C交换向量场的常见奇点 S

LEONARDO BILIOTTI 和 OLUWAGBENGA JOSHUA WINDARE

arXiv:2301.02036v3 [math.DG] 9 Jun 2023

Abstract. 我们研究 K¨ahler 流形 Z 上实子流形的交换向量场的奇点。

1. Introduction

设 (Z,ω) 是一个连通的 K¨ahler 流形，其上有复约化群 $U^{\mathbb{C}}$ 的全纯作用，其中 $U^{\mathbb{C}}$ 是紧致连通李群 U 的复化，其李代数为$\mathfrak{u}$。我们还假设 ω 是 U-不变的，并且存在一个 U-等变动量映射 $\mu\colon\ Z\to\mathfrak{u}^*$.根据定义，对于任意 $\xi\in\mathfrak{u}$ 和 $z\in Z$, $d\mu^{\xi}=i_{\xi_Z}\omega$，其中 $\mu^{\xi}(z):=\mu(z)(\xi)$，而 ξ_Z 表示由 U 的作用在 Z 上诱导的基本向量场，即，

$$\xi_Z(z):=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(t\xi)z$$

（例如， [14] 可了解有关动量映射的更多细节）。由于 U 是紧的，我们可以通过 $\mathfrak{u}$上的 Ad(U)-不变内积来识别$\mathfrak{u}\cong\mathfrak{u}^*$ 。因此，我们将动量映射视为取值于 $\mathfrak{u}$的映射，即 $\mu\colon\ Z\to\mathfrak{u}$。近年来，动量映射已推广到以下情形 [11, 12]。

我们称 $U^{\mathbb{C}}$ 的子群 G 是相容的，如果 G 是闭的，并且 Cartan 分解$U^{\mathbb{C}}=U\exp(i\mathfrak{u})$诱导出 G的 Cartan 分解。这意味着映射 $K\times\mathfrak{p}\to G$, $(k,\beta)\mapsto k\exp(\beta)$是一个微分同胚，其中 $K:=G\cap U$ 且 $\mathfrak{p}:=\mathfrak{g}\cap i\mathfrak{u}$； $\mathfrak{g}$ 是G. 的李代数。特别地， K 是 G 的极大紧子群，其李代数为 $\mathfrak{k}$，并且 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$。

包含映射 $i\mathfrak{p}\hookrightarrow\mathfrak{u}$ 通过限制诱导出一个 K-等变映射 $\mu_{i\mathfrak{p}}\colon\ Z\to(i\mathfrak{p})^*$ ，其由动量映射 μ 与限制映射 $\mathfrak{u}^*\to(i\mathfrak{p})^*$复合而成。取 $i\mathfrak{u}$ 上的一个 Ad(U)-不变内积，使得乘以 i 的映射是 $\mathfrak{u}$ 与 $i\mathfrak{u}$之间的等距映射，则 $\mu_{i\mathfrak{p}}$ 可视为 $i\mu(z)$到 $\mathfrak{p}$ 的正交投影，记为 $\mu_{\mathfrak{p}}\colon\ Z\to\mathfrak{p}$。令

2010 *Mathematics Subject Classification.* 53D20; 14L24.*Key words and phrases.* 动量映射，约化李群。第一作者部分获得 PRIN 2017“实与复流形：拓扑、几何与全纯动力系统”和 GNSAGA INdAM 的资助。第二作者获得了 INdAM 的 GNSAGA 资助。1

$\mu_{\mathfrak{p}}^{\beta}(z) := \langle \mu_{\mathfrak{p}}(z)\ \beta\rangle = \langle \mathbf{i}\mu(z)\ \beta\rangle = \langle \mu(z)\ -\mathbf{i}\beta\rangle = \mu^{-\mathrm{i}\beta}(z)$，对任意 $\beta \in \mathfrak{p}$ 和 $z \in Z$. 均成立。于是 $\operatorname{grad} \mu_{\mathfrak{p}}^{\beta} = \beta_Z$，其中 grad 是相对于 K¨ahler 结构所诱导的黎曼度量计算的。映射 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 称为与 μ相关联的梯度映射。在本文中，固定 Z 的一个 G-不变紧致连通局部闭实子流形 X，并将 $\mu_{\mathfrak{p}}$ 在 X 上的限制记为 $\mu_{\mathfrak{p}}$。于是 $\mu_{\mathfrak{p}} : X \to \mathfrak{p}$ 是一个 K-等变映射，满足 $\operatorname{grad}\mu_{\mathfrak{p}}^{\beta} = \beta_X$，其中梯度是相对于 X 上的诱导黎曼度量计算的，该度量记为 $(\cdot,\cdot)$。由线性化定理 [12, 15]， $\mu_{\mathfrak{p}}^{\beta}$ 是一个 Morse-Bott 函数 [3, 12]，且极限

$$\varphi_{\infty}^{\beta}(x) := \lim_{t\to+\infty} \exp(t\beta)x$$

存在且属于 $X^{\beta} := \{z \in X :\ \beta_X(z) = 0\}$ 对任意 $x \in X$。线性化定理[12, 15] 还证明， X^{β} 的任意连通分支都是嵌入子流形，参见例如 [3, 12]。

令 $c_1 > \cdots > c_k$ 为 $\mu_{\mathfrak{p}}^{\beta}$. 的临界值。令 $C_1, \ldots, C_k$ 为 X^{β} 的连通分支，且 $W_i := \{x \in X : \lim_{t\to+\infty} \exp(t\beta)x \in C_i\}$。于是 $\mu_{\mathfrak{p}}^{\beta}(C_i) = c_i$，再次应用线性化定理 [12, 15],，子流形 C_i 是 $(\mu_{\mathfrak{p}}^{\beta})^{-1}(c_i)$的一个连通分支。莫尔斯理论中最重要的定理之一证明， W_i 是一个嵌入子流形，称为临界子流形 C_i的不稳定流形，并且 $\varphi_{\infty}^{\beta} : W_i \to C_i$ 是光滑的[8]。

设 T 是 U 的环面。这意味着 T 是 U[1] 的一个连通紧阿贝尔子群。根据科苏尔定理, [10], 的连通分支 $Z^T := \{x \in Z : T \cdot x = x\}$ 是 Z 中嵌入的 K¨ähler 子流形。设 $\mathfrak{t}$ 是 T 的李代数。众所周知，集合

$$\left\{\beta \in \mathfrak{t} :\ \overline{\exp(\mathbb{R}\beta)} = T\right\},$$

包含一个稠密子集 [1]。因此,

$$Z^T = Z^{T^{\mathbb{C}}} = \{p \in Z :\ \beta_Z(p) = 0\}, \tag{1}$$

对于某个 $\beta \in \mathfrak{t}$。这意味着 Z^T 是向量场 β_Z 的奇点集。此外， Z^T 是由 μ^{β} 定义的梯度流 φ_{∞}^{β} 的像。

本文研究 $U^{\mathbb{C}}$ 对作用于 Z 实子流形上的阿贝尔相容子群的作用之不动点集。设 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ 是一个阿贝尔子代数，且 $A =$ 为 $\mathfrak{a}$ 的指数映射。那么， X 上的 A-梯度映射为 $\mu_{\mathfrak{a}} = \pi_{\mathfrak{a}} \circ \mu_{\mathfrak{p}}$, 其中 $\pi_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{a}$ 表示将 $\mathfrak{p}$ 正交投影到 $\mathfrak{a}$ 上。由于 A 是阿贝尔的，根据引理 2.2，对于任意 $p \in X$,

稳定子群 $A_p := \{a \in A\colon\ ap = p\} =$ 的指数映射($\mathfrak{a}_p$)，其中 $\mathfrak{a}_p$ 是 A_p 的李代数。因此 $X^A = \{p \in X\colon A \cdot p = p\} = \{p \in X\colon \beta_X(p) = 0, \forall \beta \in \mathfrak{a}\}$。于是，若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一组基，则 X^A 是交换向量场 $(\alpha_1)_X, \dots, (\alpha_n)_X$ 的公共奇点集。我们的第一个主要结果如下

定理 1.1。集合 $\left\{\beta \in \mathfrak{a}\colon\ X^\beta = X^A\right\}$ 在 $\mathfrak{a}$ 中稠密。

因此， X^A 是某个向量场 β_X 的奇点集合，其中 $\beta \in \mathfrak{a}$，因而也是 Morse-Bott 函数 $\mu_{\mathfrak{p}}^\beta$ 的临界点。

我们指出， X^A 包含了关于 A-梯度映射和 G-梯度映射几何的大量信息。事实上，对于任意 $x \in X$， $\mu_{\mathfrak{a}}(A \cdot x)$ 是 $\mu_{\mathfrak{a}}(x)$ 的开凸子集， $+\ \mathfrak{a}_x$ 且 $\mu_{\mathfrak{a}}(A \cdot x) = \mathrm{conv}(\mu_{\mathfrak{a}}(X^A \cap A \cdot x))$，见 [2, 5, 13],，其~~中 conv(~~) 表示 (·) 的凸包。~~特别~~地， $\mu_{\mathfrak{a}}(X^A)$ 是有限集，且 $\mathrm{conv}(\mu_{\mathfrak{a}}(X)) = \mathrm{conv}(\mu_{\mathfrak{a}}(X^A))$，因此是一个多胞体。此外，若 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ 是极大阿贝尔子代数，则 $\mathrm{conv}(\mu_{\mathfrak{p}}(X))$ 由 $K\mathrm{conv}(\mu_{\mathfrak{a}}(X))$ [4] 给出。

第二个主要结果证明了存在 $\beta \in \mathfrak{a}$，使得与 $\mu_{\mathfrak{p}}^\beta$ 的梯度流相关联的极限映射定义了一个从 X 到 X^A 上的映射。因此，对于某个 $\beta \in \mathfrak{a}$，集合 X^A 是 Morse-Bott 函数 $\mu_{\mathfrak{p}}^\beta$ 的梯度流的像。

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一组基。于是 $\varphi_\infty^{\alpha_n} \circ \cdots \circ \varphi_\infty^{\alpha_1}$ 定义了一个从流形 X 到 $X^{\alpha_1} \cap \cdots \cap X^{\alpha_n} = X^A$ 上的映射。

定理 1.2. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一组基。存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $0 < \epsilon_2, \dots, \epsilon_n < \delta$，都有 $\varphi_\infty^{\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon_n\alpha_n} = \varphi_\infty^{\alpha_n} \circ \cdots \circ \varphi_\infty^{\alpha_1}$.

2. Proof of the main results

设 $X \subset Z$ 是 G-不变的紧致连通实子流形，且其梯度映射为 $\mu_{\mathfrak{p}}\colon\ X \to \mathfrak{p}$. 。若 $x \in X$，则 $G_x = \{h \in G\colon\ g \cdot x = x\}$ 表示 G 在 x 处的稳定子群。若 G_x 作用于流形 S，则 $G \times^{G_x} S$ 表示伴随丛，其主丛为 $G \to G/G_x$，定义为 $G \times S$ 对 G_x 的作用 $h(g, s) = (gh^{-1}, hs)$ 所得的商空间。我们回顾切片定理；详情参见 [12] 。

定理 2.1. /切片定理 [12, 定理 3.1], [15]/ 若 $x \in X$ 且 $\mu_{\mathfrak{p}}(x) = 0$，则存在一个 G_x-不变分解 $T_xX = \mathfrak{g} \cdot x \oplus W$、开 G_x-不变子集 $S \subset W$、$\Omega \subset X$ 以及一个G-等变微分同胚 $\Psi\colon\ G \times^{G_x} S \to \Omega$，使得 $0 \in S, x \in \Omega$ 且 $\Psi([e, 0]) = x$。

推论 2.1.1. 若 $x \in X$ 且 $\mu_{\mathfrak{p}}(x) = \beta$，则存在一个 G^β-不变分解 $T_xX = \mathfrak{g}^\beta \cdot x \oplus W$、开 G^β-不变子集 $S \subset W$、$\Omega \subset X$ 以及一个 G^β-等变微分同胚 $\Psi : G^\beta \times^{G_x} S \to \Omega$，使得 $0 \in S, x \in \Omega$ 且 $\Psi([e, 0]) = x$。

这可通过将前述定理应用于 G^β 在 X 上的作用得到。事实上，众所周知，$G^\beta = K^\beta \exp(\mathfrak{p}^\beta)$ 与 [7] 相容，而 $\mathrm{i}\mu$ 到 $\mathfrak{p}^\beta$ 的正交投影就是 G^β-梯度映射 $\mu_{\mathfrak{p}^\beta}$。群 G^β 也与 $(U^{\mathbb{C}})^\beta = (U^{\mathbb{C}})^{\mathrm{i}\beta} = (U\mathrm{i}^\beta)^{\mathbb{C}}$ 的 Cartan 分解相容，并且 $\mathrm{i}\beta$ 在 $\mathfrak{u}^{\mathrm{i}\beta}$ 上的 $U\mathrm{i}^\beta$-作用下保持不变。这意味着 $\widehat{\mu_{\mathfrak{u}^{\mathrm{i}\beta}}} : Z \longrightarrow \mathfrak{u}^{\mathrm{i}\beta}$ 由 $\widehat{\mu_{\mathfrak{u}^{\mathrm{i}\beta}}}(z) = \pi_{\mathfrak{u}^{\mathrm{i}\beta}} \circ \mu + \mathrm{i}\beta$ 给出，其中 $\pi_{\mathfrak{u}^{\mathrm{i}\beta}}$ 是 $\mathfrak{u}$ 到 $\mathfrak{u}^{\mathrm{i}\beta}$ 的正交投影，它就是 $U\mathrm{i}^\beta$-平移动量映射。相应的 G^β-梯度映射为 $\widehat{\mu_{\mathfrak{p}^\beta}} := \mu_{\mathfrak{p}^\beta} - \beta$。因此，若 G 是交换的，则在 X 的每一点处，G 都满足切片定理，更多细节参见 [12, p.169] 和 [15]。

若 $\beta \in \mathfrak{p}$，则 β_X 是 X 上的一个向量场，即丛 TX 的一个截面。对于 $x \in X$，微分是一个映射 $T_xX \to T_{\beta_X(x)}(TX)$。若 $\beta_X(x) = 0$，则存在一个典范分裂 $T_{\beta_X(x)}(TX) = T_xX \oplus T_xX$。因此，将 β_X 视为丛 TX 的一个截面时，其微分可分解为水平部分和垂直部分。水平部分是恒等映射。我们将垂直部分记为 $\mathrm{d}\beta_X(x)$。线性映射 $\mathrm{d}\beta_X(x) \in \mathrm{End}(T_xX)$ 确实就是所谓的内在微分：在零点 x 处，将 β_X 视为切丛 TX 的一个截面时所得的内在微分。令 $\{\varphi_t = \exp(t\beta)\}$ 为 β_X 的流。在 TX 上存在相应的流。由于 $\varphi_t(x) = x$，TX 上的流保持 T_xX，且在该处由 $d\varphi_t(x) \in \mathrm{Gl}(T_xX)$ 给出。因此，我们在 T_xX 上得到一个线性$\mathbb{R}$作用，其无穷小生成元为 $d\beta_X(x)$。

推论 2.1.2. 若 $\beta \in \mathfrak{p}$ 和 $x \in X$ 是 $\mu_{\mathfrak{p}}^\beta$的临界点，则存在开不变邻域 $S \subset T_xX$ 和 $\Omega \subset X$，以及一个 $\mathbb{R}$-等变微分同胚 $\Psi : S \to \Omega$，使得$0 \in S, x \in \Omega$，$\Psi(0) = x$.（这里，$t \in \mathbb{R}$ 在 S 上作用为 $d\varphi_t(x)$，在 Ω 上作用为 φ_t。）

证明。由于 $\exp : \mathfrak{p} \longrightarrow G$ 是到其像上的微分同胚，子群 $H := \exp(\mathbb{R}\beta)$ 是闭的，因此相容。因此，只需将前一个推论应用于H在 X 上的作用，以及相应梯度映射在 x 处的取值。□

引理 2.2. 设 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ 是一个阿贝尔子代数，且 $A = \exp(\mathfrak{a})$。若 $x \in X$，则 A_x 相容，即 $A_x = \exp(\mathfrak{a}_x)$

证明。若 $a \in A_x$，则对于某个 $\beta \in \mathfrak{a}$，有 $a = \exp(\beta)$。令 $f(t) = \langle \mu_{\mathfrak{a}}(\exp(t\beta)x)\ \beta \rangle$。于是 $f(1) = \langle \mu_{\mathfrak{a}}(\exp(\beta)x)\ \beta \rangle = \langle \mu_{\mathfrak{a}}(ax)\ \beta \rangle = \langle \mu_{\mathfrak{a}}(x)\ \beta \rangle = f(0)$，且 $f'(t) = \| \beta_X(\exp(t\beta)x) \|^2 \geq 0$。这意味着 $\beta_X(x) = 0$，因此 $\beta \in \mathfrak{a}_x$，从而证明 $A_x = \exp(\mathfrak{a}_x)$。□

设 $\alpha,\beta\in\mathfrak{p}$ 满足 $[\alpha,\beta]=0$，并令 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{p}$ 中由 α 和 β 生成的向量空间。由上述引理可得 $X^A=X^\beta\cap X^\beta$，其中 $A=\exp(\mathfrak{a})$。

引理 2.3. 设 $\beta,\alpha\in\mathfrak{p}$ 满足 $[\beta,\alpha]=0.$，则存在 $\delta>0$，使得对于任意 $\epsilon\in(0,\delta)$ $X^{\beta+\epsilon\alpha}=X^\beta\cap X^\alpha.$

证明. 设 $\epsilon>0$，并令 $A=\exp(\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}=\operatorname{span}(\alpha,\beta)$。由于指数映射限制在 $\mathfrak{p}$ 上是微分同胚，因此 A 是 G 的闭相容子群。令 X^A 表示 A 的不动点集，即 $X^A=\{z\in X:\ A\cdot x=x\}$。由引理 2.2，$X^A=X^\beta\cap X^\alpha$。由推论 2.1.2，$X^\beta\cap X^\alpha$ 和 $X^{\alpha+\epsilon\beta}$ 都是满足 $X^\beta\cap X^\alpha\subseteq X^{\alpha+\epsilon\beta}$ 的紧子流形。由于 $X^{\alpha+\epsilon\beta}$ 是 A-不变的，因此存在 A-梯度映射 [12],，$X^{\alpha+\epsilon\beta}$ 的任一连通分支都包含 $X^\alpha\cap X^\beta$ 的一个连通分支。

令 $x\in X^\alpha\cap X^\beta$。令 C 为 x 的连通分支，并令 C' 为包含 C 的 $X^{\alpha+\epsilon\beta}$ 的连通分支。由于 x 在 A 的作用下保持不变，根据线性化定理（推论 2.1.2），存在 A-不变开子集 $\Omega\subset X$ 和 $S\subset T_xX$，以及一个 A-等变微分同胚 $\varphi:\ S\to\Omega$，使得 $0\in S$，$x\in\Omega$，$\varphi(0)=x$。因此，我们可以假设 $\Omega=\mathbb{R}^n$，α、β 是满足 $[\alpha,\beta]=0$ 的 n 阶对称矩阵。此外，$T_xX^{\alpha+\epsilon\beta}=\operatorname{Ker}(\alpha+\epsilon\beta)$ 且 $T_xX^\alpha\cap T_xX^\beta=\operatorname{Ker}\alpha\cap\operatorname{Ker}\beta$。

矩阵 α 和 β 可以同时对角化。令 $\{e_1,\dots,e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，使得对于 $i=1,\dots,n$，有 $\alpha e_i=a_ie_i$ 和 $\beta e_i=b_ie_i$。令 $J=\{1\le i\le n:\ a_ib_i\neq0\}$。取 $\delta=\min\{\frac{|a_i|}{|b_i|}:\ i\in J\}$。现在，$(\alpha+\epsilon\beta)e_i=0$ 当且仅当 $a_i+\epsilon b_i=0$。如果 $a_i\neq0$，那么 $b_i\neq0$，反之亦然。因此，对于任意 $\epsilon<\delta$，我们有 $(\alpha+\epsilon\beta)e_i=0$ 当且仅当 $a_i=b_i=0$。因此，$\operatorname{Ker}(\alpha+\epsilon\beta)=\operatorname{Ker}\alpha\cap\operatorname{Ker}\beta$。由于 $C\subset C'$ 和 $T_xC=T_xC'$，并且注意到 C 和 C' 都是紧的，可知 $C=C'$。由于 $X^{\alpha+\epsilon\beta}$ 有有限多个连通分支，故存在 $\delta>0$，使得对于任意 $0<\epsilon<\delta$，我们有

$$X^\alpha\cap X^\beta=X^{\alpha+\epsilon\beta},$$

至此完成证明。 □

Theo备注 2.4. 设 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ 为阿贝尔子代数，且令 $A=$指数映射$(\mathfrak{a})$。那么该集合

$$\left\{\alpha\in\mathfrak{a}:\ X^A=X^\alpha\right\}$$

是稠密的。

证明。设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个基。那么

$$X^A = X^{\alpha_1} \cap \cdots \cap X^{\alpha_n}.$$

根据上述引理，存在 $\delta > 0$，使得对于任意的 $\epsilon_2, \dots, \epsilon_n < \delta$，我们有

$$X^A = X^{\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon_n\alpha_n} \tag{2}$$

设 $\alpha \in \mathfrak{a}$ 不等于 0。众所周知，存在 $\alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathfrak{a}$，使得 $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$构成 $\mathfrak{a}$的一组基。由 (2) 可知，对于 α的任意邻域 U，存在 $\beta \in U$，使得 $X^A = X^\beta$，从而完成证明。□

下述引理的证明见 [6], ，另见 [9, 第 1036] 页。

引理 2.5. 设 $x \in X$ 和 $\beta, \alpha \in \mathfrak{p}$ 满足 $[\beta, \alpha] = 0$.。令 $y := \lim_{t\to\infty}$ 指数映射$(t\beta)x$ 和$z := \lim_{t\to\infty}$指数映射$(t\alpha)y$.。令 δ 如引理 2.3 中所述。则对于 $0 < \epsilon < \delta$,

$$\lim_{t\to\infty} \exp(t(\beta + \epsilon\alpha)) = z.$$

由上述引理可得以下结果。

定理 2.6. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一组基。设 $x \in X$。令 $x_1 := \lim_{t\to\infty} \exp(t\alpha_1)x$ 且 $x_i = \lim_{t\to\infty} \exp(t\alpha_i)x_{i-1}$，其中 $i = 2, \dots, n$。则存在 $\delta > 0$，使得对于 $0 < \epsilon_2, \dots, \epsilon_n < \delta$，有

$$\lim_{t\to\infty} \exp(t(\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon_n\alpha_n))x = x_n,$$

对于任意 $x \in X$。特别地，$\varphi_\infty^{\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon_n\alpha_n} = \varphi_\infty^{\alpha_n} \circ \cdots \circ \varphi_\infty^{\alpha_1}$.

证明。由定理 2.4，存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $0 < \epsilon_2, \dots, \epsilon_n < \delta$，有

$$X^A = X^{\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon\alpha_n}.$$

令 $A = \exp(\mathfrak{a})$。设 $z \in X^A$。由推论 2.1.2，存在 A-不变开子集 $\Omega \subset X$ 和 $S \subset T_zX$，以及一个 A-等变微分同胚 $\varphi : S \to \Omega$，使得 $0 \in S, z \in \Omega, \varphi(0) = z, d\varphi_0 = id_{T_zX}$.。令 $x \in X$。设 $x_1 := \lim_{t\to\infty} \exp(t\alpha_1)x$ 且 $x_i = \lim_{t\to\infty} \exp(t\alpha_i)x_{i-1}$，其中$i = 2, \dots, n$。若 $x_n \in \Omega$，我们可以选择 $\delta > 0$，使得对于任意 $0 < \epsilon_2, \dots, \epsilon_n < \delta$，有

$$\lim_{t\mapsto} \exp(t(\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon\alpha_n))x = x_n.$$

由 X^A 的紧致性，存在开子集 $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ satisfying the above property and such that

$$X^A \subseteq \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k.$$

设 $x \in X$。令 $x_1 := \lim_{t\to\infty} \exp(t\alpha_1)x$，并令 $x_i = \lim_{t\to\infty} \exp(t\alpha_i)x_{i-1}$，其中 $i = 2, \ldots, n$。若$x_n \in \Omega j$，对于某些 $j = 1, \ldots, k$，则存在 $\delta_j > 0$，使得对于任意 $0 < \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n < \delta_j$，我们有

$$\lim_{t\mapsto+\infty} \exp(t(\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon\alpha_n))x = x_n.$$

设 $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$。那么对于任意 $0 < \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n < \delta$，我们有

$$\lim_{t\mapsto+\infty} \exp(t(\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \cdots + \epsilon_n\alpha_n))x = x_n,$$

对于任意 $x \in X$，证明即告完成。 □

References

[1] Adams, J.F., *Lectures on Lie groups*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969 xii+182 页[2] Atiyah, M.F., *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc., 14 (1), (1982), 1–15.[3] Biliotti L., Ghigi A. and Heinzner P., *Polar orbitopes*, Comm. Ann. Geom. 21 (3), (2013), 1–28.[4] Biliotti, L., Ghigi, A., Heinzner, P., *Invariant Convex sets in Polar Representations*, Israel J. Math 213, (2016), 423–441. [5] Biliotti L., Ghigi, A., *Remarks on the Abelian Convexity Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (12), (2018), 5409–5419.[6] Biliotti L., Windare, O.J., *Stability, analytic stability for real reductive Lie groups*, J. Geom. Anal. 33, (2023)（31页）[7] Borel A., Ji, L., *Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces*. Mathematics: Theory & Applications. Birkh¨auser Boston Inc., Boston, MA., (2006).[8] Bott, R, *Non-degenerate critical manifolds*, Ann. of Math. 60, (1954) 248–261.[9] Bruasse, A., Teleman, A, *Harder-Narasimhan and optimal destabilizing vectors in complex geometry*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (3), (2005), 1017—1053.[10] Duistermaat, J.J., Kolk, J. A. C., *L*李群, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2000.[11] Heinzner, P., Schwarz, G. W., *Cartan decomposition of the moment map*, Math. Ann. 337, (2007), 197-232.[12] Heinzner, P., Schwarz, G. W., St¨otzel, H., *Stratifications with respect to actions of real reductive groups.*Compos. Math., 144(1), (2008), 163–185.[13] Heinzner, P., Sch¨utzdeller, P., 梯度映射的凸性性质。Adv. Math., 225(3), (2010), 1119– 1133.[14] Kirwan F., *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic Geometry*, Math.Notes 31, Princeton, (1984).[15] Sja maar, R. *Convexity properties of the momentum mapping re-examinated.* Adv. Math. 138 (1), (1998), 46-91.

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma (Italy)
Email address: leonardo.biliotti@unipr.it

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma (Italy)
Email address: oluwagbengajoshua.windare@unipr.it