arXiv:2301.02043v2 [math.GR] 7 Sep 2023

轨形辫群

S.K. ROUSHON

Abstract. 二维轨形的轨形辫群最初在 [1] 中定义，目的是将某些 Artin 群理解为适当轨形辫群的子群。我们在 [17] 和 [18], 中对轨形辫群作了更详细的研究，以证明轨形辫群的 Farrell-Jones 同构猜想，并由此得到某些 Artin 群的该猜想。本文运用 [17] 和 [18], 中的结果，研究轨形辫群的两个方面。首先，我们证明，由轨形中一类一般子轨形的包含映射所诱导的轨形辫群同态是单射。随后，我们证明，大多数轨形辫群的中心是平凡的。

1. Introduction

设 M 是一个连通二维轨形（见 [20]）。考虑 M^n中的下列超平面补空间。

$$PB_n(M) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n \mid x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j\}.$$

$PB_n(M)$ 是一个轨形，称为由 M 中两两不同的点组成的有序 n 元组的构形空间 。对称群S_n 通过置换坐标，对 $PB_n(M)$ 上的 n 个字母有显然的作用。商轨形$PB_n(M)/S_n$ 记作 $B_n(M)$。商映射 $PB_n(M) \to B_n(M)$ 是一个轨形覆盖映射，其轨形覆盖变换群为 S_n 。这给出了以下轨形基本群的正合列。

$$1 \longrightarrow \pi_1^{orb}(PB_n(M)) \longrightarrow \pi_1^{orb}(B_n(M)) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1. \tag{1.1}$$

定义 1.1。 *(*[1]*)*轨形基本群 $\pi_1^{orb}(PB_n(M))$，记作$\mathcal{PB}_n(M)$，称为 M 上由 n 股组成的纯轨形辫群；轨形基本群 $\pi_1^{orb}(B_n(M))$，记作 $\mathcal{B}_n(M)$，称为 M 上由 n 股组成的轨形辫群。

在特例 $M = \mathbb{R}^2$ 中，经典地，相应的群分别称为纯辫群和辫群。（纯）辫群最初由 Artin 于 [2]，定义，随后 Fox 和 Neuwirth 于 [11] 将其推广到二维流形的情形。在 [1], 中，Allcock 进一步推广了这一概念，并考虑了上述二维轨形，以此为某些 Artin 群提供辫型图示表示。关于 Artin 群的一些背景资料，参见 [22], [6] 和 [5] 。

Date: 2023年9月8日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：次要分类：*Key words and phrases.* 辫群、构形空间、轨形辫群。

（纯）辫群的研究是数学中的一个重要课题。过去几十年间，相关研究成果丰硕，揭示了它与数学和物理学多个领域的联系。除上述文献外，早期的一些基础性著作可参见 [10], [9], [3],[4], [12] 和 [13]。

令 $\mathcal{C}_0'$ 为所有至少有一个穿孔或一个边界分支的零亏格连通二维流形构成的类，令 $\mathcal{C}_1'$ 为所有亏格大于或等于一的连通二维流形构成的类。在这两种情况下，若穿孔有无限多个，则假设它们是通过移除一个离散子集得到的。因为我们需要确保流形的紧致部分中只有有限多个穿孔。

令 $\mathcal{C}_0$ 和 $\mathcal{C}_1$ 分别为所有仅具有锥型奇点、且其底空间分别属于 $\mathcal{C}_0'$ 和 $\mathcal{C}_1'$ 的二维轨形所构成的类。

Fadell 和Neuwirth 关于流形的著名纤维化定理（见 [10]）为更好地理解流形的构形空间提供了一种重要方法。作为纤维化定理的推论，对每个 $S \in \mathcal{C}_0' \cup \mathcal{C}_1'$，都可以导出以下正合列。

$$1 \longrightarrow \pi_1(PB_{n-r}(\widetilde{S})) \longrightarrow \pi_1(PB_n(S)) \longrightarrow \pi_1(PB_r(S)) \longrightarrow 1. \tag{1.2}$$

上文中，同态 $\pi_1(PB_n(S)) \to \pi_1(PB_r(S))$ 是由投影 $S^n \to S^r$ 到前 r 个坐标的映射，限制在 $PB_n(S)$ 上所诱导的。而$\sim S = S - \{r - 个点\}$，即 $PB_r(S)$ 中一个基点上方的纤维。回想一下，根据 Fadell-Neuwirth 纤维化定理（见 [10]），映射 $PB_n(S) \to PB_r(S)$ 是一个纤维化。由该纤维化的同伦群长正合列得到的一个重要推论是，对于所有 $k \geq 2$，都有 $\pi_k(PB_n(S)) = 1$。这就是上面的长正合列采用式 (1.2) 中简短形式的原因。但对于 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$，相应的结论——对于所有 $k \geq 2$，都有 $\pi_k^{orb}(PB_n(M)) = 1$——目前尚未得到证明。参见 [18] 中的无球面性猜想。我们给出了一些满足这一性质的轨形例子（见 [18]中的命题 2.4）。此外，在轨形范畴中，并不存在合适的纤维化概念，能够使 $PB_n(M) \to PB_r(M)$ 成为纤维化。相反，预期 $PB_n(M) \to PB_r(M)$ 是一种拟纤维化（见 [17] 以及 [18]中的拟纤维化猜想）。尽管如此，在 [17] 和 [18] 中，我们证明了存在以下纯轨形辫群的正合列，它与式 (1.2) 类似，分别适用于 $M \in \mathcal{C}_0$和 $M \in \mathcal{C}_1$。

$$1 \longrightarrow \mathcal{PB}_{n-r}(\widetilde{M}) \longrightarrow \mathcal{PB}_n(M) \longrightarrow \mathcal{PB}_r(M) \longrightarrow 1. \tag{1.3}$$

这里，$\widetilde{M}$ 是从 M 中移除 r 个正则点后得到的，也就是说，它是 $PB_r(M)$的一个正则（基）点上的纤维。

结合 Allcock 的工作（[1]），上述正合列是证明所有（纯）轨形辫群都满足 Farrell-Jones 同构猜想所必需的，并由此证明一类有限型、复型和仿射型 Artin 群也满足该猜想（参见 [17] 和 [18]）。

关于（1.3）的另一项应用，参见 [19] 或注 4.1。

在本文中，我们将利用正合列 (1.1) 和 (1.3) 研究（纯）轨形辫群的一些其他性质。更具体地说，我们将证明：

对于 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$，由连通子轨形 N of M 的包含映射在其（纯）轨形辫群上诱导的同态，只要 $\pi_1^{orb}(N) \to \pi_1^{orb}(M)$ 是单射的，就都是单射（定理 2.5）。此外，我们将证明，除了少数情形外，$\mathcal{PB}_n(M)$ 和 $\mathcal{B}_n(M)$ 的中心都是平凡的（定理 2.7）。这些结果及其证明受到了 Paris 和 Rolfsen ([16]) 关于二维流形的一些类似结果的启发。

2. Main results

我们首先给出二维轨形的子轨形的如下定义。先回顾一下，在二维情形中，轨形的底空间具有流形结构（见 [20]）。

定义 2.1. 设 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$。$M$ 的子轨形 N 是 M 的底空间中的一个二维子流形，并满足以下条件。

- $\overline{N - N}$ 是一个一维流形，也就是说，$\overline{M - N}$ 不含任何孤立点。我们将 $N - N$的各个分支称为 N（或 N）的边界分支 。
- N 的任何边界分支都不包含$\overline{M}$的任何锥点。
- N 的一个边界分支要么位于 M 的内部，要么是 M的一个边界分支。
- N 具有由 M诱导的轨形结构。

2.1. **单射性**。我们首先确定 M的子轨形 N，使得包含映射$N \subset M$ 在它们的（纯）轨形辫群之间诱导单射同态。一个必要条件是，在轨形基本群层面上，包含映射 $N \subset M$ 诱导单射同态，因为对于任意轨形 X，$\mathcal{PB}_1(X) = \pi_1^{orb}(X)$。我们将看到，这个条件也是充分的。

定义 2.2。设 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$。如果子轨形 N 是 M 的子轨形，且$\overline{M - N}$ 的各个分支满足以下条件，则称其为良好 。

- 如果某个分支不包含任何锥点，则它不是单连通的。
- 如果某个分支的底空间是单连通的，则该分支至少包含两个锥点。

注记 2.3. 在命题 3.1 中我们将看到，如果 $\pi_1^{orb}(N)$ 是无限的，那么我们需要 N 良好，以确保 $\pi_1^{orb}(N) \to \pi_1^{orb}(M)$ 是单射。注意，在定义 2.2 中，如果 $\pi_1^{orb}(N)$ 是有限的，那么 N 要么是光滑圆盘，要么是内部有一个锥点的圆盘。若 N 是光滑圆盘，则无须证明。对于第二种情况，我们将在命题 3.1 中证明，$\pi_1^{orb}(N) \to \pi_1^{orb}(M)$ 仍然是单射。

我们再补充一条相关注记，后文会用到。

注记2.4. 设 N 是 M 的一个子轨形，且 $p \in N$ 是一个内部点。那么，$\widetilde{M - N} = \widetilde{M - N}$ 显然是 $M := M - \{p\}$的一个子轨形。此外，由于$\widetilde{M - N} = \widetilde{M - N}$，如果 N 在 M 中是良好的，那么 N 在 M 中也良好。

设 $n \leq m$ 和 $N \subset M$ 是一个连通子轨形。选取 m 个正则点$s_1, s_2, \ldots\ldots, s_m \in M$，使其位于 M的内部，并且 $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ 位于 N的内部，而 $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots\ldots, s_m$ 位于 $M - N$的内部。我们分别考虑以基点 $(s_1, s_2, \ldots\ldots, s_m)$ 和 $(s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n)$ 为基点的 $PB_m(M)$ $(B_m(M))$ 和 $PB_n(N)$ $(B_n(N))$ 的轨形基本群。

定理 2.5。 设 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ 和 N 是 M的连通良好子轨形。则下列包含映射诱导的同态都是单射。

$$\mathcal{PB}_n(N) \to \mathcal{PB}_m(M). \tag{2.1}$$

$$\mathcal{B}_n(N) \to \mathcal{B}_m(M). \tag{2.2}$$

Paris 和 Rolfsen 在 [16] 中证明了上述定理适用于二维流形 M 和子流形 N，并假设 $M - N$ 的任何分支都不是圆盘。更多详情请参见 [16] 。

2.2. **中心**。 我们从以下定义开始。

定义 2.6。 简单曲面 S 是一个连通的二维流形，其基本群具有非平凡中心。换言之， S 属于以下流形或其内部。

$$\mathbb{RP}^2, C := \mathbb{S}^1 \times I, T := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,$$

$$Mb := \mathbb{S}^1 \hat{\times} I(\text{Möbius band}), K := \mathbb{S}^1 \hat{\times} \mathbb{S}^1(\text{Klein bottle}).$$

注意， $\mathbb{RP}^2$ 不属于 $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$。

Paris 和 Rolfsen（[16]）证明，紧致大曲面的（纯）曲面辫群的中心是平凡的（参见 [16] 中的 § 1.3 中的定义）。我们将在以下定理中证明，（纯）轨形辫群也有类似的结果。

定理 2.7。 设 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ 并假设如下条件成立。

- 若 M 没有锥点，则它不是简单曲面。
- 若 M 的底空间是简单曲面，则它至少有一个锥点。
  - 若 M 的底空间是单连通的（注意， $M \neq \mathbb{S}^2$），则它至少有两个锥点。

于是， $\mathcal{PB}_n$（M）的中心是平凡的。此外，假设 $n = 1$或 $n \geq 3$，则 $\mathcal{B}_n$（M）的中心是平凡的。

利用 $\mathcal{B}_n(M)$ 无挠这一事实，对于紧致大曲面 M，文献 [16] 证明了 $\mathcal{B}_n(M)$ 的中心是平凡的。由于轨形辫群通常并非无挠，我们将利用对称群 S_n在 $n \geq 3$时中心平凡这一事实来得出该结论。对于 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$，我们对 $\mathcal{B}_2(M)$ 的中心所知甚少。此外，当 M 是圆盘或带一个阶为 $q \geq 2$的锥点的圆盘时，定理 2.7 并不成立。已知对于$n \geq 2$， $\mathcal{B}_n(\mathbb{D}^2)$ 的中心是无限循环群（见 [7]）。对于带一个锥点的圆盘 M，$\mathcal{PB}_1(M) = \mathcal{B}_1(M) = \mathbb{Z}_q$。文献 [16]明确计算了圆柱和环面上的 $\mathcal{B}_n(M)$ 的中心。

3. Some basic results

本节将证明两个命题，它们是证明定理 2.5 和 2.7 所必需的。这将有助于我们在证明中采用归纳法。

3.1. 的单射性 $n=1$。众所周知，若 N 是连通的非单连通子流形，且是连通二维流形 M 的子流形，则包含映射诱导的同态 $\pi_1(N)\to\pi_1(M)$ 是单射，当且仅当 $M-N$ 的每个分支都不是单连通的。证明的主要思路是，N 的一个边界分支是 π_1-单射的。因此，根据范坎彭定理，$M-N$ 的一个分支是单连通的，当且仅当 $\pi_1(N)\to\pi_1(M)$ 不是单射。运用相同的思路可以证明以下命题。

命题 3.1. 设 $M\in\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1$ 和 $N\subset M$ 是一个良好的连通子轨形。那么，包含映射诱导的同态 $\pi_1^{orb}(N)\to\pi_1^{orb}(M)$ 是单射。

证明该命题需要以下引理。

引理 3.2. 设 $M\in\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1$。若 M 的底空间是单连通的（即它是一个圆盘），则假设它至少有两个锥点。令 ∂ 为 M的一个圆形边界分支。那么，$\pi_1(\partial)\to\pi_1^{orb}(M)$ 是单射，也就是说，∂是π_1^{orb}-单射。

证明。首先，假设 M 的底空间是一个圆盘，且其内部有 k 个阶分别为 $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k$的锥点（$k\geq 2$）。那么，

$$\pi_1^{orb}(M)\simeq\langle\alpha_1\mid\alpha_1^{q_1}=1\rangle*\langle\alpha_2\mid\alpha_2^{q_2}=1\rangle*\cdots*\langle\alpha_k\mid\alpha_k^{q_k}=1\rangle.$$

这里，对于 $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ k,\ \alpha_i$ 是绕第 i 个锥点的环路。参见图 1。于是，边界 ∂ 表示元素 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$，显然它的阶是无限的，因为 $k\geq 2$。因此，∂ 是 π_1^{orb}-单射的。

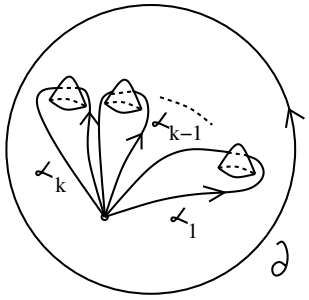


图 1：带有 k 个锥点的圆盘。

˘接下来，假设 M 的底空间 M 要么是零亏格且非单连通，要么亏格为 ≥ 1。那么，众所周知，$\pi_1(\partial)\to\pi_1(\breve{}M)$ 是单射的。

(3.1)
$$\begin{array}{ccc}\pi_1^{orb}(M) & \longleftarrow & \pi_1(\breve{M}) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial) & \longrightarrow & \pi_1(\breve{M}).\end{array}$$

现在，我们有带有交换三角形的图（3.1）。这里，$\breve{M}$ 等于去掉锥点后的M。注意，$\pi_1^{orb}(M)$ 是由 $\pi_1(\breve{M})$ 得到的，具体做法是对每个绕 M中穿孔的环路 α 添加关系 $\alpha^q=1$，其中该穿孔是通过移除一个阶为 q 的锥点得到的（见 [21]）。这描述了顶部的水平

同态。显然，右侧的斜同态是通过向 $\pi_1(\breve{M})$ 添加关系 $\alpha = 1$ 得到的，其中 α 如上所述。此外，垂直的（满射）同态是通过将 $\pi_1^{orb}(M)$ 的元素（即绕锥点的环路）等同于平凡元素得到的。

由于底部的水平同态是单射，因此左侧的斜向同态也是单射。

这就完成了该引理的证明。 □

现在，我们来证明命题 3.1。

命题 *3.1* 的证明。 首先，假设 $\pi_1^{orb}(N)$ 是无限的。那么，它满足引理 3.2 的假设。因此， N 的边界分支是 π_1^{orb}-单射的。此外，同样由引理 3.2 可知，内部带有锥点的圆盘的边界是 π_1^{orb}-单射的，当且仅当该圆盘中至少有两个锥点。其余论证由轨形的范坎彭定理得出。

接下来，假设 $\pi_1^{orb}(N)$ 是有限的。那么，显然 N 要么是光滑圆盘，要么是一个带有一个阶为 q 的锥点的圆盘（不妨如此设定）。若 N 是光滑圆盘，则无须证明。因此，假设是后一种情形，并令 ∂ 为 N 的边界圆。由引理 3.2， ∂ 在 $M - N$ 中是 π_1^{orb}-单射的。此外， $\pi_1^{orb}(M)$ 可由 $\pi_1^{orb}(M - N)$ 添加关系 $\alpha^q = 1$ 得到，其中 α 表示 ∂。由于 ∂ 是 π_1^{orb}-单射的， α 在 $\pi_1^{orb}(M)$ 中的阶为 q。另一方面， $\pi_1^{orb}(N) = \langle \alpha \mid \alpha^q = 1 \rangle$。现在显然， $\pi_1^{orb}(N) \to \pi_1^{orb}(M)$ 是单射。□

3.2. **中心** $n = 1$。 首先，我们陈述几个关于 amalgamated free product 的中心以及群扩张的中心的易证引理。然后，我们回顾一个关于单关系群中心的著名定理。设 $Z(-)$ 表示一个群的中心。

引理 3.3。 若 G 是一个非平凡群与另一个群的 *amalgamated free product*，且前者的中心平凡，则 G 的中心平凡。

证明。 设 $G = G_1 *_H G_2$，则利用广义自由积元素的正规形式，可以推出 $Z(G) = Z(G_1) \cap Z(G_2) \cap H$。因此，如果 G_1 和 G_2 中有一个非平凡且中心平凡，那么 G 的中心也平凡。□

引理 3.4。 考虑一个群的正合列。

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1. \tag{3.2}$$

若 $Z(K) = Z(H) = \langle 1 \rangle$，则 $Z(G) = \langle 1 \rangle$。

证明。 令 $g \in Z(G)$，则 $p(g) \in Z(H)$，因为 p 是满射。由于 $Z(H) = \langle 1 \rangle$， $p(g) = 1$，因此 $g \in K$。 consequently， $g \in Z(K)$，从而 $g = 1$，因为$Z(K) = \langle 1 \rangle$。□

定理 3.5。 *(*[14], [15]*)* 设 G 是一个含有非平凡有限阶元素的非循环单关系群。那么， G 的中心是平凡的。

在下面的命题中，我们将精确描述 $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ 中的轨形的轨形基本群的中心何时是平凡的。

命题 3.6。 令 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$，并假设以下条件成立。

- 如果 M 没有锥点，那么它就不是简单曲面。
- 如果 M 的底空间是简单曲面，那么它至少有一个锥点。
- 如果 M 的底空间是单连通的（注意 $M \neq \mathbb{S}^2$），那么它至少有两个锥点。

那么， $\pi_1^{orb}(M)$ 的中心是平凡的。

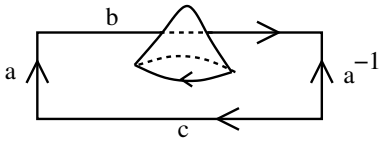
证明。 如果 M 是光滑的且不是简单曲面，那么众所周知， $\pi_1^{orb}(M)$ 的中心是平凡的。由于中心非平凡的二维流形 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ 仅属于以下二维流形及其内部: 圆柱（C）、莫比乌斯带（Mb）、环面（T）和克莱因瓶（K）。

下面情况 2 中的证明也直接证明了这一事实，特别是在 M 光滑且不是简单曲面的情形下。

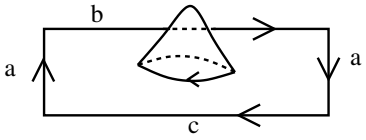
现在我们可以完成命题在 M至少有一个锥点时的证明了。我们将证明分为以下两种情况。

情况 1。 假设 M 的底空间是一个简单曲面。因此，它是流形 C、T、Mb或 K之一，或者是它们的内部。

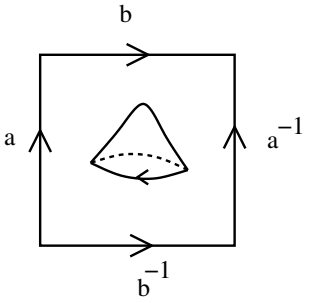
首先，假设它们每个都至少有两个锥点。取一个圆盘 $D \subset M$，使其位于 M 的内部，且锥点都包含在该圆盘内部。然后沿着 D 的边界将 M 分成两部分。因此，根据引理 3.2 和范坎彭定理，$\pi_1^{orb}(M)$ 满足引理 3.3 的假设，故其中心是平凡的。



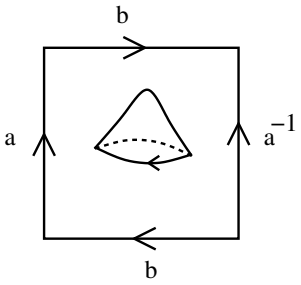
Cc：带有一个锥点的圆柱



Mbc：带有一个锥点的莫比乌斯带



Tc：带有一个锥点的环面



Kc：带有一个锥点的克莱因瓶

图 2：具有一个锥点且底空间简单的轨形。

接下来，假设 M 只有一个阶为 $q \geq 2$的锥点。我们将这四个紧轨形分别记为 Cc、 Tc、 Mbc 和 Kc。由于非紧圆柱和 M¨obius 带的轨形基本群分别属于对应的紧情形，因此我们只需考虑上述四种紧情形。下面明确写出它们的轨形基本群。

$\pi_1^{orb}(Cc) = \{a, b, c \mid (aba^{-1}c)^q = 1\}, \pi_1^{orb}(Mbc) = \{a, b, c \mid (abac)^q = 1\},$
$\pi_1^{orb}(Tc) = \{a, b \mid (aba^{-1}b^{-1})^q = 1\}, \pi_1^{orb}(Kc) = \{a, b \mid (aba^{-1}b)^q = 1\}.$
上述计算可以通过图 2 中轨形的图示表示以及范坎彭定理完成。

现在很容易看出，$\pi_1^{orb}(M)$ 是一个非循环群，只需根据上述表示计算 $\pi_1^{orb}(M)$ 的阿贝尔化即可。

因此，在上述四种情况下，相应的群都是非循环单关系群，且每个群都含有有限阶元素。因此，根据定理 3.5，$\pi_1^{orb}(M)$ 的中心是平凡的。

情况 2. 假设 M 的底空间不是简单曲面。因此，根据假设，M 的底空间属于以下类型之一。

- 它是单连通的（但不是$\mathbb{S}^2$），且至少有两个锥点。
- 它的亏格为零，在不可定向情形下至少有两个穿孔（或边界分支），在定向情形下至少有三个穿孔（或边界分支）。
- 它在定向情形下的亏格为 ≥ 2 。
- 它在不可定向情形下的亏格为 ≥ 3 。

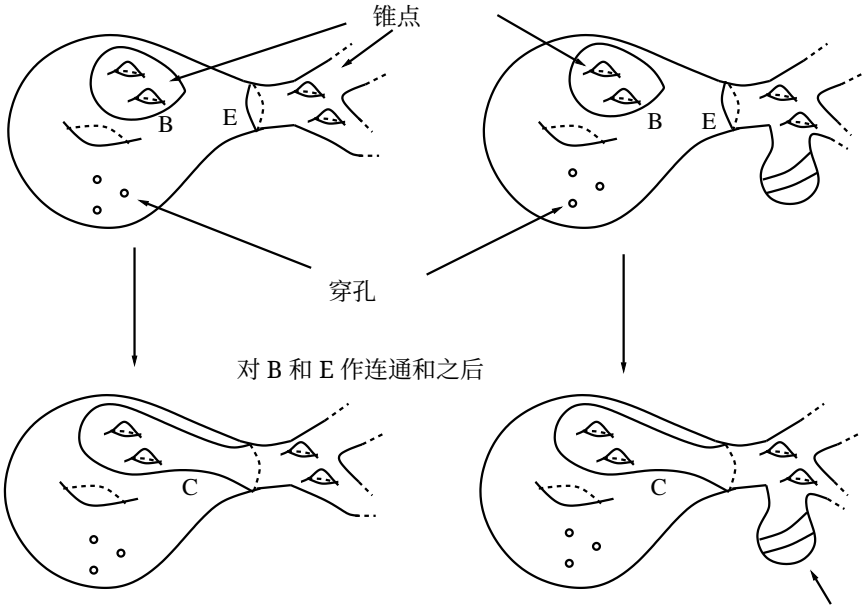


图 3：可定向和不可定向轨形。

在第一种情况下，显然，$\pi_1^{orb}(M)$ 的中心是平凡的，因为它同构于多个有限循环群的自由积（参见引理 3.2 的证明）。而在第二种情况下，显然，$\pi_1^{orb}(M)$ 具有以一个无限循环群为基的 amalgamated free product 结构，其中一个因子是非阿贝尔自由群。因此，根据引理 3.3，它的中心是平凡的。

在最后两种情形下，$\pi_1^{orb}(M)$ 也具有以无限循环群为基底的 amalgamated free product 结构，其中一个因子是非阿贝尔自由群，因此根据引理 3.3，其中心是平凡的。为证明这一点，我们将沿着一条分离

π_1^{orb}-单射嵌入圆将其分割，使得其中一部分包含所有锥点，另一部分则是光滑的，且其基本群是非阿贝尔自由群。我们可以选取一个亏格为一、边界非空且不含锥点的良好可定向子轨形来实现这一点。

我们在图 3 中说明了这种选择良好子轨形的方式。

注意，在定向情形下，它有一个环面作为连通和因子，因为它的亏格为 ≥ 2。接下来，在这个环面上选取一个圆盘，使其包含如图 3 所示位于环面颈部左侧的所有锥点，然后取该圆盘的边界 B 与环绕颈部的一条分离闭曲线 E的连通和 C。然后，根据引理 3.2， C 就是所需的分离圆。

在不可定向情形下，它的亏格为 ≥ 3，因此至少有三个交叉帽。我们可以将其中三个交叉帽替换为一个带有单个交叉帽的可定向亏格一曲面（见 [8]）。接着，与定向情形类似，我们可以如图 3 所示选取一条分离圆 C。

然后，我们再次应用范坎彭定理和引理 3.3，得出 $\pi_1^{orb}(M)$ 的中心是平凡的。□

命题 3.6 的一个直接推论如下。

推论 3.7。设 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ 如命题 *3.6* 所述，且 M 是从$\widetilde{\ }M$ 中移除有限个正则点后得到的。则， M 也满足命题 *3.6* 的假设，因此 $\pi_1^{orb}(\widetilde{M})$ 的中心是平凡的。

4. Proofs of the theorems

现在我们证明第2节中的两个定理。

定理 *2.5* 的证明。回忆一下， N是 $M \in \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$的一个良好子轨形。首先，我们证明 (2.1) 的单射性，即当 $n = m$时， $\mathcal{PB}_n(N) \to \mathcal{PB}_m(M)$ 是单射。证明采用关于 n 的归纳法。回忆一下，对于任意轨形 X， $PB_1(X) = X$。因此，由命题 3.1 可知， $\mathcal{PB}_1(N) \to \mathcal{PB}_1(M)$ 是单射。于是，假设 (2.1) 对 $n = k - 1$ 成立，并且对来自 $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ 的任意轨形的良好子轨形也成立。

接下来，考虑 $r = 1$ 的正合列 (1.3)。于是我们得到如下正合列的交换图。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{PB}_{k-1}(\widetilde{N}) & \longrightarrow & \mathcal{PB}_k(N) & \longrightarrow & \mathcal{PB}_1(N) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{PB}_{k-1}(\widetilde{M}) & \longrightarrow & \mathcal{PB}_k(M) & \longrightarrow & \mathcal{PB}_1(M) & \longrightarrow & 1.
\end{array} \tag{4.1}
$$

注意， N 是 M 的一个良好子轨形，因为 N 是从 N 中移除一个正则点后得到的，而 M 是从 M 中移除同一个正则点后得到的（见注记2.4）。

因此，在交换图 (4.1) 中，根据归纳假设，第一个垂直同态是单射；而根据命题 3.1，最后一个同态也是单射。于是，通过简单的图追踪可知，中间的同态也为单射。这就证明了当 $n = m$ 时 (2.1) 的单射性。

现在，我们来证明当 $n \leq m$ 时 (2.1) 的单射性。考虑如下图表。这里， p: $PB_m(M) \to PB_n(M)$ 是到前 n 个坐标的投影映射。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{PB}_n(N) & \longrightarrow & \mathcal{PB}_m(M) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ & & \mathcal{PB}_n(M). \end{array} \tag{4.2}$$

根据前一种情形，斜同态是单射的，因此顶端同态也具有单射性。这就证明了 (2.1) 的单射性。

接下来，我们来证明 (2.2) 的单射性，即 $\mathcal{B}_n(N) \to \mathcal{B}_m(M)$。考虑如下关于 N and$M$ 的正合列 (1.1) 的交换图。其中，$i:\ S_n \to S_m$ 是包含映射。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{PB}_n(N) & \longrightarrow & \mathcal{B}_n(N) & \longrightarrow & S_n & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{PB}_m(M) & \longrightarrow & \mathcal{B}_m(M) & \longrightarrow & S_m & \longrightarrow & 1. \end{array} \tag{4.3}$$

再次通过简单的图追踪，并利用 (2.1) 的单射性，我们得出上述图中的中间垂直同态（即 (2.2)）是单射的。

定理 2.5 的证明至此完成。 □

现在，我们来证明（纯）轨形辫群的中心是平凡的。

定理 *2.7* 的证明。 首先，我们对 $\mathcal{PB}_n(M)$ 证明该定理，即证明 $\mathcal{PB}_n(M)$ 的中心是平凡的。证明采用关于 n 的归纳法。根据命题 3.6，对于 $n = 1$，$\mathcal{PB}_1(M) = \pi_1^{orb}(M)$ 的中心是平凡的。因此，我们假设 $\mathcal{PB}_{n-1}(M)$ 的中心是平凡的。

现在，考虑关于 $r = n - 1$ 的正合列 (1.3)。

$$1 \longrightarrow \mathcal{PB}_1(\widetilde{M}) \longrightarrow \mathcal{PB}_n(M) \longrightarrow \mathcal{PB}_{n-1}(M) \longrightarrow 1. \tag{4.4}$$

$\widetilde{\ }$由于根据假设，$\mathcal{PB}_{n-1}(M)$ 的中心是平凡的，且根据推论 3.7，$\mathcal{PB}_1(M)$ 的中心也是平凡的，因此我们可以应用引理 3.4，得出 $\mathcal{PB}_n(M)$ 的中心是平凡的。

接下来，我们证明对于 $n \geq 3$，$\mathcal{B}_n(M)$ 的中心是平凡的。回顾正合列 (1.1)。

$$1 \longrightarrow \mathcal{PB}_n(M) \longrightarrow \mathcal{B}_n(M) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1. \tag{4.5}$$

注意，对于 $n \geq 3$，S_n 的中心是平凡的；而由前一种情形可知，$\mathcal{PB}_n(M)$ 的中心是平凡的。因此，根据引理 3.4 $\mathcal{B}_n$，M 的中心是平凡的。

最后，对于 $n = 1$，$\pi_1^{orb}(M) = \mathcal{PB}_1(M) = \mathcal{B}_1(M)$，因此根据命题 3.6，其中心是平凡的。

这就完成了定理 2.7 的证明。 □

我们以如下评述作结。

评注 4.1. 对于离散群 G 在连通二维流形 M上的作用，可以考虑由 n 个点构成的轨道配置空间 $\mathcal{O}_n(M,G)$。根据定义，$\mathcal{O}_n(M,G)$是由 M 中两两具有不同轨道的 n 元组构成的空间。轨道配置空间是配置空间的一种直接推广，因为 $PB_n(M) = \mathcal{O}_n(M,\langle 1\rangle)$。过去几十年来，轨道配置空间备受关注，也有许多研究假设该作用是自由且适当不连续的，因为在这种情况下 Fadell-Neuwirth 纤维化定理仍然成立。

现在我们假设该作用是恰当不连续且有效的（不一定是自由作用），并且不动点是孤立的。这里需要指出，在这种非自由作用的一般情形下，Fadell-Neuwirth 纤维化定理并不成立（见 [19] 中的引理 2.3）。尽管如此，利用 (1.3)，[19]，中证明了以下正合列，假设 $M \neq \mathbb{S}^2$，$\mathbb{RP}^2$，并且当 M/G 的亏格为零时，它要么有穿孔，要么边界非空。关于这一问题的更多内容，见 [18] 和 [19] 。

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{n-r}(M_r,G)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{O}_n(M,G)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{O}_r(M,G)) \longrightarrow 1. \tag{4.6}$$

这里，M_r 是从 M 中去除 r 个点的轨道所得的补集，这些点不是该作用的不动点。由此正合列出发，我们还可以仿照定理 2.7 的证明，证明对于大多数这样的配对 $(M,\ G)$，$\pi_1(\mathcal{O}_n(M,\ G))$ 的中心是平凡的。

References

[1] D. Allcock, 《Artin 群的辫图》, *Trans. Amer. Math. Soc.* 354 (2002 9, 3455 3474), 第 - 期。[2] E. Artin, 《辫子理论》, *Ann. of Math.*(2) 48 (1947), 101-126。[3] J.S. Birman, 《论辫群》, *Comm. Pure Appl. Math.* 22 (1969), 41-72。[4] J.S. Birman, 《辫子、链环与映射类群》, 《数学年刊研究》第 82 号。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州; 东京大学出版社, 东京, 1974 年。[5] E. Brieskorn, 《有限复反射群正则轨道空间的基本群》, *Invent. Math.* 12 (1971), 57-61。[6] E. Brieskorn 和 K. Saito, 《Artin 群与 Coxeter 群》, *Invent. Math.* 17 (1972), 245-271。[7] W. Chow, 《论代数辫群》, *Ann. of Math.* (2) 49 (1948), 654-658。[8] W. Dyck, 《对位相分析的贡献》（德文）, *Math. Ann.* 32 (1888), 第 4 期, 457-512。[9] E. Fadell 和 J. Van Buskirk, 《 E^2 与 S^2的辫群》, *Duke math. J.*, 29 (1962), 243-258。[10] E. Fadell 和 L. Neuwirth, 《构形空间》, *Math. Scand.* 10 (1962), 111-118。[11] R.H. Fox 和 Neuwirth, 《辫群》, *Math. Scand.* 10 (1962), 119-126。[12] F.A. Garside, 《辫群及其他群》, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) 20 (1969), 235-254。[13] C.H. Goldberg, 《辫群的一个正合列》, *Math. Scand.* 33 (1973), 69-82。[14] A. Karrass、W. Magnus 和 D. Solitar, 《具有单个定义关系的群中的有限阶元素》, *Comm. Pure Appl. Math.* 13 (1960), 57-66。[15] B.B. Newman, 《带挠元的单关系群的可解子群》, 《纪念 Hanna Neumann 的论文集》第三卷。 *J. Austral. Math. Soc.* 16 (1973), 278-285。[16] L. Paris 和 D. Rolfsen, 《曲面辫群的几何子群》, *Ann. Inst. Fourier* ( ), *(Grenoble)* 49 1999 2, 417 472 第 - 期。[17] S.K. Roushon, 《构形李群胚与轨形辫群》, *Bull. Sci. Math.* 171 (2021 103028, 35 10 1016 2021 103028), 论文编号: [18] 页。https://doi.org/ 。/j.bulsci. 。S.K. Roushon, 《构形李群胚与轨形辫群中的拟纤维化》, https://doi.org/ 10 48550 2106 08110 。/arXiv. 。S.K. Roushon, 《轨道构形空间中的近[19]拟纤维化与基本群》, https://doi.org/ 10 48550 2111 06159 。/arXiv. 。P. Scott, 《-流形的几何》, [20] 3 *Bull. London Math. Soc.* 15 (1983), 第 5 期, 401-487。[21] W.P. Thurston, 《三维几何与拓扑》, 1991 年 12 月版本, 数学科学研究所笔记, 加利福尼亚州伯克利。[22] J. Tits, 《环面正规化子。I. 扩张 Coxeter 群》, *J. Algebra* 4 (1966), 96-116。

School of Mathematics, Tata Institute, Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India
Email address: roushon@math.tifr.res.in*URL*: http://www.math.tifr.res.in/~roushon/