梯度重构方法对有限体积格式精度的影响

Frederico Bolsoni Oliveira[1] & João Luiz F. Azevedo[2]

[1]航空技术研究所，DCTA/ITA，Pr. Mal. Eduardo Gomes，圣若泽-杜斯坎普斯，12228-900，圣保罗州，巴西[2]航空航天研究所，DCTA/IAE，Pr. Mal. Eduardo Gomes，圣若泽-杜斯坎普斯，12228-904，圣保罗州，巴西

arXiv:2301.02046v1 [physics.flu-dyn] 5 Jan 2023

摘要

在单元中心有限体积方法中，重构单元界面处的物性梯度时必须谨慎。本研究采用三个不同的湍流模拟测试算例，即零梯度平板、亚声速 NACA 0012 翼型和跨声速 OAT15A 翼型，分析了三种不同的梯度重构方法。分析主要针对四边形网格。气体动力学方程采用 Roe 二阶迎风格式的隐式实现求解。RANS 封闭问题采用负 Spalart–Allmaras 湍流模型求解。研究分析了各梯度离散方法所得解的质量，并将其与实验数据及文献中已有的其他数值解进行了比较。对于本文考虑的算例，无论采用哪种梯度重构格式，计算结果均与预期结果高度吻合。

关键词： 有限体积法，梯度重构，平板，NACA 0012，OAT15A

1. 引言

随着工业 4.0 的兴起，过去几年间，各个应用领域对高保真数值模拟的需求持续增长 [1]。因此，任何能够提升模拟结果的成熟数值方法改进，都备受业界关注。在计算流体力学领域，数十年来广泛采用且已证明能够取得优异成果的一种方法是有限体积法。在航空航天工业中，有限体积法通常用于求解各种守恒定律方程组，其中包括可压缩纳维–斯托克斯方程。

多年来，人们在有限体积法框架下开发了多种数值格式[2]。然而，采用单元中心格式的数值格式有一个共同特点：需要在离散单元界面处计算流动属性及其梯度，而这些值并不能直接获得。在单元中心格式中，已知的离散属性被视为各单元内部的体积平均值。因此，必须采用重构过程，为各单元界面处未知的属性确定合适的取值。根据所涉及的属性不同，重构过程的定义未必直截了当。尤其是物性梯度的重构，更是棘手。在流体动力学中，属于这一类的属性包括速度分量的梯度，例如计算黏性力时所需的梯度。此外，若考虑可压缩性效应，在能量守恒方程中计算傅里叶定律时，还必须重构流体内能的梯度。

文献中此前已有报告指出，采用不同的梯度重构技术会显著改变黏性流体模拟的结果 [3]。其影响范围从改变所用计算流体力学算法的整体鲁棒性，到修改或耗散解场中存在的流体结构。然而遗憾的是，迄今尚未发现适用于所有情况的单一梯度重构程序。本研究正是立足于这一背景，旨在提供数值数据，以便更好地理解将不同梯度重构技术应用于四边形网格时，对可压缩湍流解的影响。由此，计算流体力学用户可以针对特定的问题配置，更有依据地决定采用何种梯度重构程序。

本研究采用可压缩雷诺平均纳维-斯托克斯（RANS）方程对三维流动动力学进行建模 [2]。这些方程在单元中心有限体积框架中离散，并采用 Roe 通量差分裂格式重构对流通量 [4, 5, 6]。通过对解进行分段线性重构 [7], 并结合 Venkatakrishnan 限制器 [8]，实现该格式的二阶总变差不增（TVD）版本。为解决雷诺平均纳维-斯托克斯方程固有的封闭问题，采用负值 Spallart-Allmaras（SA-neg）湍流模型 [9, 10, 11]。离散单元梯度采用体积加权 Green-Gauss 方法计算。然而，单元界面处的属性梯度则采用三种不同的重构程序计算：$A00$、$A0E$ 和 $AJ0$；这些名称遵循参考文献 [3], 中的命名惯例，并将在后续章节中加以说明。

使用自编代码 BRU3D [5, 6], 对三个不同算例进行了模拟。第一个算例是二维湍流平板 [11], , 主要用作合理性检验算例。第二个算例是攻角为 15 度的亚声速 NACA 0012 翼型 [11]，其主要目的是观察当解中存在分离泡时，不同方法对气动系数数值的影响。最后一个算例是跨声速 OAT15A 翼型 [12, 5, 6]，用于展示计算域中存在激波时各格式的性能。

本引言之后将介绍本文采用的数值公式。随后简要介绍测试算例，并给出所得结果和结论。

2. 数值公式

2.1 方法的一般公式

本文所用的守恒律方程组（下文简称雷诺平均纳维-斯托克斯方程）可写为

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathscr{F}}(\vec{Q},\overrightarrow{\nabla Q})\equiv\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\mathscr{F}}_e(\vec{Q})-\vec{\mathscr{F}}_v(\vec{Q},\overrightarrow{\nabla Q})\right]=0\,, \tag{1}$$

其中，$\vec{}Q$ 为守恒变量向量。此外，$\vec{\mathscr{F}}$ 是由代数向量构成的几何向量，使得

$$\vec{\mathscr{F}}_e(\vec{Q})\equiv\vec{E}_e(\vec{Q})\,\hat{\imath}+\vec{F}_e(\vec{Q})\,\hat{\jmath}+\vec{G}_e(\vec{Q})\,\hat{k}\,, \tag{2}$$

and

$$\vec{\mathscr{F}}_v(\vec{Q},\overrightarrow{\nabla Q})\equiv\vec{E}_v(\vec{Q},\overrightarrow{\nabla Q})\,\hat{\imath}+\vec{F}_v(\vec{Q},\overrightarrow{\nabla Q})\,\hat{\jmath}+\vec{G}_v(\vec{Q},\overrightarrow{\nabla Q})\,\hat{k}\,, \tag{3}$$

with

$$\vec{\mathscr{F}}\equiv\vec{\mathscr{F}}_e-\vec{\mathscr{F}}_v\,. \tag{4}$$

向量 $\vec{}E\equiv\vec{}E_e-\vec{}E_v$、$\vec{}F\equiv\vec{}F_e-\vec{}F_v$ 和 $\vec{}G\equiv\vec{}G_e-\vec{}G_v$ 分别是与笛卡尔坐标三元组 x、y 和 z 相关的通量向量。同样，$\hat{}i$、$\hat{}j$ 和 $\hat{}k$ 分别是沿同一坐标三元组方向的单位向量。下标e 和 v 分别表示各通量向量的无黏性分量和黏性分量。请注意，各向量与 $\vec{}Q$ 及 $\overrightarrow{\nabla}Q$之间的函数关系已明确写出。这是为了强调，只有该公式中的黏性部分需要计算 $\overrightarrow{\nabla}Q$。最后，t 为时间坐标。这些向量的数学定义在计算流体力学文献中广为人知，因此此处不再赘述。作者建议感兴趣的读者参阅文献 [13]，以了解该公式的完整描述。

为离散化式 (1)，采用有限体积框架。因此，对任意具有恒定体积的欧拉域 $\mathbb{V}$及外表面 S，对式 (1) 进行积分，如下所示：

$$\int_{\mathbb{V}}\left(\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t}\right)d\mathbb{V}+\int_{\mathbb{V}}\left(\nabla\cdot\vec{\mathscr{F}}\right)d\mathbb{V}=0\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{V}}\vec{Q}\,d\mathbb{V}+\oint_S\vec{\mathscr{F}}\cdot\overrightarrow{dS}=0\,. \tag{5}$$

在式 (5) 中，应用了散度定理（亦称格林-高斯定理），并结合莱布尼茨法则的一般形式。此外，$\vec{dS} \equiv \hat{n}dS$，其中 $\hat{n}$ 是指向S外侧的单位法向量。

假设计算域被划分为多个多面体形状的离散单元，构成一个非结构网格。与有限体积网格中第i个单元相关联的离散守恒变量向量，$\vec{Q}_i$，定义为

$$\vec{Q}_i \equiv \frac{1}{\mathbb{V}_i}\int_{\mathbb{V}_i} \vec{Q}\, d\mathbb{V} \,. \tag{6}$$

如果每个单元有n_f个面，则式（5）变为

$$\mathbb{V}_i \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n_f}\left(\vec{\mathscr{F}}_k \cdot \vec{S}_k\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \vec{Q}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\mathbb{V}_i}\sum_{k=1}^{n_f}\left(\vec{\mathscr{F}}_k \cdot \vec{S}_k\right) \,, \tag{7}$$

采用 1 点高斯求积公式后。在本例中，这是一个有效的构造，因为得到的公式具有空间二阶精度。如果改用高阶格式，尤其是紧致格式，则可能需要使用高阶求积公式对面积分进行数值计算，并据此进一步完善本文的公式。

式（7）是雷诺平均纳维-斯托克斯方程的有限体积离散形式，并且必须对计算域中的所有单元成立。对于几何形状恒定的网格，面面积向量 $\vec{S}_k$在任何时刻都是已知的。因此，还需确定的只有两个步骤：用于计算面通量向量 $\vec{\mathscr{F}}_k$的重构格式，以及对$\partial \vec{Q}\partial^i{}_t$ 进行时间积分的步骤。本文采用 Roe二阶 TVD格式，并结合 Venkatakrishnan 限制器 [8], ，对所有无黏通量 [5, 6], 进行离散，其中包括与湍流模型相关的通量。时间导数采用隐式时间推进格式进行积分，具体如参考文献 [5, 6]所述。选择这些格式是为了提高求解过程的整体稳健性。因此，剩下的问题就是确定黏性通量的计算格式。

$\nabla \vec{Q}$ 在k号单元面的值。本文采用标准中心格式，因此，若i 和j是两个相邻单元的索引，则：

$$\vec{Q}_k = \frac{\vec{Q}_{k_i} + \vec{Q}_{k_j}}{2} \,, \tag{8}$$

其中，$\vec{Q}_{k_i}$ 和 $\vec{Q}_{k_j}$ 分别是i 和j的分片重构属性，在k [7]的形心处取值。

基于相同的思路，$(\overrightarrow{\nabla Q})_k$ 也被重构为直接相邻单元离散属性的函数。该函数的定义决定了不同梯度重构方法之间的区别。下一小节将简要介绍本文所考虑的三种梯度重构方法。

2.2 梯度重构方法

2.2.1 加权格林-高斯梯度计算

如前所述，在单元界面处计算物性梯度，通常需要定义一个具有局部模板的函数，负责重构目标位置处的梯度值。合适的重构格式的选择取决于问题配置、网格几何，甚至可用的计算资源。本文考虑了三种不同的梯度重构方法：$A00$、$A0E$ 和$AJ0$，命名遵循参考文献 [3] 中的惯例。需要指出的是，确实还存在其他格式 [3, 14, 15],，但本文仅分析这三种格式，因为它们简单且总体效率较高。

在适当描述各方案之前，首先需要定义一种计算离散单元物性梯度的方法；本文讨论的三种不同方案都以此为基础

。如果A 是一种在每个单元上的离散值A_i均已知的物性，那么其梯度（∇A）$_i$可计算为

$$(\overrightarrow{\nabla A})_i \equiv \frac{1}{\mathbb{V}_i}\int_{\mathbb{V}_i}\overrightarrow{\nabla A}\,d\mathbb{V} = \frac{1}{\mathbb{V}_i}\oint_S A\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\mathbb{V}_i}\sum_{k=1}^{n_f} A_k\,\vec{S}_k\ , \tag{9}$$

这称为格林-高斯方法，用于定义离散单元梯度 [16]。随后，可以通过对相邻的已知值进行某种平均来计算A_k ，因为它与原偏微分方程中的扩散项有关。这里采用体积加权平均，具体如下：

$$A_k = \frac{\mathbb{V}_i A_i + \mathbb{V}_j A_j}{\mathbb{V}_i + \mathbb{V}_j}\ . \tag{10}$$

文献中也有更稳健但计算成本更高的单元平均属性梯度计算格式，例如线性保持梯度（LPG）和最小二乘（LS）方法 [17]。

2.2.2 A00 程序

此处介绍的第一个梯度重构程序$A00$，或许是最简单的公式形式。它只需对两个直接相邻单元的值取平均：

$$(\overrightarrow{\nabla A})_k = \frac{(\overrightarrow{\nabla A})_i + (\overrightarrow{\nabla A})_j}{2} \equiv (\overline{\nabla A})_k\ . \tag{11}$$

这种重构还可以通过改用加权平均 [3], 来改进，且不会降低计算效率。不过，此处仅考虑式（11）所示的公式。

尽管该格式的计算成本极低，但使用它会导致模板实际上未利用i 和j 单元的信息 [16, 18]。因此，解中可能会出现高频误差 [3]。为解决这一问题，在式 (11) 的形式中加入额外项，以确保其依赖于共享该界面的两个单元的单元平均数据。$A0E$ 和$AJ0$ 格式均属于此类。

2.2.3 A0E 程序

$A0E$ 格式也称为边法向格式，是解决前述$A00$ 问题的可行方法之一。该方法将连接i 和j 单元质心方向上的梯度分量替换为有限差分构造 [3, 18]。根据图 1，$A0E$ 形式可写为

$$(\overrightarrow{\nabla A})_k = (\overline{\nabla A})_k + \left[\frac{A_j - A_i}{|\vec{r}_{ij}|} - (\overline{\nabla A})_k \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}\right]\frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}\ . \tag{12}$$

因此，单元i 和j 实际上重新纳入了 $(\overrightarrow{\nabla} A)_k$ 的模板中。

2.2.4 AJ0 程序

另一种方法是采用跳跃项构造 $AJ0$，将面中心处不连续解的信息引入面梯度重构 [3, 14]。此时，方程变为

$$(\overrightarrow{\nabla A})_k = (\overline{\nabla A})_k + \frac{\alpha}{|\vec{r}_{ij}\cdot\hat{n}_k|}\left(A_{k_j} - A_{k_i}\right)\hat{n}_k\ , \tag{13}$$

其中，A^{k_i} 和A^{k_j} 分别表示单元i 和j的分片线性重构A 属性，其取值位于面形心处。此外，$\hat{}n_k$ 是从当前单元指向外侧的面法向单位向量。最后，$\vec{}r_{ik}$ 是一个从单元i 的形心指向面k形心的向量，如图1所示。对于$A0E$ 格式，跳跃系数 α取为 $\alpha = 4/3$。

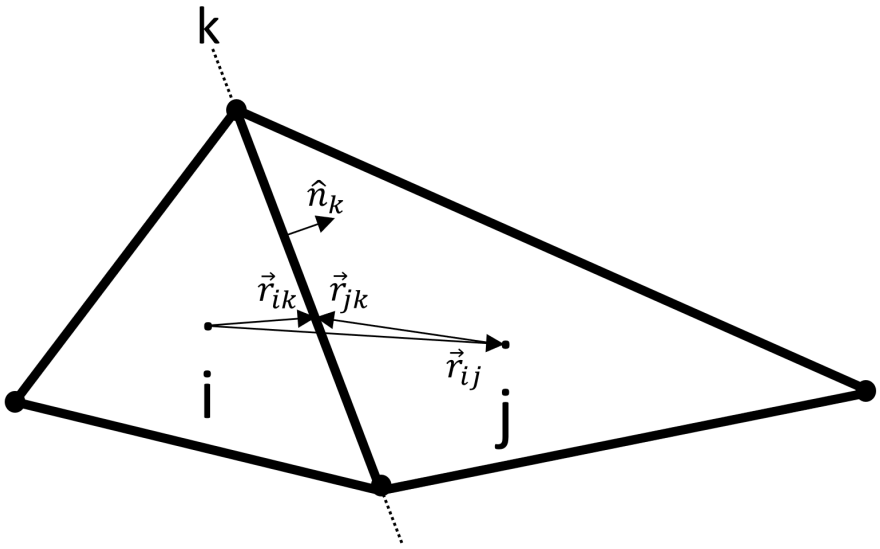

图 1 – 网格示意图，展示单元i 和j。重点展示i单元的第k个面。图中还标出了面法向单位向量 $\hat{n}_k$ 以及相关距离向量 $\vec{r}$。圆点表示单元形心的位置。

可以证明，多种梯度重构技术都能写成式（13） [14]的形式。事实上，$A0E$ 格式可利用式（13）并代入以下 α来表示：

$$\alpha = (\hat{n}_k \cdot \hat{e}_{ij}) \left| \hat{n}_k \cdot \hat{e}_{ij} \right| , \tag{14}$$

其中

$$\hat{e}_{ij} \equiv \frac{\vec{r}_{ij}}{\left| \vec{r}_{ij} \right|} . \tag{15}$$

上　　述$A0E$ 格式的表达式正是此处实际采用的表达式。

3. 测试算例描述

本节将简要介绍各个测试算例。

3.1 零压梯度平板

平板算例遵循 NASA 兰利研究中心湍流建模资源（TMR）的设置 [11]。因此，该算例属于不可压缩算例，采用可压缩流体表述求解。问题包含一个简单的矩形计算域，长 2.33 m，高 1 m。底部边界最初的 0.33 m 为对称面。其余 2 m 区域内设有一块无限薄的平板，并将其模拟为绝热无滑移壁面。计算域原点位于平板前缘，X 轴平行于平板表面并指向计算域右侧。此外，Z 轴朝上。顶部边界为采用黎曼不变量实现的非反射远场。自由来流马赫数设为$M_\infty = 0.2$，静温为$T_\infty = 300\,\mathrm{K}$，雷诺数为 $Re_\infty = 5 \times 10^6$，其基于参考长度 $\ell_{ref} = 1\mathrm{m}$ 计算。右侧边界为简单的背压出口，其设置用于维持自由来流静压$p_\infty = 114.47\,\mathrm{kPa}$。左侧边界为非反射亚声速入口，总压为$p_t = 1.02828\,p_\infty$，总温为$T_t = 1.008\,T_\infty$。图 2 展示了该问题的示意图。

由于 BRU3D 是三维代码，因此通过使用厚度方向上仅含一个单元的六面体网格来获得四边形网格。此处使用的网格是 TMR 网站上提供的最精细六面体网格 [11], , 在X 方向上由 544 个单元组成，在Y 方向上由 384 个单元组成。如图 3 所示，平板前缘附近的区域对单元进行了聚集。

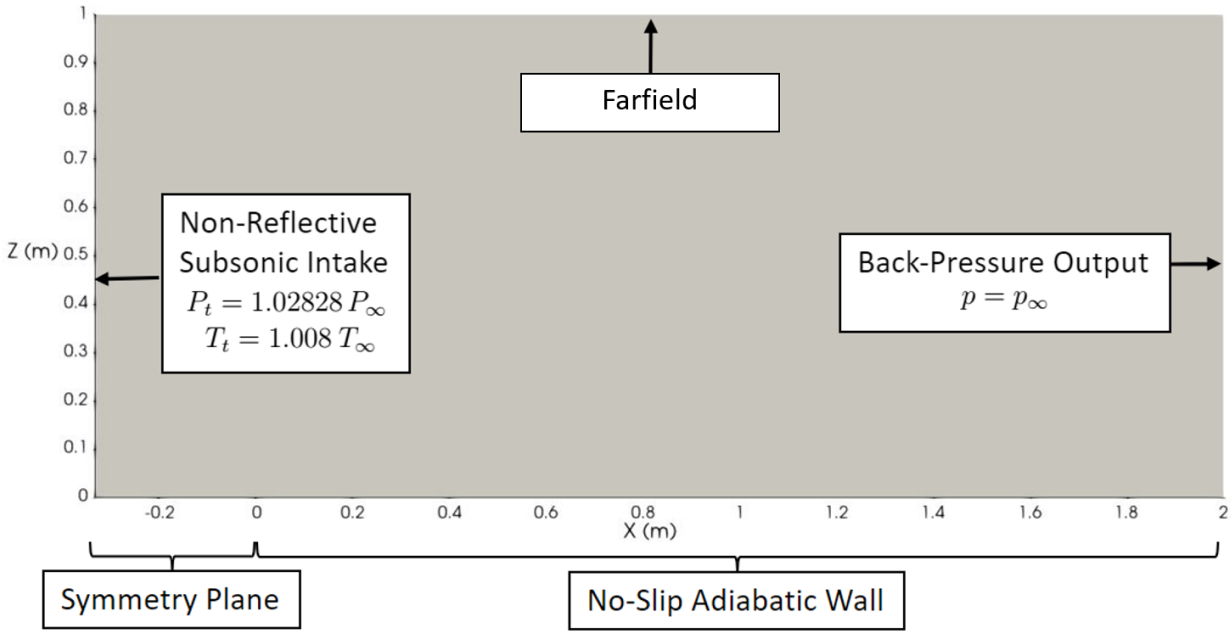

图 2 – 二维零压梯度平板算例的边界条件设置位置。

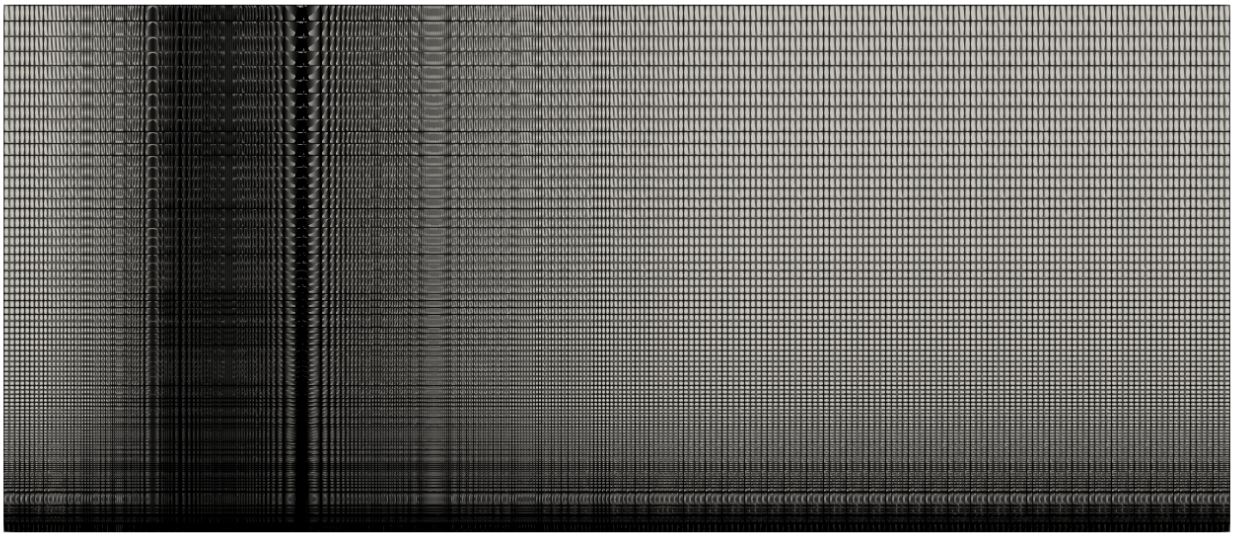

图 3 – 平板算例所用的网格，包含 544 x 384 个单元。

3.2 亚声速 NACA 0012 翼型

NACA 0012 翼型算例再次采用 NASA 兰利研究中心湍流建模资源中的设置 [11]，攻角 α_{AoA} 为 15 度。计算域包含两种边界条件：无滑移绝热壁和非反射远场，如图 4 所示。自由来流条件包括雷诺数 Re_∞、马赫数 M_∞、参考弦长 c 和参考温度 T_∞，如表 1 所示。所用网格是参考文献 [11] 中提供的最精细六面体“C”形网格。该网格包含 917504 个单元，主要集中在翼型表面附近，如图 4 所示。

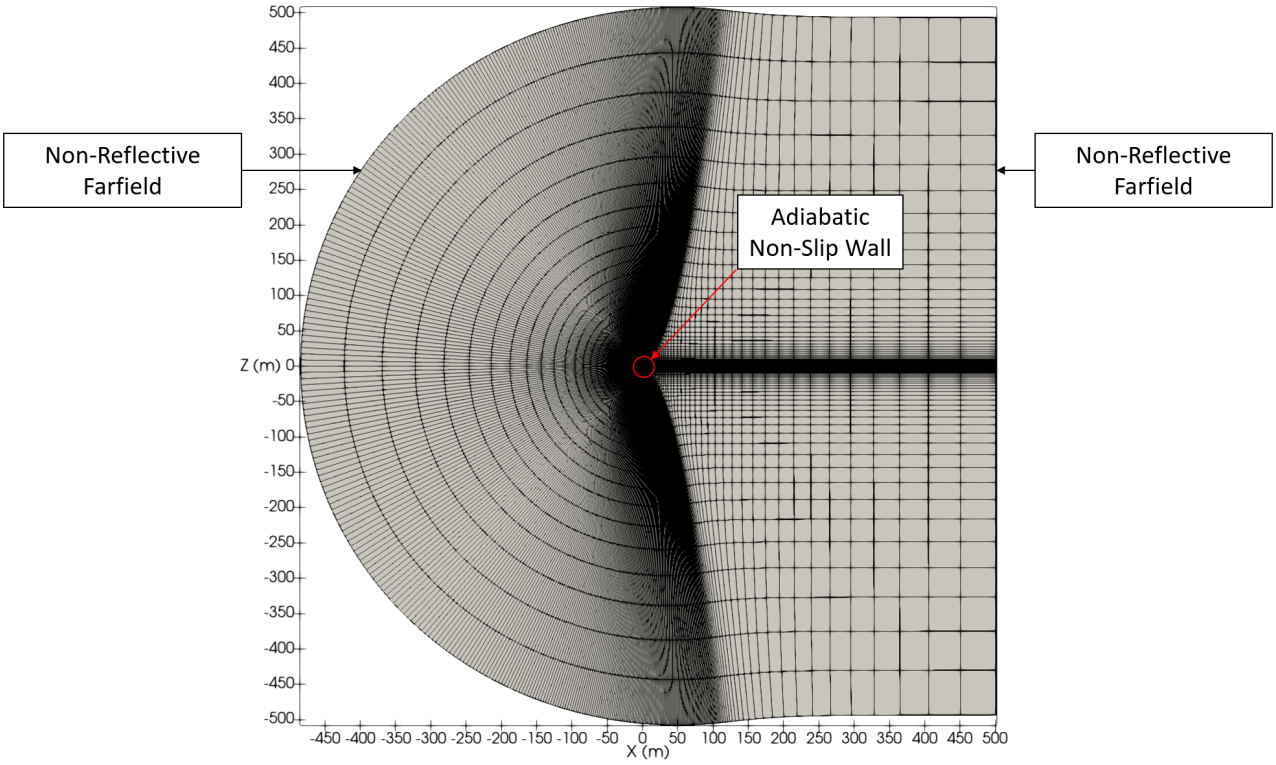

图 4 – 亚声速 NACA 0012 翼型算例的边界条件布置及计算网格整体视图。

表 1 – 亚声速 NACA0012 翼型算例的自由来流条件。

Re_∞	M_∞	c	T_∞	α_{AoA}
6×10^6	0.15	1 m	300 K	15度

3.3 跨声速 OAT15A 翼型

最后一个算例是文献 [12] 中描述的跨声速 OAT15A 翼型。此处的边界设置方式与前一个算例类似，即采用两个连续表面。最内侧表面为翼型表面，并施加无滑移绝热边界条件。最外侧表面则为自由来流边界，并施加非反射远场条件。自由来流条件见表 2。网格沿翼型弦长方向布置了 410 个单元。远场距翼型表面 240 个弦长。单元在翼型表面附近加密，使得在无滑移壁面处 $y^+ \approx 1$，如图 5 和图 6 所示。

4. 结果与讨论

本节将展示所得结果，并进行简要讨论。在所有情况下，当连续性方程相关L_∞范数的残差降低 10 个数量级时，即认为解已收敛

表2——跨声速 OAT15A 翼型算例的自由来流条件。

Re_∞	M_∞	c	T_∞	α_{AoA}
3×10^6	0.724	1 m	246.66 K	1.15度

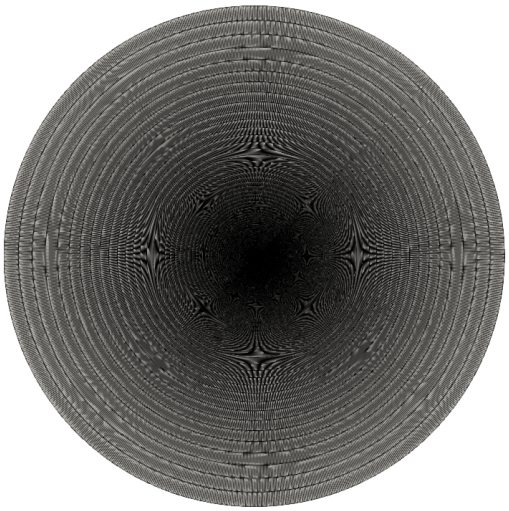

图5——跨声速 OAT15A 翼型算例所用网格概览。

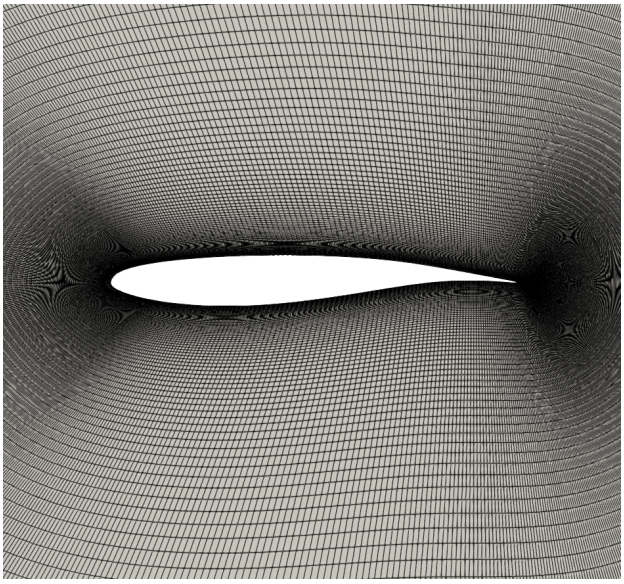

图6——跨声速 OAT15A 翼型算例所用网格的放大视图。

与连续性方程相关的残差范数。

4.1 零压梯度平板

图 7 展示了沿平板长度方向绘制的壁面摩擦系数 cf。壁面摩擦系数定义为

$$c_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}, \tag{16}$$

其中， τ_w 是壁面处测得的流体剪切应力。为便于比较，图中还展示了参考文献 [19], 中的实验数据以及冯·卡门经验曲线 [20], 。冯·卡门经验曲线定义为

$$C_{f_{vonKrmn}} = \frac{0.027}{(Re_x)^{\frac{1}{7}}}. \tag{17}$$

图中还绘制了参考文献 [11] 中的模拟数据。这些数据采用美国国家航空航天局的 CFL3D 和 FUN3D 代码，并使用 Spalart–Allmaras 湍流模型获得。尽管实验数据与大多数模拟数据之间存在细微差异，但显然，在当前算例设置下，采用三种不同梯度重构格式得到的结果几乎完全相同。此外，将当前数据与 CFL3D 和 FUN3D 的模拟结果进行比较，也可以看出它们彼此非常接近。图 8 展示了图 7 的放大视图，突出显示计算得到的 cf 值之间的最大差异约为 0.1%。因此，可以肯定地说，模拟数据与实验结果之间的差异源于湍流模型本身的质量，而非所采用的离散格式。

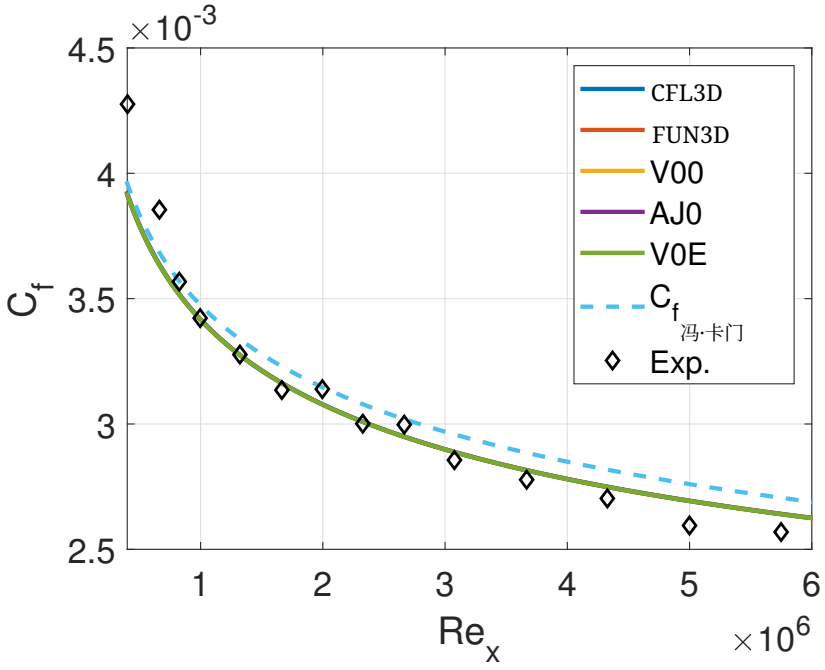

图 7 – 沿平板前 1.2 m 的壁面摩擦系数 cf 随 Re_x 变化的分布。为便于比较，图中还加入了参考文献 [19] 中的实验数据。

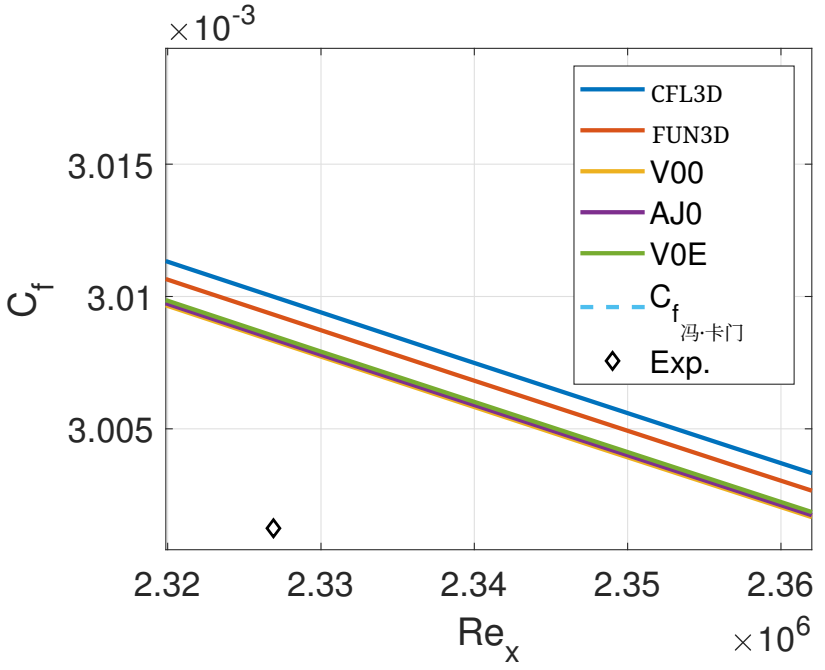

图 8 – 图 7 的局部放大图，展示了所有数值结果之间的细微差异。

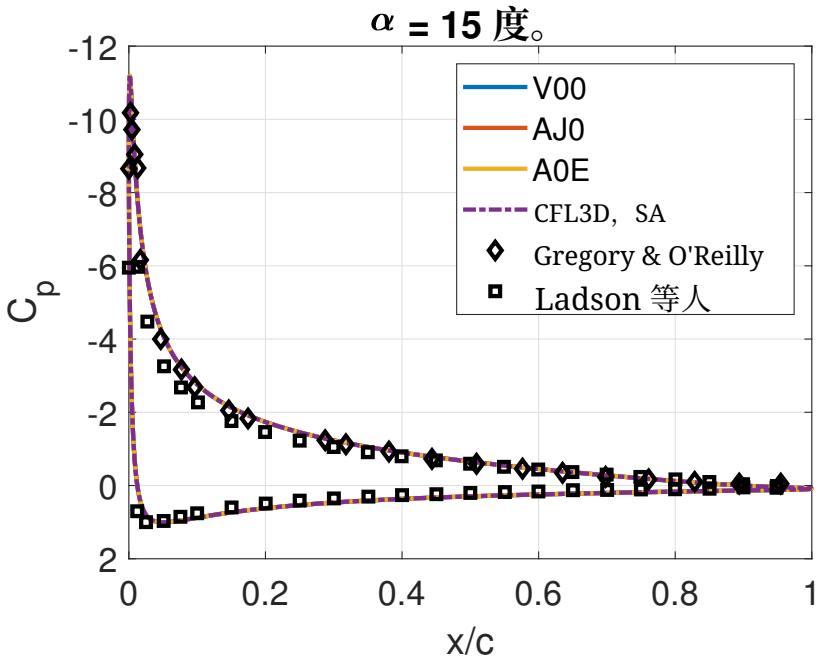

图 9——亚声速 NACA 0012 工况下翼型表面的压力系数c_p分布。

4.2 亚声速 NACA 0012 翼型

图 9 展示了 NACA 0012 翼型算例中沿壁面绘制的压力系数，c_p。此处，压力系数的计算方式为：

$$c_p \equiv \frac{(p - p_\infty)}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}. \tag{18}$$

此外，还加入了参考文献 [11], 中使用 CFL3D 代码获得的模拟数据，以及 Gregory 和 O'Reilly [21] 、Ladson [21] 提供的实验数据进行比较。可以看出，先前描述的相同行为在此处也再次出现。也就是说，对于当前算例配置和网格拓扑，各方案之间没有捕捉到明显差异。此外，模拟结果与实验c_p数据吻合极佳。

为观察所得结果之间的差异，图 10 展示了图 9 的放大视图，重点呈现吸力峰周围的区域。将 $V00$ 方案的结果与 CFL3D 的结果进行比较时，预测的c_p 值之间的差异最大。即便如此，相对差异也仅约为 0.27%。

所得升力系数和阻力系数 c_L 和 c_D列于表 3 进行比较。实验结果根据参考文献 [21] 和 [22] 插值得出，并列于同一张表中。显然，所有数值结果彼此一致。因此，采用 SA-neg 湍流模型时，所有数值格式都捕捉到了相同的流动行为。预测系数与实验数据之间的差异，很可能源于湍流模型本身，而非数值离散。

4.3 跨声速 OAT15A 翼型

这是一个跨声速算例，因此数值解中预计会形成激波。图 11 展示了 OAT15A 翼型弦向的 c_p 分布，并与参考文献 [12]中的实验数据进行了比较。再一次，各格式所得结果在整个翼型范围内均未见差异。即使在激波周围区域也是如此；如图 12 所示，为了清晰显示各条曲线，此处给出了极度放大的视图。

计算得到的气动系数c_L 和c_D列于表 4 中。插值数据取自参考文献 [12] 中的图表。二者之间存在显著差异

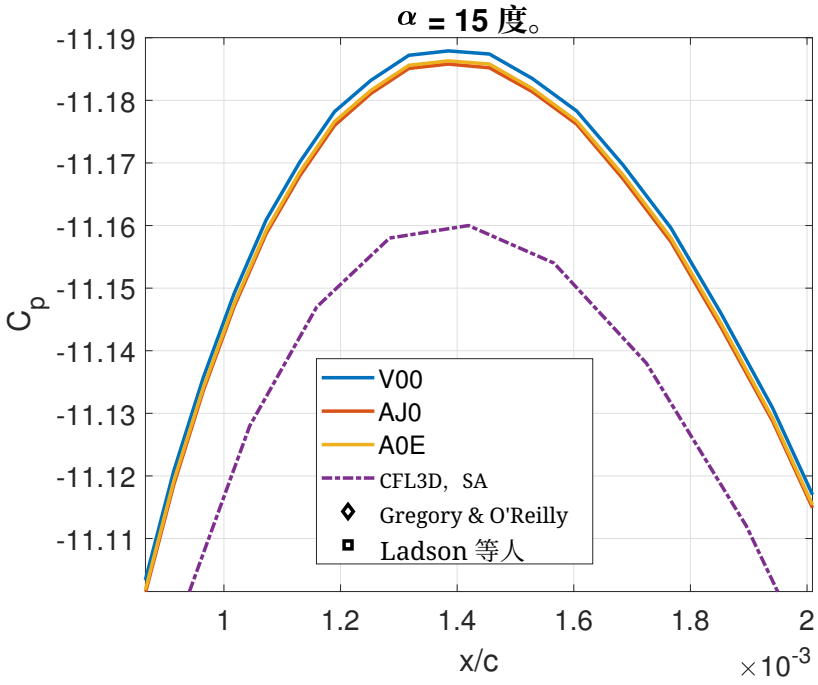

图 10 – 图 9 中吸力峰周围区域的放大图。

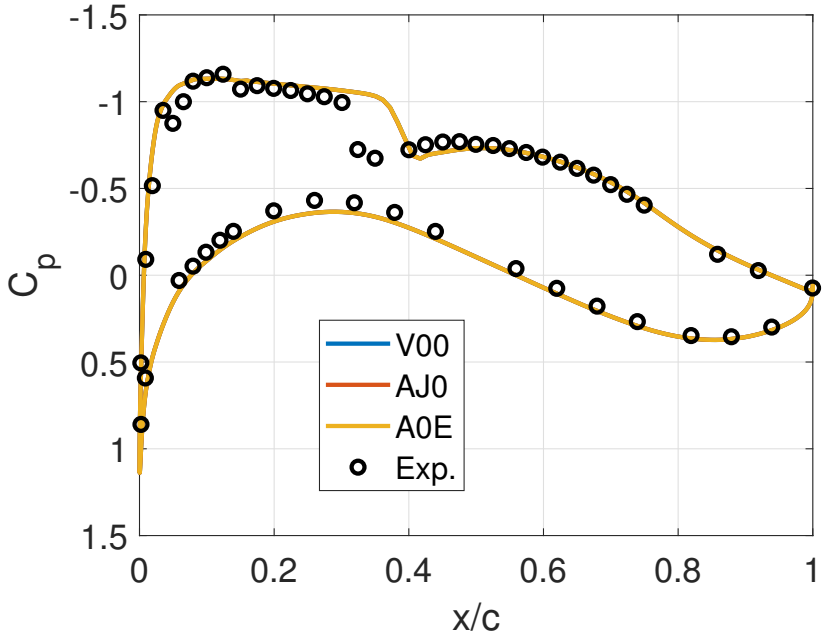

图 11 – 跨声速 OAT15A 工况下沿翼型表面的压力系数，c_p，分布。

表 3 – 亚声速 NACA 0012 翼型算例的计算气动系数与实验数据对比。

来源	c_L	c_D
CFL3D	1.5461	0.02124
BRU3D V00	1.5498	0.021234
BRU3D AJ0	1.5496	0.021257
BRU3D A0E	1.5496	0.021254
Gregory实验	1.5052	–
Ladson实验	1.4993	0.0180
Abbott实验	1.4976	–

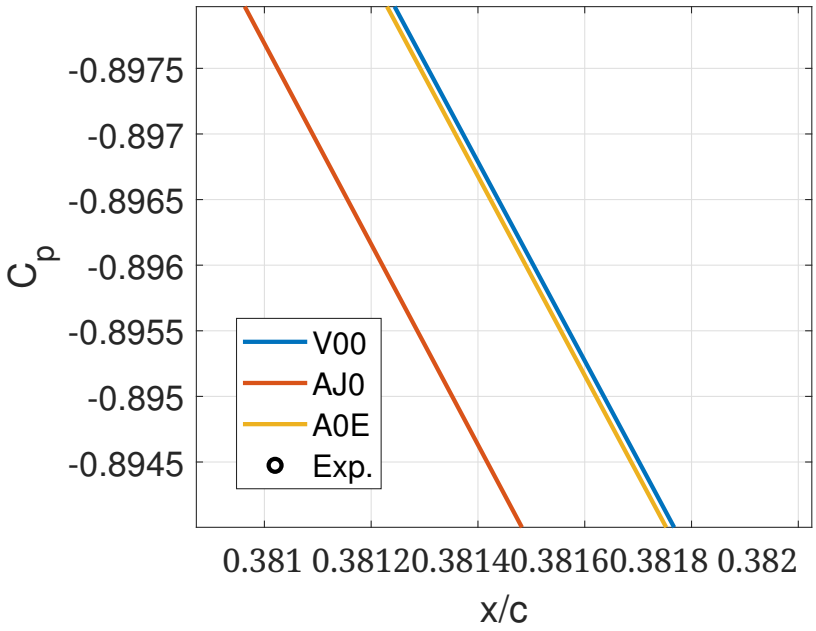

图12——图 11 中激波周围区域的放大视图。

计算所得系数与实验值之间的差异。不过，这是 Spalart–Allmaras 湍流模型的一个已知局限，因为该模型无法在此算例中正确求解激波位置 [5, 6]。

表 4——跨声速 OAT15A 翼型算例中计算所得气动系数与插值实验数据的比较。

来源	c_L	c_D
BRU3D V00	0.69178	0.013152
BRU3D AJ0	0.69163	0.013197
BRU3D A0E	0.69183	0.013183
插值实验数据	0.5949	0.0106

5. 结论

在单元界面处重构物性梯度，只是完整离散格式中的一小部分。然而，它可能会对有限体积格式的质量产生深远影响。在本研究中，采用三种不同格式得到的解基本没有差异。这种现象很可能是由于本文讨论的三个测试算例均采用了“质量良好”的四边形

网格。计算值与实验数据之间的差异，很可能源于所采用湍流模型的局限性，即负值 Spalart-Allmaras 模型，而非离散误差。与采用相同湍流模型的其他代码进行比较，进一步印证了这一观点。在这些比较中，得到的结果几乎完全相同。因此，从理论上讲，这三种梯度重构格式中的任何一种都可用于模拟与本文所研究算例类似的情况。

然而，需要强调的是，这些结论仅适用于本文所考虑的网格类型。高度拉伸的混合网格可能会导致截然不同的结果，而且不同重构格式之间的差异可能会更加明显。这正是作者将在未来工作中探讨的问题。

6. 致谢

作者谨向圣保罗研究基金会（FAPESP）表示感谢，该基金会通过研究资助项目编号 2021/00147-8 和 2013/07375-0 资助了本研究。作者还衷心感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）通过研究资助项目编号 309985/2013-7 为本研究提供的支持。此外，本研究还得到了应用于工业的数学科学中心（CeMEAI）计算资源的支持；该中心同样由 FAPESP 通过研究资助项目编号 2013/07375-0 资助。

7. 联系作者电子邮箱

Frederico Bolsoni Oliveira：fredericobolsoni@gmail.com，电话： +55 (12) 3947-6488。
João Luiz F. Azevedo：joaoluiz.azevedo@gmail.com，电话： +55 (12) 3947-6488。

参考文献

[1]《数字孪生：定义与价值》，AIAA 和 AIA 的立场文件，见 https://www.aia-aerospace.org/report/digital-twin-paper/，最后访问于 2022 年 2 月 6 日。[2] Hirsch, C., 内流与外流的数值计算——第 *2* 卷：无黏与黏性流动的计算方法, Wiley, 奇切斯特，第 1 版，1988 年，第 691 页。[3] Jalali, A., Sharbatdar, M., and Ollivier-Gooch, C., “非结构有限体积离散格式的扩散通量精度分析，”《计算机与流体》，第 101 卷，2014 年，第 220–232 页。[4] Roe, P. L., “近似黎曼求解器、参数向量与差分格式，”《计算物理学杂志》，第 43 卷，第 2 期，1981 年，第 357–372 页。[5] Bigarella, E. D. V. and Azevedo, J. L. F., “面向湍流航空航天构型模拟的统一隐式 CFD 方法，” AIAA 论文第 2009-1473 号，第*47*届 *AIAA* 航空航天科学会议（含新视野论坛和航空航天展览会），美国佛罗里达州奥兰多，2009 年 1 月。[6] Bigarella, E. D. V. and Azevedo, J. L. F., “航空航天流动的对流通量格式研究，”《巴西机械科学与工程学会期刊》，第 34 卷，第 3 期，2012 年，第 314–329 页。[7] Barth, T. J. and Jespersen, D. C., “非结构网格上迎风格式的设计与应用，” AIAA 论文第 AIAA-89-0366 号，第*27*届 *AIAA* 航空航天科学会议，美国内华达州里诺，1989 年 1 月。[8] Venkatakrishnan, V., “带限制器的非结构网格欧拉方程稳态解的收敛，”《计算物理学杂志》，第 118 卷，1995 年，第 120–130 页。[9] Spalart, P. R. and Allmaras, S. R., “用于空气动力学流动的单方程湍流模型，” AIAA 论文第 92-0439 号，第*30*届航空航天科学会议暨展览会，美国内华达州里诺，1992 年 1 月。[10] S. R. Allmaras, F. T. J. and Spalart, P. R., “Spalart–Allmaras 湍流模型实现的修订与说明，” AIAA 论文第 2007-4079 号，第*7*届国际计算流体力学会议（*ICCFD7*），美国夏威夷大岛，2012 年 7 月。[11] “美国国家航空航天局兰利研究中心——湍流建模资源网站”，见 https:// turbmodels.larc.nasa.gov/，最后访问于 2022 年 1 月 25 日。[12] Roddle, A. M. and Archambaud, J. P., “OAT15A 翼型数据，” 用于验证计算流体力学代码的一组选定实验测试算例，AGARD-AR-303，北约航空航天研究与发展咨询组，算例 A11，1994 年 8 月。

[13] Hirsch, C., 内流与外流的数值计算——第 *1* 卷：数值离散基础, Wiley, 奇切斯特，第 1 版，1988 年，第 515 页。[14] Nishikawa, H., “超越界面梯度：构造扩散格式的一般原则，” AIAA 论文第 2010-5093 号，第 *40*届流体动力学会议暨展览，2010 年 6 月。[15] Nishikawa, H., “基于迎风格式的稳健精确黏性离散——I: 基本原理，”《计算机与流体》，第 49 卷，第 1 期，2011 年，第 62–86 页。[16] Blazek, J., 计算流体力学：原理与应用, Butterworth-Heinemann, 爱思唯尔，英国牛津，第 3 版，2015 年。[17] Cary, A., Dorgan, A., and Mani, M., “利用非结构网格实现精确流动预测，” AIAA 论文第 2009-3650 号，第*19*届 *AIAA* 计算流体力学会议，2009 年 6 月。[18] Weiss, J. M., Maruszewski, J. P., and Smith, W. A., “利用代数多重网格隐式求解预处理纳维–斯托克斯方程，”《美国航空航天学会期刊》，第 37 卷，第 1 期，1998 年，第 29–36 页。[19] Coles, D. and Hirst, E. A., “湍流边界层的计算，”1968 年美国空军科学研究局内流项目斯坦福会议论文集, 斯坦福大学出版社。[20] White, F. M., 黏性流体流动, 麦格劳-希尔，美国纽约，第 3 版，2006 年，第 629 页。[21] McCroskey, W. J., “NACA 0012 翼型风洞结果的批判性评估，” *AGARDCP-429*，1998 年。[22] Abbott, I. and von Doenhoff, A., 翼型理论（含翼型数据摘要），多佛航空工程丛书，Dover出版社，1959 年。