三项递推数列的正性问题

裴亚妮，王雅玲，王毅*School of Mathematical Sciences,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, P.R. China

arXiv:2301.02054v1 [math.CO] 5 Jan 2023

摘要
我们给出了三项递推数列正性问题的一些必要条件和/或充分条件。作为应用，我们以统一的方法证明了某些有理函数的对角泰勒系数的正性。此外，我们还建立了此类数列具有正性和对数凸性的判据。

关键词：三项递推数列，全非负矩阵，连分数，对数凸数列，Ap´ery型数 2010年数学主题分类：05A20，15B48，40A15，39A21

1. 引言

设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是满足以下三项递推关系的实数数列

$$a(n)u_{n+1} = b(n)u_n - c(n)u_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

其中 $a(n)$ $b(n)$ $c(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 均取正值。我们也称 u_n 是差分方程 (1.1) 的一个解。由此自然引出正性问题：在什么情况下，三项递推数列是正的？这个问题与矩阵的全非负性密切相关。沿用 [7], 的说法，如果一个（有限或无限）矩阵的所有阶子式均非负，则称其为全非负矩阵（简称 TN）。我们有如下刻画。

定理 1.1（刻画）。设 u_n 是差分方程 (1.1) 的一个解。当且仅当 $u_0 > 0$ 且三对角矩阵

$$M_0 = \begin{pmatrix} u_1 & c(1) & & & \\ u_0 & b(1) & c(2) & & \\ & a(1) & b(2) & c(3) & \\ & & a(2) & b(3) & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

是全非负的。

我们对三项递推数列正性问题的兴趣，源于多元有理函数对角泰勒系数的正性（见例3.5）。部分对角系数是所谓的 Ap´ery 类数，它们满足三项递推关系，其中 $a(n)$ $b(n)$ $c(n)$ 都是 n 中的二次多项式，或都是 n 中的三次多项式。

*通讯作者。*Email addresses:* peiyanni@hotmail.com（裴妍妮），wang-yaling@hotmail.com（王雅玲），wangyi@dlut.edu.cn（王毅）

在本文中，我们始终假设 (1.1) 中的 $a(n)$ $b(n)$ $c(n)$ 是 n 中次数相同的多项式，次数为 δ，并且

$$a(n) = an^{\delta} + a'n^{\delta-1} + \cdots, \quad b(n) = bn^{\delta} + b'n^{\delta-1} + \cdots, \quad c(n) = cn^{\delta} + c'n^{\delta-1} + \cdots,$$

其中，首项系数 a, b, c 均为正。

按照 Elaydi [6], 的说法，如果对每个正整数 N，都存在 $n \geq N$ 使得 $u_n u_{n+1} \leq 0$，则称方程 (1.1) 的一个非平凡解 u_n 是振荡的（围绕零点）。否则，称该解是非振荡的。换言之，如果一个解最终定号，即最终为正或最终为负，则称其为非振荡的。如果对于方程 (1.1) 的任意一个不是 u_n^* 倍数的解 u_n，都有 $\lim_{n\to+\infty} u_n^*/u_n = 0$，则称非平凡解 u_n^* 是方程 (1.1) 的极小解。显然，极小解在相差一个倍数的意义下唯一。极小解在连分数的收敛性和正交多项式的渐近性质中起着核心作用。为方便起见，我们也将 (1.1) 写作

$$u_{n+1} = \beta_n u_n - \gamma_n u_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

其中 $\beta_n = b(n)/a(n)$ 且 $\gamma_n = c(n)/a(n)$。为简便起见，我们将连分数写成紧凑形式

$$\frac{\gamma_1}{\beta_1 -}\ \frac{\gamma_2}{\beta_2 -}\ \frac{\gamma_3}{\beta_3 -}\ \cdots := \cfrac{\gamma_1}{\beta_1 - \cfrac{\gamma_2}{\beta_2 - \cfrac{\gamma_3}{\beta_3 - \cdots}}} \tag{1.3}$$

定理 1.2（必要性）。设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是 (1.1) 的一个解。

(i) 若 (u_n) 最终定号，则 $b^2 \geq 4ac$。

(ii) 若 $(u_n)_{n\geq 0}$ 为正，则连分数 (1.3) 收敛到有限的正极限 ρ_0，并且$u_1 \geq \rho_0 u_0$。此外，由 $u_0^* = 1$ 和 $u_1^* = \rho_0$ 确定的 (1.1) 的解 $(u_n^*)_{n\geq 0}$ 是一个正的极小解。

定理 1.3（充分性）。若 $b^2 > 4ac$，则 (1.1) 的每个非平凡解 (u_n) 最终定号。

将差分方程 (1.1) 的特征多项式记为 $Q(\lambda) = a\lambda^2 - b\lambda + c$，特征根记为

$$\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

记 $Q_n(\lambda) := a(n)\lambda^2 - b(n)\lambda + c(n)$。那么 $Q_n(\lambda) = Q(\lambda)n^{\delta} + \cdots$。假设 $b^2 > 4ac$。那么对于 $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$，有 $Q(\lambda_0) < 0$，因此当 n 充分大时， $Q_n(\lambda_0) < 0$ 。

定理 1.4（判据）。设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是 (1.1) 的一个解。假设存在一个正数 λ_0，使得对于所有 $n \geq m$ 和 $u_{m+1} \geq \lambda_0 u_m > 0$，都有 $Q_n(\lambda_0) \leq 0$ 。那么 $(u_n)_{n\geq m}$ 为正。

显然，对于所有 $n \geq m$， $Q_n(\lambda_0) \leq 0$ 意味着 $Q(\lambda_0) \leq 0$，从而 $b^2 \geq 4ac$ 和 $\lambda_1 \leq \lambda_0 \leq \lambda_2$。从这个意义上说，定理 1.4 中的条件“几乎”是必要的。

本文安排如下。第 2 节中，我们借助三对角矩阵的全非负性和连分数理论证明定理 1.1 和定理 1.2。第 3 节中，我们先给出定理 1.3 和定理 1.4 的证明，然后将它们用于证明一些著名有理函数的对角泰勒系数具有正性。我们还建立了一个判据，用于判断三项递推数列的正性和对数凸性。第 4 节中，我们说明在 $b^2 = 4ac$ 的情形下，差分方程 (1.1) 可能是振荡的，也可能是非振荡的。我们还提出了一些有待进一步研究的问题。

2. 定理 1.1 和定理 1.2 的证明

二阶差分方程解的渐近行为已得到广泛而深入的研究（例如参见 [6, 第 8] 章）。然而，正如下面将要看到的，矩阵（尤其是三对角矩阵）的全非负性是研究正性问题更为自然的方法。

按照 [7], ，如果一个（有限或无限）矩阵的各阶子式均为非负数，我们就称其为全非负（简称 TN）。设 $(a_n)_{n\geq 0}$ 是一个由非负数组成的无限数列。如果与之对应的托普利茨矩阵

$$[a_{i-j}]_{i,j\geq 0} = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

是全非负的。我们称有限数列 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 为 PF 数列，如果相应的无限数列 $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ 是 PF 数列。Aissen 、 Schoenberg 和 Whitney 的一个经典结果表明，一个非负数有限数列是 PF 数列，当且仅当其生成函数只有实零点（例如参见[10, 第 399] 页）。例如，由非负数组成的数列 (r, s, t) 是 PF 数列，当且仅当 $s^2 \geq 4rt$。

为了证明定理 1.1，我们需要以下结果（例如参见 [16, 例 2.2，第 149] 页）。

引理 2.1. 不可约非负三对角矩阵是全非负的，当且仅当其所有顺序主子式均为正。

定理 1.1 的证明。设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是差分方程 (1.2) 的一个解。则 $u_{n+1} = \beta_n u_n - \gamma_n u_{n-1}$，其中 $\beta_n = b(n)/a(n)$ 且 $\gamma_n = c(n)/a(n)$。记无限三对角矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} u_1 & \gamma_1 & & & \\ u_0 & \beta_1 & \gamma_2 & & \\ & 1 & \beta_2 & \gamma_3 & \\ & & 1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

于是，对 $n \geq 1$， M_1 的第 n 阶顺序主子式恰为 u_n，因为它们满足相同的三项递推关系。因此，若对于所有 $n \geq 1$， u_0 和 γ_n 均为正，则根据引理 2.1，数列 $(u_n)_{n\geq 1}$为正，当且仅当三对角矩阵 M_1 是全非负的。显然， M_0是全非负的，当且仅当 M_1 是全非负的。因此，数列 $(u_n)_{n\geq 1}$ 的正性等价于三对角矩阵 M_0的全非负性。定理 1.1 证毕。 □

除了引理 2.1 外，还有其他关于三对角矩阵全非负性的刻画。

引理 2.2（[16, 例 2.1，第 147] 页）。非负三对角矩阵是全非负的，当且仅当其所有主子式均为非负。

引理 2.3（[18, 定理 4.3]）。非负三对角矩阵是全非负的，当且仅当所有包含连续行和列的主子式均为非负，

有关三对角矩阵全非负性的一些判据，我们还请读者参阅 [3, 4, 12, 23] 。

定理 1.2 (i) 的证明。显然，只需考虑总序列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 为正的情形。根据命题 1.1，要证明定理 1.2 (i)，只需证明矩阵 M_0 的全非负性蕴含 $b^2 \geq 4ac$。换言之，我们需要证明数列 (c, b, a) 是一个 P´olya 频率数列，或者等价地，三对角矩阵

$$\begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & a & b & c & \\ & & a & b & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

是全非负的。根据引理 2.3，只需证明这些行列式

$$D_k = \det \begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & a & b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & a & b \end{pmatrix}_{k\times k}$$

对所有 $k \geq 1$ 都非负。

假设 反之，并假设对某个 $m \geq 1$， $D_m < 0$。考虑行列式 s

$$D_m(n) = \det \begin{pmatrix} b(n+1) & c(n+2) & & & & \\ a(n+1) & b(n+2) & c(n+3) & & & \\ & a(n+2) & b(n+3) & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & c(n+m) & \\ & & & a(n+m-1) & b(n+m) \end{pmatrix}_{m\times m}.$$

显然，对所有 $n \geq 0$， $D_m(n) \geq 0$，因为它们是全非负矩阵 M_0 的子式。另一方面，注意到 $D_m(n)$ 是关于 n 的多项式，次数为 $m\delta$，首项系数为 D_m:

$$D_m(n) = D_m n^{m\delta} + \cdots .$$

由此可知，当 n 足够大时， $D_m(n) < 0$，这就产生了矛盾。

因此，对所有 $k \geq 1$，均有 $D_k \geq 0$，证毕。这就完成了定理 1.2 (i). □

To 为了证明定理 1.2 (ii)，我们需要以下经典的行列式求值法则。

Desnanot–Jacobi 行列式恒等式。设矩阵为 $M = [m_{ij}]_{0\leq i,\ j\leq k}$。则

$$\det M \cdot \det M^{0,k}_{0,k} = \det M^k_k \cdot \det M^0_0 - \det M^k_0 \cdot \det M^0_k,$$

其中 M^I_J 表示从 M 中删除 I 所示的行以及 J 所示的列后得到的子矩阵。

设 $\beta = (\beta_n)_{n\geq 0}$ 和 $\gamma = (\gamma_n)_{n\geq 1}$ 是两个正数序列。记

$$J_i = \begin{pmatrix} \beta_i & \gamma_{i+1} & & & \\ 1 & \beta_{i+1} & \gamma_{i+2} & & \\ & 1 & \beta_{i+2} & \gamma_{i+3} & \\ & & 1 & \beta_{i+3} & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

引理 2.4. 如果三对角矩阵 J_0 是全非负的，那么连分数

$$\beta_0 - \frac{\gamma_1}{\beta_1 -}\ \frac{\gamma_2}{\beta_2 -}\ \frac{\gamma_3}{\beta_3 -}\ \frac{\gamma_4}{\beta_4 -}\ \cdots \tag{2.1}$$

是收敛的。

证明。设 $A(n)$ 和 $B(n)$ 分别为连分数 (2.1) 的第 n 个部分分子和第 n 个部分分母。那么

$$\begin{aligned} A(n) &= \beta_n A(n-1) - \gamma_n A(n-2), \qquad A(-1) = 1,\ A(0) = \beta_0; \\ B(n) &= \beta_n B(n-1) - \gamma_n B(n-2), \qquad B(-1) = 0,\ B(0) = 1 \end{aligned}$$

根据连分数的基本递推公式（例如参见 [6, 定理 9.2] ），我们得到。要证明连分数 (2.1) 收敛，只需证明 $A(n)/B(n)$ 收敛。

对于 $n \geq i \geq 0$，记

$$u_{i,n} = \det \begin{pmatrix} \beta_i & \gamma_{i+1} & & & \\ 1 & \beta_{i+1} & \gamma_{i+2} & & \\ & 1 & \beta_{i+2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ & & & 1 & \beta_n \end{pmatrix}.$$

若 J_0 是全非负的，则对每个 $i \geq 0$，J_i 也是全非负的。因此，根据引理 2.1，$u_{i,n} > 0$

将 Desnanot–Jacobi 行列式恒等式应用于行列式 $u_{i,n+1}$，得到

$$u_{i,n+1}u_{i+1,n} = u_{i+1,n+1}u_{i,n} - \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n.$$

由此可得 $u_{i,\ n+1}u_{i+1,\ n} < u_{i+1,\ n+1}u_{i,\ n}$。因此，$u_{i,\ n}/u_{i+1,\ n}$ 在 n 中递减，故收敛。令 $\lim_{n\to+\infty} u_{i,\ n}/u_{i+1,\ n} = \ell_i$。显然，$\ell_i \geq 0$。注意到 $A(n) = u_{0,\ n}$ 且 $B(n) = u_{1,\ n}$。因此，$A(n)/B(n)$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} A(n)/B(n) = \ell_0$。 □

注 2.5. 我们已经证明，连分数 (2.1) 收敛到 ℓ_0。更一般地，我们有

$$\ell_i = \beta_i - \frac{\gamma_{i+1}}{\beta_{i+1} -}\ \frac{\gamma_{i+2}}{\beta_{i+2} -}\ \frac{\gamma_{i+3}}{\beta_{i+3} -}\ \frac{\gamma_{i+4}}{\beta_{i+4} -}\ \cdots \tag{2.2}$$

对于 $i \geq 0$。显然，$\ell_i = \beta_i - \frac{\gamma_{i+1}}{\ell_{i+1}}$。因此 $\ell_{i+1} \neq 0$，从而 $\ell_{i+1} > 0$ 对于 $i \geq 0$。记 e

$$\rho_i = \frac{\gamma_{i+1}}{\beta_{i+1} -}\ \frac{\gamma_{i+2}}{\beta_{i+2} -}\ \frac{\gamma_{i+3}}{\beta_{i+3} -}\ \frac{\gamma_{i+4}}{\beta_{i+4} -}\ \cdots. \tag{2.3}$$

于是 $\rho_i = \frac{\gamma_{i+1}}{\ell_{i+1}}$。因此 $\rho_i > 0$ 对于 $i \geq 0$。另一方面，$\ell_i = \beta_i - \rho_i$。因此 $\beta_0 \geq \rho_0$ 且 $\beta_{i+1} > \rho_{i+1}$ 对于 $i \geq 0$。

以下经典结果由 Pincherle 在其关于连分数的基础性著作中给出（例如参见 [6, 定理 9.5] ）。

Pincherle 定理。连分数

$$\frac{\gamma_1}{\beta_1 -}\ \frac{\gamma_2}{\beta_2 -}\ \frac{\gamma_3}{\beta_3 -}\ \frac{\gamma_4}{\beta_4 -}\ \cdots$$

当且仅当差分方程 $u_{n+1} = \beta_n u_n - \gamma_n u_{n-1}$ 有一个满足 $u_0^* = 1$ 的极小解 u_n^* 时，级数收敛。此外，在收敛的情况下，有

$$\frac{u_{n+1}^*}{u_n^*} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} -}\ \frac{\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} -}\ \frac{\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} -}\ \frac{\gamma_{n+4}}{\beta_{n+4} -}\ \cdots.$$

定理 1.2 (ii) 的证明。设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是差分方程 $u_{n+1} = \beta_n u_n - \gamma_n u_{n-1}$ 的一个正解，且 $\beta_0 = u_1/u_0$。那么，三对角矩阵 J_0 是全非负的。由注 2.5，得 $\beta_0 \geq \rho_0 > 0$，因此 $u_1 \geq \rho_0 u_0$。

另一方面，根据引理 2.4 和 Pincherle 定理，我们有 $u^*_{n+1} = \rho_n u^*_n$；根据注 2.5，我们再次有 $\rho_n > 0$。因此，由 $u^*_0 = 1$ 和 $u^*_1 = \rho_0$ 确定的方程 (1.1) 的解 $(u^*_n)_{n\geq 0}$ 是方程 (1.1) 的一个正极小解。定理 1.2 (ii) 得证。 □

3. 定理 1.3 和定理 1.4 的证明与应用

我们称 (1.1) 是 Poincar´e 型差分方程，其含义是两个数列$b(n)/a(n)$ 和 $c(n)/a(n)$ 都有有限极限。下面的 Poincar´e 定理标志着线性差分方程定性理论研究的开端（例如参见 [6, 定理 8.9] ）。

庞加莱定理。假设 (1.1) 是一个庞加莱型差分方程，且特征根的模互不相同。若 u_n 是 (1.1) 的一个解，则要么对所有充分大的 n，$u_n = 0$；要么对于某个特征根 λ_i，$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda_i$。

定理 1.3 的证明。由庞加莱定理，$u_{n+1}/u_n \to \lambda_i$ 对某个 i 成立。现在 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$。因此存在一个正整数 N，使得对 $n \geq N$，$u_{n+1}/u_n > 0$。所以数列 (u_n) 是定号的。 □

定理 1.4 的证明。假设 $u_n \geq \lambda_0 u_{n-1} > 0$。那么由 (1.1),

$$u_{n+1} = \frac{b(n)}{a(n)}u_n - \frac{c(n)}{a(n)}u_{n-1} \geq \frac{b(n)}{a(n)}u_n - \frac{c(n)}{a(n)}\frac{u_n}{\lambda_0} = \left[\frac{b(n)\lambda_0 - c(n)}{a(n)\lambda_0}\right] u_n \geq \lambda_0 u_n > 0.$$

因此，由归纳法，$(u_n)_{n\geq m}$ 为正。 □

定理 1.4 的一个特别有趣的特例如下。

推论 3.1. 若对所有 $n \geq 1$ 和 $u_1 \geq u_0 > 0$，$b(n) \geq a(n) + c(n)$，则 $(u_n)_{n\geq 0}$ 为正。

证明。令 $\lambda_0 = 1$，由定理 1.4 即可得出此结论。 □

定理 1.4 中，λ_0 的一个较佳候选是 λ_1。注意，$Q_n(\lambda_1)$ 是关于 n 的一个次数小于 δ 的多项式，因此更容易估计。

推论 3.2. 假设 $(an + a_0)u_{n+1} = (bn + b_0)u_n - (cn + c_0)u_{n-1}$。若 $b^2 \geq 4ac$、$a_0\lambda_1^2 - b_0\lambda_1 + c_0 \leq 0$和 $u_1 \geq \lambda_1 u_0$，则 $(u_n)_{n\geq 0}$ 为正。

证明。我们有 $Q_n(\lambda_1) = a_0\lambda_1^2 - b_0\lambda_1 + c_0$，因此令$\lambda_0 = \lambda_1$，由定理 1.4 即可得出此结论。 □

以下众所周知的结果可由定理 1.2 和定理 1.4 直接推出，例如可见于 [8] 。

推论 3.3. 设 $au_{n+1} = bu_n - cu_{n-1}$，其中 a、b、c均为正数。那么$(u_n)_{n\geq 0}$为正，当且仅当 $b^2 \geq 4ac$ 且 $u_1 \geq \lambda_1 u_0 > 0$。

证明。“若”部分由定理 1.4 得出。现在假设$(u_n)_{n\geq 0}$ 为正。根据定理 1.2，$b^2 \geq 4ac$且 $u_1 \geq \rho u_0$，其中 $\beta = b/a$、$\gamma = c/a$ 和

$$\rho = \frac{\gamma}{\beta -}\ \frac{\gamma}{\beta -}\ \frac{\gamma}{\beta -}\ \frac{\gamma}{\beta -}\ \cdots .$$

由此可得 $\rho = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lambda_1$。这就完成了“仅当”部分的证明。 □

例3.4. 设 b、 $c>0$ 和有理函数

$$\frac{1}{1-bx+cx^2}=\sum_{n\geq 0}u_nx^n.$$

于是 $u_0=1$、 $u_1=b$和 $u_{n+1}=bu_n-cu_{n-1}$。因此，所有 u_n均为正，当且仅当 $b^2\geq 4c$，这是一个众所周知的结果。

类似地，令 b、 c、 $d>0$ 和

$$\frac{1-dx}{1-bx+cx^2}=\sum_{n\geq 0}u_nx^n.$$

于是 $u_0=1$、 $u_1=b-d$和 $u_{n+1}=bu_n-cu_{n-1}$。因此，所有 u_n均为正，当且仅当 $b^2\geq 4c$和 $d\leq(b+\sqrt{b^2-4c})/2$。

例3.5。许多作者 [1, 2, 11, 17, 19, 21, 22]研究过这样一个问题：如何判断给定有理函数的泰勒系数是否全为正。为了证明这些有理函数的正性，只需证明其对角泰勒系数为正。某些重要有理函数的对角系数构成了具有算术意义的数列，并满足三项递推关系。Straub 和 Zudilin [22] 通过将这些对角系数表示为已知的超几何求和，证明了它们为正。这里，我们从三项递推数列的角度证明其正性。

(1) 考虑有理函数

$$\frac{1}{1-(x+y)+axy}=\sum_{n,m\geq 0}u_{n,m}x^ny^m. \tag{3.1}$$

泰勒展开的对角项 $u_n:=u_{n,\,n}$ 满足递推关系

$$(n+1)u_{n+1}=(2-a)(2n+1)u_n-a^2nu_{n-1}$$

其中 $u_0=1$和 $u_1=2-a$。特征函数 $Q(\lambda)=\lambda^2-2(2-a)\lambda+a^2$ 以及判别式$\Delta=16(1-a)$。若 (u_n)为正，则由定理 1.2 可得 $\Delta\geq 0$，即 $a\leq 1$。反之，若 $a\leq 1$，则 $\lambda_1=2-a-2\sqrt{1-a}$。显然，$u_1=2-a\geq\lambda_1=\lambda_1u_0$且 $Q_n(\lambda_1)=\lambda_1[\lambda_1-(2-a)]\leq 0$。取 $\lambda_0=\lambda_1$，由定理1.4可知 $(u_n)_{n\geq 0}$ 为正。因此，我们得出结论：$(u_n)_{n\geq 0}$为正当且仅当 $a\leq 1$。此外，已知

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!^2}(-a)^k.$$

当 $0<a\leq 1$时，正性并不明显。

Straub [21, 命题 4] 证明了，当且仅当 $a\leq 1$时，式 (3.1) 中的 $u_{n,\,m}$ 全都为正。换言之，当且仅当有理函数 (3.1) 的对角项为正时，该有理函数才为正。

(2) 考虑 Szeg¨o 有理函数

$$S(x,y,z)=\frac{1}{1-(x+y+z)+\frac{3}{4}(xy+yz+zx)}.$$

将对角项记为 $s_n=[(xyz)^n]S(2x,2y,2z)$。已知

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}(-27)^{n-k}2^{2k-n}\frac{(3k)!}{k!^3}\binom{k}{n-k},$$

这里的正性并不显然。另一方面，对角项满足三项递推关系

$$2(n+1)^2 s_{n+1} = 3(27n^2+27n+8)s_n - 81(3n-1)(3n+1)s_{n-1},$$

其中 $s_0 = 1$、$s_1 = 12$ 和 $s_2 = 198$。特征方程 $2\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0$ 有两个根$\lambda_1 = 27/2$ 和 $\lambda_2 = 27$。此外，$s_2 > \lambda_1 s_1$ 和

$$Q_n(\lambda_1) = 2(2n+1)\lambda_1^2 - 3(27n+8)\lambda_1 - 81 = -\frac{729}{2}n - \frac{81}{2} < 0$$

对于 $n \geq 1$。由定理 1.4 取 $\lambda_0 = \lambda_1$，可得 $(s_n)_{n\geq 1}$ 的正性。因此，总序列 $(s_n)_{n\geq 0}$ 是正的。

(3) 考虑 Lewy-Askey有理函数

$$h(x,y,z,w) = \frac{1}{1-(x+y+z+w)+\frac{2}{3}(xy+xz+xw+yz+yw+zw)}.$$

设 $t_n = 9^n[(xyzw)^n]h(x,y,z,w)$，且 $t_n = \binom{2n}{n}h_n$。那么 $h_0 = 1$、$h_1 = 24$和

$$3(n+1)^2 h_{n+1} = 4(28n^2+28n+9)h_n - 64(4n-1)(4n+1)h_{n-1}.$$

特征方程 方程 $3\lambda^2 - 112\lambda + 1024 = 0$ 有两个根 $\lambda_1 = 16$ 和 $\lambda_2 = 64/3$。此外 o,

$$Q_n(\lambda_1) = 3(2n+1)\lambda_1^2 - 4(28n+9)\lambda_1 - 64 = -256(n-1) - 128 < 0$$

对于 $n \geq 1$和 $h_1 > \lambda_1 h_0$。取 $\lambda_0 = \lambda_1$，由定理 1.4 可得 $(h_n)_{n\geq 0}$ 的正性。(4) 考虑 Kauers-Zeilberger有理函数

$$D(x,y,z,w) = \frac{1}{1-(x+y+z+w)+2(xyz+xyw+xzw+yzw)+4xyzw}.$$

令 $d_n = [(xyzw)^n]D(x,y,z,w)$。那么

$$(n+1)^3 d_{n+1} = 4(2n+1)(3n^2+3n+1)d_n - 16n^3 d_{n-1}$$

其中 $d_0 = 1$ 和 $d_1 = 4$。特征方程 $\lambda^2 - 24\lambda + 16 = 0$ 有两个根 $\lambda_1 = 12 - 8\sqrt{2} < 1 < \lambda_2 = 12 + 8\sqrt{2}$。取 $\lambda_0 = 1$，由定理 1.4 可得 $(d_n)_{n\geq 0}$ 的正性，因为$b(n) \geq a(n) + c(n)$。

注3.6。Ap´ery 数

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

在 Ap´ery 证明 $\zeta(3) = \sum_{n\geq 1} 1/n^3$ 的无理性时发挥着重要作用。Ap´ery 数是有理函数的对角泰勒系数

$$\frac{1}{1-(xyzw+xyw+xy+xz+zw+y+z)}$$

并满足三项递推关系

$$(n+1)^3 A_{n+1} = (2n+1)(17n^2+17n+5)A_n - n^3 A_{n-1}. \tag{3.2}$$

关于阿佩里数，请读者参阅 [20, A005259] 及其中的参考文献。阿佩里数与模形式或超同余密切相关，并已推广为各种类似阿佩里数的数列，它们满足与（3.2）类似的三项递推关系（例如参见 [5, 15] ）。例3.5中的对角项 s_n、h_n 和 d_n 都是类似阿佩里数的数列。并非所有类似阿佩里数的数列都为正。例如，考虑由下式定义的类似阿佩里数的数列 $(u_n)_{n\geq 0}$

$$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} (-1)^k 3^{n-3k} \binom{n}{3k} \frac{(3k)!}{k!^3},$$

它们是有理函数的对角泰勒系数

$$\frac{1}{1+x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

并满足递推关系

$$(n+1)^2 u_{n+1} = (9n^2+9n+3)u_n - 27n^2 u_{n-1}.$$

参见 [20, A006077] 及其中的参考文献。注意，特征方程$\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$ 的判别式为负。因此，根据定理 1.2 (i)，数列 (u_n) 是振荡的。

若正数数列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 满足 $u_{n-1}u_{n+1} \geq u_n^2$ 对所有 $n \geq 1$ 都成立，则称其为对数凸数列。组合数列的对数凸性已得到广泛研究（例如参见 [14]）。这里我们提出一个新的判据，可同时用于判断三项递推数列的正性和对数凸性。

记

$$B(n) = \begin{vmatrix} b(n+1) & b(n) \\ a(n+1) & a(n) \end{vmatrix} = Bn^{2\delta-2} + \cdots, \quad C(n) = \begin{vmatrix} c(n+1) & c(n) \\ a(n+1) & a(n) \end{vmatrix} = Cn^{2\delta-2} + \cdots$$

其中

$$B = \begin{vmatrix} b & b' \\ a & a' \end{vmatrix} = ba' - b'a, \quad C = \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} = ca' - c'a.$$

命题 3.7（对数凸性）。设 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是满足递推关系 (1.1) 的数列。假设 $B, C > 0$，且令 $\lambda_0 = C/B$。

(i) 假设 t hat $u_1 \geq \lambda_0 u_0 > 0$ 且 $Q_n(\lambda_0) \leq 0$ 对于 $n \geq 1$ 成立。那么数列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是正的 .

(ii) 假设数列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是正的，且 $CB(n) \geq BC(n) \geq 0$ 对于 $n \geq 1$ 成立。若 $u_2/u_1 \geq u_1/u_0 \geq \lambda_0$，则数列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是对数凸的。

证明。(i) 根据定理 1.4，$(u_n)_{n\geq 0}$ 的正性显然。

(ii) 令 $x_n = u_{n+1}/u_n$ 对于 $n \geq 0$ 成立。则 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是对数凸的，当且仅当 $(x_n)_{n\geq 0}$ 是非递减的。接下来证明 $x_{n+1} \geq x_n \geq \lambda_0$ 对于 $n \geq 0$ 成立。我们对 n 使用归纳法。显然，$x_1 \geq x_0 \geq \lambda_0$。现在假设 $x_n \geq x_{n-1} \geq \lambda_0$。我们需要证明 $x_{n+1} \geq x_n \geq \lambda_0$。

由递推关系 (1.1)，我们有

$$x_n = \frac{b(n)}{a(n)} - \frac{c(n)}{a(n)} \frac{1}{x_{n-1}}. \tag{3.3}$$

Thus

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left[\left(\frac{b(n+1)}{a(n+1)} - \frac{b(n)}{a(n)} \right) - \left(\frac{c(n+1)}{a(n+1)} - \frac{c(n)}{a(n)} \right) \frac{1}{x_n} \right] + \frac{c(n)}{a(n)} \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \frac{B(n)x_n - C(n)}{a(n+1)a(n)x_n} + \frac{c(n)}{a(n)} \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

根据假设 $x_n \geq \lambda_0$ 和条件 $CB(n) \geq BC(n)$，我们得到 $B(n)x_n \geq B(n)\lambda_0 \geq C(n)$。由 (3.4) 可得 $x_{n+1} \geq x_n$，这正是所需的结论。因此，数列 $(x_n)_{n\geq 0}$ 是非递减的，故数列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 是对数凸的。□

利用命题 3.7，我们可以证明例3.5中的对角项 s_n, h_n, d_n 的对数凸性，以及 Ap´ery 数 A_n的对数凸性。为简洁起见，此处省略证明。下面给出一个稍复杂的例子来说明命题 3.7。

例 3.8. 考虑由下式定义的 Ap´ery 类数 $(u_n)_{n\geq 0}$

$$(n+1)^3 u_{n+1} = (2n+1)(14n^2+14n+6)u_n - n(192n^2-12)u_{n-1} \tag{3.5}$$

其中 $u_0 = 1$ an d $u_1 = 6$。这类 Ap´ery 类数由 Cooper 在 [5] 中引入。众所周知, t

$$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\left[\binom{2n-3k-1}{n} + \binom{2n-3k}{n}\right].$$

We 接下来应用命题 3.7，同时得到正性和对数凸性 .

我们有

$$B(n) = 42n^4 + 200n^3 + 330n^2 + 220n + 54$$

and

$$C(n) = 576n^4 + 2328n^3 + 2952n^2 + 1200n + 180.$$

因此 $B = 42$、$C = 576$ 且

$$CB(n) - BC(n) = 17424n^3 + 66096n^2 + 76320n + 23544$$

对于 $n \geq 1$。另一方面， $\lambda_0 = C/B = 96/7$ 且

$$Q_n(\lambda_0) = \frac{12}{49}(-16n^3 - 48n^2 + 799n + 432) < 0$$

对于 $n \geq 7$。此外， $u_{12}/u_{11} \geq u_{11}/u_{10} > \lambda_0$。因此，根据命题 3.7，数列 $(u_n)_{n\geq 10}$ 为正且对数凸。不难验证，$(u_n)_{0\leq n\leq 11}$ 也为正且对数凸。因此，总序列 $(u_n)_{n\geq 0}$ 为正且对数凸。

对于三项递归数列的对数凸性，感兴趣的读者还可参阅 [27] ；对于 P-递归数列的渐近对数凸性，可参阅 [9] 。

4. 总结与后续工作

我们已经看到，若 $b^2 < 4ac$，则差分方程 (1.1) 是振荡的；若 $b^2 > 4ac$，则差分方程 (1.1) 是非振荡的。在 $b^2 = 4ac$ 的情况下，二阶差分方程解的渐近行为可能非常复杂。感兴趣的读者可参阅 Wong 和 Li [24, 25]。这里我们说明，差分方程 (1.1) 可能是振荡的，也可能是非振荡的。

例 4.1。考虑以下差分方程

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x). \tag{4.1}$$

显然，相应的判别式为 $b^2 - 4ac = 0$。

当 $x=0$ 时，我们有 $(n+1)L_{n+1}(0) = (2n+1)L_n(0) - nL_{n-1}(0)$。这个差分方程的每个解都是非振荡的。实际上，求解该差分方程可得

$$L_n(0) = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(L_1(0) - L_0(0)) + L_0(0). \tag{4.2}$$

回顾一下，$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n + \gamma$，其中 γ 是欧拉常数。因此，若 $L_1(0) < L_0(0)$，则 $L_n(0)$ 最终为负；若 $L_1(0) = L_0(0)$，则 $L_n(0)$ 恒等于 $L_0(0)$；若 $L_1(0) > L_0(0)$，则 $L_n(0)$ 最终为正。在为正的情形下，由 (4.2) 立即可得数列 $(L_n(0))$ 是凹的，因此是对数凹的。

当 $x=1$ 时，我们有

$$(n+1)L_{n+1}(1) = 2nL_n(1) - nL_{n-1}(1). \tag{4.3}$$

接下来证明，差分方程 (4.3) 的每个解都是振荡的。

反设 L_n 是 (4.3) 的一个最终为正的解。不妨设对所有 $n \geq 0$，都有 $L_n > 0$。令 $x_n = L_{n+1}/L_n$，其中 $n \geq 0$。那么

$$x_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n}{n+1}\frac{1}{x_{n-1}} = \frac{n}{n+1}\left(2 - \frac{1}{x_{n-1}}\right). \tag{4.4}$$

注意到 $x_1 = 1 - \frac{1}{2x_0} < 1$。假设 $x_{n-1} < 1$。则根据（4.4），$x_n < \frac{2n}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$。因此，对于所有 $n \geq 1$，$x_n < 1$。另一方面，由于当 $a > 0$ 时 $a + 1/a \geq 2$，我们有

$$x_n = \frac{n}{n+1}\left(2 - \frac{1}{x_{n-1}}\right) \leq \frac{n}{n+1}x_{n-1} < x_{n-1}.$$

因此，数列 $(x_n)_{n\geq 1}$ 是递减的。于是数列 (x_n) 收敛。令 $x_n \to x$。则根据（4.4），$x = 2 - 1/x$，从而 $x = 1$。另一方面，由于 (x_n) 是递减的，$x < x_1 < 1$，这就导致矛盾。

经典拉盖尔多项式

$$L_n^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}$$

满足该条件的 递推关系（4.1），其中 $L_0^{(0)}(x) = 1$，且 $L_1^{(0)}(x) = 1 - x$。众所周知，at

$$L_n^{(0)}(x) = \pi^{-1/2}e^{x/2}(nx)^{-1/4}\cos\left(2(nx)^{1/2} - 1/4\right) + O\left(n^{-3/4}\right)$$

（例如，参见 [6, 例 8.38] ）。这也可以解释为什么 $L_n^{(0)}(1)$ 是振荡的。

对于满足 $b^2 = 4ac$ 的差分方程 (1.1)，我们认为，要么所有解都是振荡的，要么所有解都是非振荡的。然而，我们无法证明这一点。

根据定理 1.2 (ii)，我们已经知道，如果差分方程 (1.1) 有一个正解，那么它就有一个正的极小解 u_n^*。我们猜想，解 u_n^* 是对数凸的，并且比值 u_{n+1}^*/u_n^* 收敛于较小的特征根 λ_1。

致谢

本研究部分得到了国家自然科学基金委员会的资助（项目编号：11771065、12171068）。

参考文献

参考文献

[1] R. Askey，具有正系数幂级数的某些有理函数（II），《SIAM数学分析杂志》5 (1974) 53–57。[2] R. Askey 和 G. Gasper，具有正系数幂级数的某些有理函数，《美国数学月刊》79 (1972) 327–341。[3] X. Chen、H. Liang 和 Y. Wang，Riordan数组的全正性，《欧洲组合学杂志》46 (2015) 68–74。[4] X. Chen、H. Liang 和 Y. Wang，递归矩阵的全正性，《线性代数及其应用》471 (2015) 383–393。[5] S. Cooper，零星数列、模形式与 $1/\pi$ 的新级数，《拉马努金杂志》29(1-3) (2012) 163–183。[6] S. Elaydi，《差分方程导论》，第3版，施普林格，纽约，2005。[7] S.M. Fallat 和 C.R. Johnson，《全非负矩阵》，普林斯顿大学出版社，2011。[8] V. Halava、T. Harju 和 M. Hirvensalo，二阶线性递推数列的正性，《离散应用数学》154 (2006) 447–451。[9] Q.-H. Hou 和 Z.-R. Zhang，渐近 r-对数凸性与 P-递归数列，《符号计算杂志》93 (2019) 21–33。[10] S. Karlin，《全正性》，第1卷，斯坦福大学出版社，1968。[11] M. Kauers，计算机代数与具有正系数的幂级数，载于：《FPSAC'07会议论文集》，2007，第1–7页。[12] H. Liang、L. Mu 和 Y. Wang，类卡塔兰数与Stieltjes矩数列，《离散数学》339 (2016) 484–488。[13] L. L. Liu，三项递推数列的正性，《电子组合学杂志》17 (2010) 1–9。[14] L. L. Liu 和 Y. Wang，组合数列的对数凸性，《应用数学进展》39 (2007) 453–476。[15] A. Malik 和 A. Straub，零星 Ap´ery 类数的整除性质，《数论研究》2 (2016)，论文编号5，共26页。[16] H. Minc，《非负矩阵》，约翰·威立父子公司，纽约，1988。[17] V. Pillwein，Gillis-Reznick-Zeilberger有理函数的正性，《应用数学进展》104 (2019) 75–84。[18] A. Pinkus，《全正矩阵》，剑桥大学出版社，剑桥，2010。[19] A.D. Scott 和 A.D. Sokal，某些组合定义多项式逆幂的完全单调性，《数学学报》213 (2) (2014) 323–392。[20] N.J.A. Sloane，《在线整数数列百科全书》，网址：https://oeis.org。

[21] A. Straub, 《Szeg¨o 有理函数的正性》, 《应用数学进展》41 (2008) 255–264。[22] A. Straub 和 W. Zudilin, 《有理函数及其对角线的正性》, 逼近理论杂志 195 (2015) 57–69。[23] Y. Wang 和 B.-X. Zhu, 《对数凸与斯蒂尔杰斯矩序列》, 《应用数学进展》81 (2016) 115–127。[24] R. Wong 和 H. Li, 《二阶线性差分方程的渐近展开》, 《分析与组合中的渐近方法》, 计算与应用数学杂志 41 (1992) 65–94。[25] R. Wong 和 H. Li, 《二阶线性差分方程的渐近展开 II》, 应用数学研究 87 (1992) 289–324。[26] E.X.W. Xia 和 O.X.M. Yao, 《三项递推数列的符号》, 《离散应用数学》159 (2011) 2290–2296。[27] E.X.W. Xia 和 O.X.M. Yao, 《组合数列对数凸性的判据》, 《电子组合学杂志》20 (2013), #P3。