arXiv:2301.02041v2 [math.RA] 1 Nov 2023

关于有限环无平方因子分母交换概率的一则注记

Andrew Mendelsohn

电气与电子工程系，伦敦帝国理工学院，伦敦，SW7 2AZ，英国。
andrew.mendelsohn18@imperial.ac.uk

摘要。本文证明，有限环的交换概率不可能是分母为无平方因子的分数，从而解决了 Buckley 和 MacHale 的猜想。

1 引言

设 G 为有限群，U 表示均匀分布。记 G、P_G 的交换概率为

$$P_G := Pr_{a,b\leftarrow U(G)}(ab = ba).$$

另一种刻画方式是

$$P_G = \frac{1}{|G|^2}|\{(x, y) \in G^2 : xy = yx\}|.$$

Joseph 提出了以下猜想，其中 $\mathcal{G}$ 是所有有限群 [1] 的交换概率集合：

A. $\mathcal{G}$ 的所有极限点都是有理数。B. 集合 $\mathcal{G}$ 按 $>$ 良序。C. 集合 $0 \cup \mathcal{G}$ 是闭集（即包含其所有聚点）。

在 [2]，中，Eberhard 解决了猜想 A 和 B；在 [3] 中，猜想 C 得到了解决。

可以将交换概率的定义推广到有限环：令

$$P_R = \frac{1}{|R|^2}|\{(x, y) \in R^2 : xy = yx\}| = \frac{1}{|R|^2}|\{(x, y) \in R^2 : xy - yx = 0\}|.$$

在 [4], 中提出了以下猜想，其中 $\mathcal{R}$ 是所有有限环 R上的集合 P_R：

1. 当 $n \in \mathbb{N}$ 为无平方因子时，$1/n \notin \mathcal{R}$ 。2. $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}$。3. $\mathcal{R}$ 与当 G 遍历所有类至多为 2 阶的有限幂零群时 P_G 的取值集合重合。4. $\mathcal{R}$ 的所有极限点都是有理数。

5. 对于每个 $0 < t \leq 1$，存在 $\epsilon_t > 0$，使得 $\mathcal{R} \cap (t - \epsilon_t, t) = \emptyset$。6. $\mathcal{R}$ 不包含其任何聚点。

请注意，猜想 4、5 和 6 对应于 Joseph 的猜想。此外，若猜想 2 或 3 正确，则可推出猜想 4 和 5，因为 Eberhard 证明了 $\mathcal{G}$ 具有有理极限点且是良序的。在 [5], 中，猜想 2 实际上已得到解决，因此猜想 4 和 5 也已解决。此外，猜想 3 得到了部分解决：作者证明，当 G 遍历所有至多为 2 阶的有限幂零群时，$\mathcal{R}$ 是 P_G 取值集合的子集。我们据此得出，猜想 1、3 和 6 尚未解决。

在本文中，我们解决了猜想 1。

2 预备知识与已有结果

定义 1. 若两个有限群 G、H 满足 $G/Z(G) \cong H/Z(H)$ 和 $G' \cong H'$，且下图交换，则称它们同斜：

$$\begin{array}{ccc} G/Z(G) \times G/Z(G) & \longrightarrow & H/Z(H) \times H/Z(H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G' & \longrightarrow & H' \end{array}$$

同斜保持幂零类和交换概率 [10]。茎群是在给定同斜类中阶最小的群。众所周知，如果 G 是一个茎群，那么 $Z(G) \leq G'$。有关同斜的更多信息，请参见 [11]。

下面陈述我们将在下文中用到的文献已有结果。

引理 1。*[5]* $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}_{n,\ 2}$，其中 $\mathcal{G}_{n,\ 2}$ 是所有幂零类至多为 2 阶的有限幂零群的交换概率集合。

该结论证明如下：设 R 是一个有限环。通过赋予其乘法规则 $(a, x)(b, y) = (0, ab)$，我们可以将 $R \oplus R$ 变为一个阶 3 的幂零环。通过赋予其二元运算 $a \circ b = a + b + ab$，可以将该环变为一个 G_R 阶至多为 2 的幂零群。这两种变换都保持交换概率不变。因此，$\mathcal{R} \setminus \{1\}$ 的取值是 P_G 的取值的子集，其中 G 遍历幂零类恰为 2 的幂零群。注意，如果 R 的大小为 n，那么所得群 G_R 的阶为 n^2；如果 R 是非交换的，则所得群是非阿贝尔的。

引理 2. *[7]* $\Pr(G) = \frac{1}{|G'|}\left(1 + \frac{|G'|-1}{|\overline{G\ Z\ G}\cdot()|}\right)$ 当且仅当 G 是幂零的。

引理 3. *[6]* 若 G 是幂零群，则 $P_G \neq \frac{1}{p}$。

3 结果

定理1. 对所有 $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，$\frac{1}{p} \notin \mathcal{R}$。

证明。根据引理 1， $\mathcal{R}$ 包含于至多为 2 阶的有限幂零群的交换概率集合中。根据引理 3，对于任意素数 p，该集合不包含 $\frac{1}{p}$。

□

将某个素数 p 的素数幂阶环的交换概率集合记为 $\mathcal{R}_p$。

命题 1. 对任意素数 $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 和 $n \in \mathbb{N}_{>1}$，$\frac{1}{n} \notin \mathcal{R}_p$。

证明。根据引理 1，我们只需考虑至多为 2 阶的有限幂零群的交换概率。根据引理 2，我们进一步知道，至多为 2 阶的有限幂零群的交换概率可以用导出子群和中心来表示。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，有

$$\frac{1}{|G'|}\left(1+\frac{|G'|-1}{|G:Z(G)|}\right)=\frac{1}{n}.$$

根据上文所述 [5] 的构造，不失一般性，设对于某个偶正整数 e，有 $|G| = p^e$。那么 $Z（G）= p^f$，且 $G' = p^g$ 满足 $0 < g \leq f < e$ （因为 G 至多为 2 阶）。于是

$$\frac{1}{n} = p^{-g}\left(1+\frac{p^g-1}{p^{e-f}}\right) = p^{-g}+\frac{p^g-1}{p^{e-f+g}} \tag{1}$$

$$= \frac{p^{e-f}+p^g-1}{p^{e-f+g}}. \tag{2}$$

要使其成立，分子必须被某个幂 p^h 整除，其中 $h > 0$；但这不可能成立：若成立，则对于某个整数 $k \neq 0$，必有 $p^{e-f} + p^g - 1 = kp$。但这样一来， $-1 \equiv 0$ 模 p，矛盾。

□

定理 2。 $\frac{\ell}{n} \notin \mathcal{R}$ 对于任意无平方因子的 $n \in \mathbb{N}_{>1}$ 和满足最大公约数$(\ell, n) = 1$的 $\ell < n$。

证明。任意有限环都可以转化为一个至多为 2 阶的幂零群，使得该环的交换概率等于该群的交换概率。上述构造将交换环转化为 1 阶群，将非交换环转化为一个至多为 2 阶的非阿贝尔群，因此其阶恰为 2。该群的阶是该环的阶的平方，因此该群的西洛子群的阶至少是某个素数的平方。由于该群是幂零群，它可以写成其西洛子群的直积，这些子群的阶都至多为 2 阶，并且该群的交换概率等于其西洛子群的交换概率的乘积。因此，接下来只需分析方程

$$\frac{\ell}{n} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{e_i-f_i}+p_i^{g_i}-1}{p_i^{e_i-f_i+g_i}},$$

其中 $m > 1$ 与 p_i 不同，且 e_i、f_i 和 g_i 与前文相同。通过同斜，我们可以用一个二阶幂零（茎）群 G 替换 G_R，其交换概率相同且阶最小。因此，我们可以假设 $Z(G_R) = G'_R$

（注意，同斜保持幂零类，且 G_R 为二阶幂零），此外，所有西洛子群均非阿贝尔。上述等式可简化为

$$\frac{\ell}{n} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{e_i'-f_i'} + p_i^{f_i'} - 1}{p_i^{e_i'}},$$

其中，指数 e_i'、f_i'对应于群 G。现在，我们按 $|G_R|$的素因子个数进行归纳，记为 m。

根据 [9], 的引理 14，若 $P_{G_R} = \frac{\ell}{n}$ 为最简分数，则 n 的素因子恰好是 $|G_R|$ 的素因子。若 $m = 1$，则已知对于任意素数 q 和无平方因子整数 n，都有 $\frac{\ell}{n} \notin \mathcal{R}_q$（事实上，根据 [4]的定理 9，我们知道这对 $m \leq 69$ 成立）。假设该命题对不超过 $n = k - 1$的情形成立，并考虑情形 $n = k$；反设交换概率等于 $\frac{\ell}{n}$，其中 n 为无平方因子整数，且 $\ell \leq n$ 满足最大公约数$(\ell, n) = 1$；不失一般性，设 n 的素因子构成集合 p_i、$i = 1$、.....、k:

$$\frac{\ell}{n} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{e_i'-f_i'} + p_i^{f_i'} - 1}{p_i^{e_i'}}.$$

整理如下:

$$\frac{\ell \cdot p_k^{e_k'}}{n \cdot (p_k^{e_k'-f_k'} + p_k^{f_k'} - 1)} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i^{e_i'-f_i'} + p_i^{f_i'} - 1}{p_i^{e_i'}}.$$

将左边化为最简分数，可得

$$\frac{\ell \cdot p_k^{e_k''}}{n' \cdot (p_k^{e_k'-f_k'} + p_k^{f_k'} - 1)} = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{p_i^{e_i'-f_i'} + p_i^{f_i'} - 1}{p_i^{e_i'}},$$

其中 n' 不能被 p_k整除。右边的交换概率有 $k-1$ 个素因子；因此根据归纳假设，左边分母没有平方因子。但左边分母中还有 $p_k^{e_k'-f_k'} + p_k^{f_k'} - 1$，它不能被 p_k 整除；根据 [9] 的引理 14，其素因子必须等于集合 p_i，其中 $i = 1$、...、$k-1$；此外，根据关于 ℓ的假设，这些因子与 ℓ之间不可能发生约分。但这样一来，至少存在一个指标 j，使得 $n' \cdot (p_k^{e_k'-f_k'} + p_k^{f_k'} - 1)$ 中的某个素因子 p_j 的重数至少为二，这就产生了矛盾。

□

注 1. 由于 $\frac{1}{p}$ 是 $\mathcal{R}_p$的聚点，因此对所有 n，$\frac{1}{n}$ 都是 $\mathcal{R}$ 的聚点。因此，上述结果意味着，$\mathcal{R}$ 的许多聚点并不包含在 $\mathcal{R}$中。该结果不仅解决了本文开篇提出的第一个猜想，也推进了第六个猜想的研究。

参考文献

1. Joseph, K. 关于代数结构中交换性的若干猜想。
The American Mathematical Monthly. 84, 550-551 (1977), https://doi.org/10.1080/00029890.1977.11994411. 2. Eberhard, S. 有限群的交换概率。
Bulletin Of The London Mathematical Society **47**, 796 808 2015 . - ( ).

3. Browning, T. 有限群交换概率的极限点。(arXiv, 2022), https://arxiv.org/abs/2201.09402. 4. Buckley, S. & MacHale, D. 比较群与环的交换概率。(arXiv, 2014), https://archive.maths.nuim.ie/staff/sbuckley/Papers/bm_g-vs-r.pdf. 5. Jur´a˘s, M. & Ursul, M. 有限群与有限环中的交换概率。
Journal Of Algebra Combinatorics Discrete Structures And Applications. (2022), https://jacodesmath.com/index.php/jacodesmath/article/view/148. 6. Castelaz, A. 有限群的交换度。(维克森林大学, 2010), https://books.google.co.uk/books?id=QYxBnQAACAAJ. 7. Nath, R. & Das, A. 交换度的一个下界。
Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo **59** 137 142 2010, 4 . pp. - ( ). 8. Buckley, S., MacHale, D. & Sh, A. 含有许多可交换元素对的有限环。(2014), https://archive.maths.nuim.ie/staff/sbuckley/Papers/bms.pdf. 9. Buckley, S. & MacHale, D. 满足 Pr(G) = 1的群, https://archive.maths.nuim.ie/staff/sbuckley/Papers/bm_GpCP_1_3.pdf. 10. Lescot, P. 有限群的同斜类与交换度。
Journal Of Algebra **177**, 847 869 1995 . - ( ).

11. Berkovich, Y. 素数幂阶群，第 1 卷。(De Gruyter, 2008), https://doi.org/10.1515/9783110208221.