arXiv:2301.02045v1 [math.GT] 5 Jan 2023

闭图流形与塞弗特几何的虚表示

YAO FAN

摘要

本文主要讨论闭图流形到塞弗特运动群的表示。随后我们证明，存在一些图流形，其有限覆盖均不存在到塞弗特运动群的忠实表示。

1 引言

在 Kirby 的《低维拓扑中的问题》一书中，[Kir97], Thurston 提出了这样一个问题：每个有限生成的 3-流形群 G 是否都能在 GL(4, $\mathbb{R}$) 中有忠实表示。然而，Button 给出了一个反例 [But14] ，它是由两个塞弗特流形粘合而成的图流形。该图流形的基本群无法嵌入 GL(n, K) 中， $n \leq 4$对任意域 K皆如此。

接下来我们可以问：每个有限生成的 3-流形群 G 是否都有忠实线性表示。根据 Aschenbrenner、Friedl 和 Wilton 所著 [AFW15] 一书，该书对三维流形群作了详细综述；以下几何3-流形的等距变换群都是 GL(4, $\mathbb{R}$) 的子群：球面几何、 $S^2 \times \mathbb{R}$、欧几里得几何、Nil几何、Sol几何和双曲几何。此外，某个 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$-流形的基本群是 GL(5, $\mathbb{R}$)[AFW15，第50]页的子群。因此，这七种几何流形都有忠实线性表示。不过， $\widetilde{\text{SL}}$(2, $\mathbb{R}$) 的等距变换群并非线性群。鉴于曲面上的某个 S^1 丛的基本群在 $\mathbb{Z}$ [AFW15，第43], 页上为线性，塞弗特几何的模型 $\widetilde{\text{空}}$间 SL(2, $\mathbb{R}$) 在有限指数意义下有忠实线性表示。不过，我们无法确定线性李群的规模。

至于由塞弗特流形组成的图流形，有边界的情形性质更好。Haglund 和 Wise 的结果 [HW08][HW12] 表明，如果一个 3-流形具有非正

曲率，那么它的基本群可以嵌入一个线性李群中。Kapovich 和 Leeb 证明，具有环面边界的图流形上存在非正曲率 [KL96]。因此，具有环面边界的图流形拥有忠实线性表示。然而，Kapovich 和 Leeb 也给出了一个不具有非正曲率的闭图流形的例子。因此，对于闭图流形，我们尚不清楚其基本群是否具有忠实线性表示。

Brooks 和 Goldman 通过构造到等距变换群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ 的表示，为 3-流形 [BG84]定义了塞弗特体积。因此，我们考察闭图流形到塞弗特运动群的表示；塞弗特运动群是等距变换群 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ 的单位连通分支。我们证明如下定理：

定理 1.1. 存在一个闭图流形，其任意有限覆盖都没有到塞弗特运动群的忠实表示。事实上，存在一个闭图流形 M，使得对于任意有限覆盖 $M' \looparrowright M$ 以及任意表示 $\rho\colon \pi_1(M') \to \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，$\rho$ 在其任意塞弗特块上的限制都不是忠实的。

这里 $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 表示塞弗特运动群。此外，定理 1.1 对满足严格对角占优条件（定义 2.4）的闭图流形也成立。该条件的灵感来自 Derbez、Liu 和 Wang 的论文 [DLW20]。如果图流形有非空的环面边界，则存在一种表示，其限制在某个子流形上是忠实的。我们在第 7 节给出一个图流形的例子并构造相应的表示。

为了得到定理 1.1，我们证明一个更强的结论：不存在虚拟的顶点忠实表示（定义 5）。假设某个闭图流形存在满足严格对角占优条件的虚拟顶点忠实表示。则子流形在该表示下的像是一个阿贝尔群。我们列出关于纤维像的方程，这些方程由图流形的拓扑结构推导而来。方程组的解与顶点忠实表示的假设相矛盾。因此，我们得出结论：该图流形虚拟地不存在忠实表示。

本文的组织结构如下：

在第2 节中，我们回顾图流形的相对定义，并介绍两个重要的拓扑不变量。在第3 节中，我们介绍塞弗特运动群，并对其元素进行分类，以讨论表示。接着在第4 节中，我们介绍 JSJ 特征有限覆盖

，并给出这一特殊有限覆盖下拓扑不变量的一条性质。在第5 节中，我们主要讨论到塞弗特运动群的表示。在第6 节中，我们证明关于闭条件下表示不存在的定理1.1 。此外，在第7节中，我们构造了图流形具有环面边界时的顶点忠实表示。

致谢。我谨向导师 Yi Liu 致谢，感谢他的指导与交流。

2 预备知识

设 M 是一个可定向紧致不可约 3-流形。存在一组两两不交的不可压缩环面，将 M 分解为若干分支，每个分支要么是无环面的，要么是塞弗特纤维化的。此外，这种最小分解是唯一的（相差同伦）。这一 3-流形分解称为 Jaco-Shalen-Johannson 环面分解（JSJ分解）[JS79][Joh79]。

下文将回顾塞弗特流形和图流形的定义、相关性质以及一些拓扑不变量。定义和记号主要遵循 Buyalo 和 Svetlov 的论文 [BS04]。

2.1 塞弗特流形

塞弗特流形是由圆叶状分解的 3-流形。根据 Scott [Sco83]，一种实用的定义是将塞弗特流形定义为轨形上的“圆丛”。设 M 是一个塞弗特流形， O 是其基轨形。存在一个投影 $p\colon M \to O$ 以及基本群的正合列

$$\{1\} \to K \to \pi_1(M) \to \pi_1(O) \to \{1\},$$

其中， K 是由正则纤维生成的 $\pi_1(M)$的循环子群。除非 M 被 S^3覆盖，否则群 K 是无限循环群。

设轨形 O 的底层曲面为 F，且有 m 个次数为 q_i的奇点 s_i , $1 \le i \le m$。则轨形的欧拉示性数定义为

$$\chi(O) = \chi(F) - \sum_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right).$$

若 $\chi(O) < 0$，则 M 有一个有限覆盖，其基底曲面具有双曲结构。基底曲面的基本群可以嵌入 PSL(2, $\mathbb{R}$)。下文仅考虑基轨形具有负欧拉示性数的塞弗特流形。因此，塞弗特流形存在一个有限覆盖，该覆盖是曲面上的平凡圆丛。除非另有说明，本文中的塞弗特流形均指平凡圆丛。

瓦尔德豪森基。设 M 是一个具有非空边界的定向塞弗特流形。设 W为边界分支的集合。考虑 M 的一个定向纤维 f，并且在每个边界环面 T_w、$w \in W$上，都有一个与纤维 f对应的同调类 $f_w \in H_1(T_w; \mathbb{Q})$。由此可从 M到 T_w得到一个诱导定向。因此，可以定义交形式$(\cdot,\cdot): H_1(T_w; \mathbb{Q}) \times H_1(T_w; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$。对于每个 f_w，存在一个 $z_w \in H_1(T_w; \mathbb{Q})$，满足$(z_w, f_w) = 1$。这里我们修改了交形式的记法，使其不同于Buyalo和Svetlov所用的记法。

定义2.1。对于塞弗特流形 M 的每个环面边界 T_w，都存在一个 z_w，使得$(z_w, f_w) = 1$。若一组元素 $\{z_w, f_w\}_{w\in W}$满足条件：$z = \sum_{w\in W} z_w$属于包含映射 $i_*: H_1(\partial M; \mathbb{Q}) \to H_1(M; \mathbb{Q})$的核，则称其为 M_v的瓦尔德豪森基。

瓦尔德豪森基并不唯一。它在变换 $z_w \mapsto z_w + n_w f_w$下定义，其中 $\sum_{w\in W} n_w = 0$。若 M 是平凡圆丛，则我们可以从 $H_1(T_w;\mathbb{Z})$中选择 z_w。这个瓦尔德豪森基的选择等价于对 $M = F \times S^1$进行平凡化的选择。

带框架的塞弗特流形。设 M 是一个塞弗特流形，且每个边界 T_w 都有一个固定元素 $c_w \in H_1(T_w; \mathbb{Z})$，满足 $(c_w, f_w) \neq 0$。那么 M 称为带框架的，而集合 $\{c_w\}_{w\in W}$ 是 M 的一个框架。

对于带框架的塞弗特流形，其纤维与框架之间存在一个公式。我们将该公式表述为一个引理。

引理2.2。设 $\{c_w\}_{w\in W}$ 是塞弗特流形 M的一个框架。那么

$$\sum_{w\in W} \frac{1}{(c_w, f_w)} \cdot (i_w)_* c_w = k \cdot f, \tag{1}$$

其中 $(i_w)_*: H_1(T_w; \mathbb{Z}) \to H_1(M; \mathbb{Z})$ 是由 $i_w: T_w \to M$ 诱导的包含同态 $_v$.

同调类 $f \in H_1(M;\mathbb{Z})$ 表示正则纤维，且 $(i_w)_* f_w = f$。右侧的数 k 是一个有理数。

证明。我们为 M 选取一个瓦尔德豪森基 $\{z_w, f_w\}_{w\in W}$。 c_w 可表示为 $c_w = a_w f_w + b_w z_w$。由于 $b_w = (c_w, f_w) \neq 0$,

$$\sum_{w\in W} \frac{1}{(c_w, f_w)} \cdot (i_w)_* c_w = \sum_{w\in W} \frac{1}{b_w} \cdot (i_w)_*(a_w f_w + b_w z_w) = \left(\sum_{w\in W} \frac{a_w}{b_w}\right) f.$$

这里，右侧的系数 $k = \sum_{w\in W} \frac{a_w}{b_w}$ 与瓦尔德豪森基的选取无关，因为左侧与选取无关。

□

2.2 图流形

图流形 M 是一种不可约 3-流形，其在 JSJ分解下的所有分支都是塞弗特流形。图流形 M 与一个有向图 $\Gamma(V, E)$ 相关联，该图是 JSJ分解的对偶图。我们称每个分支为一个塞弗特块。 Γ 的顶点集 V 是塞弗特块的集合，而 Γ 的有向边集合 E 与所有块的边界相对应。若 $e \in E$ 是一条从 v_1 指向 v_2 的边，则 $T_{v_1,\ v_2} \subset \partial M_{v_1}$ 且 $T_{v_2,\ v_1} \subset \partial M_{v_2}$。因此， e 与有序对 (v_1, v_2) 相对应。

若图 Γ 连通，对于两点 v_1, v_2，令 $\mathbb{P}$ 表示连接v_1与 v_2的所有路径 L 构成的集合。我们将长度 $\#L$ 定义为 L中的边数。 Γ 上的度量定义为

$$d(v_1, v_2) = \min_{L\in\mathbb{P}} \#L.$$

于是，我们可以通过对应的顶点定义两个塞弗特块之间的距离:

$$d(M_{v_1}, M_{v_2}) = d(v_1, v_2).$$

我们固定图流形 M的一个定向。于是，塞弗特块的环面边界具有一个诱导定向。设 M_{v_1}、M_{v_2} 为相邻塞弗特块。我们将环面记为$T_{v_1,\ v_2}$ ，其诱导定向由与有向边 $e = (v_1, v_2)$ 对偶的 M_{v_1} 给出。于是， $T_{v_2,\ v_1}$ 的定向与$T_{v_1,\ v_2}$的定向相反

一个胶合ng 映射是与有向边 $e = (v_1, v_2)$ 相关联的同胚，它将 $T_{v_1,\ v_2}$ to

$T_{v_2,\ v_1}$。如果我们选择 $\{f_{v_1}, z_{v_1}\}$ 作为 $\pi_1(T_{v_1,\ v_2})$ 的一组基，并选择 $\{f_{v_2}, z_{v_2}\}$ 作为 $\pi_1(T_{v_2,\ v_1})$ 的一组基，那么粘合映射会在基本群上诱导出一个同构。它可以表示为一个 2×2 矩阵

$$g_{v_1,v_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = -1.$$

因此，我们将该同构$g_{v_1,\ v_2}$ 称为粘合矩阵。

下面我们介绍 Buyalo 和 Svetlov 提出的图流形的两个拓扑不变量 [BS04]。在定义中，我们使用粘合矩阵作了一些修改。

交数。设 M_{v_1} 和 M_{v_2} 是一个定向图流形中的两个相邻塞弗特块。我们用$f_{v_1,\ v_2}$ 表示 M_{v_1} 在$H_1($$T_{v_1,\ v_2}$; $\mathbb{Z})$中的正则纤维的同调类，并用$f_{v_2,\ v_1}$表示 M_{v_2} 在 $H_1(T_{v_2,\ v_1}$; $\mathbb{Z})$中的纤维。根据粘合矩阵 $g_{v_1,\ v_2}$，纤维$f_{v_1,\ v_2}$映射到 $H_1(T_{v_2,\ v_1}$; $\mathbb{Z})$中的一个元素。

定义

$$b_{v_2,v_1} = (f_{v_2,v_1}, g_{v_1,v_2}(f_{v_1,v_2})).$$

根据图流形及其诱导定向的定义，整数$b_{v_2,\ v_1}$ 满足$b_{v_2,\ v_1} = b_{v_1,\ v_2} \neq 0$。这个整数$b_{v_2,\ v_1}$ 称为纤维 $f_{v_2,\ v_1}$ 与$f_{v_1,\ v_2}$的交数。当其中一个纤维$f_{v_2,\ v_1}$ 或$f_{v_1,\ v_2}$ 的定向改变时，交数的符号也会改变。

荷。对于塞弗特块 M_v，通过设定 $c_w = g_{w,\ v}(f_{w,\ v})$，它有一个自然框架 $\{c_w\}_{w\in W}$。于是，方程 1 右侧 f 的系数称为 M_v 的荷。在 M_v 的一个选定瓦尔德豪森基 $\{f_{v,w}, z_{v,w}\}_{w\in W}$ 下，$c_w = g_{w,\ v}(f_{w,\ v}) = a_{w,\ v}f_{v,\ w} + b_{w,\ v}z_{v,\ w}$。于是，荷可以写成

$$k_v = \sum_{w\in W} \frac{a_{w,v}}{b_{w,v}}.$$

根据引理 2.2，荷与瓦尔德豪森基的选取无关。但是$a_{w,\ \overline{b_{w\ v}}^{v}}$，它称为同调类 $f_{w,\ v}$ 的斜率，与瓦尔德豪森基 $\{f_{v,w}, z_{v,w}\}_{w\in W}$ 有关。

如果一个塞弗特块的边界 T 同时也是整个图流形的边界，那么这条边界 T 不会对塞弗特块的荷产生贡献。在计算荷时，我们将其斜率始终定义为零。

严格对角占优图流形。

在 Derbez、Liu 和 Wang 的论文中 [DLW20], 他们引入了“严格对角占优”这一术语，用来描述图流形的一种性质。这个术语源自矩阵理论。

如果一个 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$对所有 i都满足 $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$，那么该矩阵 A 称为严格对角占优矩阵。

命题 2.3. 如果 A 是严格对角占优矩阵，那么 A 可逆。

证明。假设 A 不可逆，那么存在一个非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。令 x_i 为 $\boldsymbol{x}$中绝对值最大的元素。那么有一个等式 $a_1x_1+\cdots+a_ix_i+\cdots+a_nx_n$ =0。然而，

$$\left|\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}x_j| \leq \left(\sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right) |x_i| < |a_{ii}x_i|.$$

这就导出了矛盾。因此， A 可逆。 □

对于图流形，其定义如下。

定义 2.4。对于塞弗特块 M_v，如果荷 k_v 和所有交数 $b_{v,\ w}$ 满足 g

$$|k_v| > \sum_{w \in W} \frac{1}{|b_{v,w}|}, \tag{2}$$

其中 W 是 M_v 的所有相邻块构成的集合。那么该塞弗特块称为严格对角占优。如果一个图流形的每个塞弗特块都严格对角占优，那么它称为严格对角占优图流形。

严格对角占优是关于图流形的荷和交指标的一种关系。在下一节 4 中，我们将证明这种关系在一种特殊的有限覆盖下仍然成立。

3 塞弗特运动群

~塞弗特几何，或 SL(2， ℝ) 几何，是 Thurston 分类的八种三维几何之一。~Thurston [Thu97]。我们取李群 SL(2， ℝ) 作为塞弗特几何空间的模型。

其等距变换群的单位连通分支可与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$等同，称为塞弗特运动群。

Eisenbud、Hirsch 和 Neumann 给出了塞弗特流形存在横截叶状结构的判据[EHN81]。他们在论文中研究了同态 $\pi_1(M) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$。塞弗特几何这一名称源自 Brooks 和 Goldman。他们通过使用到 3-流形的塞弗特运动群的一个表示，定义了塞弗特体积[BG84]。随后，Derbez、Liu 和 Wang 给出了一个公式，用于计算图流形到塞弗特运动群的一个表示的表示体积 [DLW20]。因此，本节将介绍塞弗特运动群的构造，并对该群中的元素进行分类。

3.1 塞弗特运动群的构造

本部分采用 Derbez、Liu 和 Wang [DLW20]的记号。这里，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的普遍覆盖。存在一个映射 $k\colon \mathbb{R} \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$,

$$k(r) = \begin{pmatrix} \cos \pi r & -\sin \pi r \\ \sin \pi r & \cos \pi r \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

于是存在一个提升 $\tilde{k}\colon \mathbb{R} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的中心 Z 是群 $\{\tilde{k}(n)\ n \in \mathbb{Z}\}$，它在 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中投影为单位元。

塞弗特运动群是乘积群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ 对子群 $\{(\tilde{k}(n)\ -n)\ n \in \mathbb{Z}\}$取商得到的群。因此，塞弗特运动群记作 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$。其元素可记为 $g[s]$，其中 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 且 $s \in \mathbb{R}$。乘法规则为

$$g[s]g'[s'] = gg'[s + s'],$$

并且有如下关系

$$g[s + n] = g\tilde{k}(n)[s], n \in \mathbb{Z}.$$

3.2 塞弗特运动群中的元素分类

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 中的元素可以根据其迹进行分类。取矩阵 $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$。如果迹 $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$ 的绝对值满足相应条件，该矩阵 A 称为椭圆型。如果 $|\mathrm{Tr}(A)| > 2$，则称为

双曲型。如果 $|\mathrm{Tr}(A)| = 2$ 且 A 不是单位矩阵或负单位矩阵，则称为抛物型。由于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\pm I_2$，其元素可以通过代表元进行分类。可以据此验证这种分类是良定义的。

$\widetilde{\ }$接下来考虑自然投影 $pr : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$。$\widetilde{\ }$塞弗特运动群中的元素可以根据其像进行分类。设 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$,

- 若 $pr(g)$ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中的单位元，则称其为中心型;
- 若 $pr(g)$ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中的椭圆元素，则称其为椭圆型;
- 若 $pr(g)$ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中的双曲元素，则称其为双曲型;
- 若 $pr(g)$ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中的抛物元素，则称其为抛物型。

$\widetilde{\ }$接下来有一个关于子群 $C(g) = \{h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} | gh = hg\}$ 的命题。

$\widetilde{\ }$命题 3.1。设 a、b 是塞弗特运动群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$中的两个元素。那么$ab = ba$ 当且仅当 $pr(a)pr(b) = pr(b)pr(a)$ 属于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$。因此，对于非中心元素$\sim g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，子群 $C(g)$ 是一个阿贝尔群。

证明。由 $ab = ba$ 可直接推出 $pr(a)pr(b) = pr(b)pr(a)$ 属于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$。反过来，若$pr(a)pr(b) = pr(b)pr(a)$，根据塞弗特运动群的构造，$aba^{-1}b^{-1}$ 属于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$的$\widetilde{\ }$中心。

$\widetilde{\ }$对于 $a, b \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，分别存在从单位元出发、到达 a,b的连续路径。注意

$$(\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \times (\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \to \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},$$
$$(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$$

$\tilde{\ }$是一个连续映射。然而，群 $\{k(n)\ n \in \mathbb{Z}\} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$（即塞弗特运动群的中心）在第一分量中是离散的。因此，$aba^{-1}b^{-1}$ 的第一分量是$\widetilde{\ }\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\widetilde{\ }$中的单位元。注意，$aba^{-1}b^{-1}$ 的第二分量始终为零。因此，$aba^{-1}b^{-1}$ 等于$\widetilde{\ }\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$中的单位元。

如果 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中两个非平凡元素可交换，那么它们可以同时对角化，且属于同一类型。因此，对于一个非中心元素 $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $C(pr(g)) =$

$\{pr(h) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) | pr(g)pr(h) = pr(h)pr(g)\}$ 是一个阿贝尔群。因此，$C(g)$ 是一个阿贝尔群 p. □

对于塞弗特运动群中的元素，我们还可以根据其射影像的阶进行另一种分类。

定义 3.2. 若塞弗特运动群中的一个元素投影为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中的有限阶元素，则称其为射影有限阶元素。

若塞弗特运动群中的一个元素投影为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中的无限阶元素，则称其为射影无限阶元素。

注 3.3. 设 $f = k(n)$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 中的中心元。考虑方程 $x^m = f, m \in \mathbb{Z}$。若 $n = lm + r, l, r \in \mathbb{Z}$，则 $k(l)[\frac{r}{m}]$ 是该方程的一个解。然而，$k(l)[\frac{r}{m}]$ 并非唯一解。将该方程投影到 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$，则 $(pr(x))^m = pr(f) = I_2$。因此，该方程的任意解 $x^m = f$ 都是射影有限阶元素。

4 JSJ 特征有限覆盖

本节讨论图流形的有限覆盖以及两个拓扑不变量之间的关系。如果 M 的某个有限覆盖具有性质 P，那么就称 M 虚拟地具有性质 P。有时我们只考虑表示的存在性。因此，我们经常转而考虑有限覆盖，以证明定理或构造表示。

根据 Kapovich 和 Leeb 的结果 [KL98，引理 2。1]，图流形经过有限覆盖后具有良好的结构。我们将引理表述如下：

引理 4.1（Kapovich，Leeb）。任意图流形都存在一个可定向有限覆盖，使得所有塞弗特块都是亏格大于 1 的曲面上的平凡圆丛。此外，我们可以使相邻塞弗特块的纤维交数为 ± 1。

由上述引理可知，经过有限覆盖，每个塞弗特块 M_v 都可以与$F_v \times S^1$同胚。下文假设图流形满足引理 4.1中的条件。此外，我们认为对偶图 Γ 是一个非平凡的简单图，即不含重边和自环的图。因此，每个 JSJ 环面都将两个不同的塞弗特块彼此分隔开。经过有限覆盖也可以满足这一条件。

定义 4.2。设 $p\colon M' \to M$是 M的正则有限覆盖。设集合 $\mathcal{T}$是 M的 JSJ 环面的并，集合 $\mathcal{T}'$ 是 $\mathcal{T}$的原像，且 n 是一个正整数。若对于 $\mathcal{T}$中的每个环面 T以及 T上方的每个分支 T'（属于 $\mathcal{T}'$），限制映射 $p|\colon T' \to T$都是指标为$n \times n$的特征覆盖，则称此有限覆盖 $p\colon M' \to M$为 JSJ n-特征有限覆盖。

正则有限覆盖 $p_1\colon M' \to M$不一定是 JSJ 特征有限覆盖。然而，我们总能找到一个 JSJ 特征有限覆盖 $p_2\colon M'' \to M$，使得 p_2可经由 p_1分解。因此，我们可以先证明 JSJ 特征有限覆盖的一些性质，再将其推广到一般情形。对于 JSJ 特征有限覆盖，存在一条关于拓扑不变量的性质。

命题 4.3. 设 M 是一个严格对角占优图流形，则 M 的任意 JSJ 特征有限覆盖也严格对角占优。

证明. 假设 $p\colon M' \to M$是一个 JSJ 特征有限覆盖。取一个塞弗特块 $M'_{v'}$，它是某个塞弗特块 M_v’的原像中的一个连通分支。由于该有限覆盖是 JSJ 特征的，每个环面边界的斜率都保持不变。因此，每个塞弗特块的纤维覆盖度都是固定的。由此，粘合矩阵在该覆盖下也保持不变。

令 W 为 M_v的所有相邻块的集合。若一条边 e 上的 $\partial e = (v, w)$ $w \in W$ 有一个原像 $p^{-1}(e)$连接 v'，我们设 $\partial(p^{-1}(e)) = \{(v', w')|w' \in W'_{v'}\}$，其中$W'_{v'}$ 是由 $p^{-1}(e)$中的一条边连接 v' 的所有塞弗特块的集合。对于每个与 (v', w')对偶的环面 $T'_{v'}$，交数 $b_{v',w'} = b_{v,w}$，因为 $T'_{v',w'}$和 $T_{v,w}$的粘合映射具有相同的矩阵表示。因此，$T'_{v',w'}, w' \in W'_{v'}$的斜率之和恰好是$|W'_{v'}|$（即 $W'_{v'}$的大小）乘以$T_{v,w}$的斜率。注意，对于连接 v'的所有边，$W'_{v'}$的大小都相同。由于纤维的次数固定，每个环面的 JSJ 特征覆盖次数也相同。因此，对于每个 e，原像 $p^{-1}(e)$的分支数也相同。

因为 M_v 是严格对角占优的，所以我们有

$$|k_v| > \sum_{w \in W} \frac{1}{|b_{v,w}|}.$$

至于$M'_{v'}$，荷

$$\begin{aligned} k_{v'} &= \sum_{w\in W}\sum_{w'\in W'_{v'}} \frac{a_{v',w'}}{b_{v',w'}} = \sum_{w\in W}\left(|W'_{v'}|\times\frac{a_{v',w'}}{b_{v',w'}}\right) \\ &= |W'_{v'}|\times\sum_{w\in W}\frac{a_{v',w'}}{b_{v',w'}} = |W'_{v'}|\times\sum_{w\in W}\frac{a_{v,w}}{b_{v,w}} \\ &= |W'_{v'}|\times k_v. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} |k_{v'}| &= |W'_{v'}|\times|k_v| > |W'_{v'}|\times\sum_{w\in W}\frac{1}{|b_{v,w}|} \\ &= \sum_{w\in W}\left(|W'_{v'}|\times\frac{1}{|b_{v,w}|}\right) = \sum_{w\in W}\left(|W'_{v'}|\times\frac{1}{|b_{v',w'}|}\right) \\ &= \sum_{w\in W}\sum_{w'\in W'_{v'}}\frac{1}{|b_{v',w'}|} \end{aligned}$$

因此，塞弗特块 $M'_{v'}$ 也是严格对角占优的。

由于顶点 v 的选择是任意的， M' 的每个塞弗特块都是严格对角占优的。因此， M' 是严格对角占优图流形。 □

5 塞弗特运动群的表示

如果图流形的一个表示是忠实的，那么它在每个塞弗特块上的限制也是忠实的。为方便起见，我们将“局部”忠实表示定义如下。

定义 5.1. 如果一个表示在与顶点 v 对偶的塞弗特块上的限制是忠实的，那么我们称该表示为顶点忠实表示，更确切地说，称其在 v 处忠实。

有时我们会称一个表示为顶点忠实表示，而不指明顶点 v。

接下来，我们讨论限制在每个塞弗特块上的表示，并根据它们在塞弗特运动群中的像对其进行分类。特别地，我们列出具有阿贝尔像的塞弗特块的方程。

5.1 忠实表示

考虑塞弗特块 M_v，它是亏格为 $g \geq 2$ 的紧曲面上的平凡圆丛。假设存在一个从 M_v 到塞弗特运动群的忠实表示。我们得出如下结论:

命题 5.2. 设塞弗特块 M_v 是以紧曲面 F_v 为底的平凡圆丛，且该曲面的亏格为 $g \geq 2$。若 M_v 有忠实表示 ρ: $\pi_1(M_v) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，则 M_v 的纤维的像是一个非平凡的中心型元素，而基底曲面的边界F_v 的像均为非中心元素，且具有射影无限阶。

证明. 由于 M_v 是以亏格为 $g \geq 2$ 的紧曲面 F_v 为底的平凡圆丛， M_v 的基本群有如下表示:

$$\pi_1(M_v) = \left\langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c_1, \cdots, c_l \middle| \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = \prod_{j=1}^{l} c_j \right\rangle \times \langle f \rangle.$$

这里 $[a_i, b_i]$ 表示 $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$。整数 g 是基底曲面的亏格， l 是边界分支的数量。

$\widetilde{\ }$ M_v 的纤维的像在投影 $pr : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 下投影为单位元；否则表示 ρ 是阿贝尔的，这与 ρ 忠实的假设矛盾。因此，纤维 $\rho(f)$ 的像是一个非平凡的中心元。

至于基底曲面 F_v 的边界 $\{c_j\}$ 的像，它们不可能落在中心中。如果其中一个 $\rho(c_j)$ 具有射影有限阶，那么就存在一个整数 n，使得 $\rho(c_j)^n$ 落在中心中。由于 ρ 是忠实的，$(c_j)^n$ 与 $\pi_1(M_v)$ 中的每个生成元都可交换。这个结果与 $\pi_1(M_v)$ 的表示矛盾。因此，基底曲面 F_v 的边界的像都是具有射影无限阶的非中心元素。

□

推论 5.3. 如果图流形 M 的塞弗特块 M_v 上的表示 ρ 是忠实的，那么 M_v 的相邻块都具有射影无限阶的非中心纤维。

证明。 根据命题 5.2， M_v 的纤维的像是一个非平凡的中心型元素，而基底曲面 F_v 的边界的像均为射影无限阶的非中心元素。

由于交指标是非零整数，粘合映射会导出如下形式的矩阵$g_{v,\ w} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$其中 $b \neq 0$。相邻块的纤维 f_w可写为 $f_w = af_v + bz_{v,\ w}$在基本群 $\pi_1(T_{v,\ w})$中。因此，像 $\rho(f_w)$是一个射影无限阶的非中心元素。

□

5.2 阿贝尔表示

设 ρ是一个从塞弗特块 M_v到 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$的表示。若基本群 $\pi_1(M_v)$在 ρ下的像是阿贝尔群，则限制表示 $\rho : \pi_1(M_v) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$称为 M_v的阿贝尔表示。由于阿贝尔表示可经由同调群 $H_1(M_v;\mathbb{Q})$分解，因此存在一个瓦尔德豪森基来表示基底曲面的边界。

假设 M_v具有一个阿贝尔表示，且其环面边界为 $T_{v,w}, w \in W$，其中 W是 M_v的所有相邻塞弗特块的集合。我们选取一个瓦尔德豪森基 $\{f_{v,w}, z_{v,w}\}_{w\in W}$。在粘合矩阵 $g_{w,v}$下，同调类 $f_{w,v} \in H_1(T_{w,v};\mathbb{Z})$在 $H_1(T_{v,w};\mathbb{Z})$中的像为 $g_{w,v}(f_{w,v})$。注意，$H_1(T_{v,w};\mathbb{Z})$有一个基 $f_{v,w}, z_{v,w}$。那么，$f_{w,v}$可表示为线性组合 $g_{w,v}(f_{w,v}) = a_{w,v}f_{v,w} + b_{w,v}z_{v,w}$, $a_{w,v}, b_{w,v} \in \mathbb{Z}$。

我们定义一个非零整数

$$b_v = \prod_{w\in W} b_{w,v}.$$

于是我们有

$$\frac{b_v}{b_{w,v}} g_{w,v}(f_{w,v}) = \frac{b_v a_{w,v}}{b_{w,v}} f_{v,w} + b_v z_{v,w}. \tag{3}$$

由于 $\{z_{v,w}\}$属于瓦尔德豪森基，且 M_v具有荷 k_v，满足方程

$$k_v = \sum_{w\in W} \frac{a_{w,v}}{b_{w,v}}.$$

对方程（3）两边求和，得到

$$\sum_{w\in W} \frac{b_v}{b_{w,v}} f_w = b_v k_v f_v. \tag{4}$$

为方便起见，我们忽略粘合矩阵和包含映射。此外，我们将 $f_{w,v}$记为 f_w，并将 $f_{v,w}$记为 f_v。

这里我们引入数 b_v，以避免讨论中心元$\widetilde{\ }$在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$中的任意 n 次根。从上述方程中可以看出，$b_v/b_{w,v}$ 是一个整数，因此只涉及群乘法。

5.3 阿贝尔分量

In 本部分首先介绍 Harary 图论中的一些定义[Har69]。

定义 5.4. 设 $\Gamma(V,E)$ 是一个图，如果 $\Gamma_0(V_0,E_0)$ 的 V_0 和 E_0 分别是 V 和 E 的子集，则称 $\Gamma_0(V_0,E_0)$ 为 Γ 的子图。

定义 5.5. 设 $\Gamma(V,E)$ 是一个图。顶点诱导子图 $\Gamma_0(V_0,E_0)$ 简称为由顶点集 V_0 诱导的 Γ 的“诱导子图”，它是一个顶点集为 V_0、边集为 E_0 的图，其中的边由两个端点均位于 V_0 中的边组成。

设 ρ 是图流形 M 的一个表示，Γ 是 M 的一个对偶图。取 Γ_0 为 Γ 的一个连通子图。于是，我们用 M_0 表示一个由与 Γ_0 对应的塞弗特块组成的子流形。如果基本群 $\pi_1(M_0)$ 在表示 ρ 下的像是一个阿贝尔群，则称连通子图 Γ_0 为阿贝尔子图，并称 M_0 为阿贝尔分量。此外，如果 M_0 中塞弗特块的纤维在表示 ρ 下均为非中心型，则称 M_0 为非中心阿贝尔分量，并称 Γ_0 为非中心阿贝尔子图。

定义 5.6. 设 ρ 是图流形 M 的一个表示。所有非中心阿贝尔子图构成的集合带有一种偏序，即按子图的包含关系排序。于是，我们定义极大非中心阿贝尔子图为不包含于任何其他阿贝尔子图中的子图（除其自身外）。类似地，我们可以定义极大非中心阿贝尔分量。

在某些表示下，非中心阿贝尔子图的集合可能为空。我们假设在某个表示下，非中心阿贝尔子图的集合非空。那么至少存在一个极大非中心阿贝尔子图。关于极大者有两个命题。

命题 5.7. 设 M_0 是表示 ρ 下的极大非中心阿贝尔分量。那么 M_0 的相邻塞弗特块的中心纤维均为中心纤维。

证明。假设 M_w 是 M_0 的一个相邻塞弗特块，且具有非中心纤维 f_w。因此，基本群 $\pi_1(M_w)$ 是一个阿贝尔群。由于 $\rho(f_w)$ 与 M_0 中塞弗特块的所有纤维的像都可交换， $\pi_1(M_w)$ 的所有元素都与 $\pi_1(M_0)$ 的所有元素可交换。由 M_0 和 M_w 组成的子流形的基本群是一个阿贝尔群。这与极大非中心阿贝尔分量的定义矛盾。因此， M_w 的纤维属于中心型。

□

命题 5.8. 设 M 是一个闭图流形，其对偶图为 $\Gamma(V,E)$。若 $\Gamma_0(V_0,E_0)$ 是表示 ρ 下的极大非中心阿贝尔子图，则存在一个特征有限覆盖 $p\colon M'\to M$，使得由顶点集 V_0' 诱导的子图是表示 $p\circ\rho$ 下的极大非中心阿贝尔子图，其中 V_0' 是 V_0 的原像。

证明。若 Γ_0 是一个诱导子图，则这是平凡情形，结论成立。设 $\Gamma_0(V_0,E_0)$ 不是诱导子图，且它比由 V_0 诱导的顶点诱导子图 $\hat{\Gamma}_0(V_0,\hat{E}_0)$ 少 m 条边。我们将 m 条边记为 e_i，将对应的环面记为 T_i。对于每个 $\hat{T}_i$，都有一个粘合矩阵 g_i。令 M_0 表示 Γ_0 中对应的子流形，并令 M_0 表示 Γ_0 中对应的 $\hat{}$ 子流形。若 $\pi_1(M_0)$ 有一个表示 $\langle S|R\rangle$。则 $\pi_1(M_0)$ 是 $\pi_1(M_0)$ 的 HNN扩张。它有一个表示

$$\langle S,t_i,1\le i\le m\mid R,\ t_if_it_i^{-1}=g_i(f_i),\ t_iz_it_i^{-1}=g_i(z_i),1\le i\le m\rangle,$$

其中 f_i,z_i 是 $\pi_1(T_i)$ 的生成元。

考虑 $\widetilde{\quad}$ 投影 $pr\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\to\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$。设 α 是 $\pi_1(M_0)$ 的一个元素。注意 ce

$$|\mathrm{Tr}(pr(\rho(t_i\alpha t_i^{-1})))|=|\mathrm{Tr}(pr(\rho(\alpha)))|.$$

因此，我们有两种可能的情况，

$$pr(\rho(t_i\alpha t_i^{-1}))=pr(\rho(\alpha)) \tag{$\star$}$$

or

$$pr(\rho(t_i\alpha t_i^{-1}))=pr(\rho(\alpha))^{-1}. \tag{$\star\star$}$$

由于 $\rho(\pi_1(M_0))$ 是一个阿贝尔群。根据命题 3.1，任何与 $\rho(\alpha)$ 交换的元素 w ill

与 $\rho(\pi_1(M_0))$ 中的所有元素交换。因此，对于每个 t_i，它要么对 $\pi_1(M_0)$ 中的所有元素都满足第一个关系式（$\star$），要么对 $\pi_1(M_0)$ 中的所有元素都满足第二个关系式（$\star\star$）。

假设存在 n 条边 $\{e_j, 1 \leq j \leq n\}$，对应于 $\{t_j, 1 \leq j \leq n\}$，其中每个 t_j都满足第二个关系式（$\star\star$）。注意，每个 $\rho(t_j^2)$ 都与 $\rho(\pi_1(M_0))$ 中的每个元素可交换。于是我们可以构造一个满足结论的双重覆盖。

我们在图的层面上给出该覆盖的构造，因此它是一个 JSJ 特征有限覆盖。在 Γ 中切开 e_j，得到两个“半边” e_j^+、e_j^-，每个 j 对应一组半边，并取一份切开后的图的副本。然后，对于每个 j，将 e_j^+ 与半边 $\bar{e}_j^-$ 粘合，并将 e_j^- 与半边 $\bar{e}_j^+$ 粘合，其中 $\bar{e}_j^+$、$\bar{e}_j^-$ 位于切开后的图的副本上。通过这一构造，我们得到图 Γ 的一个连通双重覆盖 Γ'。因此，Γ' 的对偶图流形 M' 是 M 的双重覆盖。我们将此覆盖记为 $p\colon M' \to M$。那么，由顶点集 V_0' 诱导的子图 Γ_0' 是 Γ_0 的一个双重覆盖。Γ_0' 的对应子流形在表示 $p \circ \rho$ 下是一个非中心阿贝尔分量。根据我们的构造，与 Γ_0' 相邻的塞弗特块的纤维全都属于中心型。因此，诱导子图 Γ_0' 是一个极大非中心阿贝尔子图。

□

设一个塞弗特块 M_v 具有一个射影无限阶的纤维。我们令 M_v 包含于一个极大非中心阿贝尔分量 M_0，且对应的子图 Γ_0 是一个诱导子图。令 W 表示 M_v的所有相邻塞弗特块组成的集合。接着，我们用 W_A 表示 W 中包含 M_v 那些位于极大非中心阿贝尔分量中的相邻塞弗特块的子集 M_0，并用 W_C 表示 W 中不属于 M_0的其余元素。于是，方程（4）可以改写为另一种形式，即

$$b_v k_v f_v - \sum_{w \in W_A} \frac{b_v}{b_{w,v}} f_w = \sum_{w' \in W_C} \frac{b_v}{b_{w',v}} f_{w'}. \tag{5}$$

纤维 $f_{w'}$ 与 f_v对易。此外，方程（5）右侧的所有纤维都具有$\widetilde{\ }$在 SL(2, $\mathbb{R}$) 的中心中的像 $\times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$，这一点由命题 ρ 5.7可知。

若一个极大非中心阿贝尔分量在表示 ρ下具有诱导的对应子图，则我们给出如下定义。

定义 5.9. 设 M_0 为一个具有诱导的对应子图的极大非中心阿贝尔分量。若 M_0 由 n 个塞弗特块组成，则对于 M_0的每个塞弗特块 $M_{0,\ i}$，都有一个与$M_{0,\ i}$相关联的方程（5）。因此，对于极大阿贝尔分量 M_0，我们有 n 个方程。

将这些方程表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{e}_0 \boldsymbol{f_A} = \boldsymbol{f_C}.$$

我们将表示ρ下极大阿贝尔分量 M_0 的关联矩阵记作 $\boldsymbol{e}_0$ 。

设 M_0 是一个带有诱导的对应子图的极大非中心阿贝尔分量。若 M_0 由 n 个纤维记作 f_i的塞弗特块组成，$1 \leq i \leq n$，则可写出极大非中心阿贝尔分量 M_0的关联矩阵。对于M_0中的第 i个塞弗特块，令W_C^i表示不属于 M_0的相邻塞弗特块（W_C^i可能为空）。那么矩阵方程如下:

$$\begin{pmatrix} b_1k_1 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{21} & b_2k_2 & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \cdots & b_nk_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{w' \in W_C^1} \frac{b_1}{b_{w',1}} f_{w'} \\ \sum\limits_{w' \in W_C^2} \frac{b_2}{b_{w',2}} f_{w'} \\ \vdots \\ \sum\limits_{w' \in W_C^n} \frac{b_n}{b_{w',n}} f_{w'} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中，若第 i个塞弗特块与第 j个塞弗特块相邻，则 β_{ij}（$i \neq j$）为$-\frac{b_i}{b_{j,i}}$；否则，β_{ij} 为 0。

由于 $\pi_1(M_0)$ 的像是一个阿贝尔群，我们将群乘法写成加法的形式。我们可以发现， $\boldsymbol{e}_0$ 的各项均为整数，而 $\boldsymbol{e}_0$的对角元素均呈 b_ik_i 的形式。此外，最右列的所有元素都属于中心型。

6 忠实表示在有限覆盖中几乎不存在

case

在本节中，我们证明定理1.1。事实上，我们需要证明，严格对角占优的闭图流形在有限覆盖下不存在到塞弗特运动群的顶点忠实表示。

定理 *1.1* 的证明。 由引理 4.1，存在图流形的一个有限覆盖 M_1 ，使得每个塞弗特块都同胚于底曲面亏格大于 1 的平凡圆丛。于是我们可以找到一个 JSJ 特征有限覆盖 M' ，它是 M 的一个分支覆盖，且 M_1 的每个塞弗特块 M' 也同胚于底曲面亏格大于 1 的平凡圆丛。

假设存在一个顶点忠实表示 $\rho'\colon \pi_1(M') \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$，它在顶点 v'处是忠实的。由推论 5.3，$M'_{v'}$ 的相邻塞弗特块的纤维均为非中心型，其像具有射影无限阶。因此，每个相邻块在 ρ' 下都有一个阿贝尔表示。

设 M'_0是 M'的一个极大非中心阿贝尔分量，其中至少包含一个与$M'_{v'}$相邻的块。由命题 5.8，存在一个 JSJ 特征双覆盖 M''，使得原像 M''_0 是一个极大非中心阿贝尔分量，其对应的子图是一个诱导子图。设 $\rho''\colon \pi_1(M'') \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 为一个在顶点 v'' 处忠实的表示，其中该顶点是原像 v'的一个分支。

图流形 M''是 M'的 JSJ 特征双覆盖，因此也是 M的 JSJ 特征有限覆盖。由于 M是严格对角占优的，根据命题 4.3， M''也严格对角占优。根据严格对角占优图流形的定义 2.4 ， M'' 的每个塞弗特块都严格对角占优。因此， M''_0 也满足严格对角占优的条件。

设 $M''_{u''}$是 M''_0中的一个塞弗特块。则 ρ''限制在 $\pi_1(M''_{u''})$ 上是阿贝尔的。我们可以为 $M''_{u''}$写出一个方程（5），

$$b_{u''}k_{u''}f_{u''} - \sum_{w''_A\in W''_A}\frac{b_{u''}}{b_{w''_A,u''}}f_{w''_A} = \sum_{w''_C\in W''_C}\frac{b_{u''}}{b_{w''_C,u''}}f_{w''_C},$$

这里， W''_A表示位于 M''_0中的 $M''_{u''}$的相邻块集合，而 W''_C表示

$M''_{u''}$的其他不属于 M''_0的相邻块集合。

由于 $M''_{u''}$ 是严格对角占优的，我们得到不等式

$$|b_{u''}k_{u''}| > \sum_{w''_A \in W''_A} \frac{|b_{u''}|}{|b_{w''_A,u''}|} + \sum_{w''_C \in W''_C} \frac{|b_{u''}|}{|b_{w''_C,u''}|} \geq \sum_{w''_A \in W''_A} \frac{|b_{u''}|}{|b_{w''_A,u''}|}.$$

注意，左侧是 $b_{u''}k_{u''}$ 中与子流形 M''_0关联的矩阵$\boldsymbol{e}''_0$的一个对角元素的绝对值。右侧是与 $b_{u''}k_{u''}$ 位于同一行的其他元素的绝对值之和。对于关联矩阵 $\boldsymbol{e}''_0$的每一行，相应的不等式都成立。因此，与 M''_0关联的矩阵 $\boldsymbol{e}''_0$是严格对角占优的。于是，它是可逆的。

考虑方程

$$\boldsymbol{e}''_0 \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{C}}.$$

我们有

$$(\boldsymbol{e}''_0)^* \boldsymbol{e}''_0 \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{e}''_0)^* \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{C}},$$

$$\det(\boldsymbol{e}''_0) \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{e}''_0)^* \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{C}},$$

其中，$(\boldsymbol{e}''_0)^*$ 是 $\boldsymbol{e}''_0$的伴随矩阵，而 $\det(\boldsymbol{e}''_0)$ 是矩阵 $\boldsymbol{e}''_0$的行列式。

矩阵 $\boldsymbol{e}''_0$ 的元素全都是整数，因此伴随矩阵（$\boldsymbol{e}''_0$）*的元素也全都是整数。纤维的像都位于一个阿贝尔群中，因此该方程有解。根据注记3.3，任意解的所有元素都具有射影有限阶。这一结论与以下结果矛盾： $M''_{v''}$ 的相邻块的纤维是具有射影无限阶的非中心元素。因此，顶点忠实表示 ρ'' 不存在。

对于一般的有限覆盖 M_2，存在一个通过 M_2 分解的 JSJ 特征有限覆盖 M_3 。于是， M_3 是严格对角占优的。在 M_3 上不存在顶点忠实表示。因此，在 M_2 上不存在顶点忠实表示。所以，闭的严格对角占优图流形 M 虚拟地不存在顶点忠实表示。

□

作为一个推论，闭的严格对角占优图流形 M 虚拟地不存在到塞弗特运动群的忠实表示。

从另一个角度来看，定理 1.1 的证明是将一个表示从塞弗特块延拓到整个图流形。因此，我们可以将其表述为一个推论。

推论 y 6.1. 设 M 是一个严格对角占优图流形。存在一个表示 n

ρ 在塞弗特块 M_v 上的表示忠实于塞弗特运动群。因此，该表示 ρ 在有限覆盖意义下无法扩展到整个图流形 M。

7 有界情形下顶点忠实表示的存在性

如果一个图流形具有环面边界，那么它存在顶点忠实表示。换言之，塞弗特块的忠实表示可以扩展为整个图流形上的一个表示。该表示在整个图流形上未必忠实。下面我们为一类具有非空边界的图流形给出一种构造。

定理 7.1. 设 M 是一个图流形，其对偶图 Γ 是一棵树，并且与树的端点顶点对应的每个塞弗特块都至少有一个环面边界。如果某个塞弗特块到塞弗特运动群存在忠实表示，那么该表示可以扩展到整个图流形 M 上。

证明。假设图流形 M 的一个塞弗特块 M_v 上存在忠实表示 ρ_0。那么在 Γ 上存在一个方向，从 v 出发指向所有端点。

令该表示记为 $\rho\colon \pi_1(M) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$。令 W 表示 M_v 的所有相邻块。每个环面 $T_{w,\,v}$ 的同调基 $\{f_{w,v}, z_{w,v}\}$ 的像由粘合矩阵 $A_{v,\,w}$ 确定。接着，我们将 $\pi_1(M_w)$ 的像设为阿贝尔的。因此，M_w 的底曲面边界的像都属于群 $C(\rho(f_w)) = \{h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \rho(f_w)h = h\rho(f_w)\}$。我们从 $C(\rho(f_w))$ 中选取元素，使它们构成 M_w 的瓦尔德豪森基。因此， M_v 的每个相邻块都有一个阿贝尔表示。

假设表示 ρ 已扩展到所有距离 n小于 M_v的塞弗特块。对于 $n=2$，我们已在上一段中完成了这一步。若塞弗特块 M_u 到 M_v的距离为 n，则它与唯一一个到 M_v的距离为 $n-1$ 的塞弗特块 M_t 相邻。环面$T_{u,t}$ 的基底 $\{f_{u,t}, z_{u,t}\}$由从$T_{t,u}$ 到$T_{u,t}$的粘合矩阵$g_{t,u}$ 确定，

$$\begin{pmatrix} f_{u,t} \\ z_{u,t} \end{pmatrix} = g_{t,u} \begin{pmatrix} f_{t,u} \\ z_{t,u} \end{pmatrix}.$$

因此，纤维 f_u 的像由包含映射确定。

由于图是一棵树，且所有端点都对应与 M 的边界相交的塞弗特流形， M_u 至少有一个自由的环面边界。于是，我们可以在群 $C(\rho(f_{u,\ t}))\cap C(\rho(z_{u,\ t}))$ 中选取元素，从而得到 M_u 的瓦尔德豪森基。因此，限制在 $\pi_1(M_u)$ 上的表示 ρ 是阿贝尔的。

通过归纳，我们可以将表示 ρ_0 扩展为整个图流形上的 ρ ，使得ρ 在 $\pi_1(M_v)$上的限制是忠实的。

□

参考文献

[AFW15] Matthias Aschenbrenner、Stefan Friedl 和 Henry Wilton。三维流形群。欧洲数学会数学讲义系列。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2015 年。[BG84] Robert Brooks 和 William Goldman。塞弗特空间中的体积。Duke Math. J., 51(3):529–545, 1984。[BS04] S. V. Buyalo 和 P. V. Svetlov。图流形的拓扑和几何性质。Algebra i Analiz, 16(2):3–68, 2004。[But 14] Jack O. Button。一个不是四维线性群的 3-流形群。J. Pure Appl. Algebra, 218(9):1604–1619, 2014。[DLW20] Pierre Derbez、Yi Liu 和 Shicheng Wang。图流形及其有限覆盖的塞弗特表示的体积。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2006.14770 页，2020 年 6 月。[EHN81] David Eisenbud、Ulrich Hirsch 和 Walter Neumann。塞弗特丛的横截叶状结构与圆的自同胚。Comment. Math. Helv., 56(4):638–660, 1981。[Har69] Frank Harary。图论。Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-Menlo Park, Calif.-London, 1969。[HW08] Fr´ed´eric Haglund 和 Daniel T. Wise。特殊立方复形。Geom. Funct. Anal., 17(5):1551–1620, 2008。[HW12] Fr´ed´eric Haglund 和 Daniel T. Wise。特殊立方复形的组合定理。Ann. of Math. (2), 176(3):1427–1482, 2012。[Joh79] Klaus Johannson。带边界的 3-流形的同伦等价，数学讲义第 761 卷。Springer，柏林，1979 年。[JS79] William Jaco 和 Peter B. Shalen。3-流形中的塞弗特纤维空间。载于《几何拓扑》（佐治亚拓扑会议论文集，佐治亚州雅典，1977 年），第 91–99 页。Academic Press，纽约—伦敦，1979 年。

[Kir97] Rob Kirby。低维拓扑中的问题。载于《几何拓扑》（佐治亚州雅典，1993 年），AMS/IP 高等数学研究丛书第 2 卷，第 35–473 页。Amer. Math. Soc., Provi- dence, RI, 1997。[KL96] Michael Kapovich 和 Bernhard Leeb。离散群在非正曲率空间上的作用。Math. Ann., 306(2):341–352, 1996。[KL98] Michael Kapovich 和 Bernhard Leeb。3-流形群与非正曲率。Geom. Funct. Anal., 8(5):841–852, 1998。[Sco83] Peter Scott。3-流形的几何。Bull. London Math. Soc., 15(5):401–487, 1983。[Thu97] William P. Thurston。三维几何与拓扑。第 1 卷，普林斯顿数学丛书第 35 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1997 年。Silvio Levy 编。