Richards方程的自适应求解策略

Jakob S.Stokke[1],Koondanibha Mitra[2], Erlend Storvik[1,3], Jakub W. Both[1],和 Florin A. Radu[1]

[1]耦合地下动力学建模中心，数学系，卑尔根大学，挪威[2]计算数学组，哈瑟尔特大学，比利时[3]计算机科学、电气工程与数学科学系，西挪威应用科学大学，挪威

arXiv:2301.02055v1 [math.NA] 5 Jan 2023

2023年1月6日

摘要

变饱和多孔介质中的流动通常由 Richards方程 描述，这是一种在数值求解方面极具挑战性的非线性椭圆-抛物型方程。本文提出了一种用于求解 Richards方程的稳健快速迭代求解器。该求解器依赖于一种自适应切换算法，根据严格推导的后验指标，在两种线性化方法——L 格式和牛顿法——之间进行切换。尽管此前 [1]，已提出结合 L 格式与牛顿法的策略，但我们首次提出了在这两种格式之间切换的可靠且稳健的准则。该求解器原则上可应用于任意空间离散和线性化方法，其性能通过若干数值算例加以展示。

关键词： 迭代线性化、自适应性、L 格式、牛顿法、*Richards*方程、非线性退化扩散

1 引言

在本文　中，我们考虑Richards方程的压力水头 ψ 形式　　n

$$\partial_t \theta(\psi) - \nabla \cdot [K(\theta(\psi))\nabla(\psi + z))] = f, \tag{1}$$

其中，　θ ：　$\mathbb{R} \to [0, 1]$ 为含水量，　K 为多孔介质的二阶渗透率张量，　z 为相对于重力方向的高度，　f 为源汇项。Richards方程用于模拟饱和/非饱和多孔介质中的水流。这是一个高度非线性且退化的椭圆-抛物型方程，使得求解极具挑战性，参见例如 [2]的综述工作。关于Richards方程弱解的存在性和唯一性，我们参考 [3]。

关于Richards方程离散的研究成果十分丰富。由于式（1）的解通常具有较低的正则性，见 [4]，，因此通常采用向后欧拉（隐式）格式（3）对其进行时间离散，参见例如 [1, 5]。关于空间离散，我们提及连续Galerkin有限元 [6, 7]，、混合或扩展混合有限

元 [8, 9, 10, 11, 12], 、有限体积法 [13, 14] （另见近期综述 [15]）或多点通量近似（MPFA） [16]。无论选择何种空间离散方法，都必须在每个时间步长求解一个非线性的有限维问题。本文将重点讨论如何利用迭代线性化技术高效地求解这些问题。

此类非线性问题主要采用的迭代线性化方法有牛顿法、Picard 或修正 Picard、L 格式、Jaeger-Kacur方法，或这些方法的组合。最常见的选择或许是牛顿法 [17,18]，当初始猜测足够接近最终解时，该方法可实现二次收敛。对于 r-H¨older 连续的 θ' 函数（$r \in (0,1]$），且初始猜测取为前一时间步的解，文献 [10] 证明，若

$$\tau \leq C\theta_m^{\frac{2+r}{r}} h^d, \tag{2}$$

其中， $\tau > 0$ 为时间步长， $h > 0$ 为网格尺寸， $d \in \mathbb{N}$ 为空间维数， $C > 0$为依赖于区域和非线性项的常数， $\theta_m := \inf \theta' \geq 0$。然而，对于二维或三维模拟，条件 (2) 的限制相当严格，尤其是在网格尺寸 h 较小或问题退化（$\theta_m = 0$）时。文献 [1, 19] 中的数值模拟证实了这一点，结果表明，在许多此类情况下，牛顿法无法收敛。采用阻尼版本可以提高牛顿法的稳健性。线搜索、变量切换 [20] 或信赖域技术 [21] 便是此类方法的例子。另一种提高牛顿法稳健性的方法是先进行若干次不动点迭代。文献[17, 18]提出使用皮卡方法，文献 [1] 则提出使用 L 格式。然而，格式之间的切换并非基于后验指标，而是采用启发式方式进行。

其他线性化方案属于不动点类型，通常更加稳健，但只能线性收敛。文献 [22, 13] 已表明，Picard方法在求解Richards方程时表现不佳。文献 [22]提出了一种修正皮卡法。在渗透率为常数的情况下，修正 Picard与牛顿法相同，因此也存在稳健性问题。L 格式最早由文献[23, 24, 1], 提出，是一种稳定化皮卡法，其设计目标是无条件收敛，不受初始猜测的选择影响，即使在退化情形下以及采用较大时间步长时也是如此。L 格式（见定义 2.3）使用全局常数作为稳定化系数，不涉及任何导数的计算，因此不仅更加稳定，而且由于刚度矩阵更易组装且条件更好，每次迭代所需的计算时间也更少。文献 [1, 19]中的数值结果清楚地证明了这一点。不过，这些结果也显示，与牛顿格式相比，L 格式的收敛速度明显较慢，迭代次数更多，且收敛速率为线性。此外，其整体表现很大程度上取决于调节参数的谨慎选择；尽管理论上具有稳定性，参数选择不当仍可能导致实际停滞。将L 格式与Anderson加速结合，可以显著降低L 格式性能对稳定化参数的敏感性 [25]。事实上，对于扩展至可变形多孔介质的Richards方程，采用 L 格式求解时，研究已表明：第一，稳定化参数可以选在理论范围之外；第二，即使先前发生过发散，也能保持非退化收敛或实现加速；相关内容亦从理论角度进行了讨论 [26]。Anderson加速的类似稳定化性质

也已针对一般不动点方法进行讨论 [27, 28]。其他不动点迭代格式还包括J¨ager-Kacˇur格式 [29]，该格式虽然收敛较慢，但可无条件收敛，而且每次迭代的计算开销高于 L 格式，见表 1。文献 [19], 提出的修正 L 格式具有与L 格式相近的稳定性，同时收敛速率快得多（随 τ变化）；但其收敛仍为线性。

本文研究了一种混合策略，在 L 格式与牛顿法之间进行动态切换。该策略充分利用了两种方法的优势：L 格式的无条件稳定性，以及在接近精确解时牛顿法的二次收敛性。与以往关于混合方法的研究（例如 [1, 17], ）相比，关键区别在于两种线性化方法之间的切换具有自适应性。当迭代值充分接近解时，便会从 L 格式切换到牛顿法。这样最终能够在稳健性与速度之间取得平衡。

实现这一策略的主要挑战在于，如何为两种格式推导出严格的切换准则。由于 先验估计（例如 [10], 中给出的估计）涉及未知常数，并且假设了最坏情况，因此本文转而采用基于后验估计量的方法。在连续时空框架下， [30] 推导出了一个针对完全退化Richards方程、涉及线性化误差的严谨且高效的后验估计量。对于时间离散问题（3）， [31] 利用正交分解结果，将总误差分解为离散误差分量和线性化误差分量，并据此推导出了一个稳健、高效且可靠的估计量。此外，数值结果还验证了其有效性。这些工作是本文在第 3 节推导基于后验估计量的切换准则以及在附录 A 中构建自适应 L 格式算法的主要灵感来源。然而，由于我们只关注计算线性化误差分量，因此在可能的情况下将避免计算平衡通量。

本文组织如下。第 2 节介绍数学符号，陈述假设，定义全离散解，并详细阐述不同的线性化方法。第 3 节提出自适应切换算法。首先，在推导下一次迭代线性化误差预测指标的同时，引入线性化误差的概念。该自适应算法将线性化误差与估计量进行比较，以确定确切的切换点。第 4 节给出三个数值测试案例（部分饱和、退化和真实基准算例），以说明与标准牛顿法或 L 格式相比，自适应方案的稳健性和计算效率。第 5 节总结本文工作。最后附有两个附录，分别介绍自适应 L 格式以及平衡通量的计算细节。

2 数学与数值公式

我们在时空域 $\mathcal{G} = \Omega \times [0, T]$ 中考虑 Richards方程，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有界区域，具有 Lipschitz连续边界 $\partial\Omega$，且 $T > 0$。令 $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 Ω 中平方可积函数的内积和范数，即 $L^2(\Omega)$。此外，采用泛函分析中的常用记号， $H^1(\Omega)$ 表示具有一阶弱导数且属于 $L^2(\Omega)$ 的函数构成的 Sobolev 空间，而 $H_0^1(\Omega)$ 则表示其在边界上具有零迹的函数子空间。

假设 1. 对于(1)中的材料性质 θ 和 K以及源项 f，作出以下假设:

(a) 饱和函数 $\theta(\cdot)$ 是 *Lipschitz*连续且单调递增的，其中 L_θ 和 $\theta_m \geq 0$ 分别为 *Lipschitz* 常数和导数的下界。

(b) 渗透率张量 K： $[0,1] \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 满足一致（伪）椭圆性条件，即对于常数 $\kappa_M > \kappa_m \geq 0$,

$$\kappa_m|\boldsymbol{z}|^2 \leq \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\, K\, \boldsymbol{z} \leq \kappa_M|\boldsymbol{z}|^2, \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d.$$

此外，$(K \circ \theta)$ 是 *Lipschitz*连续的，其 *Lipschitz* 常数为 L_κ。

(c) 源函数满足 $f \in C(0,\ T;\ L^2(\Omega)$。

请注意，这些假设与函数 θ 和 K 的常用 Brooks-Corey[32] 和 van Genuchten [33] 参数化方法相一致。

2.1 时间离散：后向欧拉

为对 Richards方程进行时间离散，我们考虑对式 (1) 采用后向欧拉时间离散。对于这一隐式格式，为保证稳定性，无需满足 CFL条件（因此避免了对时间步长的限制）。此外，该格式收敛到时间连续解时，无需更高阶的时间正则性（不同于 Crank-Nicholson格式）。我们将时间区间 $[0,T]$ 均匀地划分为 N 个时间步，时间步长为 $\tau = T/N$，离散时间步为 $t_n = \tau n$，其中 $n \in \{1,...,N\}$。接着，我们寻找一列 $\{\psi^n\}_{n=1}^N$ 属于 Ω 的函数，使其满足时间离散系统

$$\frac{\theta(\psi^n) - \theta(\psi^{n-1})}{\tau} - \nabla \cdot [K(\theta(\psi^n))\nabla(\psi^n + z))] = f(t_n). \tag{3}$$

以下将 $f(t_n)$ 记为 f^n，下面给出式 (3) 的弱解更精确且一般的定义。为简单起见，我们假设齐次狄利克雷边界条件，不过一般而言，我们的结果对狄利克雷和 Neumann 边界条件均成立。

定义 2.1 （式 (1) 的向后欧拉时间离散）。设给定 $\psi^0 \in L^2$（Ω）。若对所有 $n \in \{1,...,N\}$ 以及 $v \in H_0^1$（Ω），序列 $\{\psi^n\}_{n=1}^N \subset H_0^1$（Ω）都是式（1）的向后欧拉解，

$$\frac{1}{\tau}(\theta(\psi^n) - \theta(\psi^{n-1}), v) + (K(\theta(\psi^n))\nabla(\psi^n + z), \nabla v) = (f^n,\, v). \tag{4}$$

2.2 空间离散：连续 Galerkin 有限元

我们考虑采用有限元方法对式 (4) 进一步进行空间离散。设 $\mathcal{T}_h$ 是将 Ω 剖分为闭 d-单形的三角剖分，其中 $h := \max_{E\in\mathcal{T}_h}(\mathrm{diam}(E))$ 表示网格尺寸。假设 Ω 是一个多边形，则 Galerkin有限元空间为

$$V_h = \left\{v_h \in H_0^1(\Omega) |\ v_{h|E} \in \mathcal{P}_p(E),\ T \in \mathcal{T}_h\right\}, \tag{5}$$

其中，$\mathcal{P}_p(E)$ 表示 p阶多项式在 E、 $p \in \mathbb{N}$上的空间。于是，Richards方程的全离散 Galerkin公式为

定义 2.2 （(1) 的完全离散解）。 设 $\psi_h^0 := \psi^0 \in L^2$（Ω）。如果对于所有 $n \in \{1,...,N\}$ 和 $v_h \in V_h$，序列$\{\psi_h^n\}_{n=1}^N \subset V_h$是 （1） 的完全离散解，则有

$$(\theta(\psi_h^n) - \theta(\psi_h^{n-1}), v_h) + \tau(K(\theta(\psi_h^n))\nabla(\psi_h^n + z), \nabla v_h) = \tau(f^n, v_h). \tag{6}$$

2.3 迭代线性化方案

为了求解非线性问题（6），通常采用迭代线性化方案。为了研究此类方案在稳定性与速度之间的权衡，我们重点考察两种线性化策略，它们分别代表线性收敛方法和二次收敛方法，其中收敛性指 L^2 意义下的收敛。

2.3.1 线性收敛方案：L 格式

牛顿法具有二次收敛性，它通过对式 (6) 中的非线性项进行适当的一阶泰勒展开；而本文考虑的线性收敛方法仅对单调分量（即非线性饱和函数）进行展开。此外，该展开不必是精确的。考虑以下方案：给定 ψ_h^{n-1} ， ${\psi^n}_{,h}{}^{j-1} \in V_h$，求 ${\psi^n}_{,h}{}^{j} \in V_h$ ，使得

$$\begin{aligned}&(\mathcal{L}(\psi_h^{n,j-1})(\psi_h^{n,j}-\psi_h^{n,j-1}),v_h)+\tau(K(\theta(\psi_h^{n,j-1}))\nabla(\psi_h^{n,j}+z),\nabla v_h)\\&\quad=\tau(f^n,v_h)-(\theta(\psi_h^{n,j-1})-\theta(\psi_h^{n-1}),v_h),\end{aligned}\tag{7}$$

对所有 $v_h \in V_h$，其中 $\mathcal{L}:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ 是预先指定的正权函数，且 $j\in\mathbb{N}$ 是迭代指标。注意，只要满足假设 1 中的 $\kappa_m>0$ ，上述问题就是线性的、单调的，并且关于 ${\psi^n}_{,h}{}^{j}$ 满足 Lipschitz 条件，因此式 (7) 存在唯一的弱解。此外，如果迭代收敛，即 ${\psi^n}_{,h}{}^{j}\to\psi_h^n$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中强收敛，那么 ψ_h^n 确实是式 (6) 的解。函数 $\mathcal{L}$ 有许多不同的取值方式，从而得到不同的线性化方案，见表 1。本文余下部分主要关注 $\mathcal{L}$ 为常数的情形，这对应于广泛研究的 L 格式。

定义 2.3 （L 格式）。 设 ψ_h^{n-1} 、 ${\psi^n}_{,h}{}^{0}\in L^2(\Omega)$ 和 $L>0$ 已给定。则 L 格式求解得到序列 $\{\psi_h^{n,j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset V_h$ ，该序列对所有迭代指标$j\in\mathbb{N}$和 $v_h\in V_h$均满足

$$\begin{aligned}&L((\psi_h^{n,j}-\psi_h^{n,j-1}),v_h)+\tau(K(\theta(\psi_h^{n,j-1}))\nabla(\psi_h^{n,j}+z),\nabla v_h)\\&=\tau(f^n,v_h)-(\theta(\psi_h^{n,j-1})-\theta(\psi_h^{n-1}),v_h).\end{aligned}\tag{8}$$

$\mathcal{L}$ 的不同取值及由此得到的格式如下所列

格式	$\mathcal{L}(\psi)$
Picard	0
修正 Picard [22]	$\theta'(\psi)$
J¨ager-Kac˘ur [29]	$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\frac{\theta(\xi)-\theta(\psi)}{\xi-\psi}$
L 格式 [23, 24, 1]	$L>0$ 常数
修正 L 格式 [19]	$\theta'(\psi)+M\tau$, $M>0$常数

表 1：不同的线性收敛格式 (7) 及其线性化权重函数 $\mathcal{L}$。

注 1 （非恒定 L 非均质介质）。 对于 L 格式， L 不一定是常数，也可以是空间变量 $\boldsymbol{x}$的函数。对于非均质介质，通常就是这种情况。所有证明都可以进行调整，以纳入依赖空间的 L，参见 *[34]* ，其中已针对 *Biot* 方程的分裂格式进行了相关处理。

已有 [1, 定理 1] 证明，如果 $L \geq \frac{1}{2}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\theta'(\xi)$，那么在对时间步长 τ 施加少量限制且与网格尺寸无关的情况下，无论初始猜测如何，L-格式迭代都能收敛。然而，[1, 19] 中的数值结果表明，L-格式的收敛速度可能相对较慢，具体取决于稳定化参数 L的选择；关于自适应 L 格式，请参见附录 A。通过利用先前的迭代值和导数计算 L，可以提高收敛速度。一般而言，将 L 取为雅可比矩阵会得到牛顿法，这也是可以将 L 格式解释为修正牛顿法的原因。修正 Picard 格式利用了这一点，该格式最早由 [22]，提出，使用 $\mathcal{L}(\psi^{n,j-1}) = \theta'(\psi^{n,j-1})$，并符合一阶泰勒级数展开 $\theta(\psi^{n,j}) \approx \theta(\psi^{n,j-1}) + \theta'(\psi^{n,j-1})(\psi^{n,j} - \psi^{n,j-1})$。因此，只要能够收敛，与 L 格式相比，它所需的迭代次数更少，尽管其收敛仍是线性的。然而，这种$\mathcal{L}$ 函数的选择可能导致格式在较大的时间步长下发散，正如[10] 所预测并在 [1, 19]中通过数值实验观察到的那样。为解决这一问题，[19] 提出了一种修正 L 格式，该格式兼具 L 格式（但使用了导数，且线性方程组不一定具有良好的条件数）和 Picard 格式的特征。与 Picard 格式相比，修正 L 格式表现出更高的稳定性，同时保持了其速度。然而，在附加限制 $\psi^n{}_h{}^0 = \psi_h^{n-1}$ 以及离散时间导数 $(\psi_h^n - \psi_h^{n-1})/\tau$ 属于 $L^\infty(\Omega)$的条件下，修正 L 格式无条件收敛。由于本文的目标是以一种稳定格式开始线性化迭代，然后在能够保证收敛时切换到二次收敛格式，因此后续研究将围绕 L 格式展开；在表 1所列格式中，L 格式可以说是最稳定的，并且就每次迭代的计算时间而言成本最低（得益于条件良好的线性方程组且不涉及导数）。尽管如此，我们指出，我们的方法可以推广到所有其他线性收敛的迭代方法。

备注 2（结果的普遍性）。 尽管第 *3* 节的分析主要关注 *L* 格式与牛顿法之间的切换，但相同的技术也可直接扩展到表 *1* 中各格式与牛顿法之间的切换。此外，附录 *A* 中的 L 自适应策略可扩展到修正 *L* 格式（见表 *1*），以自适应地选取参数 $M > 0$ 。

2.3.2 二次收敛格式：牛顿法

牛顿法对式 (1) 中所有非线性函数进行一阶泰勒级数展开，以确保获得二次收敛速率。

定义 2.4（牛顿法）。 给定 ψ_h^{n-1}、$\psi^n{}_h{}^0 \in L^2(\Omega)$ 。则牛顿法求解满足以下条件的序列 $\{\psi_h^{n,j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset V_h$：对所有迭代指标 $j \in \mathbb{N}$，以及 $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned}&(\theta'(\psi_h^{n,j-1})(\psi_h^{n,j} - \psi_h^{n,j-1}), v_h) + \tau(K(\theta(\psi_h^{n,j-1}))\nabla(\psi_h^{n,j-1} + z), \nabla v_h)\\ &\quad + \tau\left((K\circ\theta)'(\psi_h^{n,j-1})\nabla(\psi_h^{n,j-1} + z)(\psi_h^{n,j} - \psi_h^{n,j-1}), \nabla v_h\right)\\ &\quad = \tau(f^n, v_h) - (\theta(\psi_h^{n,j-1}) - \theta(\psi_h^{n-1}), v_h).\end{aligned} \tag{9}$$

然而，正如第 1 节所述，这会以数值稳定性降低为代价。在下一节中，我们将 L 格式与牛顿法以一致的方式相结合，从而获得一种兼具稳定性和速度的线性化策略。

3 基于后验估计的 L 格式与牛顿法自适应切换

在本节中，我们将利用后验 误差分析，构建 L 格式与牛顿法之间的切换算法。为了比较不同线性化格式之间的误差，我们在第 3.1 节中基于 [31] 中的论证，引入线性化误差的统一概念 η_{lin}。自适应算法的思路是从 L 格式开始，并在第 3.2 节中推导出一个估计量 $\eta_{L\to N}$：如果下一次迭代采用牛顿格式，该估计量可根据 j^{th} 和 $(j-1)^{\text{th}}$ 迭代值预测下一次迭代的线性化误差。如果预测误差将减小，则切换到牛顿法。随后，我们在第 3.3 节中推导出另一个估计量 $\eta_{N\to L}$，用于预测牛顿迭代下一步的线性化误差。如果预测误差将增加，算法便切换回 L 格式。事实上，我们在附录 A 中更进一步，推导出一个估计量 $\eta_{L\to L}$，用于预测 L 格式本身是否会收敛，并相应调整 L 的值。最后，我们在第 3.4 节中基于这些估计量给出了完整算法。

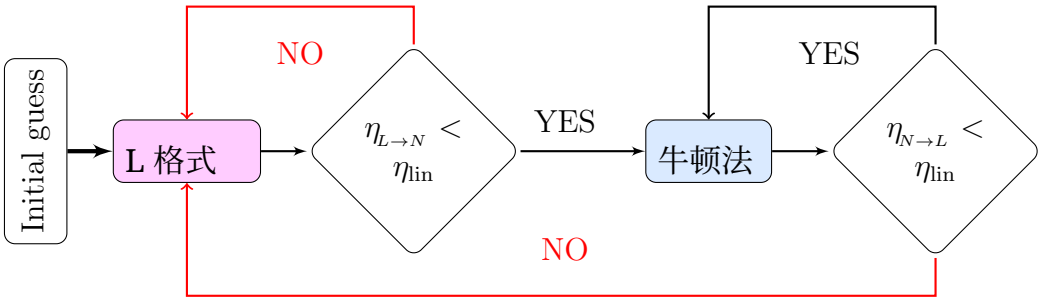


图 1：L 格式与牛顿法之间自适应切换算法的流程图。

3.1 线性化误差与依赖于迭代的能量范数

文献 [31] 表明，对于基于有限元的线性化格式，如果使用依赖于迭代的能量范数计算误差，则总数值误差可正交分解为离散化分量和线性化分量（对于表 1 中线性收敛的格式，这只是由与未知量 $\psi^{n,j}_h$ 在式 (7) 中对应的对称双线性形式所引入的能量范数）。本文仅关注线性化分量，它定义为上述能量范数下相邻迭代值之差，即，

$$\eta^j_{\text{lin}} := \left|\!\left|\!\left| \psi^{n,j}_h - \psi^{n,j-1}_h \right|\!\right|\!\right|_{\mathcal{L},\psi^{n,j-1}_h}, \tag{10}$$

其中，$|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{\mathcal{L},\psi^{n,j-1}_h}$ 表示使用迭代值 $\psi^{n,j-1}_h$ 定义的特定 H^1 等价范数，并与记作 $\mathcal{L}$ 的线性化方案相关。完全可计算的估计量 η^j_{lin} 包含了全部线性化误差，如[31], 第 5 节所示，因此，后续各节将以此作为衡量线性化误差的唯一指标。我们明确列出所讨论的两种方案的能量范数：根据定义 2.3，L 格式的能量范数定义为

$$|\!|\!|\xi|\!|\!|_{L,\psi^{n,j-1}_h} := \left(\int_\Omega L\xi^2 + \tau \left| K(\theta(\psi^{n,j-1}_h))^{\frac{1}{2}} \nabla \xi \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

对于所有 $\xi \in H_0^1(\Omega)$，根据定义 2.4，牛顿法的范数为

$$\|\!|\!|\xi|\!|\!|_{N,\psi_h^{n,j-1}} := \left(\int_\Omega \theta'(\psi_h^{n,j-1})\, \xi^2 + \tau |K(\theta(\psi_h^{n,j-1}))^{\frac{1}{2}} \nabla \xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

3.2 L 格式到牛顿法切换估计

对于某个 $i \in \mathbb{N}$，令序列 $\{\psi_h^{n,j}\}_{j=1}^i \subset V_h$ 通过 L 格式 (8) 获得，并且在第 $(i+1)^{\text{th}}$ 次迭代中，我们希望测试是否切换到牛顿格式。令 $\tilde{\psi}^{n,\,}{}_h{}^{i+1} \in V_h$ 为牛顿格式 (9) 的解，其前一个迭代值为 $\psi^{n,\,}{}_h{}^{i}$。在本节中，我们作如下假设：

假设 2（对流项不占主导）。对于给定的 $i \in \mathbb{N}$，存在常数 $C_N^i \in [0, 2)$，使得

$$\tau |K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{-\frac{1}{2}} (K \circ \theta)'(\psi_h^{n,i}) \nabla(\psi_h^{n,i} + z)|^2 \le (C_N^i)^2 \theta'(\psi_h^{n,i}), \tag{13}$$

几乎处处在 Ω内。

上述假设对于证明 $j = i+1$ 时线性问题 (9) 的强制性也是必需的，从而可以证明解 $\tilde{\psi}^{n,\,}{}_h{}^{i+1}$ 的存在性。注意，由于 $\psi^{n,\,}{}_h{}^{i}$ 已知，常数 C_N^i 可以完全计算。此外，当数值通量有界且 τ 较小时，该常数小于 2。值得注意的是，即使在 $\theta'(\psi^{n,\,}{}_h{}^{i}) = 0$ 的退化情形下，该估计仍然成立，因为左端具有 $(\theta'(\psi^{n,\,}{}_h{}^{i}))^2$。为涵盖退化情形，我们还引入平衡通量的概念。

定义 *3.1*（退化区域的平衡通量 $\boldsymbol{\sigma}_L^i$ $\epsilon > 0$ 的预设值为 $\mathcal{T}^{i\epsilon}$ $\boldsymbol{deg} := \{K \in \mathcal{T}_h : \boldsymbol{inf}\ \theta'(\psi^{n,\,}{}_h{}^{i}) < \epsilon\ \boldsymbol{in}\ K\}$。令 $\Pi_h : L^2(\Omega) \to \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$ 为 $\mathcal{P}_p$ 投影算子，即对所有 $u \in L^2(\Omega)$ 和 $v_h \in \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$，有 $(\Pi_h u, v_h) = (u, v_h)$。此外，令 $RT_p(\mathcal{T}_h)$ 为 $\mathcal{T}_h$ 上 p^{th} 阶 *Raviart-Thomas* 空间，即对所有 $K \in \mathcal{T}_h$，$\boldsymbol{\sigma} \in RT_p(\mathcal{T}_h)$ 意味着 $\boldsymbol{\sigma}|_K \in (\mathcal{P}_p(K))^d + \boldsymbol{x}\mathcal{P}_p(K)$。于是，我们将 $\boldsymbol{\sigma}_L^i \in RT_p(\mathcal{T}_h) \cap \boldsymbol{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ 定义为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L^i = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \Pi_h (L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1}))) & in\ \mathcal{T}_{\deg}^{i,\epsilon}, \\ 0 & otherwise\ . \end{cases} \tag{14}$$

关于如何在实践中计算 $\boldsymbol{\sigma}_L^i$，请参阅附录 B。于是，我们得到以下结果。

命题 1 (L 格式切换至牛顿法步骤的误差控制)。给定$\psi^{n,\,}{}_h{}^{0}$，$\psi_h^{n-1} \in V_h$，令 $\{\psi_h^{n,j}\}_{j=1}^i \subset V_h$ 为满足某个 $i \in \mathbb{N}$的(8) 的解。令 $\tilde{\psi}^{n,\,}{}_h{}^{i+1} \in V_h$ 为(9) 的解，其前一个迭代值为 $\psi^{n,\,}{}_h{}^{i}$。回顾定义 *3.1*。在假设 *1–2* 下，有

$$\left\| \tilde{\psi}_h^{n,i+1} - \psi_h^{n,i} \right\|_{N,\psi_h^{n,i}} \le \eta_{L\to N}^i,$$

其中，

$$\eta_{L\to N}^i := \tfrac{2}{2 - C_N^i} \left(\left[\eta_{L\to N}^{i,\mathrm{poten}} \right]^2 + \tau \left[\eta_{L\to N,2}^{i,\mathrm{flux}} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

with

$$\eta_{L\to N}^{i,\mathrm{poten}} := \left\| \theta'(\psi_h^{n,i})^{-\frac{1}{2}} \left(L\left(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}\right) - \left(\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1})\right)\right)\right\|_{\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{deg}}^{i,\epsilon}},$$

$$\eta_{L\to N}^{i,\mathrm{flux}} := \left\| K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{-\frac{1}{2}} \left[\left(K(\theta(\psi_h^{n,i})) - K(\theta(\psi_h^{n,i-1}))\right) \nabla\left(\psi_h^{n,i} + z\right) + \boldsymbol{\sigma}_L^i \right] \right\|.$$

证明。由（9）可知，$\delta\psi_h^{i+1} := \tilde{\psi}^{n,i+1}_h - \psi^{n,i}_h \in V_h$ 满足

$$\begin{aligned}
&(\theta'(\psi_h^{n,i})\delta\psi_h^{i+1}, v_h) + \tau(K(\theta(\psi_h^{n,i}))\nabla\delta\psi_h^{i+1}, \nabla v_h) \\
&\quad + \tau\left((K\circ\theta)'(\psi_h^{n,i})\nabla(\psi_h^{n,i} + z)\,\delta\psi_h^{i+1}, \nabla v_h\right) \\
&\quad = \tau(f^n, v_h) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n-1}), v_h) - \tau(K(\theta(\psi_h^{n,i}))\nabla\psi_h^i, \nabla v_h),
\end{aligned} \tag{15}$$

对所有 $v_h \in V_h$ 均成立。将测试函数 $v_h = \delta\psi_h^{i+1}$ 代入式 (15)，可得

$$\begin{aligned}
\left|\!\left|\!\left|\delta\psi_h^{i+1}\right|\!\right|\!\right|^2_{N,\psi_h^{n,i}} &\overset{(12)}{=} \int_\Omega \left(\theta'(\psi_h^{n,i})|\delta\psi_h^{i+1}|^2 + \tau|K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{\frac{1}{2}}\nabla\delta\psi_h^{i+1}|^2\right) \\
&\overset{(15)}{=} \underbrace{-\tau\left((K\circ\theta)'(\psi_h^{n,i})\nabla(\psi_h^{n,i} + z)\,\delta\psi_h^{i+1}, \nabla\delta\psi_h^{i+1}\right)}_{=:T_1} \\
&\quad + \underbrace{\tau(f^n, \delta\psi_h^{i+1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n-1}), \delta\psi_h^{i+1}) - \tau(K(\theta(\psi_h^{n,i}))\nabla(\psi_h^{n,i} + z), \nabla\delta\psi_h^{i+1})}_{=:T_2}.
\end{aligned} \tag{16a}$$

为简洁起见，记 $\boldsymbol{\sigma}^i = (K\circ\theta)'(\psi^{n,i}_h)\nabla(\psi^{n,i}_h + z)$，可估计得

$$\begin{aligned}
T_1 &:= -\tau(\boldsymbol{\sigma}^i\delta\psi_h^{i+1}, \nabla\delta\psi_h^{i+1}) \\
&\le \left(\tau\int_\Omega |K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\sigma}^i|^2(\delta\psi_h^{i+1})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tau\int_\Omega |K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{\frac{1}{2}}\nabla\delta\psi_h^{i+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(13)}{\le} C_N^i \left(\int_\Omega \theta'(\psi_h^{n,i})(\delta\psi_h^{i+1})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tau\int_\Omega |K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{\frac{1}{2}}\nabla\delta\psi_h^{i+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{C_N^i}{2}\int_\Omega \left(\theta'(\psi_h^{n,i})|\delta\psi_h^{i+1}|^2 + \tau|K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{\frac{1}{2}}\nabla\delta\psi_h^{i+1}|^2\right) \\
&= \frac{C_N^i}{2}\left|\!\left|\!\left|\delta\psi_h^{i+1}\right|\!\right|\!\right|^2_{N,\psi_h^{n,i}}.
\end{aligned} \tag{16b}$$

为了估计最后一项，由散度定理可知

$$\begin{aligned}
-(\boldsymbol{\sigma}_L^i, \nabla\delta\psi_h^{i+1}) &= (\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_L^i, \delta\psi_h^{i+1}) \\
&\overset{(17)}{=} \tfrac{1}{\tau}(\Pi_h(L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1}))), \delta\psi_h^{i+1})_{\mathcal{T}_{\mathrm{deg}}^{i,\epsilon}} \\
&= \tfrac{1}{\tau}(L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1})), \delta\psi_h^{i+1})_{\mathcal{T}_{\mathrm{deg}}^{i,\epsilon}}
\end{aligned}$$

最后一个等式由投影算子 Π_h 和 $\delta\psi_h^{i+1} \in$的定义得出

$V_h \subset \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h)$。利用这一结果以及式（8）和 $\delta\psi_h^{i+1} \in V_h$，可得

$$
\begin{aligned}
T_2 &:= \tau(f^n, \delta\psi_h^{i+1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n-1}), \delta\psi_h^{i+1}) - \tau(K(\theta(\psi_h^{n,i}))\nabla\psi_h^i, \nabla\delta\psi_h^{i+1}) \\
&\overset{(8)}{=} (L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1})), \delta\psi_h^{i+1}) \\
&\quad - \tau((K(\theta(\psi_h^{n,i})) - K(\theta(\psi_h^{n,i-1})))\nabla(\psi_h^{n,i} + z), \nabla\delta\psi_h^{i+1}) \\
&= (L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1})), \delta\psi_h^{i+1}) + \tau(\boldsymbol{\sigma}_L^i, \nabla\delta\psi_h^{i+1}) \\
&\quad - \tau((K(\theta(\psi_h^{n,i})) - K(\theta(\psi_h^{n,i-1})))\nabla(\psi_h^{n,i} + z) + \boldsymbol{\sigma}_L^i, \nabla\delta\psi_h^{i+1}) \\
&= (L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1})), \delta\psi_h^{i+1})_{\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{deg}}^{i,\epsilon}} \\
&\quad - \tau((K(\theta(\psi_h^{n,i})) - K(\theta(\psi_h^{n,i-1})))\nabla(\psi_h^{n,i} + z) + \boldsymbol{\sigma}_L^i, \nabla\delta\psi_h^{i+1}) \\
&\overset{(14)}{\leq} (\theta'(\psi_h^{n,i})^{-\frac{1}{2}}(L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1}))), \theta'(\psi_h^{n,i})^{\frac{1}{2}}\delta\psi_h^{i+1})_{\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{deg}}^{i,\epsilon}} \\
&\quad + \tau[\eta_{L\to N}^{i,\mathrm{flux}}]\, \|K(\psi_h^{n,i})^{\frac{1}{2}}\nabla\delta\psi_h^{i+1}\| \\
&\leq [\eta_{L\to N}^{i,\mathrm{poten}}] \cdot \|\theta'(\psi_h^{n,i})^{\frac{1}{2}}\delta\psi_h^{i+1}\| + \sqrt{\tau}\,[\eta_{L\to N}^{i,\mathrm{flux}}] \cdot \sqrt{\tau}\|K(\psi_h^{n,i})^{\frac{1}{2}}\nabla\delta\psi_h^{i+1}\|. \qquad (16c)
\end{aligned}
$$

结合式 (16)，利用柯西-施瓦茨不等式以及 $\eta_{L\to N}^i$ 的定义，可得如下估计。

□

3.3 牛顿法到 L 格式的切换估计

假设 L 格式无条件收敛，那么切换到牛顿法后，只有当牛顿格式的线性化误差随迭代次数增加时，我们才希望切换回 L 格式。与前文类似，仅根据截至 i^{th} 步的迭代值，我们就可以估计这种情况是否会在第 $(i+1)^{\mathrm{th}}$ 步发生。为此，我们引入另一个平衡通量。

定义 3.2（退化区域的平衡通量 $\boldsymbol{\sigma}_L^i$（牛顿格式））。回顾定义 *3.1*，我们定义 $\boldsymbol{\sigma}_N^i \in \mathbf{RT}_p(\mathcal{T}_h) \cap \boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega)$ 为

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_N^i = \begin{cases} \frac{1}{\tau}\Pi_h(\theta'(\psi_h^{n,i})(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1}))) & \text{in } \mathcal{T}_{\mathrm{deg}}^{i,\epsilon}, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \qquad (17)
$$

与命题 1 对应的结果如下：

命题 2（牛顿法到牛顿法步骤的误差控制）。给定 $\psi^{n,0}_h$，$\psi_h^{n-1} \in V_h$，令 $\{\psi_h^{n,j}\}_{j=1}^{i+1} \subset V_h$ 是式 (9) 在某个 $i \in \mathbb{N}$ 下的解。那么，根据假设 *1–2*，有

$$
\left|\!\left|\!\left|\psi_h^{n,i+1} - \psi_h^{n,i}\right|\!\right|\!\right|_{N,\psi_h^{n,i}} \leq \eta_{N\to L}^i,
$$

其中

$$
\eta_{N\to L}^i := \tfrac{2}{(2-C_N^i)}\left([\eta_{N\to L}^{i,\mathrm{poten}}]^2 + \tau[\eta_{N\to L}^{i,\mathrm{flux}}]^2\right)^{\frac{1}{2}}
$$

with

$$
\begin{aligned}
\eta_{N\to L}^{i,\mathrm{poten}} &:= \|\theta'(\psi_h^{n,i})^{-\frac{1}{2}}(\theta'(\psi_h^{n,i-1})(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1})))\|_{\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{deg}}^{i,\epsilon}}, \\
\eta_{N\to L}^{i,\mathrm{flux}} &:= \left\| \begin{bmatrix} (K(\theta(\psi_h^{n,i})) - K(\theta(\psi_h^{n,i-1})))\nabla(\psi_h^{n,i} + z) \\ -(K\circ\theta)'(\psi_h^{n,i-1})(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1})\nabla(\psi_h^{n,i-1} + z))\end{bmatrix} K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\qquad \left. + K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\sigma}_N^i \right\|.
\end{aligned}
$$

证明与命题 1 的证明相同，因此留给热心的读者完成。

注 3（估计量的有效性 $\eta^i_{L\to N}$ 和 $\eta^i_{N\to L}$）。估计量 $\eta^i_{L\to N}$ 和 $\eta^i_{N\to L}$可预测采用牛顿格式 (9) 进行（$i+1$）th 迭代时的线性化误差 $\eta^{i+1}{}_{\text{lin}}$。对于确实采用牛顿格式进行迭代的情况，可以使用有效性指数来衡量估计的精确程度，即，如果（$i+1$）th迭代采用牛顿法，则

$$\textit{(Eff. Ind.)}_i := \begin{cases} \eta^i_{L\to N}/\eta^{i+1}_{\text{lin}} & \textit{if } i^{\text{th}} \textit{ iteration is L-scheme,} \\ \eta^i_{N\to L}/\eta^{i+1}_{\text{lin}} & \textit{if } i^{\text{th}} \textit{ iteration is Newton.} \end{cases} \tag{18}$$

注意，由于命题 *1* 和命题 *2*，该指数始终大于 *1*；有效性指数接近 *1* 则意味着估计精确。由于推导这些估计量时主要使用了柯西-施瓦茨不等式，因此预计它们相当准确；例外的是估计(16b)，其中项 T_1 的上界是利用假设 *2* 中的全局逼近给出的。第 *4* 节的数值实验表明，预期的这种精确性确实成立，特别参见图 *5* 和图 *8*

3.4 基于 后验估计的自适应线性化算法 m

考虑到上述估计，我们提出一种在 L-方案与牛顿法之间切换的算法。在迭代 $j=i+1$ 中，如果估计量 $\eta^i_{L\to N}$ 和 $\eta^i_{N\to L}$ 预测的线性化误差小于 i^{th} 步的线性化误差 η^i_{lin}，则该次迭代采用牛顿线性化方案，见式 (10)。不过，为了优化算法，我们首先考虑一些数值计算方面的因素。

3.4.1 计算方面的考量

为加快这一切换准则的计算，我们进一步作出几项简化

- [**平衡通量**] 如果饱和域远小于非饱和域，则我们取 $\boldsymbol{\sigma}^i_L = \boldsymbol{\sigma}^i_N = 0$。

- [**切换条件**] 如果估计量不够精确（见注 3），条件 $\eta^i_{L\to N} \le \eta^i{}_{\text{lin}}$ 可能难以满足；即使满足，也可能需要较大的 i。因此，为了加快 L 格式与牛顿法之间的切换，我们将对常数 $C_{\text{tol}} > 1$采用判据 $\eta^i_{L\to N} < C_{\text{tol}}\,\eta^i$lin </style}。

3.4.2 自适应线性化算法

基于上述考虑，我们提出以下自适应算法:

算法 1 L 格式/牛顿法后验切换

要求： $\boldsymbol{\psi}^{n,0} \in L^2(\Omega)$ 作为初始猜测。

确保： 格式=L 格式, $C_{\mathrm{tol}} = 1.5$

对于 i=1,2,.. **执行**

如果 格式=L 格式 **则**

使用以下方法计算迭代值 L 格式，即 (8)

如果 $C_N^i \geq 2$ **则继续**。

否则，如果 $\eta_{L\to N}^i \leq C_{\mathrm{tol}}\eta_{\mathrm{lin}}^i$ **则**

将方案设置为=牛顿法

else

使用以下方法计算迭代值 牛顿法, 即 (9)

如果 $\eta_{N\to L}^i > \eta_{\mathrm{lin}}^i$ **则**

设置格式=L 格式

注 4 (结合 L-格式自适应性)。 在附录 *A* 中，我们进一步提出一种算法，以自适应地选择 L，从而加快 *L* 格式的收敛速度。该算法可直接与算法 *1* 结合实施，以提高复合格式的收敛速度。不过，为便于阐述，我们没有将这些格式结合起来。

注 5 （估计量的计算成本）。 在非退化情形下，只需代入 $\boldsymbol{\sigma}_L^i = \boldsymbol{\sigma}_N^i = 0$，即可根据迭代值 ${\psi^n}_{,h}{}^i$ 和 ${\psi^n}_{,h}{}^{i-1}$ 直接计算出量 C_N^i、$\eta_{L\to N}^i$ 和 $\eta_{N\to L}^i$，参见命题 *1* 和命题 *2*。因此，与迭代的成本相比，计算估计量的成本较低。由于 *L* 格式迭代的成本低于牛顿迭代，*L/N* 格式在时间效率上通常优于或至少不逊于牛顿格式。数值实验清楚地表明了这一点，例如参见图*3b*。在退化情形下，若使用 $\boldsymbol{\sigma}_L^i$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_N^i$，则需要进行全局计算。我们在附录 *B* 中讨论这些平衡通量的计算；通过预先计算相关的刚度矩阵，可以大幅降低其计算成本。只在选定的迭代中计算估计量，还可以进一步降低其计算成本。不过，为了简化起见，我们不采用这种做法。

4 数值结果

本节通过若干数值算例，展示所提出的牛顿法与 L 格式切换算法的稳健性和效率。为此，我们仔细比较切换算法（下文称为 L/N 格式）、标准牛顿法和 L 格式。需要注意的是，L 格式包含一个会显著影响方法性能的调节参数。为此，我们选取两个不同的值 L_1 和 L_2 进行性能比较。其中， L_1 是调节参数的准最优选择，将针对每个具体子问题进行定义，见表 2；而 $L_2 = \sup\{\theta'(\psi)\}$。对于 L/N 格式，L 格式迭代中始终选取 L_1。

为了衡量每种独立方法的性能，我们考察它们满足停止准则所需的迭代次数和计算时间。

$$\left|\left|\left|\psi_h^{n,j} - \psi_h^{n,j-1}\right|\right|\right|_{\mathcal{L},\psi_h^{n,j-1}} < 10^{-7},$$

其中$|||\cdot|||_{\mathcal{L},\ \psi^n,\ \ j-1}$是依赖于迭代和线性化的压力水头能量范数，其中 $\mathcal{L} \in \{L, N\}$。此处，计算时间涵盖整个模拟；所有实验均在配备 Intel Core i7-1165G7 处理器的 Acer Swift 3 上进行。

I总共考虑了三种不同的测试案例进行数值实验 :

- 测试案例 1：第一个测试案例取自 [35], ，但作了修改，即不考虑表面活性剂输运。在此，流动始终处于部分饱和状态。
- 测试案例 2：第二个测试案例见 [1], ，研究地下水位以上的抽取/注入。
- 测试案例 3：最后一个测试案例是一个已知的基准问题，见[1, 36, 37, 38]。此处使用时变狄利克雷边界条件来描述排水沟对地下水库的补给。

对于所有测试案例，均采用 van Genuchten–Mualem 参数化 [33] 来描述饱和度、压力水头与渗透率之间的关系，

$$\begin{aligned} \theta(\psi) &= \begin{cases} \theta_R + (\theta_S - \theta_R)\left[\frac{1}{1+(-\alpha\psi)^n}\right]^{\frac{n-1}{n}}, & \psi \le 0, \\ \theta_S, & \psi > 0, \end{cases} \\ K(\Theta(\psi)) &= \begin{cases} K_s\left(\Theta(\psi)\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(1-\Theta(\psi)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]^2, & \psi \le 0, \\ K_s, & \psi > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

此处，

$$\Theta(\psi) = \frac{\theta(\psi) - \theta_R}{\theta_S - \theta_R},$$

其中， θ_S 和 θ_R 分别为水体积和残余含水量， K_s为完全饱和多孔介质的水力传导率，α 和 n 为土壤相关参数。

在所有测试案例中，均采用网格直径为h 的三角形线性协调有限元，并结合时间步长为 τ的隐式欧拉时间离散，如第 2.1 节和第 2.2 节所述。不同实验的网格直径 h 和时间步长 τ 各不相同，具体值将在各个实验中说明。我们预计，对于其他空间离散方法，例如 Raviart–Thomas 混合有限元或间断伽辽金有限元，数值实验也会取得相当的效果。

有限元实现基于 Python，并使用模拟工具箱 PorePy [39] 进行网格管理。可在 `https://github.com/MrShuffle/RichardsEquation/releases/tag/v1.0.1`下载。

参数	测试案例 1	测试案例 2	测试案例 3
van Genuchten-Mualem			
θ_R	0.026	0.026	0.131
θ_S	0.42	0.42	0.396
K_S	0.12	0.12	$4.96 \cdot 10^{-2}$
α	0.551	0.95	0.423
n	2.9	2.9	2.06
L 格式			
L_1	0.1	0.15	$3.501 \cdot 10^{-3}$
$L_2 = L_\theta$	0.136	0.2341	$4.501 \cdot 10^{-3}$

表 2：所有测试案例的参数值。参数以列格式呈现，其中每一列对应指定测试案例的参数。

4.1 测试案例 1：严格非饱和介质

在本测试案例中，我们考虑一种严格非饱和的多孔介质，并采用 van Genuchten-Mualem 参数化，其参数见表 2。该测试案例主要受到 [35], 的启发，区域由 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 给出，其中 $\Omega_1 = [0,1] \times [0,1/4]$ 且 $\Omega_2 = [0,1] \times (1/4,\ 1]$。我们考虑时间区间 $[0,T]$，其中$T = \tau$ 随时间步长 τ的选择而变化，因为我们只取一个时间步长。初始条件选择压力水头

$$\psi^0(x,z) = \begin{cases} -z - 1/4 & (x,z) \in \Omega_1 \\ -4 & (x,z) \in \Omega_2, \end{cases}$$

其中，x 表示水平方向的位置变量，z 表示垂直方向的位置变量。在顶部边界施加了符合初始条件的狄利克雷边界条件。对于其余边界，采用无流边界条件，并施加以下源项

$$f(x,z) = \begin{cases} 0 & (x,z) \in \Omega_1 \\ 0.06 \cos\left(\frac{4}{3}\pi(z)\right) \sin(x) & (x,z) \in \Omega_2. \end{cases}$$

时间步长为 $\tau = 1$，时经过一个时间步后的解如图 2 所示。

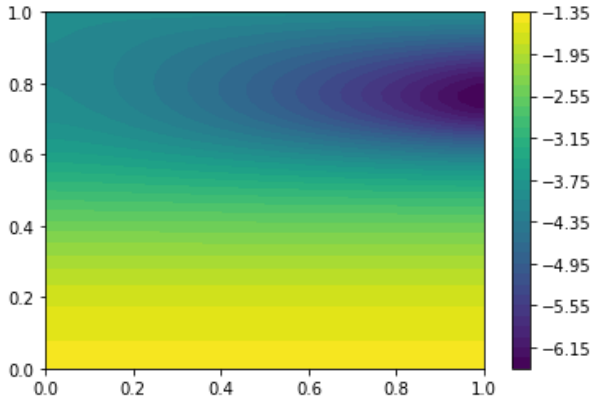
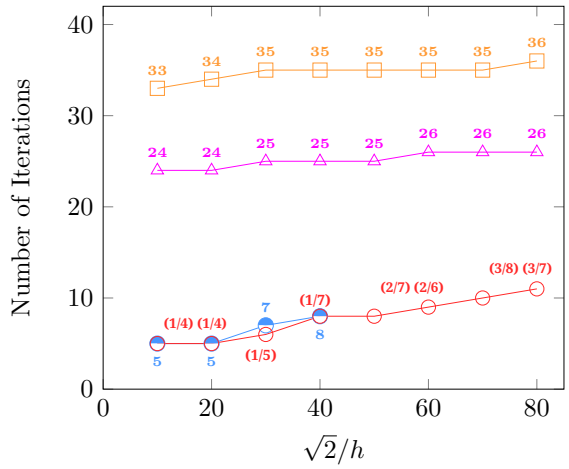


图 2：测试案例 1：严格非饱和介质。最终时刻 $T = 1$的压力水头 ψ。

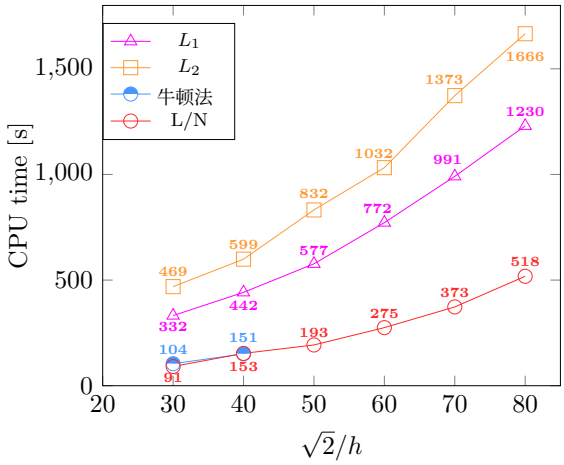
4.1.1 收敛性质比较。

这里，我们讨论新提出的 L/N 格式的性能和收敛性质，并将其与牛顿法和 L 格式进行比较。图3a 展示了时间步长为 $\tau = 0.01$ 时，不同网格尺寸参数选择下的迭代次数。如预期，L 格式具有鲁棒性，在所有情形下都能收敛，包括 L_1 和 L_2。然而，牛顿法仅在网格足够粗时才能收敛。但在能够收敛时，其所需迭代次数少于 L 格式。最后，混合 L/N 方法所需的迭代次数不多于牛顿法（在牛顿法收敛时），而且具有良好的鲁棒性；对于其他网格尺寸，其所需迭代次数远少于 L 格式。

此外，对于固定网格尺寸 $h = \sqrt{2}/40$ 和变化的时间步长，也进行了类似的实验，见图 4a。时间步长较大时，牛顿法会发散，而其他方法均能稳健收敛。同样，L/N 格式的收敛性能符合牛顿法的预期，同时也具备与 L 格式同样的稳健性。图 4a 突显了最大时间步长 $\tau = 1$ 下迭代次数的巨大差异。



(a) 迭代总次数。红色括号中的数字表示（L-格式迭代次数/牛顿法迭代次数）。

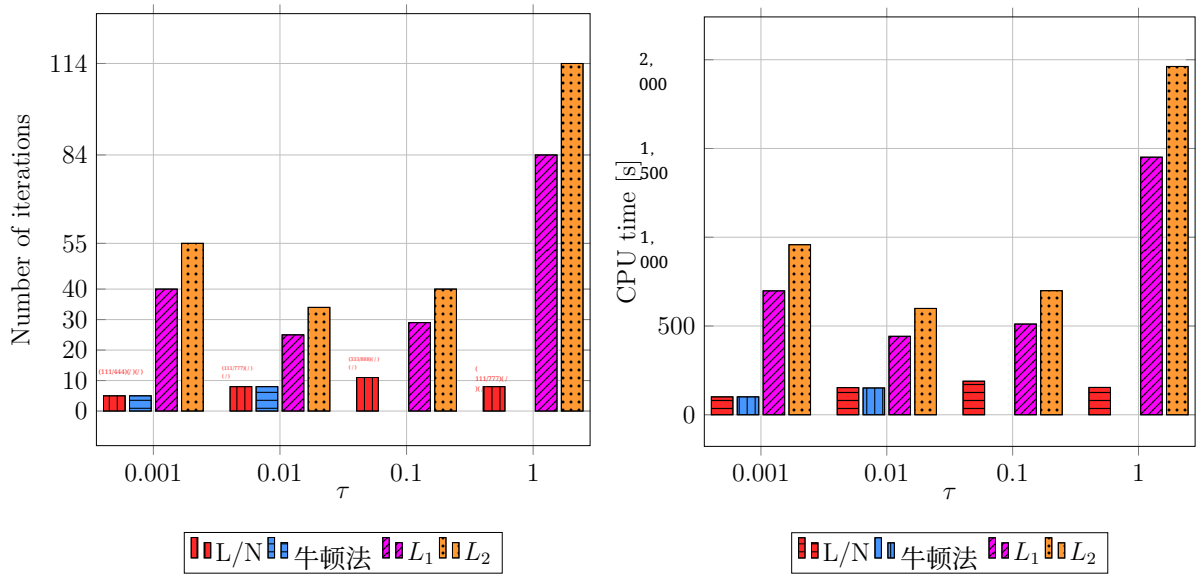


(b) 计算时间（秒）。

图3：测试案例 1：严格非饱和介质。固定 $\tau = 0.01$ 并改变网格尺寸时，各线性化方案的性能指标。

接下来，根据计算时间比较各线性化方案的性能，参见图3b和图4b。可以观察到，当牛顿法收敛时，混合方法的性能几乎与牛顿法相同。事实上，前者有时略快一些，这是因为每次 L 格式迭代的计算开销略低于一次牛顿迭代，见备注6。此外，在牛顿法不收敛的情况下，混合方法仍能保持相同的性能。最后，图3b显示，对于所有网格，L 格式的计算时间与图3a所报告的迭代次数相符，其中 L_1 的速度最快。尽管其计算时间超过了 L/N 格式的两倍。

总体而言，新提出的 L/N 格式表现最佳。收敛时，它与牛顿法一样快，而且鲁棒性显著更强。



(a) 不同时间步长下的迭代次数。 (b) 不同时间步长下的总计算时间（秒）。

图 4：测试案例 1：严格非饱和介质：固定网格尺寸 $h = \sqrt{2}/40$ 时，不同时间步长下所有线性化方案的性能比较。

备注6 (每次迭代的计算时间**)。** 众所周知，由牛顿法线性化的系统所产生的矩阵，其条件数高于由 L 格式线性化的系统 *[1]*。因此，在未采用预条件的情况下，牛顿法的每次迭代都比 L 格式的每次迭代耗时更长。

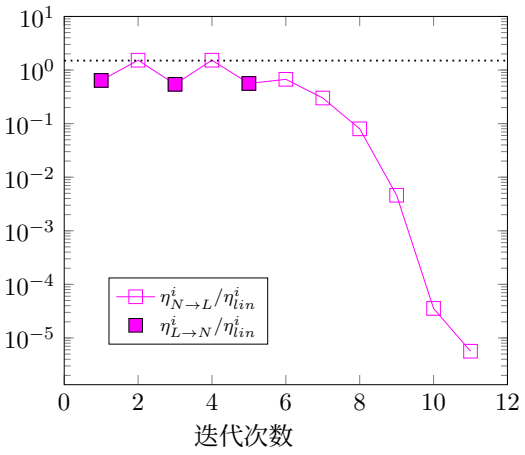
注 7 （最粗网格的计算时间）。 由于实现中采用了多进程处理，因此省略了最粗网格的计算时间。这使得最耗时的部分变成了在每个单元上启动局部组装进程。因此，对于所有线性化方法，最粗网格的计算时间都非常相近。

4.1.2 切换特性

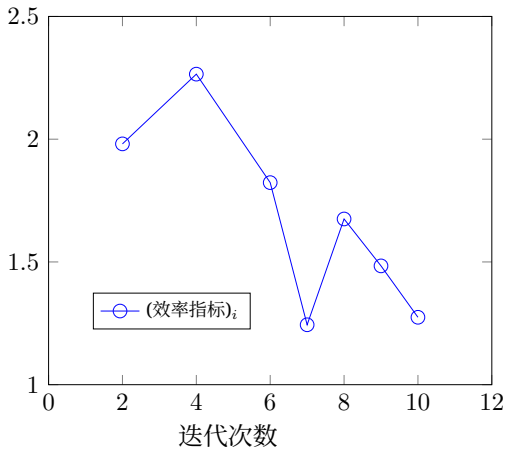
最后，对 L 格式与牛顿法之间的动态切换进行了更深入的考察。图 5 展示了在固定网格和时间步长下切换指标的变化情况。该示例尤其展示了混合方法在完全切换到牛顿法之前，能够在两种线性化方法之间来回切换。此外，最终的 L-格式迭代次数保持在最小值。图中还展示了式（18）中引入并在注 3 中讨论的有效性指标。所有情况下有效性指数均大于 1，这验证了命题 1 和命题 2；其数值保持在 1.27 到 2.3 之间，表明估计量$\eta^i_{L\to N}$ 和 $\eta^i_{N\to L}$ 具有良好的精确性。

4.2 测试案例 2：变饱和介质

示例参数与表 2、测试案例 3 中的相同。我们考虑一个变饱和介质，$\Omega = \Omega_{gw} \cup \Omega_{vad}$，其中地下水区为 $\Omega_{gw} = [0,1] \times [0,1/4)$，包气带为 $\Omega_{vad} = [0,1] \times [1/4,1]$。这里，我们考虑时间区间 $[0,T]$，其中$T = 0.01$ ，并且只取一个时间步，时间步长为 $\tau = 0.01$。初始条件选取为



(a) L/N 格式的切换指标的演变，其中虚线为 $C_{\text{tol}} = 1.5$。L/N 格式在不同的线性化策略之间振荡，但最终恢复。



(b) 效率指标。请注意，这些迭代对应于图 5(a)中的迭代，且只计入采用牛顿法的迭代，也就是说，迭代1、3和5不计入。

图 5：测试案例 1：严格非饱和介质。L/N 格式的切换指标演变以及牛顿迭代的效率指标 (18)（见注 3）。这里，网格尺寸为 $h = \sqrt{2}/80$，时间步长为 $\tau = 0.01$。

压力水头

$$\psi^0(x,z) = \begin{cases} -z + 1/4 & (x,z) \in \Omega_{gw} \\ -3 & (x,z) \in \Omega_{vad}, \end{cases}$$

其中，x 表示水平方向的位置变量，z 表示垂直方向的位置变量。表面施加恒定的狄利克雷边界条件，该条件在所有时刻均等于初始条件。边界其余部分采用无流边界条件。我们应用以下源项

$$f(x,z) = \begin{cases} 0 & (x,z) \in \Omega_{gw} \\ 0.006 \cos\left(\frac{4}{3}\pi(z-1)\right) \sin(2\pi x) & (x,z) \in \Omega_{vad}. \end{cases}$$

一个时间步长后，压力水头分布如图6所示。

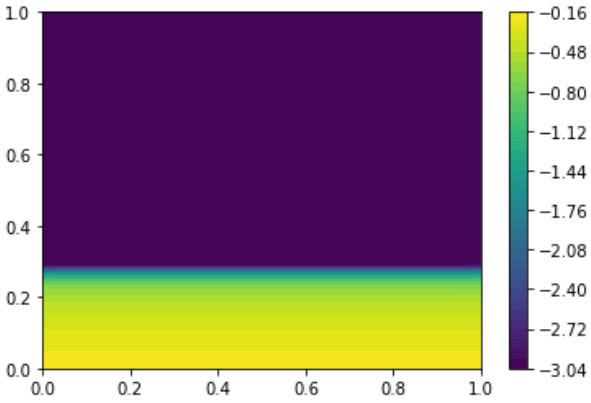
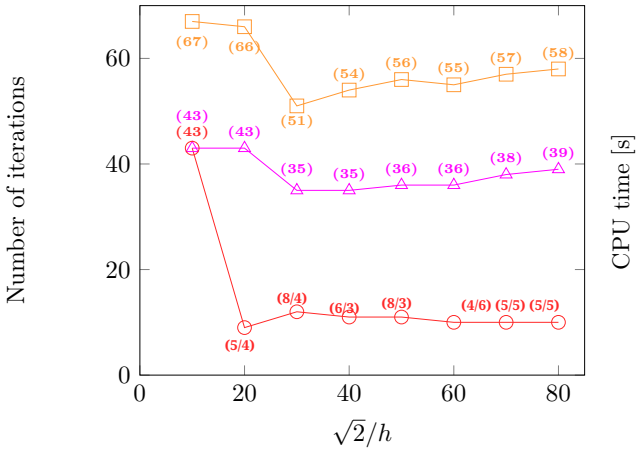
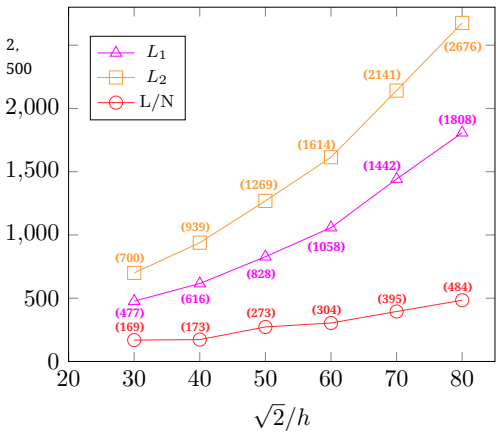


图6：测试案例 2：变饱和介质：$T = 0.01$处的压力水头分布。



(a) 迭代总次数。红色括号中的数字分别表示（L-格式迭代次数/牛顿法迭代次数）。



(b) 计算时间（秒）。

图7：测试案例 2：变饱和介质：固定 $\tau = 0.01$ 且网格尺寸变化时，各种线性化方案的性能指标。

4.2.1 收敛性质比较。

图7a展示了第二个测试案例中，在不同网格尺寸和固定时间步长下，各种线性化方案的迭代次数。L 格式再次在所有情况下均收敛。然而，牛顿法在任何网格尺寸下都不收敛。混合方法所需的迭代次数最少，这表明动态切换是成功的。

图7b比较了各种线性化方案的 CPU 时间性能。L 格式的两个版本所需的计算时间均与迭代次数相符，其中参数为 L_1 的模拟耗时较少。然而，L 格式（使用 L_1）所需的计算时间约为混合方法的 373%，其中还包括计算切换指标的时间。此外，增加少量 L 格式迭代进一步降低了混合方法的计算时间。

4.2.2 切换特性

我们还深入考察了牛顿法与 L 格式之间的动态切换。图 8 展示了固定时间步长和固定网格尺寸下切换指标的变化过程。经过 8 次 L 格式迭代后，切换指标$\eta_{L\to N}$ 低于 C_{tol} ，随后牛顿法收敛。从图7a可以看出，切换指标降至足以切换到牛顿法的程度所需的 L 格式迭代次数会随网格尺寸而变化。请注意，对于最粗的网格，不会切换到牛顿法。

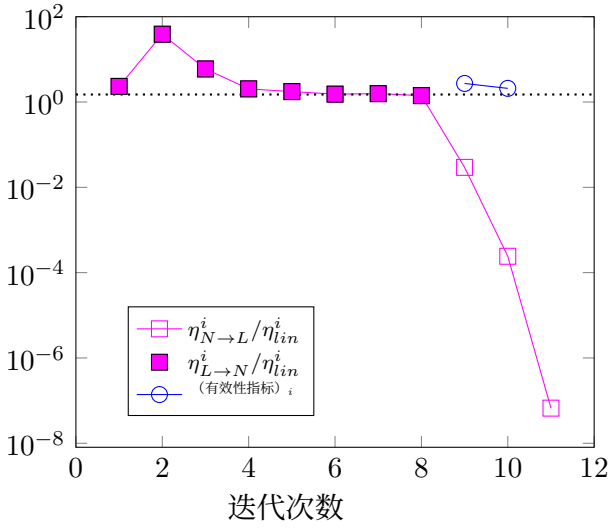


图 8：测试案例 2：变饱和介质：固定 $h = \sqrt{2}/50$ 和 $\tau = 0.01$时 L/N 格式的切换指标的演变。虚线表示 $C_{\text{tol}} = 1.5$，即从 L 格式切换到牛顿法的切换准则。同时绘出了牛顿迭代对应的有效性指标 (18)，其值均低于 2.8。

4.3 测试案例 3：基准问题

这里，我们考虑一个已知的基准问题 [38], ，例如也见于 [1], ，该问题模拟了二维空间中排水沟向地下水库补给的过程。区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 表示地下介质的一个垂直剖面。区域右侧的一部分采用恒定的狄利克雷边界条件。上边界的部分区域采用时变狄利克雷边界条件，以模拟排水沟。边界其余部分采用无流边界条件。所用参数见表 2 中的测试案例 3，对应粉砂壤土。几何形状如下：

$$
\begin{aligned}
\Omega &= [0,2] \times [0,3], \\
\Gamma_{D_1} &= [0,1] \times (3), \\
\Gamma_{D_2} &= (2) \times [0,1], \\
\Gamma_N &= \Omega \backslash \left\{ \Gamma_{D_1} \cup \Gamma_{D_2} \right\},
\end{aligned}
$$

以及初始压力水头分布和边界条件为

$$
\begin{aligned}
&\psi(0,x,z) = 1 - z \\
&\psi(t,x,z) = \begin{cases} -2 + 35.2t, & \text{if } t \le \frac{1}{16}, \quad \text{on } \Gamma_{D_1}, \\ 0.2, & \text{if } t > \frac{1}{16}, \quad \text{on } \Gamma_{D_1}, \\ 1 - z, & \text{on } \Gamma_{D_2}, \end{cases} \\
&-K(\theta(\psi(t,x,z)))\nabla(\psi(t,x,z) + z) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \text{on } \Gamma_N,
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 为外法向量。计算共进行 9 个时间步，时间单位为天，时间步长为 $\tau = 1/48$ ，并采用由

2501 个节点组成的规则网格。图 9 显示了 L/N 格式在最终时刻的压力水头分布。

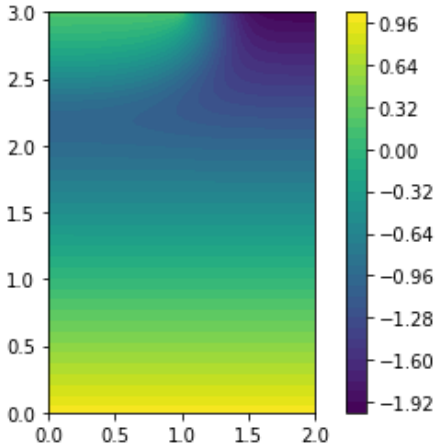


图 9：测试案例 3：基准问题：4.5 小时的压力水头分布 s.

	编号：迭代次数	CPU 时间 [s]
L_1	274	6136
L_2	330	7356
牛顿法	39	980
L/N	(10/30)	1021

T表 3：测试案例 3：基准问题：2501 个节点的性能指标。

4.3.1 收敛性质比较。

测试案例 3 中所有格式的表现见表 3。所有格式在此示例中均收敛。牛顿法所需的迭代次数最少。不过，混合方法只多需要一次迭代。两者所需的迭代次数都显著少于 L 格式。除一个时间步长外，每个时间步长只需要进行一次 L 格式迭代，这表明几乎所有时间步长都成功实现了动态切换。

L 格式的计算时间远高于牛顿法和混合方法，这与备注6中讨论的单次迭代开销相符。更值得注意的是，L/N 格式的表现与牛顿法几乎相同。

5 结论

本文研究了Richards方程的求解，该方程描述水在饱和/非饱和多孔介质（土壤）中的流动。在对Richards方程进行向后欧拉时间离散和连续Galerkin有限元空间离散后，为求解所得的非线性有限维问题，我们提出了一种将L 格式与牛顿法相结合的混合迭代线性化策略。

其基本思想是利用稳健但仅具有一阶收敛性的L 格式来稳定具有二次收敛性的牛顿法。两种格式之间的切换采用自适应方式，通过后验指标实现；这些指标利用迭代依赖的能量范数这一概念，预测下一次迭代的线性化误差。在每次迭代之后，检查牛顿法是否预计能够减小下一次迭代的线性化误差。如果是，则采用牛顿法；否则，使用L 格式进行迭代。这样得到的混合格式具有稳健性，并且在切换到牛顿格式后仍保持二次收敛性。

通过具有代表性的真实数值算例测试了混合格式的性能。结果表明，该格式与 L 格式一样稳健，并且在牛顿法失效的情况下仍能收敛。此外，在牛顿法能够收敛的情况下，混合格式所需的迭代次数和计算时间大致相同，且显著快于优化后的 L 格式。最后需要指出的是，该格式具有很强的通用性，原则上可扩展到其他空间离散和线性化方法。

附录 A 自适应 L 格式

如第 1 节和第 2.3.1 节所述，只要$L \geq \frac{1}{2}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\theta'(\xi)$，且时间步长 τ 小于一个与网格尺寸无关的常数，L 格式就无条件收敛。然而， [1] 中的数值结果表明，L 格式在显著较小的 L 下可达到最优收敛速率，尽管对于这样的取值并不总能保证收敛。因此，为了加快计算，可以用较小的 L 开始迭代，然后利用后验估计来判断是否应增大 L 。与命题 1 和命题 2 类似，我们给出一个结果，以严格地实现这一做法。

命题 3 （L 格式的误差控制）。 对于给定的 $\psi^{n,\ 0}_{h}$，$\psi_h^{n-1} \in V_h$，令 $\{\psi_h^{n,j}\}_{j=1}^{i+1} \subset V_h$ 求解 (8)，其中某个 $i \in \mathbb{N}$。则在假设 *1* 下，

$$\left|\left|\left|\psi_h^{n,i+1} - \psi_h^{n,i}\right|\right|\right|_{L,\psi_h^{n,i}} \leq \eta^i_{L\to L},$$

其中

$$\eta^i_{L\to L} := \left([\eta^{i,\mathrm{poten}}_{L\to L}]^2 + \tau[\eta^{i,\mathrm{flux}}_{L\to L}]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

with

$$\begin{aligned}
\eta^{i,\mathrm{poten}}_{L\to L} &:= \|L^{-\frac{1}{2}}(L(\psi_h^{n,i} - \psi_h^{n,i-1}) - (\theta(\psi_h^{n,i}) - \theta(\psi_h^{n,i-1})))\|,\\
\eta^{i,\mathrm{flux}}_{L\to L} &:= \left\|(K(\theta(\psi_h^{n,i})) - K(\theta(\psi_h^{n,i-1})))K(\theta(\psi_h^{n,i}))^{-\frac{1}{2}}\nabla(\psi_h^{n,i} + z)\right\|.
\end{aligned}$$

详细证明同样省略。请注意，对于上述估计，无需假设 2，也无需对退化区域进行任何单独处理。

A.1 L 自适应算法

基于 命题 3，我们提出一种算法，自适应地选择最优的 L-值 y.

算法 2 L 自适应方案**要求：** $\psi^{n,0} \in L^2(\Omega)$ 作为初始猜测， $L_M := \sup_{\psi\in\mathbb{R}} \theta'(\psi)$，以及 $L_m := L_M/8$**确保：** $C_{L\to L} = \sqrt{2}$, $L = L_m$**对于**i=1,2,..**执行**使用 L 格式计算迭代值，即 (8)**如果** $\eta^i_{L\to L} > \eta^i_{\text{lin}}$ **则**替换 $L_m = L$, $L = \min(C_{L\to L}L, L_M)$，并**继续**。**否则如果**$\eta^j_{L\to L} > 0.8\,\eta^j{}_{\text{lin}}$ 对于 $j \in \{i, i-1, i-2\}$ **则**替换 $L = \max(0.9L,\ 1.1L_m)$ 并**继续**。

A.2 数值结果

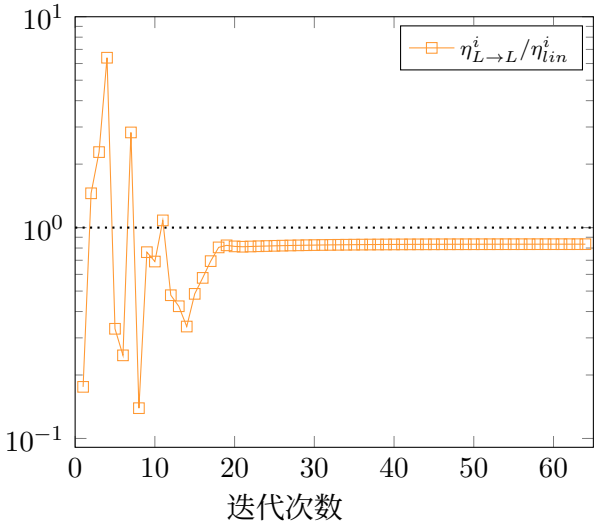


图 10：测试案例 1：严格非饱和介质：采用 L 自适应的 L 格式，初始稳定化参数为 $L_0 = L_2/8$、 $h = \sqrt{2}/40$ 和 $\tau = 1$。

图 10 展示了一个结果，其中 L-自适应格式优于固定的 L-方法。在这种情况下，由于时间步长较大， $L_\theta/2$ 过小，无法收敛。与网格尺寸和时间步长相同的固定 L_1 相比（见图 4），迭代次数减少了 20。对于较小的时间步长，数值结果表明，与固定且经过优化的 $L = L_1$ （小于 L_θ）相比，算法 2 的迭代次数大致相同。但在所有考察的示例中，它的迭代次数都少于简单地选择 $L = L_2 = L_\theta$。这种自适应技术的优势在于，模拟前无需对 L 进行优化研究。然而，由于 L-自适应策略并未显著改善 L 格式相较于优化后的 $L = L_1$的表现，为求简洁，我们没有将其纳入算法 1。

附录 B 平衡通量的计算

回顾定义 3.1 和 3.2，我们提出一种简单的算法，用于计算满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_h = \Pi_h f$ in $\mathcal{T}^{i,\epsilon}{}_{\deg}$，且 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}_h = 0$ otherwise 的平衡通量 $\boldsymbol{\sigma}_h \in \mathbf{RT}^p(\mathcal{T}_h) \cap \boldsymbol{H}(\text{div},\ \Omega)$，其中 $f \in L^2(\Omega)$。定义 $\boldsymbol{Q}_h := \mathbf{RT}^p(\mathcal{T}_h) \cap \boldsymbol{H}(\text{div},\ \Omega)$，并且

$\tilde{V}_h := \{v_h \in \mathcal{P}_p(\mathcal{T}_h) \mid \mathrm{Tr}_{\partial\Omega}(v_h) = 0\}$，我们寻求一对 $(\boldsymbol{\sigma}_h, r_h) \in \boldsymbol{Q}_h \times V_h$，使其满足混合有限元问题，

$$(K(1)^{-1}\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{q}_h) = (r_h, \nabla \cdot \boldsymbol{q}_h), \qquad \forall\, \boldsymbol{q}_h \in \boldsymbol{Q}_h, \tag{20a}$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h, \ v_h) = (f, \ v_h), \qquad \forall\, v_h \in \tilde{V}_h. \tag{20b}$$

这种通量的优势在于，它能使命题 1 和命题 2 中估计所涉及的 $\|K(1)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\sigma}_h\|$ 最小化。实际应用中，可在 $\mathcal{T}^{i,\epsilon}$ 度之外使用粗得多的网格来计算该通量，并可预先计算刚度矩阵以加快计算。

致谢

JWB 的研究部分由可持续地下介质资源中心（挪威研究委员会项目 331841）以及 Equinor（挪威）通过 Akademiaavtalen 资助的“FracFlow”项目提供资助。KM 感谢 FWO（科学研究基金会）通过“初级博士后奖学金”为其提供资助，并感谢 Akademiaavtalen 资助其访问卑尔根大学。

参考文献

[1] F. List, F. A. Radu，关于求解Richards方程迭代方法的研究，计算地球科学 20 (2) (2016) 341–353。[2] M. W. Farthing, F. L. Ogden，Richards方程的数值解：进展与挑战综述，美国土壤科学学会会刊 81 (6) (2017) 1257–1269。[3] H. W. Alt, S. Luckhaus，拟线性椭圆-抛物型微分方程，Mathematische Zeitschrift 183 (3) (1983) 311–341。[4] H. W. Alt, S. Luckhaus, A. Visintin，关于多孔介质中的非定常流，Annali di Matematica Pura ed Applicata 136 (1) (1984) 303–316。[5] F. A. Radu, I. S. Pop, P. Knabner，某些退化抛物型方程混合有限元离散的误差估计，Numerische Mathematik 109 (2008) 285–311。[6] T. Arbogast，混合椭圆-抛物型方程Galerkin逼近的误差分析，技术报告TR90-33，莱斯大学计算与应用数学系，美国得克萨斯州休斯敦（1990）。[7] T. Arbogast, M. Obeyesekere, M. F. Wheeler，根-土壤系统中流动模拟的数值方法，SIAM 数值分析杂志 30 (1993) 1677–1702。[8] T. Arbogast, M. F. Wheeler, N. Y. Zhang，一种用于多孔介质流动中退化抛物型方程的非线性混合有限元方法，SIAM 数值分析杂志 33 (1996) 1669–1687。

[9] C. Woodward, C. Dawson，描述变饱和多孔介质中流入过程的非线性抛物型方程之扩展混合有限元方法分析，SIAM 数值分析杂志 37 (2000年) 701–724。[10] F. A. Radu, I. S. Pop, P. Knabner，关于一类退化抛物型方程混合有限元离散的牛顿法收敛性，数值数学与高级应用 42 (2006) 1194–1200。[11] F. A. Radu, W. Wang，某些退化抛物型方程混合有限元离散的误差估计，非线性分析：现实世界应用 15 (2014) 266–275。[12] M. Bause, P. Knabner，通过自适应混合杂交有限元方法计算变饱和地下流，水资源进展 27 (2004) 565–581。[13] R. Eymard, M. Gutnic, D. Hilhorst, Richards方程的有限体积法，计算地球科学 3 (3-4) (1999) 259–294。[14]R. Eymard, D. Hilhorst, M. Vohralik，一种用于退化抛物型问题的有限体积—非协调/混合杂交有限元组合格式，数值数学 105 (1) (2006) 73–131。[15] S. Bassetto, C. Canc`es, G. Ench´ery, Q.-H. Tran，利用有限体积法求解非均质介质中Richards方程的若干数值策略，计算地球科学 26 (5) (2022) 1297–1322。[16] R. A. Klausen, F. A. Radu, G. T. Eigestad，MPFA在三角剖分上及Richards方程中的收敛性，国际数值方法流体力学杂志 58 (2008) 1327–1351。[17] L. Bergamaschi, M. Putti，求解Richards方程的混合有限元与牛顿型线性化，国际工程数值方法杂志 45 (8) (1999) 1025–1046。[18] F. Lehmann, P. Ackerer，部分饱和多孔介质中流体流动方程改进解的迭代方法比较，多孔介质中的传输 31 (3) (1998) 275–292。[19] K. Mitra, I. S. Pop，一种求解非线性扩散问题的修正 L 格式，计算机与应用数学 (1987) 77 (6) (2019) 1722–1738。[20] K. Brenner, C. Cances，通过参数化提升牛顿法的性能：Richards方程的情形，SIAM 数值分析杂志 55 (4) (2017) 1760–1785。[21] X. Wang, H. A. Tchelepi，用于非均质多孔介质中非线性输运的基于信赖域的求解器，计算物理学杂志 253 (2013) 114–137。[22] M. Celia, E. Bouloutas, R. Zarba，非饱和流动方程的一般质量守恒数值解，水资源研究 26 (7) (1990) 1483–1496。[23] I. S. Pop, F. A. Radu, P. Knabner, Richards方程的混合有限元：线性化过程，计算与应用数学杂志 168 (1-2) (2004) 365–373。

[24] M. Slodicka, 《多孔介质流动中出现的双重非线性和退化抛物型问题的一种稳健高效线性化方案》, SIAM科学计算杂志 23 (5) (2002) 1593–1614。[25] D. G. Anderson, 《非线性积分方程的迭代过程》, ACM学报 (JACM) 12 (4) (1965) 547–560。[26] J. W. Both、K. Kumar、J. M. Nordbotten、F. A. Radu, 《用于非饱和多孔介质固结的 Anderson 加速固定应力分裂方案》, 计算机与应用数学 77 (6) (2019) 1479–1502。[27] C. Evans、S. Pollock、L. G. Rebholz、M. Xiao, 《证明 Anderson 加速可提高线性收敛不动点方法的收敛速率（但对二次收敛方法并非如此）》, SIAM 数值分析杂志 58 (1) (2020) 788–810。[28] S. Pollock、L. G. Rebholz, 《压缩算子与非压缩算子的 Anderson 加速》, IMA数值分析杂志 41 (4) (2021) 2841–2872。[29] W. J¨ager、J. Kaˇcur, 《通过松弛方案求解双重非线性和退化抛物型问题》, ESAIM：数学建模与数值分析 29 (5) (1995) 605–627。[30] K. Mitra、M. Vohral´ík, 《Richards方程的后验误差估计》, 工作论文或预印本（2021年8月）。网址：https://hal.inria.fr/hal-03328944[31] K. Mitra、M. Vohral´ík, 《依赖迭代的范数下非线性椭圆问题的可靠、局部高效且稳健的后验估计：基于迭代线性化的正交分解结果》, 准备中（拟于2023年1月提交）。[32] R. Brooks、A. Corey, 《影响流体流动的多孔介质性质》, 灌溉与排水分部学报 92 (2) (1966) 61–90。[33] M. T. van Genuchten, 《预测非饱和土壤水力传导率的闭式方程》, 美国土壤科学学会会刊 44 (5) (1980) 892–898。[34] J. W. Both、M. Borregales、J. M. Nordbotten、K. Kumar、F. A. Radu, 《非均质介质中Biot方程的稳健固定应力分裂》, 应用数学快报 68 (2017) 101–108。[35] D. Illiano、I. S. Pop、F. A. Radu, 《多孔介质中表面活性剂输运的迭代方案》, 计算地球科学 25 (2) (2021) 805–822。[36]P. Knabner, 《多孔介质中饱和—非饱和流的有限元模拟》, Birkh¨auser Boston，1987，第6章，第83–93页。[37] R. Haverkamp、M. Vauclin、J. Touma、P. J. Wierenga、G. Vachaud, 《一维入渗数值模拟模型比较》, 美国土壤科学学会会刊 41 (2) (1977) 285–294。

[38]E. Schneid, 《Richards方程的混合型有限元离散》，埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学自然科学学院，2000年。[39] E. Keilegavlen、R. Berge、A. Fumagalli、M. Starnoni、I. Stefansson、J. Varela、I. Berre, 《Porepy：用于裂隙多孔介质多物理过程模拟的开源软件》，计算地球科学 25 (1) (2021年) 243–265。