实验结果，这进一步凸显了采用分数阶孔弹性框架的必要性。

[1]所有样品对应的经典比奥理论材料性质请参见附录C。



(a) TK11 体部周向

(b) TK11 体部径向

(c) TK11 体部垂直方向

(d) TK16 前角径向

图5：采用分数阶孔弹性对受限位移蠕变数据进行拟合，并使用有限元法进行建模：(a) 取自 TK11 样品体部区域周向的样品，(b) 取自 TK11 样品体部区域径向的样品，(c) 取自 TK11 样品体部区域垂直方向的样品，(d) 取自 TK16 样品前角区域径向的样品。

此外，为检验半月板是否存在各向异性，对体部区域进行方差分析检验，将周向、径向和垂直方向的性质作为类别，并使用 MATLAB 的默认函数“anova1”比较不同方向的性质。对于少数样品，其性质与同一类别的其他样品相比异常，可能是样品、实验或拟合问题所致。MATLAB 的“anova1”函数将这些样品检测为离群值，因此比较时未予考虑。剔除离群值后各组样品的均值和标准差列于表3，方差分析检验结果见图6。图6a比较了总模量。红线表示样品的中位数，黑色虚线界限表示样品的范围。如果不同样品的缺口蓝色箱体互不重叠，则可有 95% 的置信度认为真实中位数存在差异。如果针对零假设的概率（p-值）小于 0.05，则可有 95% 的置信度认为各类别的均值存在差异。对于总模量，所得 p-值为 0.329，表明总模量在不同方向上没有差异，因此可能可视为各向同性。分数阶 β 和渗透率 λ_β 的所得 p-值分别为 0.001 和 0.0038。从图6b–6c可推断，分数阶

表2：通过蠕变数据拟合得到的弯月面材料参数

序号	样品	h (mm)	M$\times 10^5$ (Pa)	β	$\lambda_\beta \times 10^{-12}$ (m^2/Pa.$s^{1-\beta}$)	均方根误差 ($\times 10^{-5}$)
1	TK11BC	3.7	1.27	0.73	2.95	1.42
2	TK11BR	3.3	0.71	0.59	1.48	1.61
3	TK11BV	4.1	0.83	0.53	1.56	1.74
4	TK16BC1	3.2	0.76	0.7	2.13	1.39
5	TK16BR2	2.9	0.82	0.59	0.89	1.30
6	TK16BV	3.2	0.62	0.59	0.85	1.48
7	TK16AC	3.2	0.60	0.63	0.97	1.97
8	TK16AR1	3.33	0.85	0.58	1.01	2.02
9	TK16AV	3.33	0.57	0.5	0.37	1.63
10	TK16BC2	3.33	0.90	0.76	4.28	1.53
11	TK16BR1	2.9	0.55	0.64	0.91	1.83
12	TK16BV2	3.13	0.61	0.63	0.93	1.56
13	TK16PV	2.67	1.41	0.75	1.99	1.40
14	TK17BC	3.2	0.10	0.73	1.03	2.58
15	TK17BR	2.2	0.41	0.72	1.36	1.55
16	TK17BV	2.3	0.86	0.54	0.90	1.31
17	TK17AC	2.73	1.87	0.79	4.96	1.49
18	TK17AR	2.7	1.94	0.76	3.05	1.44
19	TK18BC	4.6	1.34	0.74	141.03	3.81
20	TK18BR	2.9	0.66	0.72	1.90	1.78
21	TK18BV	2.8	0.68	0.61	1.07	1.63
22	TK22BR	3.17	2.54	0.49	85.2	9.90
23	TK22AC	3.67	0.65	0.62	1.40	2.68
24	TK22AR	3.33	1.60	0.41	2.24	4.69
25	TK22AV	2.93	0.76	0.51	0.35	1.42
26	TK36BC	3.37	0.74	0.73	4.40	2.11
27	TK37BC	4.6	0.90	0.74	6.63	3.53
28	TK37BR	3.5	0.67	0.59	0.96	1.93
29	TK37BV	3.2	0.49	0.53	0.55	1.33

与垂直方向和径向这两个方向相比，环向的阶数和渗透率相对较高。此外，垂直方向与径向的情况可视为相似。

表3：半月板参数在样品中的变化

	$M \times 10^5$ (Pa)		β		$\lambda_\beta \times 10^{-12}$ ($m^2/Pa.s^{1-\beta}$)	
Part	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
体部圆周方向	0.75	0.49	0.73	0.00	3.75	2.36
体部径向	0.64	0.14	0.64	0.06	1.25	0.40
体部垂直方向	0.65	0.14	0.58	0.04	0.86	0.19
Anthorn 周向	1.04	0.72	0.68	0.10	2.44	2.19
Anthorn 径向	1.47	0.56	0.58	0.17	2.10	1.03
Anthorn 垂直方向	0.66	0.14	0.51	0.01	0.36	0.02

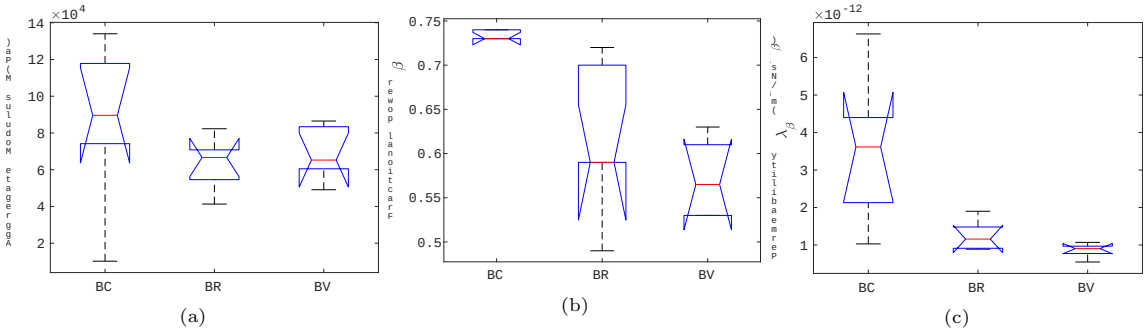


图6：材料在体部区域不同方向上的属性比较（BC - 体部周向，BR - 体部径向，BV - 体部垂直方向）。(a) 总模量 (M)，(b) 分数阶幂 β，(c) 渗透率 λ_β

为研究半月板的各向异性行为，按照第2.1节所述进行受限蠕变试验，材料性质取自体部区域在周向、径向和垂直方向上的平均值。在数值研究中，样品高度设为 3 mm，压力从零逐渐增至 0.07 兆帕并保持恒定。图7展示了三个不同区域中孔隙压力、位移以及样品底部流出的通量（根据公式（9）计算）随时间的变化。

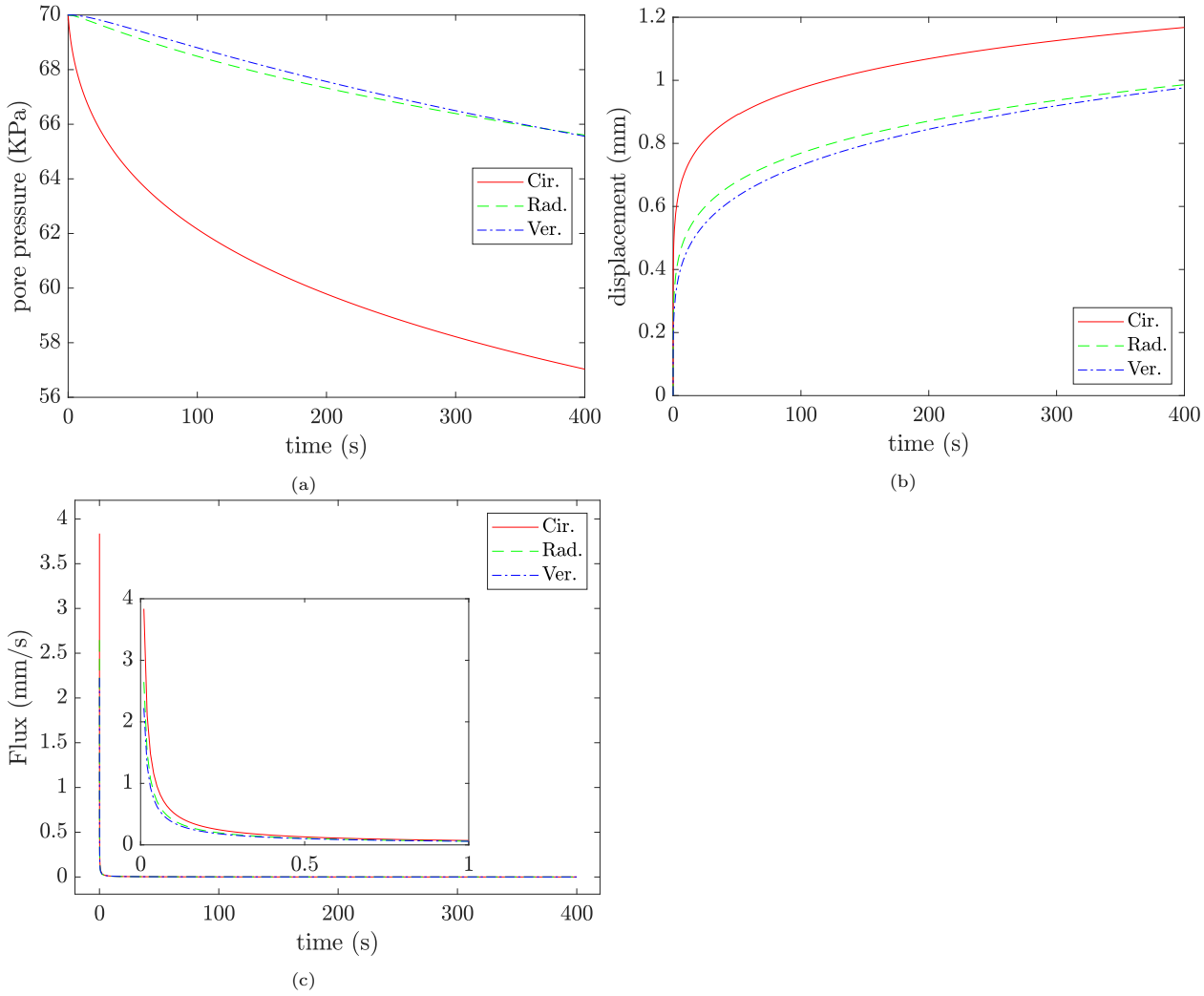


图7：不同方向（周向、径向和垂直方向）下的通量、位移和孔隙压力

3.2. 分数阶固结的数值建模

使用从表2所给数据拟合中获得的参数，在Abaqus中对半月板的受限蠕变实验进行数值建模。泊松比和杨氏模量是Abaqus所需的弹性参数。由于受限压缩试验仅取决于总模量，因此泊松比任意假定为0.3，并使用总模量和泊松比计算杨氏模量。由于对称性，数值模拟采用轴对称模型。图8展示了本研究所采用的轴对称模型。计算域采用4节点双线性四边形单元（CAX4T）离散，并使用结构化网格。根据系统的网格收敛性研究，发现0.05mm的网格尺寸足以模拟该行为。在计算域左侧施加轴对称边界条件。右侧和底部表面的位移受到约束。底部施加零孔隙压力条件以实现自由流体流动，顶面施加压力 $P_A = 0.07MPa$ 作为阶跃载荷。数值模拟采用固定的 $\Delta t = 0.1$ s时间增量，模拟持续进行400 s。

数值、理论和实验结果的对比如图5所示，由此可推断，数值、理论和实验结果之间吻合良好。在后续研究中，将使用数值模型在后文分析复杂加载。

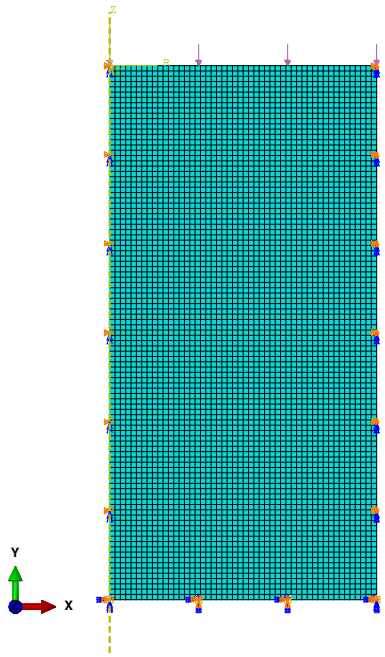
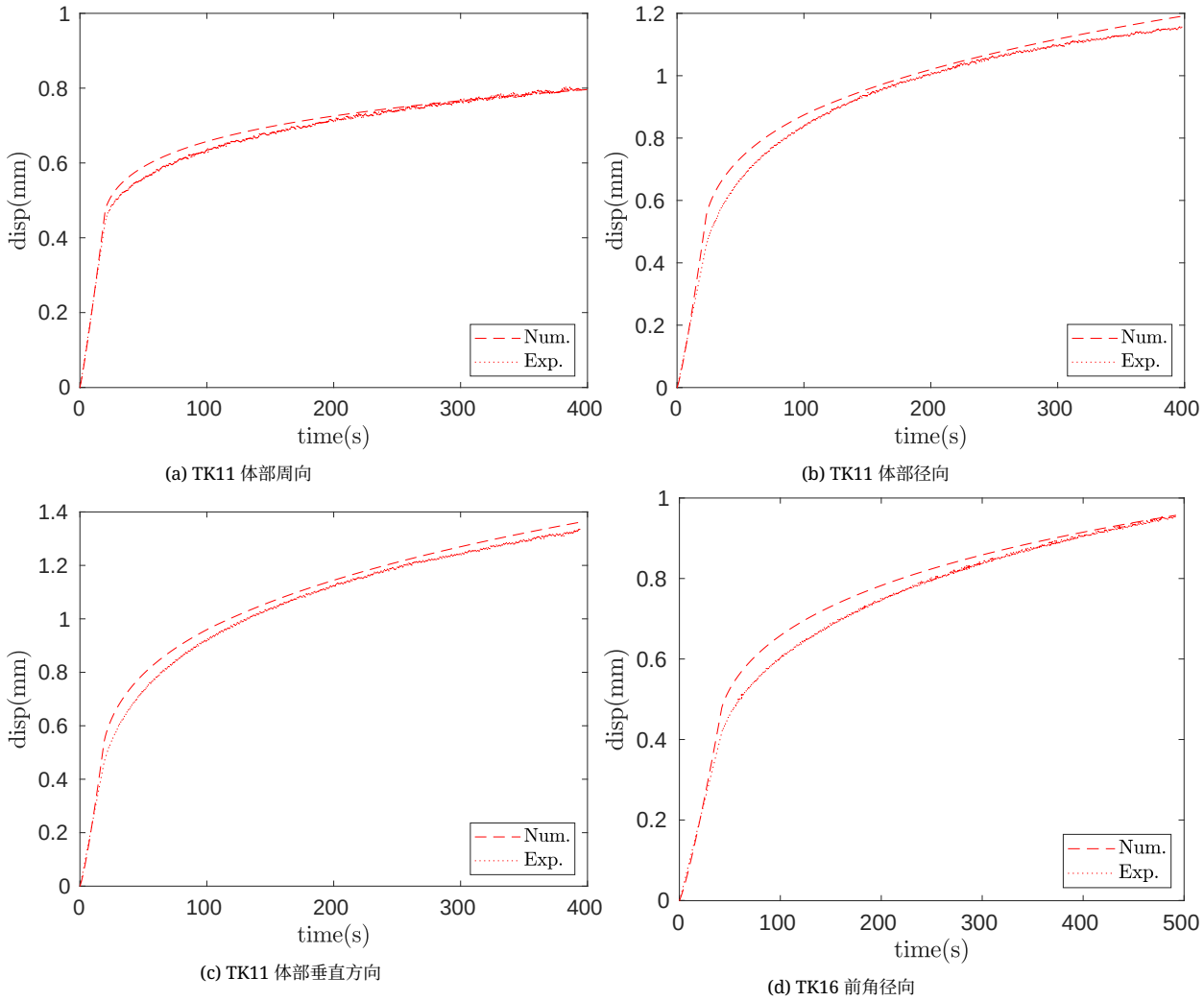


图8：轴对称　　用于受限蠕变数值　　模拟的模型

3.3. 分数阶孔弹性模型验证

为进一步验证所提出的孔弹性模型，我们通过数值方法进行有无初始斜坡加载的受限压缩蠕变试验以及受限压缩应力松弛试验，并将结果与实验进行比较。我们还计算了受限压缩蠕变试验中的失重。

初始斜坡加载下的受限压缩蠕变试验。在早期研究中，实验中的初始斜坡被假定为阶跃载荷。然而，为评估这一假设对模型拟合参数的影响，我们在蠕变试验中采用初始斜坡（与实验中的斜坡相似）运行有限元模型，并将数值模拟结果与实验结果进行比较。在 Abaqus 中，对蠕变试验施加斜坡加载的建模方法是：在载荷模块中为载荷指定一个斜坡函数，使其在与实验相似的特定时间段内变化，之后在模拟剩余时间内保持恒定。图9展示了若干样品的数值结果与实验结果的比较，尤其是样品 TK11BC、TK11BR、TK11BV 和 TK16AR。图9中采用斜坡加载的蠕变结果显示，在斜坡加载结束时出现了轻微偏差，这是由该假设造成的。但偏差很小，可以忽略。因此，我们得出结论：如上所述的材料参数提取过程是正确的。



(a) TK11 体部周向

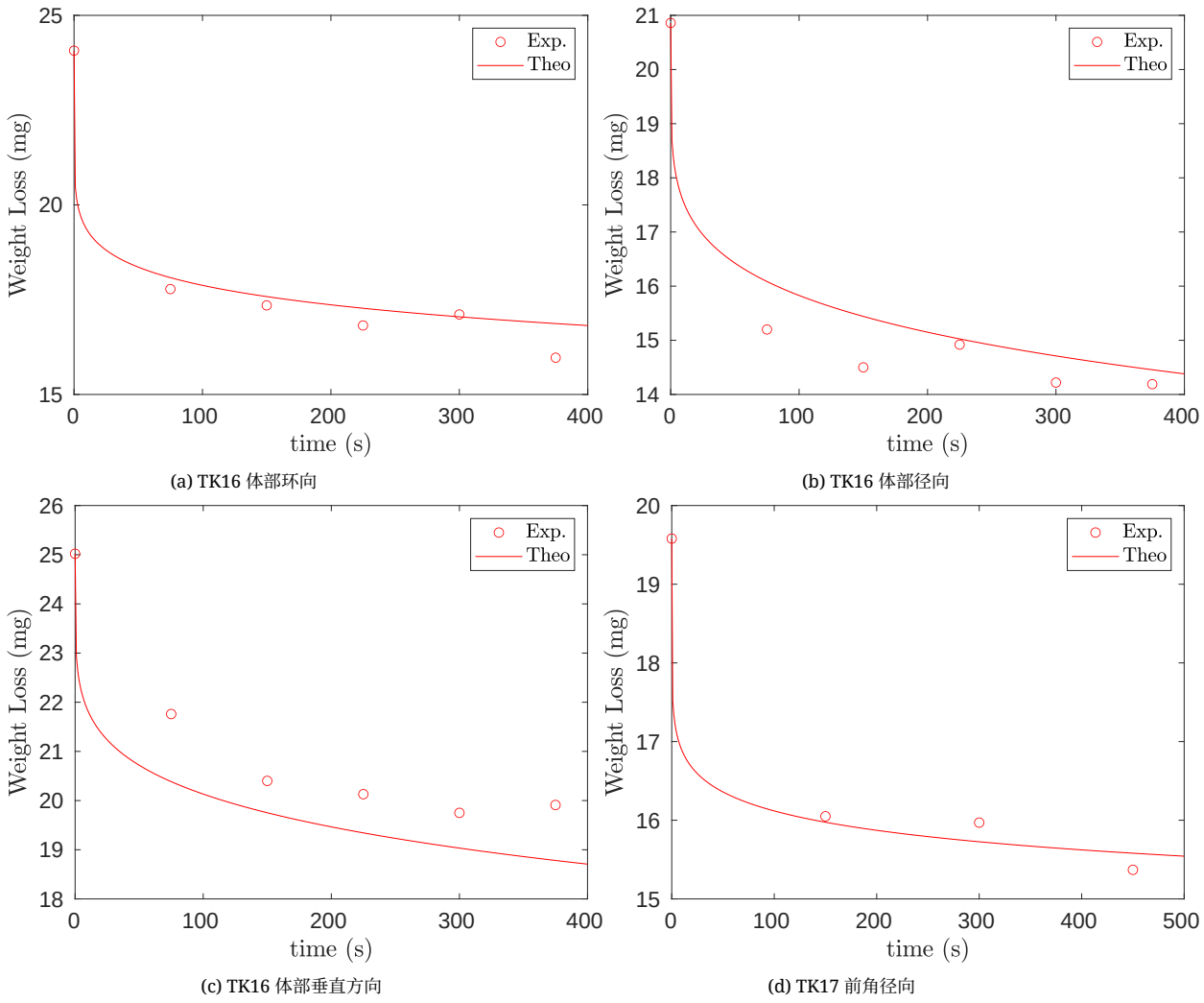
(b) TK11 体部径向

(c) TK11 体部垂直方向

(d) TK16 前角径向

图9：通过斜坡加载蠕变试验进行验证：(a) 取自TK11样品体部区域周向的样品，(b) 取自TK11样品体部区域径向的样品，(c) 取自TK11样品体部区域垂直方向的样品，(d)取自TK16样品前角区域径向的样品。

受限压缩蠕变试验中的失重。第2.1节提出的受限蠕变压缩问题中的失重，并与 Bulle等人开展的实验[5]进行比较。采用 37°C时水的重度（$w_s = 997\text{Kg/m}^3$）。流体从圆柱形样品底部流出，该样品的圆形横截面面积为 $\boldsymbol{A}$ ，直径为 $d = 3mm$。材料性质取自表2，这些性质是通过将分数阶孔弹性模型拟合到受限蠕变试验的位移数据而获得的。图10展示了部分样品的失重随时间的变化。对于若干样品，理论结果与实验结果相符，如图10所示。此外，对于某些样品，两者吻合较差，如图1所示。这可能是由于测量误差，因为测量是手动进行的。每经过75秒蠕变，就将样品取出并称重。



(a) TK16 体部环向

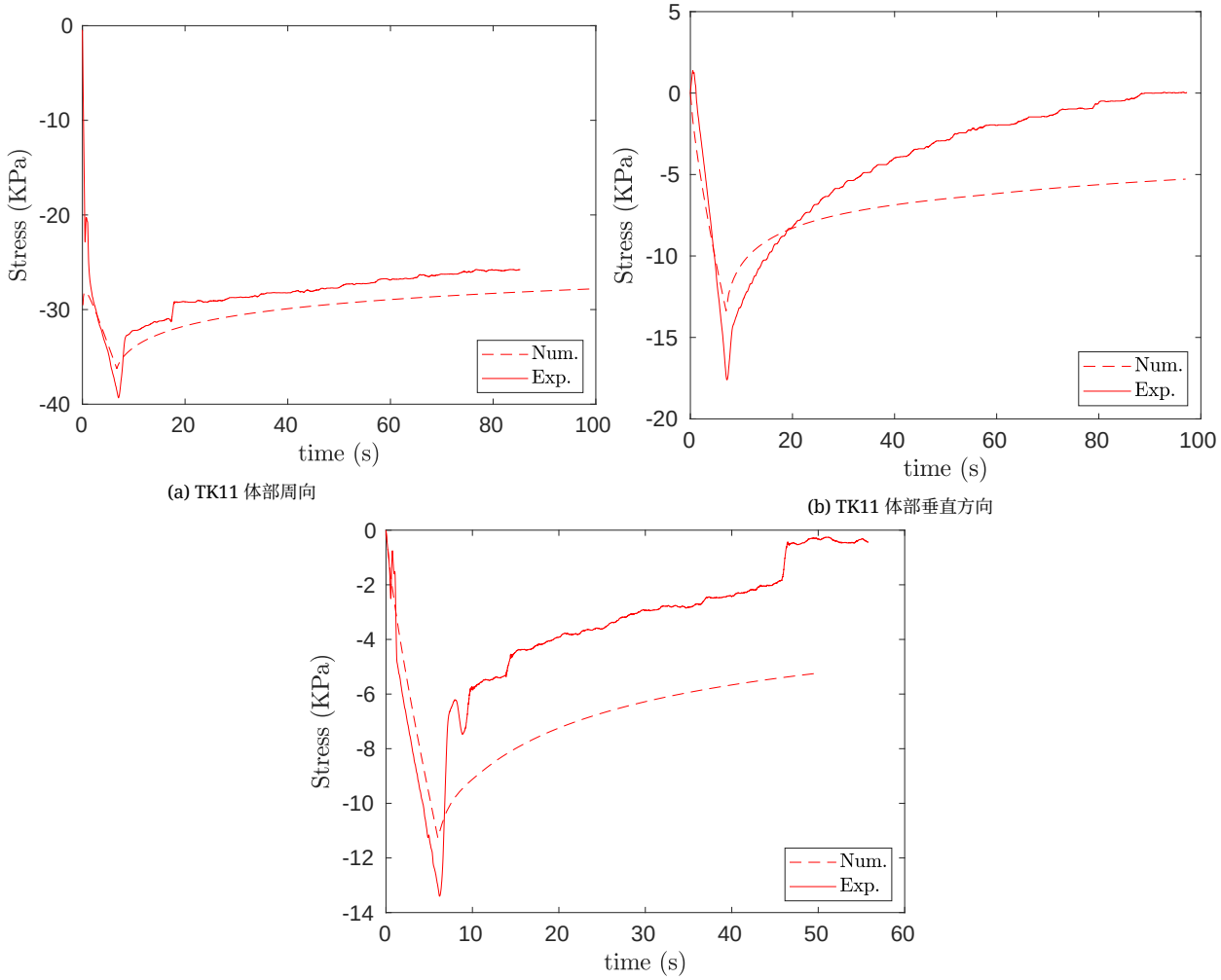
(b) TK16 体部径向

(c) TK16 体部垂直方向

(d) TK17 前角径向

图10：使用通过实验拟合得到的参数计算样品理论失重，并进行比较：(a) 取自TK16样品体部区域周向的样品，(b) 取自TK16样品体部区域径向的样品，(c) 取自TK16样品体部区域垂直方向的样品，(d) 取自TK17样品前角区域径向的样品。

受限压缩应力松弛。 分数阶孔弹性模型采用 Bulle等人 [5]进行的受限压缩应力松弛试验进行了验证。试验在高度为 h、侧面受限且流体可从底部自由流出的圆柱形样本上进行。试验包括以 0.3%h/s 的斜坡速度对样本施加 10%h压缩进行预处理。随后，以 0.3%h/s s 的斜坡速度进行了五个 2%h 压缩的松弛步骤。在所有情况下，均随时间测量所施加的力。该受限压缩应力松弛试验的有限元建模在 Abaqus 中进行，方法类似于第 3.2 节所述的蠕变试验。采用通过拟合蠕变数据获得的材料性质。在该试验中，位移作为输入，力作为输出进行测量。图11显示了有限元结果与实验结果的比较。模型与实验结果的吻合程度较好。



(a) TK11 体部周向

(b) TK11 体部垂直方向

(c) TK11 体部径向

图11：通过比较 Abaqus 得出的应力与实验中的应力松弛试验结果进行验证：(a) 从 TK11 样品的体部区域沿周向取样，(b) 从 TK11 样品的体部区域沿垂直方向取样，(c) 从 TK11样品的体部区域沿径向取样。

4. 讨论

我们表明，分数阶孔弹性模型更适合对具有层级排列多孔结构的软组织的时间相关行为进行建模。该模型已得到验证和确认。我们的参数拟合表明，分数阶孔弹性模型的均方根误差 $= 1.42\times10^{-5}$ 显著低于经典模型的均方根误差 $= 6.53\times10^{-5}$，见图4。理论位移曲线从 0 开始，而实验显示存在初始位移。这归因于初始时刻不排水条件的假设以及不可压缩材料的假设。我们得到的分数阶 β 介于 $\beta = 0.51$–0.73 范围内，如表3所示。通过数值研究可以推断，受限压缩过程中的传输现象受分数阶达西定律支配。在受限压缩试验开始时，固体完全饱和，因此孔隙压力达到最大值（见图3c）。这也符合太沙基固结理论，即流体压力完全承担载荷。在固结过程中，流体以取决于异常渗透率和分数阶导数阶数的速率流出样品（见图3）。

β 的值越高，扩散过程越快。随着流体流出样品，孔隙压力降低，固体开始变形（见图3d）。此外， β 的值越高，固体变形过程越快。我们注意到，表2中所述拟合得到的总模量 M 与文献 [19–22]中的数值处于同一量级。异常渗透率 λ_β 约为$10^{-12}/10^{-13}$。根据统计分析，可以得出结论：体部区域的半月板在弹性上呈各向同性，而孔隙压力扩散呈横观各向同性，其对称方向为垂直方向和径向。环向的水力渗透率较高，这可归因于体部区域的纤维沿环向排列，见图1b。为描述异常输运现象中的各向异性，提出如下各向异性分数阶达西定律:

$$\mathbf{J}_p = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{rad} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{cir} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{ver} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}_0D_t^{\beta_{rad}} & 0 & 0 \\ 0 & {}_0D_t^{\beta_{cir}} & 0 \\ 0 & 0 & {}_0D_t^{\beta_{ver}} \end{bmatrix}}_{{}_0\mathbf{D}_\mathbf{t}^\beta} [\nabla p] \tag{14}$$

其中， $\mathbf{\Lambda}$ 为渗透率张量，${}_0\mathbf{D}^\beta{}_\mathbf{t}$ 为分数阶导数算子。我们注意到，对于体部区域，异常渗透率张量 $\mathbf{\Lambda}$ 呈横观各向同性，且 λ_{cir} 明显高于 λ_{ver} 和 λ_{rad}。同样， β 张量也呈横观各向同性，且 β_{cir} 明显高于 β_{rad}和 β_{ver}。因此，从图7c可以看出，在固结实验中，沿周向流经样品底部的流体流速高于其他两个方向。由于周向渗透率较高，周向的孔隙压力比其他两个方向更快达到稳态，如图7a所示。根据前角区域的均值和标准差，我们认为径向的总模量高于另外两个方向，即垂直方向和环向。据推断，径向和垂直方向的渗透率及导数阶数高于周向。弹性张量结果呈横观各向同性，径向模量较高；而 $\mathbf{\Lambda}$ 和 β 均呈横观各向同性，且周向较低。不同方向上的性质差异表明，弹性、异常渗透率和

导数张量的阶数为横观各向同性。此外，性质随前角和体部区域而变化，表明其并非均质。

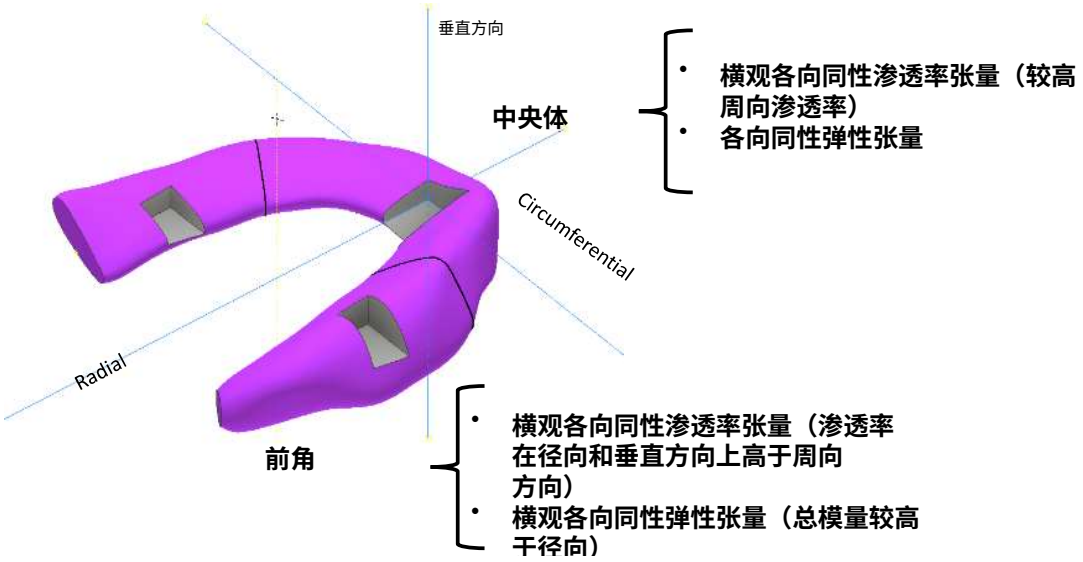


图12：半月板材料性质的方向性和区域依赖性。

总之（见图12），我们表明，具有承载功能的体部区域呈现出

横观各向同性行为，这是由于周向的流体流动速率约高出三倍（扩散更快），与胶原通道的优先取向一致。这解释了流体压力在维持载荷方面的作用。此外，我们还表明，前角中的弹性张量和渗透率张量均具有横观各向同性。径向的总模量高于周向和垂直方向的总模量。这解释了前角为何在周向和径向具有顺应性，以适应组织的运动学特性。

5. 结论

半月板具有多孔、层级化、多取向的纤维和纤维束结构，其中充满流体，可提供优化的载荷支撑和润滑性能。为了解其功能，我们对半月板组织的不同区域和不同取向进行了受限压缩蠕变试验。采用基于分数阶达西定律的Biot理论确定材料性质。结果表明，采用经典达西定律进行拟合时，均方根误差为6.53$\times10^{-5}$；采用分数阶达西定律时，均方根误差为1.42$\times10^{-5}$。研究表明，基于分数阶达西定律的Biot理论更适合用于模拟半月板的孔弹性行为。通过将该理论与所有样品的受限压缩蠕变实验结果进行拟合，获得了分数阶Biot理论所需的三个材料参数，即总模量（M）、分数阶（β）和渗透率（λ_β）。采用方差分析检验方法比较体部区域不同方向的材料性质。结果表明，总模量（M_{cir} = 75.4 ±48.9 KPa、 M_{rad} = 63.7±14.1 KPa和 M_{ver} =65.3±13.7 KPa）呈各向同性，而渗透率（$\lambda_{\beta_{\mathrm{cir}}}$ = 3.75$\times10^{-12}$± 2.36$\times10^{-12}$m^2/Pa.s$^{1-\beta}$、 $\lambda_{\beta_{\mathrm{rad}}}$ =1.25$\times10^{-12}$± 4.04$\times10^{-13}$m^2/Pa.s$^{1-\beta}$ 和 $\lambda_{\beta_{\mathrm{ver}}}$ = 8.61$\times10^{-13}$± 1.94$\times10^{-13}$m^2/Pa.s$^{1-\beta}$）及分数阶（$\beta_{\mathrm{cir}} = 0.73\pm0.00$、 $\beta_{\mathrm{rad}} = 0.64 \pm 0.06$ 和 $\beta_{\mathrm{ver}} = 0.58\pm$ 0.04）呈横观各向同性；周向的性质高于垂直方向和径向的性质。

采用 UMATHT 和 UMAT 子程序，在 Abaqus 软件中通过有限元法对 Biot理论与分数阶达西定律进行了数值实现。利用拟合受限蠕变试验所得的材料性质，对这一分数阶孔弹性理论进行验证，并将其用于模拟应力松弛、斜坡加载蠕变和失重试验。随后将结果与实验结果进行比较。比较结果表明，Biot理论与分数阶达西定律能够更好地表征半月板的孔弹性行为。采用当前模型，可以轻松、高效地计算难以通过实验测量的半月板流出通量。未来的研究将扩展 Biot理论与分数阶达西定律，使其纳入各向异性，并用于理解半月板在膝关节中的工作机制。

6. 致谢

O.B 谨此感谢欧盟地平线2020计划下的 EU.1.3.2 项目——通过跨境和跨部门流动培育卓越人才，并感谢玛丽·居里个人奖学金 MSCA-IF-2017、MetaBioMec（资助协议编号：796405）。作者感谢里佐利骨科研究所，特别感谢 G. Marchiori 和 M. Berni 对实验提出的宝贵见解。

参考文献

[1] G. Agustoni、F. P. Bonomo、S. P. A. Bordas、O. Barrera，高分辨率微型计算机断层扫描揭示了膝半月板体部区域的胶原通道网络，《生物医学工程年鉴》（2021）。[2] J. Maritz、G. Agustoni、K. Dragnevski、S. P. A. Bordas、O. Barrera，膝半月板体部区域的功能梯度弹性和黏弹性特性，《生物医学工程年鉴》（2021）。[3] F. P. Bonomo、J. J. Gregory、O. Barrera，一种切片并表征软性非均质不规则形状组织的方法，《今日材料：会议录》（2020）。[4] V. Vetri、K. Dragnevsk、M. Tkaczyk、M. Zingales、G. Marchiori、N. Lopomo、S. Zaffagnini、A. Bondi、J. Kennedy、D. Murray、O. Barrera，人类半月板微纳尺度结构的先进显微分析，《科学报告》（2019）。

[5] R. Bulle、G. Alotta、G. Marchiori、M. Berni、N. F. Lopomo、S. Zaffagnini、S. P. A. Bordas、O. Barrera，受限压缩条件下，人类半月板表现为功能梯度分数阶多孔介质，《应用科学》11（20）（2021）。[6] G. A. Ateshian、J. A. Weiss，有限变形下的各向异性水力渗透率，《生物力学工程杂志》132（11）（2010）。[7] H. Kurosawa、T. Fukubayashi、H. Nakajima，膝关节的承载模式：有无半月板时膝关节的物理行为，《临床骨科及相关研究》149（1980）283–290。[8] N. Shrive、J. O'Connor、J. Goodfellow，膝关节的承载，《临床骨科及相关研究》131（1978）279–287。[9] J. Waghorne、E. Elmukashfi、S. L. Giudice、V. Manuri、G. Pitarresi、O. Barrera，半月板组织的结构—功能关系：一种绘制软组织性能的数据驱动方法，拟投稿至《自然·材料》（2022）。[10] R. Readioff、R. Seil、C. Mouton、L. Marks、O. Barrera，用于研究关节内参数对膝关节接触力学影响的优化患者特异性有限元模型，拟投稿至《生物力学工程杂志》（2022）。[11] O. Barrera 等，自然水力阻尼器的特征：一种基于图像的方法，用于研究人类半月板组织内部的流体流动行为，拟投稿至《美国国家科学院院刊》（2022）。[12] E. Elmukashfi、G. Marchiori、M. Berni、G. Cassiolas、N. F. Lopomo、H. Rappel、M. Girolami、O. Barrera，软组织生物力学中的模型选择与敏感性分析：以人类膝半月板为例，《应用力学进展》，爱思唯尔，2022。[13] A. van Kampen，运动医学中的膝关节，《国际骨科》37（2）（2013）177–179。[14] A. J. S. Fox、A. Bedi、S. A. Rodeo，人类膝半月板基础科学：结构、组成与功能，《运动健康》4（4）（2012）340–351。[15] M. A. Soltz、G. A. Ateshian，受限压缩下不透水接触界面处软骨间质液压力升高的实验验证与理论预测，《生物力学杂志》31（1998）927–934。[16] M. A. Sweigart、C. F. Zhu、D. M. Burt、P. D. Deholl、C. M. Agrawal、T. O. Clanton、K.A.Athanasiou，内侧半月板压缩性能的种内与种间比较，《生物医学工程年鉴》32（11）（2004）1569–1579。[17] O. Barrera，多孔介质中耦合反常输运的统一建模与仿真及其有限元实现，《计算力学》68（2021）1267–1282。[18] A. M. Seitz、F. Galbusera、C. Krais、A. Ignatius、L. D¨urselen，受限压缩条件下人类半月板的应力松弛响应，《生物医学材料力学行为杂志》26（2013）68–80。[19] M. A. Sweigart、C. F. Zhu、D. M. Burt、P. D. Deholl、C. M. Agrawal、T. O. Clanton、K. A. Athanasiou，内侧半月板压缩性能的种内与种间比较，《生物医学工程年鉴》32（11）（2004）1569–1579。[20] J. T. Moyer、R. Priest、T. Buman、A. C. Abraham、T. L. H. Donahue，人类半月板深层区的压痕性能与糖胺聚糖含量，《生物材料学报》9（5）（2013）6624–6629。[21] A. M. Seitz、F. Galbusera、C. Krais、A. Ignatius、L. Durselen，受限压缩条件下人类半月板的应力松弛响应，《生物医学材料力学行为杂志》26（2013）68–80。[22] H. N. Chia、M. L. Hull，人类内侧半月板在平衡状态及生理应变率下轴向和径向的压缩模量，《骨科研究杂志》26（7）（2008）951–956。[23] I. Podlubny，《分数阶微分方程》，学术出版社，1999。

A.

利用方程（4a），可求解第2.1节所述问题的位移场，如下所示：

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{3}{3K+4G}\Big(-P_A + \alpha p\Big) \tag{15}$$

将方程（6）代入方程（15）并积分

$$u(z,t) = \frac{3P_A}{3K+4G}\left[-z + \gamma\alpha \sum_{n=1,3}^{\infty} E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right) b_n \sin\frac{n\pi z}{2h}\right] + d \tag{16}$$

其中， $b_n = \frac{8h}{(n\pi)^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ 。应用第2.2节给出的边界条件，可得：

$$u(h,t) = \frac{3P_A}{3K+4G}\left[-h + \gamma\alpha \sum_{n=1,3}^{\infty} E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right) \frac{8h}{(n\pi)^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{n\pi}{2}\right] + d = 0 \tag{17}$$

由于,

$$\Big(-1\Big)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi}{2}=1\qquad\text{for}\qquad n=1,3,\cdots \tag{18}$$

因此，常数 d 为

$$d=-\frac{3P_A}{3K+4G}\left[-h+\gamma\alpha\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{8h}{(n\pi)^2}\right] \tag{19}$$

将方程（19）代入方程（16），即可得到位移场方程

$$u(z,t)=\frac{3P_A}{3K+4G}\left[(h-z)+\gamma\alpha\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{8h}{(n\pi)^2}\left((-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi z}{2h}-1\right)\right] \tag{20}$$

B.

失重　　对于第2.1节所述问题，可通过下式求得样品随时间变化的失重 W(t)
流体通量为　：

$$W(t)=W_0-\int_0^t\mathbf{J}_p\cdot w_s\mathbf{A}dt \tag{21}$$

其中 $\mathbf{J}_P$ 为方程（2b）给出的流体通量，w_s 为比重，$\mathbf{A}$ 为计算通量所依据的横截面积，W_0 为样品的初始重量。对方程（6）关于 z求导，得:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-P_A\gamma\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1}\left[-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right]\frac{2}{h}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) \tag{22}$$

流体只能从底部流出，如图2a所示。因此，在 $z=h$ 处求解失重。$z=h$ 处的方程（22）为:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-P_A\gamma\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1}\left[-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right]\frac{2}{h} \tag{23}$$

将方程（23）和方程（2b）代入失重方程（21），可得:

$$W(t)=W_0-\lambda_\beta w_s A\,{}_0D_t^{\beta-1}\left[P_A\gamma\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,1}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{2}{h}\right] \tag{24}$$

利用 [23]，中分数阶导数的恒等式:

$${}_0D_t^{\alpha}t^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda t^{\mu})=t^{\beta-1-\alpha}E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda t^{\mu}) \tag{25}$$

可得方程（24）:

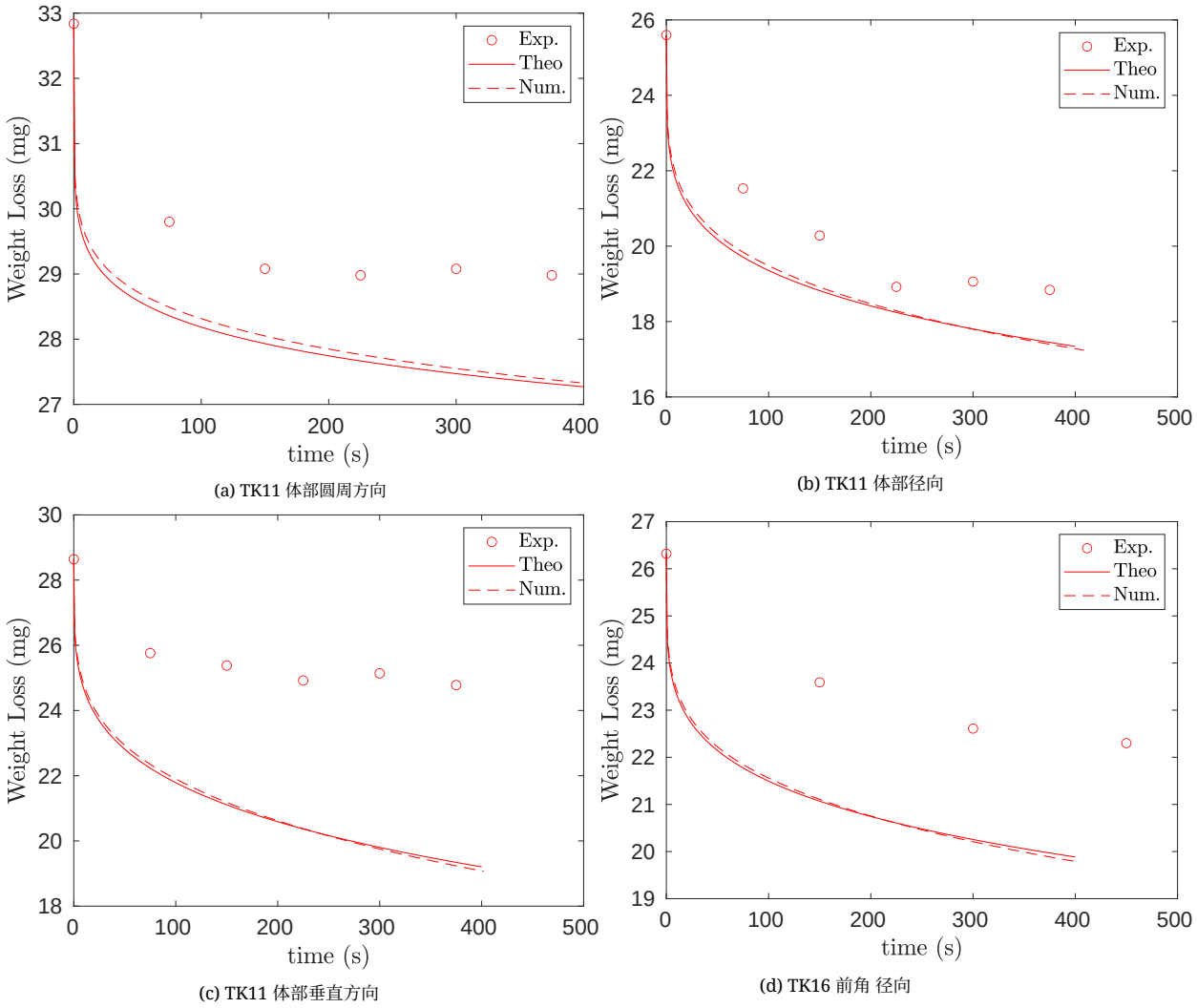
$$W(t)=W_0-\lambda_\beta w_s AP_A\gamma t^{1-\beta}\sum_{n=1,3}^{\infty}E_{1-\beta,2-\beta}\left(-\frac{n^2\pi^2\bar{\lambda}t^{1-\beta}}{4h^2}\right)\frac{2}{h} \tag{26}$$

C.

序号	样品	M $\times 10^5(Pa)$	$\lambda \times 10^{-13}(m^2/Pa.s)$	RMS $\times 10^{-5}$
1	TK11BC	3.56	6.95	6.53
2	TK11BR	2.13	3.91	7.40
3	TK11BV	2.30	4.44	8.10
4	TK16BC1	2.48	5.32	7.04
5	TK16BR2	2.55	2.45	5.53
6	TK16BV	2.50	3.00	6.37
7	TK16AC1	2.55	2.80	7.64
8	TK16AR1	2.64	2.42	7.16
9	TK16AV	2.69	1.79	5.83
10	TK16BC2	2.39	8.87	8.15
11	TK16BR1	2.31	2.68	7.12
12	TK16BV2	2.56	2.74	6.96
13	TK16PV	3.97	12.1	4.66
14	TK17BC	1.46	11.8	13.4
15	TK17BR	1.67	4.17	6.93
16	TK17BV	1.80	1.99	5.36
17	TK17AC	3.49	208	4.58
18	TK17AR	4.01	23.3	4.49
19	TK18BC	1.44	1.33e4	10.5
20	TK18BR	2.37	5.27	7.54
21	TK18BV	2.17	2.89	6.45
22	TK22BR	2.55	4.66e3	1.24
23	TK22AC	2.41	3.69	9.01
24	TK22AR	1.95	4.74	10.0
25	TK22AV	2.97	1.31	4.83
26	TK36BC	1.98	9.33	10.2
27	TK37BC	2.52	16.5	12.4
28	TK37BR	2.67	3.23	7.42
29	TK37BV	2.29	2.66	6.25

表1：使用经典比奥理论拟合得到的材料性质

D.



(a) TK11 体部圆周方向

(b) TK11 体部径向

(c) TK11 体部垂直方向

(d) TK16 前角 径向

图1：使用通过拟合实验数据获得的参数，比较样品的理论失重情况：(a) 从 TK11 样品体部区域周向取样，(b) 从 TK11 样品体部区域径向取样，(c) 从 TK11 样品体部区域垂直方向取样，(d) 从 TK16 样品前角区域径向取样，