arXiv:2301.02038v1 [math.DG] 5 Jan 2023

Vinogradov 的偏微分方程上同调几何

Fabrizio Pugliese、Giovanni Sparano 和 Luca Vitagliano

谨以此文纪念我们的老师和同事亚历山大·米哈伊洛维奇·维诺格拉多夫

摘要。次级微积分是对偏微分方程组解空间上的微分演算的一种形式化替代，这类方程组可以是非线性的。这一理论主要归功于亚历山大·M. 维诺格拉多夫及其合作者。偏微分方程的许多坐标无关性质在次级微积分中都有其自然的位置，包括：对称性与守恒律、变分原理及变分演算的坐标无关方面、递归算子与哈密顿结构等。这一语言的基本构件是微分簇的水平上同调，即偏微分方程的无限延拓，以及带局部系数的相应版本。次级微积分的核心范式是 A. M. Vinogradov 提出的原理，大意是：偏微分方程解空间上的微分演算，等同于在相关微分簇的水平德拉姆代数上进行的同伦意义下的演算。我们将回顾次级微积分的基础，包括其主要动机。在本文最后一部分，我们将尝试阐释同伦在该理论中的作用。

引言

代数方程组可以用代数簇以几何方式编码。这一看似无害的观察，是现代数学中一个十分成功的分支——代数几何——发展的起点。亚历山大·M·Vinogradov 数学工作背后的主要原则之一，是偏微分方程（PDE）也应以类似的方式处理。也就是说，设 $x = (x^1, \ldots, x^n)$ 是一些自变量，设 $u = (u^1, \ldots, u^m)$ 是一些因变量，并设

$$\mathscr{E}_0 : F_a(x, \ldots, u_I, \ldots) = 0, \tag{0.1}$$

$a = 1$、.....、r 是一个可能为非线性的偏微分方程组，其中多重指标 I 表示关于 x 的多个偏导数。将（0.1）的所有

2020 数学学科分类。主要分类 58A15、58A20；次要分类 17B56、55T25、58A12、70S05。关键词和短语。偏微分方程、喷射空间、水平上同调、$\mathscr{C}$-谱序列、次级微积分。

全导数加入其中，便得到一个新的但等价的、由无限多个偏微分方程组成的方程组

$$D_J F_a(x, \dots, u_I, \dots) = 0. \tag{0.2}$$

这里， D_J 表示关于 x的任意高阶全导数。现在，将$(x, \dots, u_I, \dots)$视为 ∞维流形 J^∞上的独立坐标。于是，(0.2)可以解释为定义了一个（通常为∞维）子流形 $\mathscr{E} \subseteq J^\infty$，即 $\mathscr{E}_0$的 ∞延拓。该子流形典范地带有一个对合分布 $\mathscr{C}$，称为嘉当分布，由全导数 $D_i|_{\mathscr{E}}$, $i = 1, \dots, n$张成。按照Vinogradov及其学派的术语，$(\mathscr{E}, \mathscr{C})$这一对称为微分簇[1] （名称取自微分方程和代数簇簇），包含了关于原系统 $\mathscr{E}_0$ 的大部分相关信息（例如，可参阅这一主题的大量专著 [**2, 11, 27**] ）。Vinogradov认为，微分簇$(\mathscr{E}, \mathscr{C})$应被视为 $\mathscr{E}_0$终极的几何画像。换言之，微分簇之于偏微分方程，犹如代数簇之于代数方程。然而，微分簇的几何远比代数簇的几何复杂。具体而言，代数方程组的解是代数簇上的点，不具备任何内部结构；而偏微分方程组的解 $\mathscr{E}_0$ 是微分簇$(\mathscr{E}, \mathscr{C})$上嘉当分布的积分子流形，因而确实具有内部结构。因此，偏微分方程的解空间具有叶状结构叶空间的某些特征（当$\dim \mathscr{E} < \infty$时，它就是叶状结构的叶空间），应被视为层，而非普通空间[**17, 1, 4**]。在试图建立偏微分方程的一般理论时，同调代数和同伦代数正是在此处发挥作用。Vinogradov的一项重要成果是，为偏微分方程解空间上的微分演算提供了一种上同调替代。Vinogradov曾将这种形式演算称为次级微积分，因为它与物理场论中的次级量子化 [**26, 2, 27**]有类比关系。次级微积分的主要构件是嘉当分布的叶向上同调，通常称为水平德拉姆上同调。偏微分方程的大多数坐标无关性质都可以用水平上同调来表达，例如对称性、守恒律、变分原理等。除此之外，水平上同调还可以解释为偏微分方程解空间上的光滑函数、向量场和微分形式。支持这种解释的水平上同调的一项主要特征，是它们具有恰当的代数结构（即我们对函数、向量场和微分形式所期待的结构）。总之，次级微积分是所有这些代数结构的集合。

按照 Vinogradov 的最终构想，这些引人入胜的构造应从同伦方面加以研究。更准确地说，Vinogradov 推测，真正重要的并非水平上同调，而是水平德拉姆代数的同伦类型，以及其上微分分次模的同伦范畴（甚至是导出范畴） [**27**, 第 5] 章。请注意，这一猜想（连同将偏微分方程的解空间解释为一个层）在某种程度上与将偏微分方程解释为导出零点轨迹，以及在欧拉-拉格朗日偏微分方程这一特殊情形下将其解释为导出临界轨迹（参见例如 [**23**], 及其中的参考文献）的观点互为补充，并且暗示了它与同伦与导出几何之间存在某种联系 [**20, 21, 19**] ，遗憾的是，据我们所知，这种联系尚未得到研究。

[1]据我们所知，术语 微分簇 首次出现在 [**24**]中。

据我们所知，尚未对此进行研究。在现阶段，我们只能推测，最终应将偏微分方程的解空间视为一个高阶导出栈 [18]。

本文将聚焦于理论，而非应用或对相关上同调的显式计算。我们将省略证明，相关证明可见所引参考文献。本文分为三节：第 1 节（偏微分方程的几何）将说明如何将偏微分方程组编码为一个几何对象：微分簇。我们还将讨论微分簇所具有的主要几何结构，即其嘉当分布。本节主要参考文献为 [2, 11, 10]。第 2 节（偏微分方程的同调）将说明，微分簇（因而也包括偏微分方程）具有一种自然的上同调，即水平上同调。这是本文的核心部分，将在此讨论 Vinogradov 次级演算。水平上同调是叶状流形叶向上同调的推广，并包含偏微分方程的重要坐标无关信息。我们将阐释主要的水平上同调。水平上同调也可视为偏微分方程解空间上的微分演算的构建模块，我们称之为次级微积分。支持后一种解释的主要依据之一是，水平上同调配备了适用于光滑函数、向量场、微分形式等的恰当的 代数结构。本节主要参考文献为 [2, 11, 27], , 另见 [25, 28]。第 3 节（偏微分方程的同伦）将介绍最新进展。本节极为简明地回顾了第三作者的论文 [29, 30] 。我们将说明，水平上同调上的主要代数结构都源自水平上链上恰当的同伦意义下的结构 。这支持了 Vinogradov 的观点：发展次级微积分的恰当范畴是水平德拉姆代数上的微分分次模导出范畴（的某个子范畴）。

目录

引言 1 1. 偏微分方程的几何 4 1.1. 喷射空间 4 1.2. 嘉当分布 6 1.3. 微分簇 8 2. 偏微分方程的上同调 10 2.1. 水平上同调 10 2.2. 水平上同调的诠释 12 2.3. 水平上同调上的代数结构 15 3. 偏微分方程的同伦 18 3.1. 同伦代数 18 3.2. 次级向量场的 LR_∞-代数 20 3.3. 次级微分算子的 A_∞-代数 22 参考文献 25

1. 偏微分方程的几何

本节将说明，通常是非线性的偏微分方程组可以编码为一个几何对象：微分簇。我们将在一个相当一般的框架中讨论定义在流形P中的固定维数 n 子流形 N 上的偏微分方程（见 [10]）；这与大多数文献形成对照，后者只考虑定义在纤维化（或纤维丛）的截面上的偏微分方程。

1.1. 喷射空间。设 n、m 为非负整数，并设 P 是一个维数为 $n+m$ 的流形。我们先给出 n 维子流形 $N \subseteq P$ 的导数的内蕴定义。下文中，n 应解释为自变量的个数，m 应解释为因变量的个数，而 P 是同时参数化自变量和因变量的空间。换言之，在这一理论中，因变量和自变量可以混合并互换。对于每个点 $p \in N$，在 P 上都有坐标 (x^i, u^α)，以及 $i = 1、\ldots\ldots、n$、$\alpha = 1、\ldots\ldots、m$，这些坐标适配于 N，其含义是，在这些坐标下，N 看起来像一个映射的图像：

$$N : u^\alpha = f^\alpha(x). \tag{1.1}$$

我们需要对 f 相对于 x 求多重偏导数。下面采用如下记号。设 h 为非负整数，设 $I = i_1 \cdots i_h$ 为一个多重指标，即一个（可能为空的）由 h 个字母 $i_\ell \in \{1, \ldots, n\}$、$\ell = 1、\ldots\ldots、h$ 组成的词。若两个词仅相差字母的置换，我们就将它们视为相同。两个词也可以通过拼接来组合。记 $|I| := h$，并称其为多重指标 I 的长度。最后记作

$$\frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial x^I} := \frac{\partial^h f^\alpha}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_h}}.$$

˜ ˜如果存在另一个经过 p 的 n 维子流形 N，即 $p \in N \cap N$，那么在 p 附近，P 上存在一组坐标 (x^i, u^α)，同时适配于 N 和 $\tilde{N}$：

$$N : u^\alpha = f^\alpha(x), \quad \text{and} \quad \tilde{N} : u^\alpha = \tilde{f}^\alpha(x).$$

˜在这种情况下，我们称 N 与 N 在 p 处相切至 阶，$1, \ldots, \infty$，如果

$$\frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial x^I}(p) = \frac{\partial^{|I|} \tilde{f}^\alpha}{\partial x^I}(p), \quad \text{for all multiindexes } I \text{ with } |I| \le k,$$

并记为 $N \sim_p^k \tilde{N}$。在 p 处相切至 k 阶，是经过 p 的子流形上的一个良定义等价关系。特别地，它与适配坐标的选取无关。N 的等价类记作 N_p^k，称为 N 在 处的 -射流。换言之，p 处的 k-射流编码了 p 处 n 维子流形的 k 阶以内的偏导数。相切等价类空间记作 $J_p^k(P, n)$。最后定义

$$J^k(P, n) = \coprod_{p \in P} J_p^k(P, n).$$

我们将 $J^k(P, n)$ 称为 k 阶喷射空间，它由 n 维子流形构成 P。显然，$J^0(P, n)$ 自然地与 P 相对应，而 $J^1(P, n)$ 则与切丛 TP 的纤维中的 n-格拉斯曼流形丛相对应。更准确地说，N 在 p 处的 0-喷射与 p 本身相对应，而 N 在 p 处的 1-喷射与切空间 T_pN 相对应。对于一般的 k，空间 $J^k(P, n)$ 可按如下方式赋予坐标。选取 P 上的坐标 (x^i, u^α)，并令 $U \subseteq J^k(P, n)$ 为由满足 (P, n) 是适配坐标的子流形的 J^k-喷射所构成的子集

。我们在 U 上定义坐标 (x^i, u^α_I)，令

$$x^i\big(N^k_p\big) := x^i(p), \quad \text{and} \quad u^\alpha_I\big(N^k_p\big) = \frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial x^I}(p),$$

对所有由 (1.1) 局部给出的 N、$i = 1$、.....、n、$\alpha = 1$、.....、m 和 $|I| \leq k$。(x^i, u^α) 称为喷射坐标，它们覆盖 $J^k(P, n)$，并且对于 $k < \infty$，它们赋予 $J^k(P, n)$ 光滑流形的结构。对所有 $h \leq k \leq \infty$，它们是投影

$$J^k(P, n) \to J^h(P, n), \quad N^k_p \mapsto N^h_p,$$

根据博雷尔引理，$J^\infty(P, n)$ 可与由满射浸没构成的塔的逆极限等同

$$J^0(P, n) \longleftarrow \cdots \longleftarrow J^{k-1}(P, n) \longleftarrow J^k(P, n) \longleftarrow \cdots .$$

这赋予 ∞-喷射空间原有限维流形的结构（例如参见 [2, 27], , 另见 [3]）。

备注 1.1。对于更熟悉截面喷射的读者，我们指出，当 P 纤维化于某个 n 维流形 M 之上时，对所有 $k \leq \infty$，截面 P 在 M 上的 k-喷射空间 $J^k(P, M)$，可视为 $J^k(P, n)$ 的开稠密子流形，其中包含的是与投影 $P \to M$ 横截的 n 维子流形的喷射。开嵌入 $J^k(P, M) \hookrightarrow J^k(P, n)$ 将截面 s （可能是局部截面）在 $x \in M$ 处的 k-喷射映射为其像在 $s(x)$ 处的 k-喷射。

$J^\infty(P, n)$上的微分演算可以用代数方式定义。例如，我们将 $J^\infty(P, n)$上的光滑函数 $C^\infty(J^\infty(P, n))$定义为代数滤过的直极限

$$C^\infty\big(J^0(P, n)\big) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow C^\infty\big(J^{k-1}(P, n)\big) \hookrightarrow C^\infty\big(J^k(P, n)\big) \hookrightarrow \cdots . \tag{1.2}$$

换言之，$J^\infty(P, n)$上的光滑函数是关于自变量 x^i、因变量 u^α及其截至某个有限阶 k的导数的光滑函数，但 k 可以任意高（有时也将它们定义为仅在局部具有这种形式的函数）。$J^\infty(P, n)$上的向量场、微分形式等，均以与滤子（1.2）相容的方式定义。我们不拘泥于这些技术细节，详情请参阅 [2] 。

备注 1.2。我们强调，在这个 ∞维的背景下，有限维微分几何中的一些重要结果可能会失效。举几个例子：反函数定理、向量场的流的存在性与唯一性、弗罗贝尼乌斯定理等。

任意的 n 维子流形 $N \subseteq P$ 都定义了一个新的 n 维子流形

$$N^k := \big\{N^k_p : p \in N\big\}$$

在 $J^k(P, n)$ 中，称为 k 阶延拓 N。如果 N 在坐标中局部呈现为 (1.1)，那么 N^k 局部呈现为

$$N^k : u^\alpha_I = \frac{\partial^{|I|} f^\alpha}{\partial x^I}(x), \quad |I| \leq k,$$

在喷射坐标中。

注 1.3. 设 $N \subseteq P$ 是一个 n 维子流形。对于所有 $k \leq \infty$，映射

$$j^k : N \to N^k, \quad p \mapsto N_p^k$$

是一个微分同胚。特别地，对于所有 k， N 嵌入到 $J^k(P,n)$ 中。当 P 是纤维化在某个 n 维流形 M 上，且 $s\colon M \to P$ 是 P 在 N 上的一个（可能是局部）截面时，那么通常的 s 的 k-喷射延拓 $j^k s$ 可以表示为以下复合

$$j^k s : M \xrightarrow{s} \operatorname{im} s \xrightarrow{j^k} (\operatorname{im} s)^k \hookrightarrow J^k(P,M).$$

注 1.4. 设 r 是一个非负整数， $Q \subseteq P$ 是一个 $(n+r)$ 维子流形。那么，对于所有 $k \geq 0$， k-喷射空间 $J^k(Q,n)$ 以显然自然的方式构成 k-喷射空间 $J^k(P,n)$ 的一个子流形。

1.2. 嘉当分布。喷射空间上的主要几何结构是嘉当分布。定义它有几种等价的方式。我们在此介绍的定义方式，也有助于在下一小节定义偏微分方程的延拓。首先注意到，纤维化 $J^1(P,n) \to J^0(P,n) \cong P$ 的一个截面可以解释为 P 上的一个 n 维分布。现在，对于每个 $1 \leq k \leq \infty$， k-喷射空间都典范地配备了一个沿投影的分布 $J^k(P,n) \to J^{k-1}(P,n)$，即一个光滑映射

$$\mathscr{C} : J^k(P,n) \longrightarrow J^1\big(J^{k-1}(P,n),n\big)$$

使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} & & J^1\big(J^{k-1}(P,n),n\big) \\ & \overset{\mathscr{C}}{\nearrow} & \big\downarrow \\ J^k(P,n) & \longrightarrow & J^{k-1}(P,n) \end{array} .$$

嘉当分布 $\mathscr{C}$定义如下。对于 $z = N_p^k \in J^k(P,n)$，记其投影为$\bar{z} = N_p^{k-1} \in J^{k-1}(P,n)$。现在令

$$\mathscr{C}_z := \big(N^{k-1}\big)^1_{\bar{z}} = T_{\bar{z}}\big(N^{k-1}\big) \in J^1\big(J^{k-1}(P,n),n\big).$$

换言之， $\mathscr{C}_z$ 是 $\bar{z}$ 处的 $(k-1)$-喷射延拓的 1-喷射。在局部坐标中

$$\mathscr{C}^*(u^\alpha_{I,j}) = u^\alpha_{Ij}, \quad |I| \leq k-1, \quad j = 1,\dots,n, \tag{1.3}$$

其中，在左边，我们用 $(x^i,u^\alpha_{I,j})$ 表示 1-喷射空间 $J^1\big(J^{k-1}(P,n)\ n\big)$ 上的喷射坐标（对应于 $J^{k-1}(P,n)$上的坐标 (x^i,u^α_I)）；而在右边，我们使用多重指标的串接。

备注 1.5。嘉当分布 $\mathscr{C}$: $J^k(P,n) \longrightarrow J^1\big(J^{k-1}(P,n)\ n\big)$ 是一个嵌入，我们常用它将 k-喷射空间 $J^k(P,n)$解释为喷射空间 $J^1\big(J^{k-1}(P,n)\ n\big)$中的子流形。更一般地，对于任意两个非负整数$h,k$，存在一个嵌入

$$J^{h+k}(P,n) \hookrightarrow J^h\big(J^k(P,n),n\big)$$

由.....给出

$$N_p^{h+k} \mapsto (N^k)^h_{\overline{p}}, \quad \overline{p} = N_p^k.$$

在下一小节中，我们将利用这个嵌入，把 $J^{h+k}(P,n)$ 解释为 $J^h\big(J^k(P,n)\ n\big)$ 中的一个子流形。

对于 $k=\infty$，嘉当分布是定义在 $J^\infty(P,n)$ 上的一个真正的秩为 n 的分布，而 (1.3) 表明它在局部由全导数张成，即由以下向量场张成

$$D_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|I|<\infty} u^\alpha_{Ii}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_I}, \quad i=1,\dots,n.$$

对偶地，湮灭子 $\mathscr{C}^0 \subseteq T^*J^\infty(P,n)$ 由嘉当形式张成

$$du^\alpha_I - u^\alpha_{Ii}dx^i, \quad \alpha=1,\dots,m, \quad |I|\le\infty.$$

本文此处及下文均采用爱因斯坦求和约定，对小写与大写指标配对求和。对于多重指标，我们不采用爱因斯坦求和约定。

命题 1.6。 $J^\infty(P,n)$ 上的嘉当分布是对合的，即 $\mathscr{C}$ 的两个截面的交换子也属于 $\mathscr{C}$。此外，它还能以如下意义刻画 ∞-喷射延拓：子流形 $S\subseteq J^\infty(P,n)$ 在局部具有 $S=N^\infty$ 的形式，其中 n 是一个 $N\subseteq P$ 维子流形，当且仅当它是 $\mathscr{C}$ 的一个 n 维积分子流形。

因此，从直观上说，∞-喷射延拓构造 $N\mapsto N^\infty$ 将 P 的 n维子流形与 $\mathscr{C}$的 n维积分子流形对应起来。在下文中，嘉当分布 始终指 $J^\infty(P,n)$上的嘉当分布（另有说明的情况除外）。

鉴于它们在下一节中的重要性，我们现在讨论嘉当分布的无穷小对称 $\mathscr{C}$，即 $J^\infty(P,n)$上的向量场 Y，满足$[Y,\Gamma(\mathscr{C})]\subseteq\Gamma(\mathscr{C})$。记 $\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}$为 $\mathscr{C}$的无穷小对称李代数，并注意到，根据可积性， $\Gamma(\mathscr{C})\subseteq\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}$ 是一个理想。我们要证明，商李代数 $\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}/\Gamma(\mathscr{C})$与适当的向量丛 $V\to J^\infty(P,n)$的截面相对应。我们先定义 V。设 $z=N^\infty_p\in J^\infty(P,n)$。那么，$V$在 z 上方的纤维是 m维向量空间

$$V_z := T_pP/T_pN.$$

下文中，我们用 $\pi\colon J^\infty(P,n)\to P$表示该投影。现在，令 $Y\in\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}$。我们定义 V 的一个截面 $\overline{Y}$如下。对于 $z=N^\infty_p\in J^\infty(P,n)$，令

$$\overline{Y}_z := d\pi(Y_z)\bmod T_pN \in T_pP/T_pN = V_z.$$

命题 1.7。 映射 $Y\mapsto\overline{Y}$ 定义了一个 $\mathbb{R}$-线性满射$\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}\to\Gamma(V)$，其核为 $\Gamma(\mathscr{C})$。因此，存在一个规范的向量空间短正合列

$$0\longrightarrow\Gamma(\mathscr{C})\longrightarrow\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}\longrightarrow\Gamma(V)\longrightarrow 0.$$

特别地， $\Gamma(V)$ 从 $\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}$ 继承了一个李括号。

$\Gamma(V)$ 上的李括号有时称为高阶雅可比括号，记作 $\{-,-\}$。我们通过在局部坐标中描述它来结束本节。首先注意到， $\Gamma(V)$ 在局部由如下定义的截面 v_α 张成。对于 $z=N^\infty_p\in J^\infty(P,n)$，令

$$v_\alpha|_z := \frac{\partial}{\partial u^\alpha}|_p \bmod T_pN \in T_pP/T_pN = V_z.$$

同构 $\Gamma(V) \cong \mathfrak{X}_{\mathscr{C}}/\Gamma(\mathscr{C})$ 现在在局部由下式给出

$$\chi \mapsto \mathfrak{I}_\chi \bmod \Gamma(\mathscr{C})$$

其中，对于 $\chi = \chi^\alpha v_\alpha \in \Gamma(V)$，我们用 $\mathfrak{I}\chi$ 表示局部无穷小对称，其在局部由 $\mathscr{C}$ 给出：

$$\mathfrak{I}_\chi = \sum_{|I|<\infty} D_I \chi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha_I}, \tag{1.4}$$

并且，对于任意多重指标 $i_1 \cdots i_h$，

$$D_{i_1 \cdots i_h} := D_{i_1} \circ \cdots \circ D_{i_h}.$$

对于不熟悉西里尔字母的读者，我们说明一下，式 (1.4) 中出现的手写字母 $\mathfrak{I}$ 读作 [e], , 发音类似于单词 set。

形如 $\mathfrak{I}\chi$ 的向量场有时称为**演化向量场**。注意，演化向量场只在子流形的 ∞-射流上局部定义（而式 (1.4) 在纤维化的截面 ∞-射流上可赋予坐标无关的含义，参见例如 [**2**, 第 4 章第 2 节。4] 或 [**11**, 第 3 节。9] ）。由式 (1.4) 易知，若 χ 和 ψ 是 V 的截面，局部由 $\chi = \chi^\alpha v_\alpha$ 和 $\psi = \psi^\beta v_\beta$ 给出，则它们的高阶雅可比括号 $\{\chi, \psi\}$ 是局部由下式给出的截面：

$$\{\chi, \psi\} = \left(\mathfrak{I}_\chi \psi^\alpha - \mathfrak{I}_\psi \chi^\alpha\right) v_\alpha = \sum_{|I|<\infty} \left(D_I \chi^\beta \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^\beta_I} - D_I \psi^\beta \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial u^\beta_I} \right) v_\alpha.$$

1.3. 微分理想。现在我们用射流来定义偏微分方程，并介绍其几何图景：微分理想。设 P 是一个维数为 $n+m$ 的流形。

定义 1.8. 在 P 的 n 维子流形上施加的 **阶方程组**，或简称为**偏微分方程**，是 k-射空间中的一个闭子流形 $\mathscr{E}_0 \subseteq J^k(P,n)$。偏微分方程 $\mathscr{E}_0 \subseteq J^k(P,n)$ 的**解**是一个 n 维子流形 $N \subseteq P$，满足 $N^k \subseteq \mathscr{E}_0$。

注 1.9. 作为偏微分方程 $\mathscr{E}_0 \subseteq J^k(P,n)$ 的最低正则性条件，我们始终假设 $\dim \mathscr{E}_0 \geq n$，以免解的存在性先验地因平凡的维数原因而被排除。

对于偏微分方程 $\mathscr{E}_0 \subseteq J^k(P,n)$，在局部的喷射坐标中，我们有

$$\mathscr{E}_0 : F_a(x, \ldots, u_I, \ldots) = 0, \quad |I| \leq k, \tag{1.5}$$

对于某些局部光滑函数 $F_a \in C^\infty(J^k(P,n))$。若 $N \subseteq P$ 是一个局部由下式给出的 n 维子流形

$$N : u^\alpha = f^\alpha(x),$$

那么 N 是 $\mathscr{E}_0$ 的解，当且仅当

$$F_a\left(x, \ldots, \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}, \ldots\right) = 0.$$

这启发了定义 1.8。

在代数几何中，给定一个代数方程组，自然会考虑它们的所有代数推论。换句话说，给定一个多项式子集，自然会考虑由它们生成的理想。类似地，给定偏微分方程 (1.5)，自然会考虑它的所有全导数（除了光滑推论之外）；这可以通过一种称为**延拓**的构造，以无坐标方式实现，下面将对此进行介绍。设 $\mathscr{E}_0 \subseteq J^k(P, n)$ 是一个偏微分方程，且 $q = 0, 1, \ldots, \infty$。

定义 1.10。 q-延拓 的 $\mathscr{E}_0$ 是 $(k+q)$-喷射空间中的子集 $\mathscr{E}_q \subseteq J^{k+q}(P,n)$，其定义如下:

$$\mathscr{E}_q := J^q(\mathscr{E}_0, n) \cap J^{k+q}(P,n). \tag{1.6}$$

∞-延拓通常简记为 $\mathscr{E}$。

定义 1.10 需要稍作解释。由于 $\mathscr{E}_0$ 是 $J^k(P,n)$ 中的一个子流形，根据注 1.4，其喷射空间 $J^q(\mathscr{E}_0,n)$ 是喷射空间 $J^q(J^k(P,n)\ n)$ 中的一个子流形。通过注 1.5 中的嵌入，喷射空间 $J^{k+q}(P,n)$ 也可以视为 $J^q(J^k(P,n)\ n)$ 中的一个子流形。这解释了式 (1.6) 中的交集。我们强调，我们始终将延拓 $\mathscr{E}_q$ 视为 $J^{k+q}(P,n)$ 的子集。若 $\mathscr{E}_0$ 在局部由式 (1.5) 给出，则其 q-延拓在局部由下式给出

$$\mathscr{E}_q : D_J F_a(x, \ldots, u_I, \ldots) = 0, \quad |J| \le q.$$

这表明，如所期望的， $\mathscr{E}_q$ 以无坐标方式编码了 $\mathscr{E}_0$ 直至 q 阶的全导数。

注 1.11. 对于一般的 $\mathscr{E}_0 \subseteq J^k(P,n)$，其 q 次延拓 $\mathscr{E}_q$ 不是 $J^{k+h}(P,n)$ 中的子流形。当它是子流形时，显然它是一个与 $\mathscr{E}_0$ 具有相同解的偏微分方程。下文中，我们总是假设 ∞ 次延拓 $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\infty$ 是 $J^\infty(P,n)$ 中的子流形。例如，当 $\mathscr{E}_0$ 是形式可积偏微分方程时，就满足这一条件。根据嘉当-库兰什延拓定理，我们的假设并未造成太大的普遍性损失。该定理大致指出，在较弱的正则性条件下，每个偏微分方程经过有限次 1-延拓后都会成为形式可积的。

接下来我们将重点讨论 ∞-延拓 $\mathscr{E} \subseteq J^\infty(P,n)$。

命题 1.12. 设 $\mathscr{E}_0 \subseteq J^k(P,n)$ 是一个偏微分方程。假设其 ∞-延拓$\mathscr{E} \subseteq J^\infty(P,n)$ 是一个子流形。那么，嘉当分布在 $\mathscr{E}$ 上的限制满足:

$$\mathscr{C}_z \subseteq T_z\mathscr{E} \quad \textit{for all } z \in \mathscr{E}.$$

因此，限制 $\mathscr{C}$: $\mathscr{E} \to J^1(\mathscr{E},n)$ 是 $\mathscr{E}$ 上定义良好的秩为 n 的对合分布。此外，它还能以下述方式刻画 $\mathscr{E}_0$ 的解: 子流形 $S \subseteq \mathscr{E}$ 局部上具有 $S = N^\infty$ 的形式，其中 N 是 $\mathscr{E}_0$ 的某个解，当且仅当它是 $\mathscr{C}$ 的一个 n 维积分子流形。

PDE 的 ∞ 延拓上嘉当分布的限制也记为 $\mathscr{C}$，并称为嘉当分布。

定义 1.13。微分簇（由微分方程和簇两个词组合而成）是一个二元组（$\mathscr{E}$， $\mathscr{C}$），其中 $\mathscr{E}$ 是某个 PDE 的 ∞ 延拓，而 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{E}$ 上的嘉当分布。

命题 1.12 表明，微分簇（$\mathscr{E}$， $\mathscr{C}$）包含了定义它的 PDE $\mathscr{E}_0$ 的大部分相关信息。

最后，我们简要讨论 PDE 的无穷小对称。设（$\mathscr{E}$， $\mathscr{C}$）是与 PDE $\mathscr{E}_0$ 对应的微分簇。

定义 1.14。 $\mathscr{E}_0$ 的无穷小对称是一个向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{E})$，满足 $[Y, \Gamma(\mathscr{C})] \subseteq \Gamma(\mathscr{C})$。非平凡无穷小对称是模去平凡无穷小对称后的无穷小对称，即 $\mathscr{C}$ 的截面。

注 1.15。定义 1.14 中“平凡、非平凡对称性”这一术语的依据如下。设 X 是 $J^\infty(P,n)$ 上嘉当分布的一个截面，且 $(\mathscr{E},\mathscr{C})$ 是任意一个微分簇，则 X 与 $\mathscr{E}$ 相切，并且 $X|_{\mathscr{E}}$ 是 $\mathscr{E}_0$ 的无穷小对称。换言之，嘉当分布的截面是所有偏微分方程的无穷小对称（无论我们考虑的是哪一个偏微分方程）。

在局部坐标中，可以高效地描述（非平凡的）无穷小对称。考虑上一小节中的向量丛 $V \to J^\infty(P,n)$。其截面有时称为对称的生成截面，原因如下。取 V 在 $\mathscr{E}$ 上的限制 $V_{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$。$V_{\mathscr{E}}$ 的截面在局部由限制 $v_\alpha|_{\mathscr{E}}$、 $\alpha = 1$、 ..... 、 m 张成。取一个截面 $\chi \in \Gamma(V_{\mathscr{E}})$，设其在局部表示为 $\chi = \chi^\alpha v_\alpha|_{\mathscr{E}}$，其中 $\chi^\alpha \in C^\infty(\mathscr{E})$ 是一些局部函数。此外，设 $\tilde{\chi} \in \Gamma(V)$ 是 χ 的一个延拓，即 $\chi = \tilde{\chi}|_{\mathscr{E}}$。最后，取任意一个无穷小对称向量场 $Y \in \mathfrak{X}_{\mathscr{C}}$，它是 $J^\infty(P,n)$ 上嘉当分布的无穷小对称，并在投影 $X_{\mathscr{C}} \to \Gamma(V)$ 下映射到 $\tilde{\chi}$ （如果我们在局部工作，可以取例如演化向量场 $3\tilde{x}$）。如果 $\mathscr{E}_0$ 在局部由 (1.5) 给出，则可以证明，Y 与 $\mathscr{E}$ 相切，当且仅当 χ 在局部是以下泛线性化 $\mathscr{E}_0$ 的一个解：

$$\ell_{\mathscr{E}}(\chi) = 0$$

其中

$$\ell_{\mathscr{E}} : \Gamma(V_{\mathcal{E}}) \to C^\infty(J^\infty(P,n))^r, \quad r = \operatorname{codim} \mathscr{E}_0 = \text{number of PDEs}$$

是由下式给出的局部定义算子

$$\ell_{\mathscr{E}}(\chi) = \big(\ell_{\mathscr{E}}(\chi)_1, \dots, \ell_{\mathscr{E}}(\chi)_r\big), \quad \ell_{\mathscr{E}}(\chi)_a := (\mathfrak{I}_{\tilde{\chi}} F_a)\,|_{\mathscr{E}} = \frac{\partial F_a}{\partial u^\alpha_I}|_{\mathscr{E}} D_I|_{\mathscr{E}} \chi^\alpha.$$

并且我们利用了所有全导数都与 $\mathscr{E}$ 相切这一事实（对于施加在纤维化截面上的偏微分方程，泛线性化可以有一种更内蕴且全局的解释；尤其是当 $\mathcal{E}_0$ 被指定为某个非线性微分算子 的零点集时，参见例如 [**2**, 第 4 章第 2 节。7] 或 [**11**, 第 3 节。9]）。在这种情况下，限制 $Y|_{\mathscr{E}}$ 是 $\mathscr{E}_0$ 的一个无穷小对称

命题 1.16。 映射 $\chi \mapsto Y|_{\mathscr{E}}$模 $\Gamma(\mathscr{C})$ 在泛线性化的解之间建立了一个双射

$$\ell_{\mathscr{E}}(\chi) = 0$$

$\mathscr{E}_0$ 的解与 $\mathscr{E}_0$ 的无穷小对称之间。

注 1.17。泛线性化是一个施加在向量丛 $V_{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}$ 的截面上的线性偏微分方程。由于它只涉及全导数，对于 $\mathscr{E}_0$ 的任意解 N，都可以沿着注 1.3 中的嵌入 $j^\infty : N \to \mathscr{E}$ 将其拉回。这样便得到一个关于拉回丛 $j^{\infty *}V$ 的截面的新线性偏微分方程。后者正是 $\mathscr{E}_0$ 在解 N 附近的线性化。这也解释了“泛线性化”这一术语。

2. 偏微分方程的上同调

2.1. 水平上同调。本节为每个微分簇（$\mathscr{E}$，$\mathscr{C}$）赋予一个上链复形。相应的上同调称为 $\mathscr{E}$ 的水平上同调，其中包含关于 $\mathscr{E}_0$的重要坐标无关信息。

设（$\mathscr{E}$，$\mathscr{C}$）是一个微分簇。由于可积性，切丛 $T\mathscr{E}$ 的向量子丛 $\mathscr{C} \to \mathscr{E}$ 实际上是一个李代数丛。因此，相应地有嘉当演算。此外，还有相应的德拉姆上同调（带系数）。具体地，记

$$\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}) := \Gamma(\wedge^\bullet \mathscr{C}^*)$$

$\mathscr{C}$ 的对偶空间的外代数。换言之，$\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 由定义在 $\mathscr{E}$ 上、作用于 $\mathscr{C}$ 中向量场的微分形式构成。$\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 中的元素称为水平微分形式。存在一个典范微分 $\overline{d} : \Omega^\bullet(\mathscr{E}) \to \Omega^{\bullet+1}(\mathscr{E})$，即水平德拉姆微分，其定义采用通常的 Chevalley-Eilenberg 公式：对于所有 $\overline{\omega} \in \Omega^q(\mathscr{E})$,

$$\begin{aligned}
&\overline{d}\overline{\omega}(X_1, \dots, X_{q+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{q+1} (-)^{i+1} X_i \left(\overline{\omega}(X_1, \dots \widehat{X_i}, \dots, X_{q+1}) \right) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-)^{i+j} \overline{\omega} \left([X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots \right), \quad X_1, \dots, X_{q+1} \in \Gamma(\mathscr{C}),
\end{aligned}$$

其中帽号表示省略。$(\Omega^\bullet(\mathscr{E}), \overline{d})$ 是一个称为 $\mathscr{E}$ 的水平德拉姆代数 的交换微分分次代数（DG 代数）。其上同调称为水平德拉姆上同调 , 记作 $\overline{H}^\bullet(\mathscr{E})$。局部而言，$\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 作为分次代数由函数和坐标水平1-形式生成。

$$\overline{d}x^1, \dots, \overline{d}x^n.$$

特别地，不存在次数高于 n（即自变量的数目）的非平凡水平形式。在坐标中，水平德拉姆微分的作用如下：

$$\overline{d}\left(f_{i_1 \dots i_q} \overline{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \overline{d}x^{i_q} \right) = \left(D_i|_{\mathscr{E}} f_{i_1 \dots i_q} \right) \overline{d}x^i \wedge \overline{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \overline{d}x^{i_q}.$$

请注意，在我们（一般而言） ∞维的情形中，水平上同调是叶状结构标准叶向上同调的一种变体。

由李代数丛 $\mathscr{C}$的标准表示可得若干个$(\Omega^\bullet(\mathscr{E}), \overline{d})$上的自然微分分次模。本小节将介绍其中两种表示，第三种将在第 3 节讨论。记

$$\mathscr{V} := T\mathscr{E}/\mathscr{C}$$

为 $\mathscr{E}$的法丛。我们将 $\mathscr{V}$ 称为$\mathscr{E}$的横截切丛， $\mathscr{V}$ 的截面称为横截向量场（“横截”一词指相对于 $\mathscr{C}$的横截性）。因此，存在一个向量丛短正合列

$$0 \longrightarrow \mathscr{C} \longrightarrow T\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{V} \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

李代数丛 $\mathscr{C}$ 通过*Bott*联络 ∇作用于 $\mathscr{V}$：

$$\nabla_X \big(Y \bmod \Gamma(\mathscr{C}) \big) = [X, Y] \bmod \Gamma(\mathscr{C}), \quad \text{for all } X \in \Gamma(\mathscr{C}) \text{ and all } Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{E}).$$

因此，分次向量空间

$$\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}) := \Gamma\big(\wedge^\bullet \mathscr{C}^* \otimes \mathscr{V} \big) \cong \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \Gamma(\mathscr{V}),$$

是一个带有微分的 DG $(\Omega^\bullet(\mathscr{E})\ \overline{d})$-模，记作

$$\overline{d} : \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}) \to \overline{\Omega}^{\bullet+1}(\mathscr{E}, \mathscr{V})$$

同样地，由下式给出：对于所有 $\overline{W} \in \Omega^q(\mathscr{E}, \mathscr{V})$，

$$\begin{aligned}
&\overline{d}\,\overline{W}(X_1, \dots, X_{q+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{q+1} (-)^{i+1} \nabla_{X_i} \left(\overline{W}(X_1, \dots \widehat{X_i}, \dots, X_{q+1}) \right) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-)^{i+j} \overline{W} \left([X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots \right), \quad X_1, \dots, X_{q+1} \in \Gamma(\mathscr{C}).
\end{aligned}$$

微分分次模 $(\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})\ \overline{d})$ 的上同调记为 $\overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$。

与 (2.1) 对偶，存在一个微分分次代数的短正合列

$$0 \longleftarrow \left(\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}), \overline{d}\right) \longleftarrow \left(\Omega^\bullet(\mathscr{E}), d\right) \longleftarrow \left(\mathscr{C}\Omega^\bullet, d\right) \longleftarrow 0.$$

这里，投影 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}) \to \Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 只是将其限制到 $\mathscr{C}$ 中的向量场，而 $\mathscr{C}\Omega^\bullet$ 是其核：由 d-闭形式构成的分次理想，这些形式在限制到 $\mathscr{C}$ 中的向量场时为零。我们还记作

$$\mathscr{V}\Omega^\bullet = \Gamma(\wedge^\bullet \mathscr{V}^*).$$

它是 $\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 中的一个分次子代数：由 $C^\infty(\mathscr{E})$ 和 $\mathscr{C}\Omega^1$ 生成的分次子代数。我们将 $\mathscr{V}\Omega^\bullet$ 中的元素称为 $\mathscr{E}$ 上的横向微分形式。李代数丛 $\mathscr{C}$ 通过对偶 *Bott* 联络作用于 $\wedge^\bullet \mathscr{V}^*$，该联络也记作 ∇：

$$\nabla_X \varpi := \mathcal{L}_X \varpi, \quad \text{for all } X \in \Gamma(\mathscr{C}) \text{ and all } \varpi \in \mathscr{V}\Omega^\bullet.$$

相应地，分次向量空间

$$\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^\bullet \mathscr{V}^*) := \Gamma\big(\wedge^\bullet \mathscr{C}^* \otimes \wedge^\bullet \mathscr{V}^* \big) \cong \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}^\bullet\Omega,$$

也是一个带有微分的 DG（$\Omega^\bullet(\mathscr{E})\ \overline{d}$）-模，其微分记作

$$\overline{d} : \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^\bullet \mathscr{V}^*) \to \overline{\Omega}^{\bullet+1}(\mathscr{E}, \wedge^\bullet \mathscr{V}^*),$$

仍由通常的 Chevalley-Eilenberg 公式给出。DG 模（$\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^\bullet \mathscr{V}^*)\ \overline{d}$）的上同调记作 $\overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^\bullet \overline{\mathscr{V}}^*)$。

2.2. 水平上同调的解释。 有些水平上同调具有良好的诠释，有时是非正式的，有时则更为精确。本小节将举例说明其中一些。我们先从具有平凡系数的水平上同调谈起。

例 2.1（受约束变分原理）。具有平凡系数 $\overline{H}^n(\mathscr{E})$ 的顶阶水平上同调可以（非正式地）解释为受偏微分方程 $\mathscr{E}_0$ 约束的变分原理。为此，考虑一个上同调类 $[L] \in \overline{H}^n(\mathscr{E})$。局部地

$$L = \mathscr{L}(x, \dots, u_I, \dots)\, \overline{\mathrm{d}}^n x, \quad \text{where } \overline{\mathrm{d}}^n x := \overline{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \overline{d}x^n,$$

对于某个局部函数 $\mathscr{L} \in C^\infty(\mathscr{E})$。现在，设 $N \subseteq P$ 是 $\mathscr{E}$ 的一个紧致、定向的 n 维解（无边界）。我们可以沿嵌入 $j^\infty : N \to \mathscr{E}$ 将 L 拉回。这样，我们就得到 N 上的一个真正的顶形式，我们

可以利用紧致性和定向对其积分。因此，我们得到了一个定义良好的泛函

$$\mathbf{F} : N \mapsto \mathbf{F}[N] := \int_N j^{\infty *} L.$$

若 N 局部由 (1.1) 给出，且 N 上的坐标 $x^1, \dots, x^n$ 确定正定向，则 F 局部具有如下形式

$$\mathbf{F}[N] = \int \mathscr{L}\left(x, \dots, \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}, \dots\right) \mathrm{d}^n x. \tag{2.2}$$

实际上，F 只取决于 L 的上同调类。此外，由 (2.2) 可知，我们可以将 F（进而将 $[L]$ ）解释为一种（坐标无关的）变分原理，其拉格朗日密度为 $\mathscr{L}$，并施加于 $\mathscr{E}_0$ 的（某些）解上。

例 2.2（守恒律）。系数为平凡系数的顶次减一水平上同调可解释为偏微分方程 $\mathscr{E}_0$ 的 守恒律 。为此，考虑一个上同调类 $[J] \in \overline{H}^{n-1}(\mathscr{E})$。局部地

$$J = J^i(x, \dots, u_I, \dots)\, \overline{\mathrm{d}}^{n-1} x_i,$$

其中

$$\overline{\mathrm{d}}^{n-1} x_i := (-)^{i+1} \overline{d}x^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\overline{d}x^i} \wedge \dots \wedge \overline{d}x^n,$$

对于某些局部函数 $J^i \in C^\infty(\mathscr{E})$, $i = 1, \dots, n$。局部坐标下的上循环条件 $\overline{d}J = 0$ 写作

$$D_i|_{\mathscr{E}} J^i = 0,$$

因此， J 可以看作是沿着 $\mathscr{E}_0$的解流动的守恒流。现在，设 $N \subseteq P$是 $\mathscr{E}$ 的一个解，设 $\Sigma \subseteq N$ 是 N中的一个紧致定向超曲面（无边界）。我们可以沿着 j^∞ 拉回 J: $N \to \mathscr{E}$。这样便得到 N 上的一个真正的（$n-1$）形式，利用紧致性和定向，我们可以在 Σ 上对其积分。该积分

$$\int_\Sigma j^{\infty *} J$$

只取决于（水平上同调类 $[J]$ 以及） N中 Σ的同调类。从这个意义上说，它沿着每个 N都是守恒的。总而言之， $[J]$可以看作与守恒流 J相关联的守恒律。请注意，低次数的水平上同调也可以类似地视为低次数的守恒荷，并在更高余维的子流形上积分。例如，在真空的 n维时空上，电荷是麦克斯韦方程的一个次数为（$n-2$）的水平上同调类。

例 2.3（无穷小对称）。本例讨论系数取为 $\mathscr{V}$ 的 0 次水平上同调。0 次上同调 $\overline{H}^0(\mathscr{E}, \mathscr{V})$ 就是算子的核

$$\overline{d} : \Gamma(\mathscr{V}) \to \overline{\Omega}^1(\mathscr{E}, \mathscr{V})$$

并且它由关于 Bott联络的平行截面 构成。容易看出， $\mathscr{V}$的一个截面 $Y \bmod \Gamma(\mathscr{C})$, 其中 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{E})$，关于 Bott联络平行，当且仅当 Y 是 $\mathscr{E}_0$的一个无穷小对称。我们得出结论，自然包含映射

$$\mathfrak{X}_{\mathscr{E}}/\Gamma(\mathscr{C}) \to \mathfrak{X}(\mathscr{E})/\Gamma(\mathscr{C}) = \Gamma(\mathscr{V})$$

在 $\mathscr{E}_0$ 的非平凡无穷小对称与第 0 阶上同调 $\overline{H}^0(\mathscr{E},\mathscr{V})$之间建立了一个双射。

设 $Y\in\mathfrak{X}_{\mathscr{C}}$。请回忆注 1.2：向量场 Y可能不存在流。然而，当 Y存在流时，后者会将 $\mathscr{C}$ 上的 n维积分子流形映射为 $\mathscr{C}$ 上的 n维积分子流形。因此，从本质上说，它在 $\mathscr{E}_0$的解空间上定义了一个流。如果两个无穷小对称相差一个平凡无穷小对称，那么它们的流（若存在）会在解空间上诱导出相同的流，因为平凡对称的流会固定每个 n维积分子流形。由此可见，非平凡无穷小对称可以非正式地看作解空间上的向量场。这一点将在下一小节中发挥作用。

例 2.4（欧拉-拉格朗日方程）。现在我们讨论以横截 1-形式 $\mathscr{V}^*$为系数的顶次水平上同调。我们首先注意到存在一个映射

$$d^{\mathrm{sec}}:\overline{H}^n(\mathscr{E})\to\overline{H}^n(\mathscr{E},\mathscr{V}^*)$$

定义如下。设 $[L]\in\overline{H}^n(\mathscr{E})$，并任取一个 n-形式 $\omega\in\Omega^n(\mathscr{E})$，使其在 $\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 下投影到 $L\in\Omega^\bullet(\overline{\mathscr{E}})\to\Omega^\bullet(\mathscr{E})$。微分 $d\omega$ 属于理想 $\mathscr{C}\Omega^\bullet$。因此，它具有如下性质：收缩

$$i_{X_n}\cdots i_{X_1}d\omega$$

与任意 n 个向量场 X_1、.....、 X_n 在 $\mathscr{C}$中的收缩是一个横截微分 1-形式：

$$i_{X_n}\cdots i_{X_1}d\omega\in\mathscr{V}\Omega^1=\mathscr{C}\Omega^1.$$

因此，我们得到一个定义良好、反对称且 $C^\infty(\mathscr{E})$-多重线性的映射

$$\varpi:\Gamma(\mathscr{C})\times\cdots\times\Gamma(\mathscr{C})\to\mathscr{V}\Omega^1,\quad(X_1,\ldots,X_n)\mapsto i_{X_n}\cdots i_{X_1}d\omega$$

我们可以将其解释为 $\Omega^n(\mathscr{C},\mathscr{V}^*)$ 中的一个元素，也记作 ϖ。由于 $dd\omega=0$，我们得到 $\overline{d}\varpi=0$。上同调类 $[\varpi]\in\overline{H}^n(\mathscr{E},\mathscr{V}^*)$ 仅取决于上同调类 $[L]$，于是定义

$$d^{\mathrm{sec}}[L]=[\varpi].$$

现在我们对映射 $d^{\mathrm{sec}}:\overline{H}^n(\mathscr{E})\to\overline{H}^n(\mathscr{E},\mathscr{V}^*)$ 给出一个更具体的描述。为简单起见，从现在起，在本例中我们只考虑 $\mathscr{E}_0$为空偏微分方程 $0=0$ 的情形，因此 $\mathscr{E}=J^\infty(P,n)$。为简便起见，我们记 $J^\infty=J^\infty(P,n)$。当 $\mathscr{E}=J^\infty$ 时，$\overline{H}^n(\mathscr{E},\mathscr{V}^*)$ 有一个简单的描述。具体而言，存在一个向量空间同构

$$\Gamma\big(V^*\otimes\wedge^n\mathscr{C}^*\big)\cong\overline{H}^n(J^\infty,\mathscr{V}^*)$$

定义如下。首先注意，存在一个向量丛投影

$$\mathscr{V}\to V$$

将点 $z=N_p^\infty\in J^\infty$ 处的横截向量 $v\,\mathrm{mod}\,\mathscr{C}$ 映射到

$$d\pi(v)\bmod T_pN\in T_pP/T_pN=V_z.$$

对偶地，存在一个向量丛嵌入

$$V^*\hookrightarrow\mathscr{V}^*.$$

因此，有一个包含映射

$$\Gamma\big(V^*\otimes\wedge^n\mathscr{C}^*\big)\hookrightarrow\overline{\Omega}^n(J^\infty,\mathscr{V}^*).\tag{2.3}$$

它可以用局部坐标描述如下。设 v^1、……、 $v^m \in \Gamma(V^*)$ 是第 1.2 小节所述局部基 v_1、……、 $v_m \in \Gamma(V)$ 的对偶基。则包含映射 (2.3) 将

$$v^\alpha \otimes \overline{\mathrm{d}}^n x \mapsto \overline{\mathrm{d}}^n x \otimes (du^\alpha - u_i^\alpha dx^i), \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

命题2.5。 复合映射

$$\Gamma\big(V^* \otimes \wedge^n \mathscr{C}^*\big) \hookrightarrow \overline{\Omega}^n(J^\infty, \mathscr{V}^*) \longrightarrow \overline{H}^n(J^\infty, \mathscr{V}^*) \tag{2.4}$$

是一个向量空间同构。此外，对于 $L \in \Omega^n(J^\infty)$ 局部由下式给出

$$L = \mathscr{L}(x, \ldots, u_I, \ldots)\, \overline{\mathrm{d}}^n x$$

对应于 $d^{\mathrm{sec}}[L]$ 的截面 $\mathbf{E}[L]$，经由 *(2.4)* 可局部表示为

$$\mathbf{E}[L] = \sum_{|I|<\infty} (-)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_I^\alpha} \right) v^\alpha \otimes \overline{\mathrm{d}}^n x.$$

鉴于上述命题的第一部分，顶次上同调 $\overline{H}^n(J^\infty, \mathscr{V}^*)$ 与 J^∞ 上某个向量丛的截面所构成的 $C^\infty(J^\infty)$-模之间存在双射。因此，讨论 $\overline{H}^n(J^\infty, \mathscr{V}^*)$ 中上同调类在 J^∞ 中的零点集是有意义的。根据命题的第二部分， $d^{\mathrm{sec}}[L]$ 的零点集，等价地说，$\mathbf{E}[L]$ 的零点集，就是与变分原理 $[L]$ （见例 2.1）相对应的欧拉-拉格朗日方程：

$$\sum_{|I|<\infty} (-)^{|I|} D_I \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_I^\alpha} \right) = 0.$$

同理，可以证明存在一个映射

$$d^{\mathrm{sec}} : \overline{H}^n(J^\infty, \mathscr{V}^*) \to \overline{H}^n(J^\infty, \wedge^2 \mathscr{V}^*)$$

（见下一小节），它将一个由 m 个偏微分方程组成的系统映射

$$E_\alpha(x, \ldots, u_I, \ldots) = 0$$

到与之对应的可变分性的亥姆霍兹条件。

2.3. 水平上同调上的代数结构。例 2.1 和例 2.2 表明，水平上同调 $\overline{H}^\bullet(\mathscr{E})$ 应解释为“偏微分方程 $\mathscr{E}_0$ 的解空间上的光滑函数”。因此，我们也将其记为

$$\boldsymbol{C}^\infty := \overline{H}^\bullet(\mathscr{E})$$

并称之为次级函数，沿用 Vinogradov 的术语。同理，例 2.3 末尾的讨论表明，$\overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$ 应解释为“ $\mathscr{E}_0$ 的解空间上的向量场”。因此，我们也将其记为

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}} := \overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$$

并称之为次级向量场。最后，例 2.4 表明，$\overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$ 应解释为“ $\mathscr{E}_0$ 的解空间上的微分形式”，我们将其记为

$$\boldsymbol{\Omega}^p := \overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^p \mathscr{V}^*)$$

并将其称为次微分 p-形式， $p = 0$，1，……这一解释得到了上述上同调具有适用于函数、向量场和微分形式的代数

结构这一事实的支持。例如， C^∞ 自然是一个（分次）交换代数，因为它是交换微分分次代数的上同调。类似地，$(C^\infty, \mathfrak{X})$ 是一个（分次）Lie-Rinehart 代数。下面我们来解释后一个说法。

固定选取短正合列 (2.1) 的一个分裂：

$$0 \longrightarrow \mathscr{C} \longrightarrow T\mathscr{E} \underset{\sigma}{\longrightarrow} \mathscr{V} \longrightarrow 0\,. \tag{2.5}$$

这会导出一个直和分解 $T\mathscr{E} \cong \mathscr{C} \oplus \mathscr{V}$，使我们能够将 $\mathscr{V}$ 视为分布，并将横截向量场视为 $\mathscr{E}$ 上通常意义下的向量场。对偶地，我们得到一个分解

$$\Omega^\bullet(\mathscr{E}) \cong \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}\Omega^\bullet \tag{2.6}$$

该分解使我们能够将水平微分形式视为 $\mathscr{E}$ 上通常意义下的微分形式，本节余下部分我们都将如此处理。类似地，我们将按照分裂 (2.5)（以及分解 (2.6)）所诱导的嵌入 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}) \hookrightarrow \Omega^\bullet(\mathscr{E}, T\mathscr{E})$ 来理解，并将 $\mathscr{V}$ 值的水平微分形式视为 $\mathscr{E}$ 上通常意义下的向量值形式。现在回顾一下，向量值形式自然带有一个分次李括号：Frölicher-Nijenhuis 括号 $[-,-]^{\mathrm{fn}}$（例如参见 [**16**, 第 16] 节）。此外，由此得到的分次李代数通过李导数（沿向量值形式）作用于微分形式。

请注意，除非分布 $\mathscr{V} \subseteq T\mathscr{E}$ 本身是对合的，否则 Frölicher-Nijenhuis 括号不会保持 $\mathscr{V}$ 值水平形式 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$。我们可以先取 Frölicher-Nijenhuis 括号，再投影到 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$，从而在 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$ 上定义一个括号；但这样得到的括号不是李括号（除非 $\mathscr{V}$ 是对合的）。不过，它在 $\mathfrak{X}$ 上给出了一个真正的分次李括号。具体而言，记

$$\mathrm{pr} : \Omega^\bullet(\mathscr{E}) \to \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}), \qquad \mathrm{pr} : \Omega^\bullet(\mathscr{E}, T\mathscr{E}) \to \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$$

为（自然）投影。定义 $[-,-]^{\mathrm{sec}}$ 上的括号 $\mathfrak{X}$，即次级交换子，如下：

$$[-,-]^{\mathrm{sec}} : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}, \quad (\boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}) \mapsto [\boldsymbol{W}, \boldsymbol{U}]^{\mathrm{sec}} := \big[\,\mathrm{pr}[\overline{W}, \overline{U}]^{\mathrm{fn}}\big], \tag{2.7}$$

其中，$\boldsymbol{W} = [\overline{W}]$、$\boldsymbol{U} = [\overline{U}]$ 分别是余循环 $\overline{W}$、$\overline{U} \in \Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$ 的上同调类。

我们还定义次级李导数：

$$\mathcal{L}^{\mathrm{sec}} : \mathfrak{X} \times \boldsymbol{C}^\infty \to \boldsymbol{C}^\infty, \quad (\boldsymbol{W}, \boldsymbol{f}) \mapsto \mathcal{L}^{\mathrm{sec}}_{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{f} := \big[\,\mathrm{pr}\,\mathcal{L}_{\overline{W}} \overline{\omega}\big], \tag{2.8}$$

其中，$\boldsymbol{f} = [\overline{\omega}]$ 是余循环 $\overline{\omega} \in \Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 的上同调类。

定理2.6。 运算 *(2.7)* 和 *(2.8)* 定义良好，且与分裂 *(2.5)* 无关。结合这些运算以及由 *DG* $(\Omega^\bullet(\mathscr{E})\ \overline{d})$-模结构在 $(\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})\ \overline{d})$上诱导的分次 C^∞-模结构，$(C^\infty, \mathfrak{X})$ 构成一个分次李-莱因哈特代数。

至于次级微分形式，它们构成一个交换微分分次代数。为了解释这一点，再次考虑分裂 (2.5)，并理解诱导分解 (2.6)。对于任意 p、p'，我们都有一个 次级楔积：

$$\wedge^{\mathrm{sec}} : \boldsymbol{\Omega}^p \times \boldsymbol{\Omega}^{p'} \to \boldsymbol{\Omega}^{p+p'}, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \mapsto \boldsymbol{\omega} \wedge^{\mathrm{sec}} \boldsymbol{\omega}' := \big[\omega \wedge \omega'\big], \tag{2.9}$$

其中，$\boldsymbol{\omega} = [\omega]$、$\boldsymbol{\omega}' = [\omega']$ 是余循环 $\omega \in \Omega^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^p \mathscr{V}^*)$、$\omega' \in \Omega^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^{p'} \overline{\mathscr{V}}^*)$ 的上同调类。

我们还有一个次微分。为了定义它，我们首先注意到，德拉姆微分不会将取值于 $\wedge^p \mathscr{V}^*$ 的水平形式映射到取值于 $\wedge^{p+1} \mathscr{V}^*$ 的水平形式（除非 $\mathscr{V}$ 是对合的）。我们可以定义一个映射

$$\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^p \mathscr{V}^*) \to \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^{p+1} \mathscr{V}^*)$$

先取德拉姆微分，再投影到 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^{p+1} \mathscr{V}^*)$，但这样得到的映射复合后并不为零（除非 $\mathscr{V}$ 是对合的）。不过，它们在 $\Omega^\bullet$ 上给出了一个真正的微分。具体而言，记

$$\mathrm{pr} : \Omega^\bullet(\mathscr{E}) \to \Omega^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^{p+1} \mathscr{V}^*)$$

为该投影。在 $\Omega^\bullet$ 上定义映射 d^{sec} 如下：

$$d^{\mathrm{sec}} : \boldsymbol{\Omega}^p \to \boldsymbol{\Omega}^{p+1}, \quad \boldsymbol{\omega} \mapsto d^{\mathrm{sec}} \boldsymbol{\omega} := \big[\mathrm{pr}\, d\omega\big]. \tag{2.10}$$

定理 2.7。运算 *(2.9)* 和 *(2.10)* 定义良好，且与分裂 *(2.5)* 无关。连同这些运算，$\Omega^\bullet$ 构成一个交换微分分次代数（关于总分次而言，即 $\overline{H}^q(\mathscr{E}, \wedge^p \mathscr{V}^*)$ 上的分次由 $p+q$ 给出）。

注 2.8. 次微分 (2.10) 与例 2.4 中引入的次微分一致。

我们现在说明一种更具概念性的方式来引入运算 (2.9) 和 (2.10)，它基于 *Vinogradov* 的 $\mathscr{C}$-谱序列。具体来说，回忆一下第 2.1 小节中的 d-闭分次理想 $\mathscr{C}\Omega^\bullet \subseteq \Omega^\bullet(\mathscr{E})$（它由在限制到 $\mathscr{C}$ 中的向量场时取值为零的微分形式构成）。其幂

$$\mathscr{C}^p \Omega^\bullet := \underbrace{\mathscr{C}\Omega^\bullet \wedge \cdots \wedge \mathscr{C}\Omega^\bullet}_{p \text{ times}}, \quad p = 0, 1, \ldots$$

定义了一个滤子

$$\Omega^\bullet(\mathscr{E}) = \mathscr{C}^0 \Omega^\bullet \supseteq \mathscr{C}\Omega^\bullet \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{C}^p \Omega^\bullet \supseteq \cdots, \tag{2.11}$$

由分次 d-闭理想构成，该滤子进而确定一个谱序列 $\mathscr{C}E$，称为 $\mathscr{C}$-谱序列，用于计算 $\mathscr{E}$ 的通常德拉姆上同调。

命题 2.9. 对于所有 p, q，映射

$$\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^p \mathscr{V}^*) \to \mathscr{E}_0^{p,\bullet} = \mathscr{C}^p \Omega^{p+\bullet} / \mathscr{C}^{p+1} \Omega^{p+\bullet}, \quad \overline{\omega} \otimes \varpi \mapsto \omega \wedge \varpi \bmod \mathscr{C}^{p+1} \Omega^{p+\bullet}$$

是良定义的上链同构，其中 $\overline{\omega} \in \Omega^\bullet(\mathscr{E})$、$\varpi \in \mathscr{V}\Omega^p$，而 $\omega \in \Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 是任意一个投影到 $\overline{\omega}$ 的 q- 形式，该投影是在 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}) \to \Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 下进行的。诱导出的同构

$$\boldsymbol{\Omega}^p = \overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^p \mathscr{V}^*) \to \mathscr{C}E_1^{p,\bullet} = H^\bullet(\mathscr{C}E_0^{p,\bullet}, d_0^{p,\bullet})$$

将 d^{sec} 与 $\mathscr{C}$-谱序列第一页中的微分 d_1 对应起来，并将$\wedge^{sec}$ 与 $\mathscr{C}E_1$ 上的乘积结构对应起来；这是因为 *(2.11)* 是由微分分次理想构成的滤子。

因此，$\wedge^{\mathrm{sec}}$、d^{sec} 本可以通过 $\mathscr{C}$-谱序列来定义，而无需使用分裂（2.5）。甚至可以证明，在次级微分形式和次级向量场上，整个嘉当演算都有一个类似版本。这些运算共同构成了*Vinogradov* 的次级微积分的基础。Vinogradov 关于偏微分方程的大部分工作都基于以下原则：

次级微积分是偏微分方程的解空间上微分演算的适当替代。

我们通过介绍一个非正式的次级化方案来结束本节。具体而言，设 Φ 是微分几何中的任意自然构造（例如流形上的函数、向量场、德拉姆复形等）。本小节的讨论提出了以下方案，用以寻找 Φ 的次级版本，即在偏微分方程 $\mathscr{E}_0$ 的解空间上，对构造 Φ 作适当替代 $\mathbf{\Phi}$。

次级化方案。

(1) 定义 Φ 的横向版本 $\mathscr{V}\Phi$（当 Φ 是“向量场”时，其横向版本为 $\Gamma(\mathscr{V})$）。
(2) 注意，$\mathscr{V}\Phi$ 具有李代数丛 $\mathscr{C}$ 的规范作用，从而使 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}\Phi$ 具有 *DG* $(\Omega^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}\Phi, \overline{d})$-模结构（当 Φ 是“向量场”时，$\Omega^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}\Phi$ 就是 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$）。
(3) 将 $\mathbf{\Phi}$ 定义为以 $\mathscr{V}\Phi$ 为系数的水平上同调：$\mathbf{\Phi} := H^\bullet(\Omega(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}\Phi, \overline{d})$（当 Φ 是“向量场”时，$\mathbf{\Phi}$ 就是 $\mathfrak{X}$）。*(4)* 在 $\mathbf{\Phi}$ 上寻找适当的代数结构（当 Φ 是“向量场”时，$\mathbf{\Phi} = \mathfrak{X}$ 是 C^∞ 上的分次李-莱因哈特代数）。

在下一节中，我们将运用这一方法定义次级标量微分算子，即对偏微分方程解空间上的标量微分算子进行适当替代的算子。

3. 偏微分方程的同伦

本节将简要介绍 Vinogradov 关于次级微积分的思想的最新发展。这些发展并非出自 Vinogradov 本人，但无疑受到其工作的启发。

3.1. 同伦代数。在本小节中，我们回顾本文其余部分将用到的同伦代数定义。粗略地说，某种类型（结合、李等）的同伦代数，是一个分次向量空间，配备了一组运算，这些运算仅在高阶同伦构成的相容系统意义下满足代数公理。同伦代数出现在上同调和同伦与代数结构相互作用之时 [**14, 22**]。我们采用同伦代数运算的次数为 **1** 的约定，并且只研究零特征域上的（分次）向量空间。

定义 3.1. L_∞-代数 [**13, 12**] 是一个分次向量空间 V，配备一列 $\mathfrak{l} = \{\mathfrak{l}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 次数为 **1** 的对称多重线性括号：

$$\mathfrak{l}_k : \left(S^k V\right)^\bullet \to V^{\bullet+1}, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \mathfrak{l}_k(v_1, \dots, v_k)$$

满足以下高阶雅可比恒等式：

$$\sum_{r+s=k} \sum_{\sigma\in S_{r,s}} \epsilon(\sigma, v)\mathfrak{l}_{s+1}\left(\mathfrak{l}_r(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}), v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}\right) = 0, \tag{3.1}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$，其中 $S_{r,s}$ 表示 (r, s)-非交错置换，而 $\epsilon(\sigma, v)$ 是与齐次元素 $v_1, \dots, v_k \in V$ 的置换 σ 相关联的 Koszul符号。

对于 $k = 1$，恒等式 (3.1) 表明 $\mathfrak{l}_1 : V^\bullet \to V^{\bullet+1}$ 是一个微分。特别地，对于每个 L_∞-代数 $(V, \mathfrak{l})$，都有一个上同调 $H^\bullet(V, \mathfrak{l}_1)$。对于 $k = 2$，恒等式 (3.1) 表明 $\mathfrak{l}_1$ 关于二元括号是一个导子

$\mathfrak{l}_2\colon (S^2V)^\bullet \to V^{\bullet+1}$。对于 $k=3$，恒等式 (3.1) 表明 $\mathfrak{l}_2$ 仅在由 $\mathfrak{l}_3$ 编码的同伦意义下是一个分次李括号。特别地，$\mathfrak{l}_2$ 在上同调 $H^\bullet(V,\mathfrak{l}_1)$ 上诱导出一个真正的分次李括号（差一个我们为简单起见将忽略的移位同构）。因此，每当一个上链复形的上同调支持一个分次李括号时，自然会想知道它是否源自上链上的某个 L_∞-代数结构。

此外，还有定义在 L_∞-代数上的 L_∞-模这一概念。

定义 3.2. 定义在 L_∞-代数 $(V,\mathfrak{l})$ 上的 L_∞-模 [**12**] 是一个分次向量空间 W，配备一列 $\mathfrak{m}=\{\mathfrak{m}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 次数为 1 的多重线性括号：

$$\mathfrak{m}_k : \big(S^{k-1}V\otimes W\big)^\bullet \to W^{\bullet+1},\quad (v_1,\dots,v_{k-1},w)\mapsto \mathfrak{m}_k(v_1,\dots,v_{k-1}|w)$$

满足：

$$\sum_{r+s=k-1}\sum_{\sigma\in S_{r,s}} \epsilon(\sigma,v)\Big[\mathfrak{m}_{s+1}\big(\mathfrak{l}_r(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)}),v_{\sigma(r+1)},\dots,v_{\sigma(r+s)}|w\big) + (-)^{|v_{\sigma(1)}|+\cdots+|v_{\sigma(r)}|}\mathfrak{m}_{r+1}\big(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)}|\mathfrak{m}_s(v_{\sigma(r+1)},\dots,v_{\sigma(r+s)}|w)\big)\Big]=0$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$, $v_1,\dots,v_{k-1}\in V$, $w\in W$ 均成立。

特别地，$\mathfrak{m}_1\colon W^\bullet\to W^{\bullet+1}$ 是一个微分，并且 $\mathfrak{m}_2$ 在 $H^\bullet(W,\mathfrak{m}_1)$ 上诱导出一个真正的分次 $H^\bullet(V,\mathfrak{l}_1)$-模结构。

下一个定义是 Lie-Rinehart 代数概念的同伦版本（见 [**8, 9, 5, 7, 29, 31**]）。

定义 3.3. LR_∞-代数 [**29**]（LR 是 Lie-Rinehart 的缩写）是由两个分次向量空间组成的一对 (A,L)，并配备以下附加结构：

(1) L 是一个具有结构映射 $\mathfrak{l}$ 的 L_∞-代数；(2) A 是一个微分记作 $\mathfrak{m}_1$ 的交换微分分次代数；(3) $(L,\mathfrak{l}_1)$ 是一个 DG $(A^\bullet,\mathfrak{m}_1)$-模；(4) A 是 $(L^\bullet,\mathfrak{l})$ 上的一个 L_∞-模，其结构映射为 $\mathfrak{m}$（这意味着一元括号恰好是 $\mathfrak{m}_1$）。

此外，这些映射

$$\mathfrak{m}_k : \big(S^{k-1}L\otimes A\big)^\bullet \to A^{\bullet+1}$$

在前 $(k-1)$ 个自变量上是分次 A-多线性的，并且在最后一个自变量上是导子。最后，L_∞-代数括号 $\mathfrak{l}$ 满足以下莱布尼茨法则：

$$\begin{aligned}&\mathfrak{l}_k(v_1,\dots,v_{k-1},av_k)\\&\quad=\mathfrak{m}_k(v_1,\dots,v_{k-1}|a)v_k+(-)^{|a|(|v_1|+\cdots+|v_{k-1}|+1)}a\mathfrak{l}_k(v_1,\dots,v_{k-1},v_k),\end{aligned}$$

对于所有的 v_1、.....、$v_k\in L$ 和 $a\in A$。

注 3.4. 设 (A,L) 是一个 LR_∞-代数，其结构映射为 $(\mathfrak{m},\mathfrak{l})$。类似于 L_∞-代数和 L_∞-模，上同调 $(H^\bullet(A,\mathfrak{m}_1)\ H^\bullet(L,\mathfrak{l}_1))$ 是一个分次李-莱因哈特代数。

与李代数丛类似，对于 LR_∞-代数也存在 ***Chevalley-Eilenberg*** 构造 。具体而言，设 (A, L) 是一个 LR_∞-代数。考虑分次交换代数 $\mathrm{Sym}^\bullet(A, L)$，它由分次对称的 A-多重线性映射组成

$$S^\bullet L \to A.$$

（A， L）的结构映射（$\mathfrak{l}$， $\mathfrak{m}$）在 $\mathrm{Sym}^\bullet$（A， L）上诱导出一列次数为 1 的导子：

$$\mathfrak{d}_k : \mathrm{Sym}^h(A, L) \to \mathrm{Sym}^{k+h-1}(A, L) \tag{3.2}$$

定义如下：

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_k\omega(v_1, \dots, v_h)\\
&= \sum_{\sigma\in S_{k-1,h}} \epsilon(\sigma, v)(-)^{|\omega|\sum_{i=1}^{k-1}|v_{\sigma(i)}|}\mathfrak{m}_k\big(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k-1)}|\omega(v_{\sigma(k)}, \dots, v_{\sigma(k+h-1)})\big)\\
&\quad + \sum_{\sigma\in S_{k,h-1}} \epsilon(\sigma, v)\omega\big(\mathfrak{l}_k(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+h-1)}\big).
\end{aligned}$$

命题 3.5。 映射 $\mathfrak{d}_k$ 是良定义的分次代数上的次数为1 导子 $\mathrm{Sym}^\bullet$（A， L）。此外，它们满足

$$\sum_{r+s=k} \big[\mathfrak{d}_r, \mathfrak{d}_s\big] = 0 \tag{3.3}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。特别地，总导子

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \cdots$$

在有定义时，其平方为零。

偶对 $(\mathrm{Sym}^\bullet(A, L)\ \mathfrak{d})$ 称为 (A, L) 的 *Chevalley-Eilenberg* 代数。

注 3.6. 一般而言，导子 $\mathfrak{d}_2$ 的平方不为 0（只有在由 $\mathfrak{d}_3$ 编码的同伦意义下才为零），但它会诱导一个导子，该导子在 $\mathfrak{d}_1$ 的上同调中平方为零。因此，带有由 $\mathfrak{d}_2$ 诱导的导子的 $H^\bullet(\mathrm{Sym}(A, L)\ \mathfrak{d}_1)$ 是一个交换微分分次代数。

注 3.7. 设 (A, L) 是一个 LR_∞-代数。若 L 作为 A-模是射影且有限生成的，那么 Chevalley-Eilenberg 代数包含了关于 (A, L) 的全部信息。更确切地说，设 A 是一个交换分次代数，且 L 是一个射影且有限生成的分次 A-模。那么 Chevalley-Eilenberg 构造在一方面延拓既有结构的 (A, L) 上的 LR_∞-代数结构，与另一方面满足 (3.2) 和 (3.3) 的 $\mathrm{Sym}^\bullet(A, L)$ 的次数为 1 的导子序列 $\mathfrak{d} = \{\mathfrak{d}_k\}$ 之间建立了一个双射。

3.2. 次级向量场的 LR_∞-代数。 设 $(\mathscr{E}, \mathscr{C})$ 是一个微分-ety。根据定理 2.6，数对 $(\boldsymbol{C}^\infty, \mathfrak{X})$ 是一个分次李-莱因哈特代数。回顾一下， $\boldsymbol{C}^\infty = \overline{H}^\bullet(\mathscr{E}) = H^\bullet(\underline{\Omega}(\mathscr{E})\ \overline{d})$ 且 $\mathfrak{X} = \overline{H}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}) = H^\bullet(\underline{\Omega}(\mathscr{E}, \mathscr{V})\ \overline{d})$。此外，上链 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$ 自然构成上链 $\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ 上的分次模。因此，自然要在上链 $(\Omega^\bullet(\mathscr{E}), \Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}))$ 上寻找一种 LR_∞-代数结构，使其对应于 $(\boldsymbol{C}^\infty, \mathfrak{X})$ 上的李-Rinehart 代数结构。正如我们现在将要证明的，这种 LR_∞-代数结构确实存在。

再次选取一个分裂（2.5），并利用它将横截向量场和水平形式视为 $\mathscr{E}$ 上通常的向量场和微分形式，正如我们在

第 2.3 小节中所做的那样。我们还将把取值于横截形式的水平形式解释为普通的向量值形式。

法丛 $\mathscr{V}$ 现在是 $\mathscr{E}$ 上的一个（不一定是对合的）分布。其曲率为

$$R : \wedge^2\mathscr{V} \to \mathscr{C}, \quad (Y, Z) \mapsto R(Y, Z) := [Y, Z] - \mathrm{pr}[Y, Z],$$

这里我们用 pr 表示投影： $T\mathscr{E} \to \mathscr{V}$，它可以看作 $\mathscr{E}$ 上的一个向量值 2-形式：

$$R \in \mathscr{V}\Omega^2(\mathscr{E}) \otimes \Gamma(\mathscr{C}) \subseteq \Omega^2(\mathscr{E}, T\mathscr{E}).$$

接下来我们需要将分次模 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$的次数平移 1。相应地，我们将用 $\Omega^\bullet(\overline{\mathscr{E}}, \mathscr{V})[1]$ 表示新的分次模，其次数为 k 的分量是 $\Omega^{k+1}(\mathscr{E}, \mathscr{V})$。我们还需要用到第 16] 节中的向量值形式的 ***Nijenhuis-Richardson*括号** [**16**, ，记作 $[-,-]^{\mathrm{nr}}$。回顾一下，$[-,-]^{\mathrm{nr}}$ 将一个 r-形式和一个 s-形式映射为一个 $(r+s-1)$-形式。

定理 3.8。 一个分裂 *(2.5)* 在

$$\big(\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}), \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})[1]\big)$$

其结构映射定义如下

$$\begin{aligned}
\mathfrak{l}_1\overline{W} &= \overline{d}\,\overline{W}\\
\mathfrak{l}_2\big(\overline{W}, \overline{U}\big) &= -(-)^{|W|}[\overline{W}, \overline{U}]^{\mathrm{fn}} + [[R, \overline{W}]^{\mathrm{nr}}, \overline{U}]^{\mathrm{nr}}\\
\mathfrak{l}_3\big(\overline{W}, \overline{U}, \overline{Z}\big) &= -[[[R, \overline{W}]^{\mathrm{nr}}, \overline{U}]^{\mathrm{nr}}, \overline{Z}]^{\mathrm{nr}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1\overline{\omega} &= \overline{d}\,\overline{\omega}\\
\mathfrak{m}_2\big(\overline{W}|\overline{\omega}\big) &= -(-)^{|W|}\mathcal{L}_{\overline{W}}\overline{\omega} + \iota_{[R,\overline{W}]^{\mathrm{nr}}}\overline{\omega}\\
\mathfrak{m}_3\big(\overline{W}, \overline{U}|\overline{\omega}\big) &= -\iota_{[[R,\overline{W}]^{\mathrm{nr}},\overline{U}]^{\mathrm{nr}}}\overline{\omega}
\end{aligned}$$

对所有 $\overline{W}, \overline{U}, \overline{Z} \in \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})[1]$, 以及所有 $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E})$，而 $\mathfrak{l}_k = \mathfrak{m}_k = 0$ 当 $k > 3$ 时。上同调中诱导的分次李-莱因哈特代数结构（注 *3.4*）与定理 *2.6* 中的结构一致。

注 3.9。定理 3.8 陈述中的 1 次度移位源于我们对 LR_∞-代数结构的约定，采用不同的约定即可消除这一移位（更多详情见 [**29**] ）。

分次 $\Omega^\bullet(\mathscr{E})$-模 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})[1]$ 是射影且有限生成的。因此，定理 3.8 中的 LR_∞-代数结构也可以编码到相应的 Chevalley-Eilenberg 代数中。$\big(\Omega^\bullet(\mathscr{E}), \Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})[1]\big)$ 的 Chevalley-Eilenberg 代数将在下一个定理中描述。

定理3.10。*Theorem 3.8* 的 LR_∞-代数的 *Chevalley-Eilenberg* 代数为

$$\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \wedge^\bullet\mathscr{V}^*)$$

其结构导子由下式给出

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}_1 &= \overline{d}\\
\mathfrak{d}_2 &= d - \overline{d} + \iota_R\\
\mathfrak{d}_3 &= -\iota_R
\end{aligned}$$

而当 $\mathfrak{d}_k = 0$ 对 $k > 3$时。特别地，总导子 $\mathfrak{D} = \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3$ 正是德拉姆微分 d。上同调上诱导的微分分次代数结构（注 *3.6*）与定理 *2.7* 的结构一致。

注 3.11. 定理 3.8 中的 LR_∞-代数与分裂 2.5 的选择无关（相差一个 LR_∞-同构）。这里不提供 LR_∞-态射的概念。我们只指出， LR_∞-代数$\big(\Omega^\bullet(\mathscr{E})$、$\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})$ [1]$\big)$ 与分裂无关这一点，严格来说是由以下事实表达的：定理 3.10 的 Chevalley-Eilenberg 代数中的总导子 $\mathfrak{D} = \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 + \cdots$ 始终相同，即德拉姆微分，与我们选择的分裂无关。更多详情请见 [**29**] 。

定理 3.8 和定理 3.10 为*Vinogradov* 猜想提供了依据：对偏微分方程 $\mathscr{E}_0$ 的解空间进行微分演算时，恰当的范畴应当是水平德拉姆代数（$\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ $\overline{d}$）上的 DG-模的同伦范畴。它们还建议在第 2 节末尾所述的步骤中再增加一步。具体来说

次级化方案（附录）。

(5) 证明，上链 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}\Phi$ 具有一种同伦代数结构，该结构决定了 $\mathbf{\Phi}$ 上的代数结构。

3.3. 次级 A_∞-代数与次级微分算子。 在本节最后一小节中，我们讨论次级标量微分算子。为定义它们，我们遵循第 2 节末尾给出的方案。设 $(\mathscr{E}, \mathscr{C})$ 为一个微分簇。我们希望在 $\mathscr{E}_0$ 的解空间上找到替代构造 Φ 的对象；这里的构造是“标量微分算子”，即从函数到函数的线性微分算子（为简便起见，下文称为微分算子）。

对于方案中的步骤（1），我们必须定义横向微分算子。直观地说，它们应当是仅沿着与 $\mathscr{C}$ 横截的方向求导的微分算子。从（非交换） $\mathbb{R}$-代数 $DO(\mathscr{E})$ 中的微分算子开始

$$\Delta : C^\infty(\mathscr{E}) \to C^\infty(\mathscr{E})$$

$\mathscr{E}$ 上。由于向量场是微分算子（阶数为 1）， $\mathscr{C}$ 的截面在 $DO(\mathscr{E})$ 中张成一个右理想$\Gamma(\mathscr{C}) \cdot DO(\mathscr{E})$。记

$$\mathscr{V}DO := \frac{DO(\mathscr{E})}{\Gamma(\mathscr{C}) \cdot DO(\mathscr{E})}$$

商左 $DO(\mathscr{E})$-模。根据定义， $\mathscr{V}DO$ 是横向微分算子的空间。

对于步骤（2），我们需要注意到， $\mathscr{V}DO$ 带有李代数丛 $\mathscr{C}$的作用。事实确实如此：由 $\mathscr{C}$ 的一个截面左复合，确实构成了这样的作用。因此，$\Omega^\bullet(\mathscr{E})$-模

$$\overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}DO) := \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}) \otimes \mathscr{V}DO$$

是一个 $\mathrm{D}\overline{\mathrm{G}}$（$\Omega^\bullet(\mathscr{E})$ $\overline{d}$）-模，其微分仍记为 $\overline{d}$。

在步骤（3）中，我们将次级微分算子 定义为（$\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}DO)$ $\overline{d}$）的上同调：

$$\boldsymbol{DO} := H^\bullet\big(\overline{\Omega}(\mathscr{E}, \mathscr{V}DO), \overline{d}\big).$$

对于步骤（4），我们必须证明 $\boldsymbol{DO}$ 具有适用于微分算子的代数结构。事实上，我们可以证明 $\boldsymbol{DO}$ 是一个分次结合

代数（请注意，与此相反，$\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \overline{\mathscr{V}DO})$ 一般并不是微分分次代数，因为它不具有自然的结合乘积）。为此，同时执行该流程的步骤（5）是个好主意（参见上一小节末尾）。此处相关的同伦代数是 A_∞-代数。

定义 3.12. A_∞-代数 [**13, 12**] 是一个分次向量空间 U，配备一列 $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 次数为 1 的多重线性映射：

$$\mathfrak{a}_k : \big(\bigotimes^k U\big)^\bullet \to U^{\bullet+1}, \quad (u_1, \dots, u_k) \mapsto \mathfrak{a}_k(u_1, \dots, u_k)$$

满足以下高阶结合条件：

$$\sum_{r+s=k}\sum_{j=1}^{r+s}(-)^{|u_1|+\cdots+|u_j|}\mathfrak{a}_{s+1}\big(u_1, \dots, u_j, \mathfrak{a}_s(u_{j+1}, \dots, u_{j+r}), u_{j+r+1}, \dots, u_{r+s}\big) = 0$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及所有 u_1、.....、$u_k \in U$ 均成立。

由上述定义可知，$\mathfrak{a}_1$ 是一个微分，并且相对于 $\mathfrak{a}_2$ 它是一个导子。此外，$\mathfrak{a}_2$ 在 $\mathfrak{a}_3$ 所编码的同伦意义下是结合的。特别地，$\mathfrak{a}_2$ 在上同调 $H^\bullet(U, \mathfrak{a}_1)$ 中诱导出一个真正的结合乘积（经过移位）。

定理3.13。分次向量空间 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \overline{\mathscr{V}DO})[1]$ 可以赋予一种 A_∞-代数结构 $\mathfrak{a}$，使得 $\mathfrak{a}_1 = \overline{d}$。此外，在上同调 $\boldsymbol{DO}$ 中诱导的结合乘积是规范的。

上述定理支持将 $\boldsymbol{DO}$ 解读为次级 *DO*，即（对）$\mathscr{E}_0$ 解空间上的微分算子（作适当替代）。

我们在论文结尾概述定理 3.13 的证明。正如我们将看到的，该证明也将提出另一种次级化方案。从现在起，我们假定读者对分次几何有一定了解（例如，参见 [**15**]）。我们先回顾同伦代数中的一项标准技术，即同伦传递（参见[**14, 22**]）。其思想是，可以沿着收缩数据传递同伦代数。一组收缩数据 是如下图表

$$h\circlearrowright (A, \delta_A) \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (B, \delta_B) \tag{3.4}$$

其中

(1) (A, δ_A) 和 (B, δ_B) 是上链复形；(2) p, j 是上链映射；(3) $h: A^\bullet \to A^{\bullet-1}$ 是一个同伦，

使得

$$pj = \mathrm{id}_B \quad \text{and} \quad jp = [\delta_A, h]$$

并且还满足以下边条件：

$$ph = hj = h^2 = 0.$$

特别地，p、j 互为同伦逆的同伦等价，并且

$$H^\bullet(A, \delta_A) \cong H^\bullet(B, \delta_B).$$

定理 3.14（同伦传递）。设(A, δ_A) 为一个结合 *DG* 代数，且设（*3.4*）是上链复形(B, δ_B)上的一组收缩数据。那么，$B[1]$ 可以被赋予一个 A_∞-代数结构 $\mathfrak{a}$，该结构由

在 A 中的结合乘积和收缩数据唯一确定，使得 $\mathfrak{a}_1 = \delta_B$。此外，$(A, \delta_A)$ 和$(B, \mathfrak{a})$ 在上同调$(A, \delta_A) \cong H^\bullet(B, \delta_B)$中诱导出相同的分次结合代数结构。

L_∞代数的同伦传递定理有一个版本 [**6, 22**]，而对于 LR_∞代数也有一个稍微复杂一些的版本（详情参见 [**30**] ）。实际上，定理 2.6 中的 LR_∞代数可以通过同伦传递得到。具体而言，设（$\mathscr{E}$，$\mathscr{C}$）是一个微分簇。考虑将李代数丛$\mathscr{C} \to \mathscr{E}$的纤维次数加一后得到的 DG流形 $\mathscr{C}[1]$。显然，$C^\infty(\mathscr{C}[1]) = \Omega^\bullet(\mathscr{E})$，且 $\mathscr{C}[1]$ 上的上同调向量场是水平德拉姆微分 $\overline{d}$。数对 $\big(C^\infty(\mathscr{C}[1]) \quad \mathfrak{X}(\mathscr{C}[1])\big)$ 是一个 DG李-林哈特代数。$\mathfrak{X}(\mathscr{C}[1])$ 中的微分是分次向量场与水平德拉姆微分的分次对易子。此外，分裂（2.5）唯一确定一组收缩数据

$$h \circlearrowright \mathfrak{X}(\mathscr{C}[1]) \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}) \tag{3.5}$$

我们可以利用这些数据，从（$C^\infty(\mathscr{C}[1])$ $\mathfrak{X}(\mathscr{C}[1])$）上的 DG李-林哈特代数结构，在 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V})[1]$ 上构造一个 LR_∞- 代数结构（详见 [**30**] ）。这意味着，次级向量场（$\boldsymbol{C^\infty, \mathfrak{X}}$）上的 Lie-Rinehart 代数结构，等价地说，是由 DG 李-林哈特代数（$C^\infty(\mathscr{C}[1])$ $\mathfrak{X}(\mathscr{C}[1])$）在上同调中诱导的结构。次级 DO 也有类似结果。具体而言，考虑 DG 流形 $\mathscr{C}[1]$ 上分次微分算子的空间 $DO(\mathscr{C}[1])$。它是一个结合DG代数，其微分是分次微分算子与水平德拉姆微分的分次对易子。现在，一个分裂（2.5）连同某些我们不作描述的附加数据，唯一确定了收缩数据

$$h \circlearrowright DO\big(\mathscr{C}[1]\big) \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \overline{\Omega}^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}DO) \tag{3.6}$$

我们可以利用这些数据，从 $DO(\mathscr{C}[1])$ 上的结合DG代数结构，在 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}DO)[1]$ 上构造一个 A_∞-代数结构。特别是，次级微分算子上存在分次结合代数结构

$$\boldsymbol{DO} = H^\bullet\big(\overline{\Omega}(\mathscr{E}, \mathscr{V}DO), \overline{d}\big) \cong H^\bullet\big(DO(\mathscr{C}[1])\big)$$

由 $DO(\mathscr{C}[1])$ 上的结合DG代数结构或 $\Omega^\bullet(\mathscr{E}, \mathscr{V}DO)$ 上的 A_∞- 代数结构所诱导。

这一讨论提出了以下替代方案，用于寻找微分几何中给定构造 Φ 的次级类比。

次级化方案。

(1) 将构造 Φ 应用于 *DG* 流形 $\mathscr{C}[1]$（当 Φ 为“向量场”时，得到 $\mathfrak{X}(\mathscr{C}[1])$；当其为“微分算子”时，得到 $DO(\mathscr{C}[1])$）。(2) 注意，$\Phi(\mathscr{C}[1])$ 上典范地带有一个由 $\mathscr{C}[1]$ 上的上同调向量场 $\overline{d}$ 诱导的微分（当 Φ 为“向量场”或“微分算子”时，该微分分别是向量场或微分算子与 $\overline{d}$的分次对易子）。(3) 将 $\boldsymbol{\Phi}$ 定义为 $\Phi(\mathscr{C}[1])$ 的上同调（当 Φ 为“向量场”或“微分算子”时，$\boldsymbol{\Phi}$ 分别为 $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ 或 $\boldsymbol{DO}$）。(4) 注意，由于与微分相容，$\Phi(\mathscr{C}[1])$ 上的代数结构会在 $\boldsymbol{\Phi}$ 上诱导出相同的代数结构（当 Φ 为“向量

场”或“微分算子”时，$\mathbf{\Phi} = \mathfrak{X}$或 $\mathbf{\Phi} = \boldsymbol{DO}$分别是分次李-莱因哈特代数或分次结合代数）。

注 3.15。请注意，在上文另一种次级化方案中，并没有第 22 页附录 (5) 的对应内容。原因在于，根据定义，上链复形 $\Phi(\mathscr{C}[1])$ 确实具有与 Φ 相同的（严格）代数结构，因此在这种情况下，无需在上链层面处理直至同伦的代数结构。尽管如此，根据同伦传递定理，上同调具有同类型的代数结构，但仅在同伦意义下成立。此外，带有同伦意义下代数结构的上同调，与带有代数结构的上链拟同构。换言之，人们可以选择在较大的空间（上链）上使用较简单的代数结构，也可以在较小的空间（上同调）上使用较复杂的代数结构（同伦意义下的代数结构）。

参考文献

[1] K. Behrend 和 P. Xu，《可微叠与 gerbe》，J. Sympl. Geom. 9 (2011)，285–341；电子预印本：arXiv:math/0605694。[2] A. V. Bocharov 等，《数学物理微分方程的对称性与守恒律》，Transl. Math. Mon. 182，美国数学会，普罗维登斯，1999。[3]B. Güneysu 和 M. J. Pflaum，《形式可积偏微分方程的形式解空间的形式有限维流形结构》；SIGMA 13 (2017)，003（44 页）；电子预印本：arXiv:1308.1005。[4] M. del Hoyo，《Lie 群胚与可微叠》，Port. Math. 70 (2013)，161–209；电子预印本：arXiv:1212.6714。[5] J. Huebschmann，《高阶同伦与 Maurer-Cartan 代数：Quasi-Lie-Rinehart、Gerstenhaber 与 Batalin-Vilkovisky 代数》，载于：《辛几何与泊松几何的广度》，Progr. in Math. 232 (2005)，237–302；电子预印本：arXiv:math/0311294。[6] J. Huebschmann，《李代数扰动引理》，载于：纪念 M. Gerstenhaber 80 岁及 J. Stasheff 70 岁寿辰文集，Progr. in Math. 287 (2010)，159–179；电子预印本：arXiv:0708.3977。[7] J. Huebschmann，《多导子 Maurer-Cartan 代数与 sh-Lie-Rinehart 代数》，电子预印本：arXiv:1303.4665。[8] L. Kjeseth，《同伦 Lie-Rinehart 对的同伦 Rinehart 上同调》，Homol. Homot. Appl. 3 (2001)，139–163。[9] L. Kjeseth，《同伦 Lie-Rinehart 分解与经典 BRST 上同调》，Homol. Homot. Appl. 3 (2001)，165–192。[10] I. S. Krasil’shchik、V. V. Lychagin 和 A. M. Vinogradov，《射流空间几何与非线性偏微分方程》，Gordon and Breach Science Publishers，费城，1986。[11] I. S. Krasil’shchik 和 A. M. Verbovetsky，《数学物理方程中的同调方法》，数学高级读本，Open Education & Sciences，奥帕瓦，1998；电子预印本：arXiv:math/9808130。[12] T. Lada 和 M. Markl，《强同伦李代数》，Comm. Algebra 23 (1996) 2147–2161；电子预印本：arXiv:hep-th/9406095。[13] T. Lada 和 J. Stasheff，《物理学家 sh 李代数导论》，Int. J. Theor. Phys. 32 (1993)，1087–1103；电子预印本：arXiv:hep-th/9209099。[14] J.-L. Loday 和 B. Vallette，《代数歌剧》，Grundlehren Mat. Wiss. 346，Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，2012。[15] R. A. Mehta，《超群胚、双结构与等变上同调》，博士论文，加利福尼亚大学伯克利分校，2006，第 2 章；电子预印本：arXiv:math.DG/0605356。[16] P. W. Michor，《微分几何专题》，Graduate Studies in Math. 93，美国数学会，普罗维登斯，2008，第 IV 章，第 16 节。[17] I. Moerdijk 和 J. Mrčun，《叶层与 Lie 群胚导论》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics 91，剑桥大学出版社，剑桥，2003。

[18] B. Töen，《高阶与导出叠：全局概览》，载于：代数几何——西雅图 2005，Proc. Sympos. Pure Math. **80** 2006 435 487 0604504 ( )，–；[19] **1** 2014 电子预印本 arXiv:math/ B. Töen，《导出代数几何》，EMS Surv. Math. Sci. ( )，153–240；电子预印本：arXiv:1401.1044。[20] B. Toën 和 G. Vezzosi，《同伦代数几何 I：拓扑斯理论》，Adv. Math. 193 (2005)，257–372；电子预印本：arXiv:math/0207028。[21] B. Toën 和 G. Vezzosi，《同伦代数几何 II：几何叠及其应用》，Mem. Amer. Math. Soc. 193 (2008)；电子预印本：arXiv:math/0404373。[22] B. Vallette，《代数 + 同伦 = 拟运算子》，载于：《辛几何、泊松几何与非交换几何》（T. Egichi 和 Y. Eliashberg 编），MSRI Publ. 62，剑桥大学出版社，纽约，2014；电子预印本：arXiv:1202.3245。[23] G. Vezzosi，《导出临界轨迹上的基本结构》，Diff. Geom. Appl. 71 (2020)，101636（11 页）。[24] A. M. Vinogradov，《局部对称性与守恒律》，Acta Appl. Math. 2 (1984)，21–78。[25] A. M. Vinogradov，《$\mathscr{C}$-谱序列、拉格朗日形式主义与守恒律 I、II》，J. Math. Anal. Appl. 100 (1984)，1–129。[26] A. M. Vinogradov，《次级微积分导论》，载于《次级微积分与上同调物理学》，M. Henneaux、I. S. Krasil'shchik 和 A. M. Vinogradov 编，Contemp. Math. 219，美国数学会，普罗维登斯，1998，第 241–272 页。[27] A. M. Vinogradov，《偏微分方程的上同调分析与次级微积分》，Transl. Math. Mon. 204，美国数学会，普罗维登斯，2001，第 5 章。[28] L. Vitagliano，《次级微积分与协变相空间》，J. Geom. Phys. 59 (2009)，426–447；电子预印本：arXiv:0809.4164。[29] L. Vitagliano，《叶状结构的强同伦李–林哈特代数》，Commun. Contemp. Math. 16 (2014)，1450007（49 页）；电子预印本：arXiv:1204.2467。[30] L. Vitagliano，《叶状结构的强同伦结合代数》，Commun. Contemp. Math. 17 (2015)，1450026（34 页）；电子预印本：arXiv:1212.1090。[31] L. Vitagliano，《同伦李–林哈特代数的表示》，Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 158 (2015)，155–191；电子预印本：arXiv:1304.4353。DipMat，萨莱诺大学，via Giovanni Paolo II n°123，84084 菲夏诺 (SA)，意大利。电子邮箱：fpugliese@unisa.it DipMat，萨莱诺大学，via Giovanni Paolo II n°123，84084 菲夏诺 (SA)，意大利。电子邮箱：sparano@unisa.it DipMat，萨莱诺大学，via Giovanni Paolo II n°123，84084 菲夏诺 (SA)，意大利。电子邮箱：lvitagliano@unisa.it