arXiv:2301.02067v1 [math.DG] 5 Jan 2023

调和映射热流的扩散稳定性与自相似衰减

TOBIAS LAMM 和 GUIDO SCHNEIDER

Abstract. 本文研究欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的调和映射热流，并证明了对于齐次 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$中的小初始数据映射，$_d$其解具有无条件唯一性，其中 $d < p < \infty$。由此，我们得到如下形式的调和映射流解的衰减率： $\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}$。

此外，在初始条件具有更强空间局域化的假设下，我们证明时间衰减以自相似的方式发生。我们还说明，类似结果也适用于双调和映射热流以及具有幂型非线性的半线性热方程。

1. Introduction

扩散稳定性方法是一种工具，可用于证明抛物型偏微分方程的稳定性结果，适用于线性化算子具有延伸至虚轴的本质谱的情形。该方法基于热半群 $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上成立的代数衰减率，其定义如下:

$$(e^{t\Delta}u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy.$$

我们有如下衰减

$$\|e^{t\Delta}\|_{L^p\to L^\infty} \leq Ct^{-\frac{d}{2p}},$$

对于 $p \in [1,\infty)$，这是由于空间局部化初始条件下出现的扩散所致；此外，还有如下衰减

$$\|e^{t\Delta}\nabla\|_{L^\infty\to L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}$$

这是由平滑效应导致的。这些衰减例如可用于证明 $(L^p \cap C^1_b)(\mathbb{R}^d)$ 中半线性热方程平凡解 $u = 0$ 的稳定性结果

$$\partial_t u = \Delta u + f(u, \nabla u),$$

其中 $x \in \mathbb{R}^d$、 $t \geq 0$、 $u(x,t) \in \mathbb{R}$，且有一个光滑的非线性函数 f，包含形如 $u^m(\partial_1 u)^{m_1}\dots(\partial_d u)^{m_d}$ 的项，并满足 $f(0,0) = 0$。由于 $\partial_t u \sim t^{-\frac{d}{2p}-1}$，且当 $t\to\infty$ 时 $\Delta u \sim t^{-\frac{d}{2p}-1}$，我们有非线性项的行为类似于

$$u^m(\partial_1 u)^{m_1}\dots(\partial_d u)^{m_d} \sim t^{-\frac{(m+m_1+\dots+m_d)d}{2p} - \frac{m_1+\dots+m_d}{2}}$$

Date: 2023年1月6日。我们感谢 Peer Kunstmann 就 Besov 空间进行的许多有益讨论。本研究由德国研究联合会（DFG）资助——项目编号 258734477——SFB1173。

当 $t \to \infty$ 时。因此，如果满足以下条件，它们相对于线性扩散在渐近意义上可忽略：

$$\frac{d}{2p} + 1 < \frac{(m + m_1 + \ldots + m_d)d}{2p} + \frac{m_1 + \ldots + m_d}{2}.$$

例如，对于 $d = 1$ 和 $p = 1$，除 u^2、u^3 和 $u\partial_x u$ 外，所有这类项都无关紧要。基于这一思路，$(L^p \cap C_b^1)(\mathbb{R}^d)$ 中 $u = 0$ 的稳定性可由下式推出：

$$\partial_t u = \Delta u + u^m (\partial_{x_1} u)^{m_1} \ldots (\partial_{x_d} u)^{m_d},$$

若满足上述条件，则可得到相应方向上的抽象存在性结果，见 [19]。

自藤田和 Weisler 在论文中引入这一方法以来，[6, 22],在过去几十年间，这一工具已成功应用于图案形成系统中的稳定性问题，例如见 [3, 15, 14, 8]。关于这一扩散稳定性方法各方面的总结与综述，也可参见专著[16]。

本文旨在运用这一工具，为 $\mathbb{R}^d$ 上的耗散半线性几何流问题，尤其是调和映射热流，获得新的稳定性与唯一性结果。

下文设 N 为一个光滑黎曼流形，并假定它等距嵌入某个欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$中。当 $\delta > 0$ 足够小时，最近点投影 $\pi : N_\delta \to N$定义良好，其中 N_δ：$= \{x \in \mathbb{R}^m : \mathrm{dist}(x, N) < \delta\}$，并且我们对每个 $y \in N$和 $v_1, v_2 \in T_y N$定义第二基本形式 $A(y)$： $T_y N \times T_y N \to T_y^\perp N$，使得$A(y)(v_1, v_2) = -D^2\pi(y)(v_1, v_2)$。于是，映射 $u : \mathbb{R}^d \times [0, T) \to N$是一个以初始数据 $u(\cdot,0) = u_0 : \mathbb{R}^d \to N$ 为初值的调和映射热流解，若它满足以下抛物型偏微分方程

$$\partial_t u - \Delta u = A(u)(\nabla u, \nabla u). \tag{1}$$

例如，当 $N = S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_{\mathbb{R}^m} = 1\}$时，我们计算

$$\begin{aligned} A(u)(\nabla u, \nabla u) &= -(\Delta u, u)u = -(\partial_k^2 u_\alpha) u_\alpha u \\ &= -\partial_k((\partial_k u_\alpha) u_\alpha) u + (\partial_k u_\alpha)(\partial_k u_\alpha) u = u|\nabla u|^2, \end{aligned}$$

其中此处及下文均采用爱因斯坦求和约定，并利用这一事实：$(\partial_k u_\alpha) u_\alpha = 0$，这可由以下事实推出：$u_\alpha u_\alpha = 1$。

Koch 和第一作者 [9] 针对具有小振荡的初始映射，以及 Wang [20] 针对具有较小 BMO-范数的初始映射，得到了欧几里得空间上调和映射热流相当一般的存在性结果。这些解是通过在适当构造的巴拿赫空间上应用不动点论证得到的。作为这一方法的副产品，作者们在上述初始数据的小性假设下，得到了调和映射热流的条件唯一性结果。

本文的主要目标之一是运用扩散稳定性方法，将这一条件唯一性结果提升为无条件唯一性结果。为此付出的代价是，我们的初始数据必须在上述有界平均振荡函数空间的一个真子空间中足够小。更具体地说，我们要求初始数据在齐次 Besov 空间中足够小，更多细节请参见定理 2.7。

平凡空间常数平衡态 u_* 的偏差 v 满足如下形式的半线性扩散方程

$$\partial_t v - \Delta v = A(u^* + v)(\nabla v, \nabla v). \tag{2}$$

如上所述，对于 $t \to \infty$，我们有 $A(u^*+v)(\nabla v, \nabla v) \sim t^{-\frac{d}{p}-1}$，因此当 $p \in [1, \infty)$ 时，相对于线性扩散，非线性项无关紧要。对于 $p = \infty$，线性项与非线性项处于同一阶，因此可以在指数级长的时间尺度上建立稳定性结果，参见定理 2.9。

对于稍强一些的局部化初始条件，相应的线性热方程解以自相似的方式衰减至零。对于非线性项在上述计数下于 $L^1 \cap C_b^1(\mathbb{R}^d)$ 中无关紧要的半线性热方程，情况也相同。利用离散重整化方法（参见 [2, 3],），可知方程 (2) 的重整化解 $t^{d/2}v(x\sqrt{t}, t)$ 当 $t \to \infty$ 时收敛至某个高斯函数 $e^{-|x|^2/4}$ 的倍数。在离散重整化方法中，我们不直接求解偏微分方程 (2)，而是考虑一个等价的问题序列，该序列形式上收敛至线性扩散方程。令

$$v_n(x, \tau) = L^{dn} v(L^n x, L^{2n}\tau),$$

固定 $L > 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$后。则 v_n 满足

$$\begin{aligned} \partial_\tau v_n - \Delta v_n &= L^{n(d+2-2-2d)} D^2\pi(u^* + L^{-dn}v)(\nabla v_n, \nabla v_n) \\ &= L^{-nd} D^2\pi(u^* + L^{-dn}v)(\nabla v_n, \nabla v_n) \end{aligned} \tag{3}$$

当 $\tau \in [L^{-2}, 1]$时，其中

$$v_n(x, L^{-2}) = L^d v_{n-1}(Lx, 1). \tag{4}$$

对于 $n \to \infty$，非线性项的影响以几何速率消失。在极限下，我们得到一个线性扩散方程。借助一个简单的不动点论证，可以证明 $v_n|_{\tau=1}$ 收敛到重整化线性扩散问题的极限，即高斯函数的某个倍数 $e^{-|x|^2/4}$，参见定理 4.1。

研究调和映射热流的另一种方法是考察满足下式的$w = \nabla v$

$$\partial_t w - \Delta w = \nabla(A(u^* + v)(w, w)). \tag{5}$$

我们证明，上述离散重整化方法也可应用于这一方程组。

最后，我们证明，该方法还可推广至欧几里得空间上的其他半线性热方程，例如含幂型非线性项的方程，或高阶方程，如双调和映射热流。

未来的研究将探讨对耗散型拟线性几何流问题的类似处理，例如里奇-德图克流、平均曲率流、亚马贝流以及图面的威尔莫尔流。

记号。在下文中，许多可能不同的常数用同一个符号 C 表示，前提是它们可以取为与时间 t 无关。

2. Stability and uniqueness results for the harmonic map flow

关于调和映射热流的第一个主要结果，是一个渐近稳定性与唯一性结果；其成立条件是初始映射 u_0 的某个齐次 Besov 范数足够小。

我们注意到，由于定义域无界，围绕$u = const.$ 对 (1) 进行线性化后，其本质谱延伸至虚轴，因此在此情形下，线性稳定性原理不能直接应用。因此，我们采用扩散稳定性方法来建立以下结果。我们首先推广一项关于调和映射流的稳定性结果，该结果最初由 Soyeur [17] 得出。用记号 $\dot{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^d, N)$ 表示齐次 Sobolev 空间，他的结果如下

定理 2.1. 存在一个常数 $\varepsilon > 0$，仅依赖于 d 和 N，使得若 $u_0 \in \dot{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^d, N)$ 满足 $d < p < \infty$ 和 $\|\nabla u_0\|_{L^d} < \varepsilon$，则有如下估计

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}} \|\nabla u(t)\|_{L^p} \leq C \|\nabla u_0\|_{L^d}, \tag{6}$$

其中，对 (1) 的每个解 $u \in C^0([0,\infty)\ \dot{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^d, N))$，均有 $C = C(d, m, p)$。

注 2.2. 在同一篇论文中，Soyeur 还证明了在上述意义下，对于小初始数据，解 $u \in C^0([0,\infty)\ \dot{W}^{1,\,p}(\mathbb{R}^d, N))$的存在性。此外，对 ∇u_0 的 L^d-范数的小性假设意味着其 u_0 的 BMO-范数也很小，因此，根据 C. Wang 的一篇论文 [20], ，这意味着调和映射流存在整体光滑解。

注 2.3. 对于具有良好热核估计的完备黎曼流形，这一结果也可以推广到从这些流形出发的映射；Li 和 Wang [11]对式 (6) 的处理便是如此。此类流形的例子包括具有正 Ricci 曲率的流形。

Soyeur 的原始结果已经推广了 Struwe [18],此前的一项结果；Struwe 是首位证明调和映射热流在 $\mathbb{R}^d$ 上收敛到常值映射，并且一阶导数具有额外衰减性质的人。更确切地说，他在上述论文的定理 7.1 中证明，对于满足 $\|\nabla u_0\|_{L^\infty}$ 有界且$\|\nabla u_0\|_{L^2}$ 充分小的光滑初始映射 u_0，调和映射热流的唯一光滑解在 t 充分大时满足 $\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}$，因此收敛到一个常值映射。

作为第一个结果，我们将定理 2.1 推广到满足稍宽松小量条件的初始数据。更准确地说，对于映射 $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$，记 $G(t)v := G_t \star v$ 为其热延拓，即 $G(t)v$ 是热方程的一个解，其初始数据为 v_0。这里，$G(x,t) = {}^1_{(4\pi t)_{d/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$，$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$，是标准热核。对于 $d < p \leq \infty$，我们将齐次 Besov 空间 $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ 定义为满足以下范数有限的函数所构成的空间

$$\|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} := \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}} \|\nabla(G(t)v)\|_{L^p}$$

由此可得

$$\dot{W}^{1,d}(\mathbb{R}^d) \subset \dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) \subset BMO(\mathbb{R}^d) \subset \dot{B}^0_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d)$$

对每个 $d < p < \infty$ 都成立，其中这些包含关系均为严格包含（例如参见 [4]）。

现在我们可以陈述第一个主要结果了。

定理 2.4. 存在一个仅依赖于 d 和 N 的常数 $\varepsilon > 0$，使得若 $u_0 \in \dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d, N)$ 满足 $d < p < \infty$、$2 \le p$ 和 $\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} < \varepsilon$，则有如下估计

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}},$$

其中 $C = C(d, m, p)$，对于每个满足以下条件的解 u：$(0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to N$ of (1) with

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\nabla u(t,x) \in C^0([0,\infty), L^p(\mathbb{R}^d))$$

and

$$\lim_{t\searrow 0} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} = 0.$$

备注 2.5. 注意，在 $u_0 \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^d, N)$ 的范数足够小时，例如根据 Soyeur 的工作，可以推出此类解的存在性。

在证明这一结果时，我们需要一个关于热核卷积的标准估计。注意，这一估计依赖于杨氏卷积不等式。

引理 2.6. 设 $G(x,t) = {}^{1}\underline{(4\pi t)_{d/2}\, e}^{\frac{-|x|^2}{4t}}$、$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ 为热核。使用记号 $G(t)f = G(t) \star f$，我们有如下估计

$$\|\nabla^\sigma G(t)\|_{\mathcal{L}(L^r, L^q)} \le Ct^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})-\frac{\sigma}{2}}, \tag{7}$$

其中 $1 \le r \le q \le \infty$、$\sigma \in \mathbb{N}_0$ 和 $C < \infty$ 是常数。此外，对于某个常数 $C < \infty$，我们有

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\beta}\, ds = Ct^{1-\alpha-\beta} \tag{8}$$

若两者均为 $0 < \alpha$、$\beta < 1$。

现在我们可以证明定理 2.4。

定理 2.4 的证明：首先注意到

$$\nabla(u(x,t) - G(t) \star u_0(x)) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla G(x-y, t-s)(A(u)(\nabla u, \nabla u)(y,s))\, dy\, ds.$$

利用估计 (7)，取 $\sigma = 1$、$r = \frac{p}{2}$ 和 $q = p$，可得对每个 $t > 0$

$$\begin{aligned}\|\nabla(u(t) - G(t)u_0)\|_{L^p} \le& C\int_0^t \||\nabla u(s)|^2\|_{L^{\frac{p}{2}}}(t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{2p})}\, ds \\ \le& C\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^p}(t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{2p})}\, ds.\end{aligned}$$

令

$$m(T) = \sup_{0\le t\le T} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p},$$

由最后一个不等式可知，对所有 $t > 0$

$$\begin{aligned}t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} \le& C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} + Ct^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}} m(T)^2 \int_0^t (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{2p})} s^{-1+\frac{d}{p}}\, ds \\ \le& C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} + Cm(T)^2,\end{aligned}$$

其中我们使用了恒等式 (8)，取 $0 < \alpha = \frac{1}{2} + \frac{d}{2p} < 1$ 和 $0 < \beta = 1 - \frac{d}{p} < 1$。注意，正是在这里我们必须使用假设 $d < p < \infty$。

对所有 $0 \le t \le T$ 取上确界，我们由此得到对每个 $0 < T < \infty$

$$Cm(T)^2 - m(T) + C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \ge 0$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，最终可推出对所有 $T < \infty$

$$m(T) \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \le C\varepsilon.$$

这里我们用到了 $m(0) = 0$。根据定义，该估计意味着

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}$$

对每个 $0 < t < \infty$ 均成立，正如所要证明的。 □

在下一个定理中，我们改进了关于具有小 BMO-范数的初始数据的调和映射热流解的唯一性结果。为此，我们将巴拿赫空间 X 定义为空间中的函数，其范数为

$$\|u\|_X := \sup_{0<t<\infty} \left(\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + t^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \right) + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{0<R<\infty} R^{-\frac{d}{2}}\|\nabla u\|_{L^2(B_R(x)\times(0,R^2))}$$

是有限的。第一作者与 Koch [9] 证明了存在常数$\varepsilon > 0$、 $C > 0$，使得对于每个 u_0：满足 $\|u_0 - P\|_{L^\infty} < \varepsilon$的 $\mathbb{R}^d \to N$，其中$P \in N$ 是任意给定的点，都存在方程（1）的整体解 $u \in P + X$。此外，该解在球

$$B^X(P, C\varepsilon) = \{u : \|u - P\|_X \le C\varepsilon\}.$$

Wang [20]随后将这一结果推广到了具有小 BMO 范数的初始数据 $u_0 \in BMO(\mathbb{R}^d)$。他证明了解在集合$B^X(G(t)u_0, C\varepsilon)$中的唯一性。

作为调和映射流的第二个主要结果，我们将这一条件唯一性结果提升为无条件唯一性结果（即不再需要将解限制在 X 中具有小 X范数的解类内），但为此我们必须将 BMO初始数据改为齐次 Besov 初始数据。

定理 2.7. 设 N 是一个光滑闭流形。存在 $\varepsilon > 0$、 $C > 0$，使得对于每个 $u_0 \in \dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d, N)$，其中 $d < p < \infty$、 $\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} < \varepsilon$，以及每个满足以下条件的方程（1）的解 $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to N$

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\nabla u(t,x) \in C^0([0,\infty), L^p(\mathbb{R}^d))$$

and

$$\lim_{t\searrow 0} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} = 0,$$

我们得到如下估计

$$\|u - G(t)u_0\|_X \le C\varepsilon,$$

也就是说，在这些假设下解唯一。

注记 2.8. 由于

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|\nabla(G(t)u_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \simeq \|u_0\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}},$$

分别

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{0<R<\infty} R^{-\frac{d}{2}} \|\nabla(G(t)u_0)\|_{L^2(B_R(x)\times(0,R^2))} \simeq \|u_0\|_{BMO}$$

并且由于我们有如下包含关系

$$\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty} \subset BMO \subset \dot{B}^0_{\infty,\infty}$$

对于每个 $d<p<\infty$，由上述估计可知，对于每个满足 $\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p},\ \infty}_{p,\ \infty}} < \varepsilon$ 的解 $u \in C^0([0,\infty)\ \dot{W}^{1,\ p}(\mathbb{R}^d, N))$，只要其初始数据为 u_0，且它是上述方程 (1) 的解，我们有

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{0<R<\infty} R^{-\frac{d}{2}} \|\nabla u\|_{L^2(B_R(x)\times(0,R^2))} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}.$$

定理 2.7 的证明：固定 $p>d$，并注意到由定理 2.4 可得如下估计

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}} \|\nabla u(t)\|_{L^p} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}.$$

接下来，我们再次利用估计 (7) 以及 $\sigma=1$、$r=\frac{p}{2}$ 和 $q=\infty$，得出对每个 $t>0$

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u(t)-G(t)u_0)\|_{L^\infty} \le& C\int_0^t \||\nabla u(s)|^2\|_{L^{\frac{p}{2}}} (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{p})}\, ds \\
\le& C\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^p} (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{p})}\, ds \\
\le& C\|u_0\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \int_0^t s^{\frac{d}{p}-1}(t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{p})}\, ds \\
\le& Ct^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}},
\end{aligned}$$

其中，在最后一个估计中我们使用了 (8)。

类似地，我们得到

$$\begin{aligned}
\|u(t)-G(t)u_0\|_{L^\infty} \le& C\int_0^t \||\nabla u(s)|^2\|_{L^{\frac{p}{2}}} (t-s)^{-\frac{d}{p}}\, ds \\
\le& C\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^p} (t-s)^{-\frac{d}{p}}\, ds \\
\le& C\|u_0\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \int_0^t s^{\frac{d}{p}-1}(t-s)^{-\frac{d}{p}}\, ds \\
\le& C\|u_0\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

剩下的工作是证明该界

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{0<R<\infty} R^{-\frac{d}{2}} \|\nabla(u-G(\cdot)u_0)\|_{L^2(B_R(x)\times(0,R^2))} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}.$$

利用 H¨older 不等式，我们对每个 $x \in \mathbb{R}^d$ 及某个 $p > d$ 进行估计

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)} |\nabla(u(t) - G(t)u_0)|^2 \leq & C\Big(\int_{B_R(x)} |\nabla(u(t) - G(t)u_0)|^p\Big)^{\frac{2}{p}} R^{d(1-\frac{2}{p})} \\ \leq & C t^{\frac{d}{p}-1} R^{d(1-\frac{2}{p})} \|u_0\|^2_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}.\end{aligned}$$

由此不难看出

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{0<R<\infty} R^{-\frac{d}{2}} \|\nabla(u - G(\cdot)u_0)\|_{L^2(B_R(x)\times(0,R^2))} \leq C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}.$$

□

最后，我们证明了一个新的稳定性结果：对于从常值映射附近出发的调和映射流，该结果适用于指数级长的时间尺度。请注意，在这一结果中，我们不假设初始值在空间上衰减。

定理 2.9. 对每个 $C > 0$，存在 $b > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，以及满足 (1) 的每个解 $u\colon \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to N$，若$\|u_0 - P\|_{W^{1,\infty}} \leq \varepsilon$，其中 $P \in N$ 是任意一点，则有

$$\sup_{t\in[0,\exp(\frac{b}{\varepsilon})-1]} \|u(t) - P\|_{C^0} + \sup_{t\in[0,\exp(\frac{b}{\varepsilon})-1]} (1+t)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_{C^0} \leq C.$$

证明。我们定义函数

$$\begin{aligned} a(t) &= \sup_{0\leq s\leq t} \|u(s) - P\|_{L^\infty} \quad \text{resp.} \\ b(t) &= \sup_{0\leq s\leq t} \|(1+s)^{\frac{1}{2}} \nabla u(s)\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

并进行估计（利用 $\|G(t)(u_0 - P)\|_{L^\infty} \leq \|u_0 - P\|_{L^\infty}$ 这一事实）

$$\begin{aligned}\|u(t) - P\|_{L^\infty} &\leq C\|u_0 - P\|_{L^\infty} + C\left\|\int_0^t G(\cdot, t-s) \star A(u)(\nabla u, \nabla u)(s) ds\right\|_{L^\infty} \\ &\leq Ca(0) + C\int_0^t \||\nabla u(s)|^2\|_{L^\infty} ds \\ &\leq Ca(0) + Cb^2(t)\int_0^t (1+s)^{-1}\, ds \\ &\leq Ca(0) + Cb^2(t)\log(1+t)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(1+t)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_{L^\infty} \leq & C(a(0) + b(0)) + Cb^2(t)(1+t)^{\frac{1}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-1}\, ds \\ \leq & C(a(0) + b(0)) + Cb^2(t)(1 + \log(1+t)),\end{aligned}$$

其中我们用到了

$$\|\nabla(G(\cdot,t) \star (u_0 - P))\|_{L^\infty} \leq \begin{cases} C\|\nabla u_0\|_{L^\infty}, & \text{for } t \leq 1, \\ Ct^{-\frac{1}{2}}\|u_0 - P\|_{L^\infty}, & \text{for } t > 1. \end{cases}$$

接下来，我们分别定义重标度函数 $\tilde{a}(t) = \varepsilon^{-1}a(t)$ 和 $\tilde{b}(t) = \varepsilon^{-1}b(t)$，并得出结论

$$\tilde{a}(t) + \tilde{b}(t) \leq C_1(\tilde{a}(0) + \tilde{b}(0)) + C_2\varepsilon(1 + \log(1+t))\tilde{b}^2(t)$$

~其中某些常数为 $C_1, C_2 > 0$。由于 $\tilde{a}(0) + b(0) \le 1$，我们得出结论

$$\tilde{a}(t) + \tilde{b}(t) \le 2C_1$$

只要

$$1 + t \le \exp\left(\frac{1}{4C_1C_2\varepsilon} - 1\right).$$

因此

$$a(t) + b(t) \le 2C_1\varepsilon$$

对所有 $0 \le t \le \exp\left(\frac{1}{4C_1C_2\varepsilon} - 1\right) - 1$，注意到当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，最后一个数满足定理陈述中要求的性质。□

3. Related equations

本节旨在说明，针对调和映射热流得到的结果可以推广到另外两个抛物型方程，从而简化已有结果的证明或得到新的结果。我们注意到，对于纳维-斯托克斯方程，Cannone [5], Planchon [13]和 Koch-Tataru [10]此前已获得类似结果。

3.1. 幂型非线性方程。

这里我们研究一个非常经典的半线性方程

$$\partial_t u - \Delta u = f(u) \tag{9}$$

其中 $u\colon \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足 $u(\cdot, 0) = u_0$ 且 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $|f(s)| \le |s|^q$ 的光滑函数，其中某个 $q > 1$ 适用于所有 $s \in \mathbb{R}$。文献 [6, 22]已经证明，对于非负初始数据 u_0，只要范数 $\|u_0\|_{L^{\frac{d(q-1)}{2}}}$ 足够小（这里我们还假设 $d > (q-1)2$），就存在一个非负整体解满足方程 (9)，且该解满足

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q-1}-\frac{d}{2p}} \|u(t)\|_{L^p} \le C\|u_0\|_{L^{\frac{d(q-1)}{2}}}$$

对每个 $\frac{d}{(q-1)2} < p < \frac{dq(q-1)2}{2}$ 均成立。应将这一结果与 Soyeur [17] 关于调和映射热流的结果（见定理 2.1）直接比较（事实上，这也是该结果的研究动机）。实际上，采用上一节使用的相同技巧，我们能够推广这些结果，并得到

定理 3.1. 存在一个常数 $\varepsilon > 0$，仅取决于 d 和 q，使得若 $u_0 \in B^{\frac{d}{p}-\frac{2}{q-1}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ 满足 $1 < q < \infty, 1 < (q-1)2 < d$，且若 $\|u_0\|_{B^{\frac{d}{p}-\frac{2}{q-1}}_{p,\infty}} < \varepsilon$，则我们有如下估计

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q-1}-\frac{d}{2p}} \|u(t)\|_{L^p} \le C\|u_0\|_{B^{\frac{d}{p}-\frac{2}{q-1}}_{p,\infty}},$$

其中 $C = C(d,p)$，对于每个 $\frac{d}{(q-1)2} < p < \frac{dq(q-1)2}{2}$ 以及方程 (9) 的每个解 $u\colon (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，且

$$t^{\frac{1}{q-1}-\frac{d}{2p}} u(t,x) \in C^0((0,\infty), L^p(\mathbb{R}^d))$$

and

$$\lim_{t \searrow 0} t^{\frac{1}{q-1}-\frac{d}{2p}} \|u(t)\|_{L^p} = 0.$$

如果我们还知道 $q > \max\{2, 1+\frac{2}{d}\}$，那么还可以得到如下估计

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q-1}} \|u(t)\|_{L^\infty} \leq C \|u_0\|_{B^{\frac{d}{p}-\frac{2}{q-1}}_{p,\infty}}.$$

证明。按照定理 2.4 的证明中的论证，我们得到

$$\begin{aligned}
\|u(t) - G(t)u_0\|_{L^p} \leq & C \int_0^t \||u(s)|^q\|_{L^{\frac{p}{q}}} (t-s)^{-\frac{d(q-1)}{2p}} \, ds \\
\leq & C \int_0^t \|u(s)\|_{L^p}^q (t-s)^{-\frac{d(q-1)}{2p}} \, ds \\
\leq & C m(T)^q \int_0^t s^{\frac{dq}{2p}-\frac{q}{q-1}} (t-s)^{-\frac{d(q-1)}{2p}} \, ds \\
\leq & C m(T)^q,
\end{aligned}$$

因为 $0 > \frac{dq}{2p} - \frac{q}{q-1} > -1$ 和 $0 > -\frac{d(q-1)}{2p} > -1$。注意，此处我们令

$$m(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{q-1}-\frac{d}{2p}} \|u(t)\|_{L^p}.$$

如上所述，这一估计意味着所需的结论，因为

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q-1}-\frac{d}{2p}} \|G(t)u_0\|_{L^p} \cong \|u_0\|_{B^{\frac{d}{p}-\frac{2}{q-1}}_{p,\infty}}.$$

接下来，若 $q > 2$ 存在一个满足 $\frac{dq}{2} < p < dq$ ~~$(q-1)$~~ 的 p，则对这样一个 p，我们注意到，对每个 $0 < t < \infty$

$$\begin{aligned}
\|u(t) - G(t)u_0\|_{L^\infty} \leq & C \int_0^t \||u(s)|^q\|_{L^{\frac{p}{q}}} (t-s)^{-\frac{dq}{2p}} \, ds \\
\leq & C \int_0^t \|u(s)\|_{L^p}^q (t-s)^{-\frac{dq}{2p}} \, ds \\
\leq & C m(T)^q \int_0^t s^{\frac{dq}{2p}-\frac{q}{q-1}} (t-s)^{-\frac{dq}{2p}} \, ds \\
\leq & C t^{-\frac{1}{q-1}} m(T)^q,
\end{aligned}$$

因此我们也得到如下估计

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q-1}} \|u(t)\|_{L^\infty} \leq C \|u_0\|_{B^{\frac{d}{p}-\frac{2}{q-1}}_{p,\infty}}.$$

□

请注意，Miao、Yuan 和 Zhang [12]此前已获得前一定理中的 L^p-估计。Blatt 和 Struwe [1] 也针对 Morrey 空间中的小初始数据得到了相关估计。

3.2. 双调和映射流。作为另一个例子，我们考虑由以下方程控制的（外在）双调和映射热流的解 $u : \mathbb{R}^d \times (0,T) \to S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
(\partial_t + \Delta^2)u &= u(|\Delta u|^2 - \Delta|\nabla u|^2 - 2\mathrm{div}\langle \Delta u, \nabla u\rangle) \\
&= u|\Delta u|^2 + \nabla u \cdot (\nabla|\nabla u|^2 + 2\langle \Delta u, \nabla u\rangle) - \mathrm{div}(u\nabla|\nabla u|^2 + 2u\langle \Delta u, \nabla u\rangle) \qquad (10) \\
&=: f_1[u] + \mathrm{div} f_2[u],
\end{aligned}$$

其中我们可以得到估计

$$|f_1[u]| \le C(|\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^4) \quad \text{and}$$
$$|f_2[u]| \le C|\nabla u||\nabla^2 u|.$$

为简便起见，我们将讨论范围限制在球面值映射。下文的论证很容易推广到一般的闭流形 N 及映射u： $\mathbb{R}^d \times (0,T) \to N$。此外，双调和映射流还有另一种形式，称为内蕴双调和映射。下文给出的所有结果都可直接推广到这一四阶抛物型偏微分方程。

同样，我们关注适当 Besov空间中小初始数据对应的无条件唯一性或稳定性结果。与之前一样，由于线性化仍然具有延伸至虚轴的本质谱，因此无法直接应用线性稳定性原理。

但与之前一样，可以利用某种扩散行为来控制相对于这种扩散行为而言不重要的非线性项。下文令 $b:\mathbb{R}^d \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 表示双调和热核。由[9] 的结果可知，引理 2.6 可以推广到这种情形，即我们有

引理3.2. 令 b： $\mathbb{R}^d \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 为双调和热核。使用记号 $b(t)f = b_t \star f$，我们有如下估计

$$\|\nabla^\sigma b(t)\|_{\mathcal{L}(L^r,L^q)} \le Ct^{-\frac{d}{4}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})-\frac{\sigma}{4}}, \tag{11}$$

其中 $1 \le r \le q \le \infty$、 $\sigma \in \mathbb{N}_0$ 和 $C < \infty$ 为常数。

在陈述双调和映射流的主要结果之前，我们注意到，还可以通过双调和热核得到齐次 Besov 空间的另一个等价刻画，即

$$\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} := \sup_{t>0}\left(t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|\nabla(b(t)u_0)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla^2(b(t)u_0)\|_{L^{\frac{p}{2}}}\right).$$

这里需要指出，右侧的第一项确实在齐次 Besov 空间 $B^p_{p,\infty}$上定义了一个等价. $_d$ 范数，而第二项则在齐次空间 $B^{\frac{p}{2}}_{\frac{p}{2},\infty}$上定义了一个. $_{2d}$等价范数。由于第二个齐次 Besov 空间嵌入第一个空间中，我们将所述范数作为较大空间的定义。

定理3.3. 存在一个常数 $\varepsilon > 0$，其仅取决于 d 和 n，使得若 $u_0 \in \dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d, S^{m-1})$，其中 $d < p < \infty$ 且 $\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} < \varepsilon$，则有

估计

$$t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla^2 u(t)\|_{L^{\frac{p}{2}}} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}},$$

其中 $C = C(d,m,p)$，对于每个满足以下条件的解 $u:(0,\infty)\times\mathbb{R}^d \to S^{m-1}$ of (1)

$$t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\nabla u \in C^0([0,\infty), L^p(\mathbb{R}^d)),\ t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\nabla^2 u \in C^0([0,\infty), L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^d))$$

and

$$\lim_{t\searrow 0}(t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla^2 u(t)\|_{L^{\frac{p}{2}}}) = 0.$$

证明。我们通过观察以下内容，紧密沿用定理 2.4 的证明

$$\begin{aligned}\nabla^i(u(x,t)-b(t)\star u_0(x)) = &\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\nabla^i b(x-y,t-s)f_1[u]\,dy\,ds\\ &-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\nabla^{i+1}b(x-y,t-s)f_2[u](s)\,dy\,ds =: I_i + II_i.\end{aligned}$$

利用估计式 (11)，结合 $\sigma=1$、$r=\frac{p}{4}$ 和 $q=p$，可得对每个 $t>0$

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L^p} \leq& C\int_0^t \left(\||\nabla u(s)|^4\|_{L^{\frac{p}{4}}} + \||\nabla^2 u(s)|^2\|_{L^{\frac{p}{4}}}\right)(t-s)^{-(\frac{1}{4}+\frac{3d}{4p})}\,ds\\ \leq& C\int_0^t (\|\nabla u(s)\|_{L^p}^4 + \|\nabla^2 u(s)\|_{L^{\frac{p}{2}}}^2)(t-s)^{-(\frac{1}{4}+\frac{3d}{4p})}\,ds.\end{aligned}$$

令

$$m(T) = \sup_{0\leq t\leq T}\left(t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla^2 u(t)\|_{L^{\frac{p}{2}}}\right),$$

最后一个不等式推出，对所有 $t>0$

$$\begin{aligned}t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|I\|_{L^p} \leq& Ct^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}m(T)^2(1+m(T)^2)\int_0^t (t-s)^{-(\frac{1}{4}+\frac{3d}{4p})}s^{-1+\frac{d}{p}}\,ds\\ \leq& Cm(T)^2(1+m(T)^2),\end{aligned}$$

这里再次用到了恒等式 (8)。

类似地，利用 (11)，结合 $\sigma=2$、$r=\frac{p}{3}$ 和 $q=p$，可得对每个 $t>0$

$$\begin{aligned}\|II_1\|_{L^p} \leq& C\int_0^t \||\nabla u(s)||\nabla^2 u(s)|\|_{L^{\frac{p}{3}}}(t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{2p})}\,ds\\ \leq& C\int_0^t (\|\nabla u(s)\|_{L^p}\|\nabla^2 u(s)\|_{L^{\frac{p}{2}}})(t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{2p})}\,ds.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|II\|_{L^p} \leq& Ct^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}m(T)^2\int_0^t (t-s)^{-(\frac{1}{2}+\frac{d}{2p})}s^{-\frac{3}{4}+\frac{3d}{4p}}\,ds\\ \leq& Cm(T)^2,\end{aligned}$$

这意味着

$$t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} \leq C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} + Cm(T)^2(1+m(T)^2).$$

对于 $i=2$，我们采用类似的论证，只是这次分别选择 $\sigma=2$、$r=\frac{p}{4}$ 和 $q=\frac{p}{2}$ 作为 I_2，选择 $\sigma=3$、$r=\frac{p}{3}$ 和 $q=\frac{p}{2}$ 作为 II_2，从而得到

$$t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla^2 u(t)\|_{L^{\frac{p}{2}}} \leq C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} + Cm(T)^2(1+m(T)^2).$$

对所有 $0\leq t\leq T$ 取上确界，我们便得到对每个 $0<T<\infty$

$$Cm(T)^2(1+m(T)^2) - m(T) + C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \geq 0$$

并且当 $\varepsilon>0$ 足够小时，最终可推出对所有 $T<\infty$ 均有

$$m(T) \leq C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \leq C\varepsilon.$$

这里我们利用了 $m(0) = 0$。根据定义，这个估计意味着

$$t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla^2 u(t)\|_{L^{\frac{p}{2}}} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}$$

对每个 $0 < t < \infty$ 均成立，正如所声称的那样。 □

与调和映射热流的情形一样，现在可以利用这一结果，改进 Wang [21] 关于小初始数据 BMO 下双调和映射热流解的唯一性结果。为此，我们需要再次定义一个合适的函数空间。这次它定义为

$$\|u\|_{X_b} := \sup_{0<t<\infty}\left(\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sum_{i=1}^{2} t^{\frac{i}{4}}\|\nabla^i u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right) + \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{0<R<\infty}\sum_{i=1}^{2} R^{-\frac{di}{4}}\|\nabla^i u\|_{L^{\frac{4}{i}}(B_R(x)\times(0,R^4))}$$

是有限的。

类似于定理 2.7，我们得到

定理 3.4. 存在 $\varepsilon > 0, C > 0$，使得对每个 $u_0 \in \dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^d, S^{m-1})$，若 $d < p < \infty$，$\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}} < \varepsilon$，且对每个解 $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to S^{m-1}$，满足方程 (10) 且

$$t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\nabla u(t,x) \in C^0([0,\infty), L^p(\mathbb{R}^d)),\ t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\nabla^2 u(t,x) \in C^0([0,\infty), L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^d))$$

and

$$\lim_{t\searrow 0}\left(t^{\frac{1}{4}-\frac{d}{4p}}\|\nabla u(t)\|_{L^p} + t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2p}}\|\nabla^2 u(t)\|_{L^{\frac{p}{2}}}\right) = 0,$$

我们有如下估计

$$\|u - b(t)u_0\|_{X_b} \le C\varepsilon,$$

即，在这些假设下，方程 (10) 只有一个解。

此外，可以得到以下界

$$\sup_{t>0}\sum_{i=1}^{2} t^{\frac{i}{4}}\|\nabla^i u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{0<R<\infty}\sum_{i=1}^{2} R^{-\frac{di}{4}}\|\nabla^i u\|_{L^{\frac{4}{i}}(B_R(x)\times(0,R^4))} \le C\|u_0\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}.$$

4. Self-similar decay

本节汇集若干结果，表明调和映射热流和双调和映射热流中的偏差 v 呈现渐近自相似衰减。我们首先讨论调和映射热流的 v-方程 (2)。下文将介绍如何将所述方法推广到双调和映射热流。本节最后对 w-方程 (5) 的类似结论作一些评述。

4.1. 调和映射热流。众所周知，对于空间局部化初始条件，线性扩散方程的解

$$\partial_t v = \Delta v, \qquad v|_{t=0} = v_0$$

以自相似的方式渐近衰减，即，对于 $x \in \mathbb{R}^d$ 重整化解$t^{d/2}v(x\sqrt{t},t)$，其趋向于高斯函数的某个倍数， $V_{\lim}e^{-|x|^2/4}$ 其中 $V_{\lim} \in \mathbb{R}$。调和映射热流 (1) 的平凡空间常数平衡态 u^* 的偏差 v 也具有相同性质。正如我们在引言中所见，偏差v 满足如下形式的半线性扩散方程

$$\partial_t v - \Delta v = A(u^* + v)(\nabla v, \nabla v), \tag{12}$$

这里回顾一下， $A(u^* + v)(\cdot,\cdot)$ 是作用于 d 维切空间上的光滑有界双线性映射。我们的第一个结果如下

定理 4.1. 存在 $\delta, C > 0$，使得对于 (12) 的所有解 v ，若$\|v|_{t=0}\|_{H^m_r} \le \delta$ ，其中 $m > d/2 + 1$ 且 $r > d/2 + 1$ ，则存在一个 $V_{\lim} \in \mathbb{R}^d$ ，使得

$$\|t^{d/2}\, v(\cdot\sqrt{t}, t) - V_{\lim}e^{-|\cdot|^2/4}\|_{H^m_r} \le C(1+t)^{-d/2}$$

对所有 $t \ge 0$，其中

$$\|v\|_{H^m_r} = \|v\sigma^r\|_{H^m}, \quad with \quad \sigma(x) = (1 + x^2)^{1/2}.$$

证明。我们采用离散重整化方法，该方法于 20 世纪 90 年代初被引入此类问题，参见 [2, 3]。尽管文献中已记载了针对类似问题的证明，但我们仍回顾其主要步骤，因为据我们所知，迄今尚无此类结果被用于几何流问题。

我们不直接求解 (12)，而是考虑一个等价的问题序列，该序列在形式上收敛于线性扩散方程。为此，我们令

$$v_n(\xi,\tau) = L^{nd}v(L^n\xi, L^{2n}\tau), \tag{13}$$

其中 $L > 1$ 固定，且 $n \in \mathbb{N}$。于是 v_n 满足

$$\begin{aligned}(\partial_\tau v_n - \Delta_\xi v_n) &= L^{n(d+2)}(\partial_t v - \Delta_x v)\\ &= L^{n(d+2)}A(u^* + v)(\nabla_x v, \nabla_x v)\\ &= L^{n(d+2)}A(u^* + L^{-nd}v_n)(L^{-n(d+1)}\nabla_\xi v_n, L^{-n(d+1)}\nabla_\xi v_n)\\ &= L^{-nd}A(u^* + L^{-nd}v_n)(\nabla_\xi v_n, \nabla_\xi v_n)\end{aligned}$$

对于 $\tau \in [L^{-2}, 1]$，其初始条件为

$$v_n(\xi, L^{-2}) = L^d v_{n-1}(L\xi, 1). \tag{14}$$

对于 $n \to \infty$，非线性项的影响以几何速率消失。当 $n \to \infty$ 时，我们得到一个线性扩散方程。通过一个简单的不动点论证，可以证明 $v_n|_{\tau=1}$ 收敛到重整化线性扩散问题的极限，即高斯函数 $\psi(\xi) = (2\pi)^{-d/2}e^{-|\xi|^2/4}$的若干倍。

记号。在证明的其余部分中，我们用符号 C 表示可选取为与 L 和 n无关的常数。

我们需要投影

$$\Pi v_n = \int v_n(\xi)d\xi,$$

$\widehat{}$分别在 $\Pi\widehat{v}_n = \widehat{v}_n|_{k=0}$ 傅里叶空间中。该界

$$|\Pi v_n| \le C|\widehat{v}_n|_{k=0}| \le C\|\widehat{v}_n\|_{C_b^0} \le C\|\widehat{v}_n\|_{H_m^r} \le C\|v_n\|_{H_r^m}$$

由于索伯列夫嵌入定理 $H_m^r \subset C_b^0$ 对 $r > d/2$成立。令

$$V_{n+1} = \Pi v_n|_{\tau=1}$$

并通过下式引入 $v_n(\xi, 1)$ 与 $V_{n+1}\psi(\xi)$ 之间的偏差:

$$\rho_{n+1}(\xi) = v_n(\xi, 1) - V_{n+1}\psi(\xi).$$

根据构造，我们有 $\int \rho_n(\xi)d\xi = 0$，分别为 $\widehat{\rho}_n|_{k=0} = 0$。为了证明（$V_n$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 趋于某个 $V_{\lim} \in \mathbb{R}$，以及（ρ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 趋于零，我们建立了一系列不等式。

引理 4.2。我们有

$$\begin{aligned} |V_{n+1} - V_n| &\le CL^{-nd}R_n^2, \\ \|\rho_{n+1}\|_{H_r^m} &\le (C/L)\|\rho_n\|_{H_r^m} + CL^{-nd}R_n^2 + C|V_{n+1} - V_n| \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \sup_{\tau\in[1/L^2,1]} \|v_n(\tau)\|_{H_r^m}.$$

证明。我们考虑常数变易公式

$$v_n(\xi, \tau) = e^{(\tau-1/L^2)\Delta_\xi} L^d v_{n-1}(L\xi, 1) + g_n(\tau) \tag{15}$$

对于 $\tau \in [1/L^2, 1]$，其中

$$g_n(\tau) = L^{-nd} \int_{1/L^2}^{\tau} e^{(\tau-s)\Delta_\xi} A(u^* + L^{-nd}v_n)(\nabla_\xi v_n, \nabla_\xi v_n)(s)ds.$$

在情形 $\tau = 1$ 下应用投影 Π，得到

$$V_{n+1} = V_n + \Pi g_n(1), \tag{16}$$

这里我们用到了

$$\int e^{(\tau-1/L^2)\Delta_\xi} f(\xi)d\xi = e^{-(\tau-1/L^2)k^2}|_{k=0}\widehat{f}(0) = \widehat{f}(0) = \int f(\xi)d\xi$$

and

$$\int L^d v_{n-1}(L\xi, 1)d\xi = \int v_{n-1}(\xi, 1)d\xi = V_n.$$

重新整理常数变易公式中的各项，还可得到

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(\xi) &= e^{(1-1/L^2)\Delta_\xi} L^d \rho_n(L\xi) \\ &\quad + g_n(1) + e^{(1-1/L^2)\Delta_\xi} L^d V_n\psi(L\xi) - V_{n+1}\psi(\xi), \end{aligned} \tag{17}$$

我们对 (16) 和 (17) 右端的各项进行估计。

i) 使用

$$e^{-(1-1/L^2)|k|^2} e^{-|k/L|^2} = e^{-|k|^2}$$

可得

$$\begin{aligned} \|e^{(1-1/L^2)\Delta_\xi} L^d V_n\psi(L\cdot) - V_{n+1}\psi(\cdot)\|_{H_r^m} &= \|(V_n - V_{n+1})\psi(\cdot)\|_{H_r^m} \\ &\le C|V_{n+1} - V_n|. \end{aligned}$$

ii) 由于 ρ 的平均值为零，并且对于 $r > d/2+1$， $\widehat{\rho} \in H^r_m \subset C^1_b$，我们有

$$\begin{aligned}\|e^{(1-1/L^2)\Delta_\xi} L^d \rho_n(L\cdot)\|_{H^m_r} &\leq C\|e^{-(1-1/L^2)|k|^2}\widehat{\rho}_n(\cdot/L)\|_{H^r_m} \\ &\leq (C/L)\|\widehat{\rho}_n\|_{H^r_m} \leq (C/L)\|\rho_n\|_{H^m_r}.\end{aligned}$$

iii) 对于积分项，我们得到

$$\begin{aligned}\|\, g_n(\tau)\|_{H^m_r} &\leq L^{-nd}\int_{1/L^2}^{\tau} \|e^{(\tau-s)\Delta}\|_{H^{m-1}_2 \to H^m_r} \\ &\qquad \times \|\, A(u^* + L^{-nd}v_n)(\nabla_\xi v_n, \nabla_\xi v_n)(s)\|_{H^{m-1}_2} ds \\ &\leq CL^{-nd}R_n^2 \int_{1/L^2}^{\tau} (\tau - s)^{-1/2} ds \leq CL^{-nd}R_n^2.\end{aligned}$$

□

利用引理 4.2 的第一个不等式消去第二个不等式中的 $|A_{n+1} - A_n|$，可得

推论 4.3。

$$\begin{aligned}|V_{n+1} - V_n| &\leq CL^{-nd}R_n^2, \\ \|\rho_{n+1}\|_{H^m_r} &\leq (C/L)\|\rho_n\|_{H^m_r} + CL^{-nd}R_n^2.\end{aligned}$$

为了得到关于 V_n 和 ρ_n 的封闭不等式组，我们需要用 V_n 和 ρ_n 来估计 R_n。

引理 4.4。存在 $C_1 > 0$ 和 $C_2 > 0$，使得对所有满足 $L^{5/2}\delta < C_1$ 的 $\delta > 0$ 和 $L > 1$，以下结论成立。对于满足以下条件的 $v_{n-1}|_{\tau=1} \in H^m_r$

$$\|v_{n-1}|_{\tau=1}\|_{H^m_r} < \delta$$

我们有

$$R_n \leq C_2 L^{5/2}(|V_n| + r_n)$$

其中 $r_n = \|\rho_n\|_{H^m_r}$。

证明。我们考虑常数变易公式 (15)，使用引理 4.2 中的估计 iii)，并将引理 4.2 中的 ii) 替换为

$$\|e^{(\tau-1/L^2)\Delta_\xi} L^d v_{n-1}(L\cdot)\|_{H^m_r} \leq C\|L^d v_{n-1}(L\cdot)\|_{H^m_r} \leq CL^{5/2}\|v_{n-1}\|_{H^m_r},$$

从而得到

$$R_n \leq CL^{5/2}\|v_{n-1}\|_{H^m_r} + CL^{-\sigma n}R_n^2.$$

由于当 $L^{5/2}\delta > 0$ 足够小时，直线 $R_n \mapsto R_n$ 与曲线 $R_n \mapsto CL^{5/2}\|v_{n-1}\|_{H^m_r} + CL^{-nd}R_n^2$ 有两个交点 $\underline{R} < \overline{R}$，因此我们有

$$R_n \leq \underline{R} \leq 2CL^{5/2}\|v_{n-1}\|_{H^m_r} \leq 4CL^{5/2}(|V_n| + r_n).$$

显然，在空间 H^m_r 中局部存在且解唯一。由于上述估计在 H^m_r 中给出了先验界，解可以延拓到整个区间 $[1/L^2, 1]$。□

推论 4.3 和引理 4.4 得出

$$\begin{aligned} |V_{n+1} - V_n| &\leq CL^{-nd}(L^{5/2})^2(|V_n| + r_n)^2, \\ r_n &\leq (C/L)r_n + CL^{-nd}(L^{5/2})^2(|V_n| + r_n)^2, \end{aligned}$$

只要

$$C(|V_n| + r_n) \leq \delta \qquad \text{and} \qquad L^{5/2}\delta \leq C_1. \tag{18}$$

我们选择足够大的 $L_0 > 1$，使得（C/L_0） $\leq 1/10$，然后选择足够大的 $n_0 > 0$，使得$CL_0^{-n_0 d}$ （$L_0^{5/2}$）$^2 \leq 1$。那么，对于所有 $n > n_0$ 和 $L > L_0$，我们都有

$$\begin{aligned} |V_{n+1} - V_n| &\leq L^{-d(n-n_0)}(V_n + r_n)^2, \\ r_{n+1} &\leq r_n/10 + L^{-(n-n_0)d}(V_n + r_n)^2. \end{aligned}$$

现在我们选择一个足够小的 $L > L_0$ 和一个足够小的 $\delta > 0$，使得

$$L^{5/2}\delta \leq C_1.$$

由于量 $|V_n|$ 和 r_n 仅在 n_0 步内增长，我们可以将初始条件取得足够小，使得

$$\max_{n=1,\dots,n_0} C(|V_n| + r_n) \leq \delta/4.$$

那么（V_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 以几何速率收敛到一个 $V_{\lim} \in \mathbb{R}^d$，并且我们有 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$。这些估计还保证

$$\sup_{n\geq n_0} r_n \leq \delta/4 \qquad \text{und} \qquad \sup_{n\geq n_0} |V_n| \leq \delta/2.$$

因此，先前各项估计成立所需的所有条件均已满足。由于对所有 $L \in [L_0, L_0^2]$ 收敛均成立，定理 4.1 得证。□

稍作修改这一证明，即可为调和映射热流的w-方程（见（5））以及双调和映射热流（见（10））建立类似的结果。下面我们概述方程（5）的思路，回顾其形式如下：

$$\begin{aligned} \partial_t w - \Delta w &= \nabla(A(u^* + v)(w, w)) \\ &= 2A(u^* + v)(w, \nabla w) + A'(u^* + v)(w, w, w), \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $A'(u^*+v)(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是作用于切空间上的光滑有界三线性映射，且 $w = \nabla v$。对于缩放

$$w_n(\xi, \tau) = L^{nd} w(L^n \xi, L^{2n}\tau) \tag{20}$$

固定 $L > 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 后，前面的分析几乎可以逐行套用。由此选择可得

$$v_n(\xi, \tau) = L^{n(d-1)} v(L^n \xi, L^{2n}\tau),$$

因此 w_n 满足

$$\begin{aligned}(\partial_\tau w_n - \Delta_\xi w_n) &= L^{n(d+2)}(\partial_t w - \Delta_x w)\\ &= 2L^{n(d+2)}A(u^*+v)(w,\nabla_x w) + L^{n(d+2)}A'(u^*+v)(w,w,w)\\ &= 2L^{n(d+2)}A(u^*+L^{-n(d-1)}v_n)(L^{-nd}w_n, L^{-n(d+1)}\nabla_\xi w_n)\\ &\quad + L^{n(d+2)}A'(u^*+L^{-n(d-1)}v_n)(L^{-nd}w_n, L^{-nd}w_n, L^{-nd}w_n)\\ &= 2L^{-n(d-1)}A(u^*+L^{-n(d-1)}v_n)(w_n,\nabla_\xi w_n)\\ &\quad + L^{-2n(d-1)}A'(u^*+L^{-n(d-1)}v_n)(w_n,w_n,w_n)\end{aligned}$$

对于 $\tau \in [L^{-2},1]$，其中

$$w_n(\xi, L^{-2}) = L^d w_{n-1}(L\xi, 1). \tag{21}$$

因此，当 $d>1$ 时，非线性项渐近地变得无关紧要，于是前面证明的其余部分使我们能够建立这一结果

定理 4.5. 存在 $\delta, C>0$，使得对于方程 (19) 的所有解 w，若满足$\|w|_{t=0}\|_{H^m_r} \le \delta$，其中 $m > d/2+1$ 且 $r > d/2+1$，则存在一个 $W_{\lim} \in \mathbb{R}^{d\times d}$，使得

$$\|t^{d/2}\, w(\cdot\sqrt{t}, t) - W_{\lim} e^{-|\cdot|^2/4}\|_{H^m_r} \le C(1+t)^{-d/2} \text{ for all } t \ge 0.$$

然而，由于 $w = \nabla v$，选择 $w \in H^s_r$ 排除了一些有趣的解。定理 4.5 中考虑的 v 的初始条件的一个典型例子是：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$；它无法通过定理 4.1 或定理 4.5 处理，具体如下

$$v_1(x_1,x_2) = v_0 \mathrm{erf}(x_1) e^{-x_2^2}.$$

我们得到

$$(w_{1j})_{j=1,2}(x_1,x_2) = \nabla v(x_1,x_2) = (v_0 e^{-x_1^2/4} e^{-x_2^2}, -2x_2 v_0 \mathrm{erf}(x_1) e^{-x_2^2})$$

它不是 H^s_r 的元素。我们不加证明地指出，形式为 $v = c_1\mathrm{erf}(x_1) + \widetilde{v}$ 的初始条件，其中 $c_1 \in \mathbb{R}$ 且 $\widetilde{v} \in H^s_r$，也可以轻易纳入定理 4.1 的表述和证明中。

4.2. 双调和映射热流。接下来讨论 u 情形下的双调和映射热流：$\mathbb{R}^d \to S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$。与线性扩散方程类似，对于线性化问题，我们有

$$\partial_t v = -\Delta^2 v, \qquad v|_{t=0} = v_0$$

对于空间局部化初始条件，解会以自相似的方式渐近衰减，也就是说，当 $x \in \mathbb{R}^d$ 时，重整化解 $t^{d/4}v(x\sqrt{t},t)$ 收敛至普适极限函数 $V_{\lim}\varphi(x)$ 的某个倍数，其中 $V_{\lim} \in \mathbb{R}$ 且 $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}$；此处 $\widehat{\varphi}(k) = e^{-|k|^4}$。对于双调和映射热流 (1) 的平凡空间常数平衡态 u^* 的偏差 v，结论也同样成立。请注意，偏差 v 满足如下形式的半线性抛物方程

$$\begin{aligned}\partial_t v &= -\Delta^2 v - (\Delta(\nabla v,\nabla v) + \nabla\cdot(\Delta v,\nabla v) + (\nabla\Delta v,\nabla v))e_1\\ &\quad -(\Delta(\nabla v,\nabla v) + \nabla\cdot(\Delta v,\nabla v) + (\nabla\Delta v,\nabla v))v.\end{aligned} \tag{22}$$

于是我们得到：

定理4.6. 存在 $\delta, C > 0$，使得对于满足$\|v|_{t=0}\|_{H^m_r} \le \delta$的(22)的所有解 v，其中 $m > d/2+3$且 $r > d/2+1$，我们有一个 $V_{\lim} \in \mathbb{R}^d$，使得

$$\|t^{d/4}\, v(\cdot\sqrt{t}, t) - V_{\lim}\varphi(\cdot)\|_{H^m_r} \le C(1+t)^{-d/4}$$

对所有 $t \ge 0$。

证明。与上文一样，我们不直接求解 (12)，而是考虑一个等价的问题序列，该序列形式上收敛到线性化方程。为此，我们令

$$v_n(\xi,\tau) = L^{nd} v(L^{2n}\xi, L^{4n}\tau), \tag{23}$$

其中 $L > 1$ 固定，且 $n \in \mathbb{N}$。于是 v_n 满足

$$\begin{aligned}
(\partial_\tau v_n - \Delta_\xi v_n) &= L^{n(d+8)}(\partial_t v - \Delta_x v)\\
&= L^{n(d+8)}(-(\Delta_x(\nabla_x v, \nabla_x v) + \nabla_x\cdot(\Delta_x v, \nabla_x v) + (\nabla_x\Delta_x v, \nabla_x v))e_1\\
&\quad -(\Delta_x(\nabla_x v, \nabla_x v) + \nabla_x\cdot(\Delta_x v, \nabla_x v) + (\nabla_x\Delta_x v, \nabla_x v))v)\\
&= L^{n(d+8)}(-(L^{-4n}\Delta_\xi(L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v, L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v)\\
&\quad +L^{-2n}\nabla_\xi\cdot(L^{-n(d+4)}\Delta_\xi v, L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v)\\
&\quad +(L^{-n(d+6)}\nabla_\xi\Delta_\xi v, L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v))e_1\\
&\quad -(L^{-4n}\Delta_\xi(L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v, L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v)\\
&\quad +L^{-2n}\nabla_\xi\cdot(L^{-n(d+4)}\Delta_\xi v, L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v)\\
&\quad +(L^{-n(d+6)}\nabla_\xi\Delta_\xi v, L^{-n(d+2)}\nabla_\xi v))L^{-nd}v)\\
&= L^{-nd}(-(\Delta_\xi(\nabla_\xi v, \nabla_\xi v) + \nabla_\xi\cdot(\Delta_\xi v, \nabla_\xi v) + (\nabla_\xi\Delta_\xi v, \nabla_\xi v)))e_1\\
&\quad +L^{-2nd}(-(\Delta_\xi(\nabla_\xi v, \nabla_\xi v) + \nabla_\xi\cdot(\Delta_\xi v, \nabla_\xi v) + (\nabla_\xi\Delta_\xi v, \nabla_\xi v))v)
\end{aligned}$$

对于 $\tau \in [L^{-4}, 1]$，其初始条件为

$$v_n(\xi, L^{-4}) = L^d v_{n-1}(L^2\xi, 1). \tag{24}$$

与调和映射热流的情形一样，对于 $n \to \infty$，非线性项的影响以几何速率消失。在极限 $n \to \infty$ 下，我们得到线性化问题。证明的其余部分几乎逐行沿用定理 4.1 证明中相应的部分。□

References

[1] S. Blatt 和 M. Struwe. Morrey 空间中超临界Lane-Emden热流的适定性. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 22(4):1370—1381, 2016. [2] J. Bricmont 和 A. Kupiainen. 重整化群与金兹堡-朗道方程. *Comm. Math. Phys.*, 150(1):193–208, 1992. [3] J. Bricmont、A. Kupiainen 和 G. Lin. 重整化群与非线性抛物型方程解的渐近行为. *Comm. Pure Appl. Math.*, 6:893–922, 1994.[4] M. Cannone 小波、旁积与Navier-Stokes. Diderot出版社, 巴黎, 1995. [5] M. Cannone Kato关于纳维-斯托克斯方程定理的推广.

Rev. Mat. , : — .[6]

Iberoamericana 13 515 541, 1997
H. Fujita. 关于

$u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ *J. Fac.* 柯西问题

Sci. Univ. Tokyo Sect. I 13 109 124, 1966
解的爆破. , : – .[7] T. Gallay. 非线性抛物型偏微分方程中临界前沿的局部稳定性. *Nonlinearity*, 7(3):741–764, 1994. [8] M. Johnson、P. Noble、L. Rodrigues 和 K. Zumbrun. 局域扰动与非局域扰动下黏性守恒律周期解的行为. *Invent. Math.*, 197(1):115–213, 2014.

[9] H. Koch 和 T. Lamm. 粗糙初始数据下的几何流. *Asian J. Math.*, 16(2):209– 235, 2012.[10] H. Koch 和 D. Tataru. 纳维-斯托克斯方程的适定性. *Adv. Math.*, 157: 22—35, 2001.[11] J. Li 和 S. Wang. 非紧流形上的调和映射热流. *Chinese Ann. Math. Ser. B* 21 1 121 , ( ): – 130, 2000. [12] C. Miao、B. Yuan 和 B. Zhang. 齐次Besov空间中的非线性热方程强解. *Nonlinear Anal.*, 67:1329–1343, 2007. [13] F. Planchon 纳维-斯托克斯方程整体解的渐近行为，取值于 $\mathbb{R}^3$. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14:71—93, 1998.[14] B. Sandstede、A. Scheel、G. Schneider 和 H. Uecker. 反应扩散系统中周期波列的扩散混合. *J. Differ. Equations*, 252(5):3541–3574, 2012. [15] G. Schneider. 无限长圆柱中泰勒涡的非线性稳定性. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 144 2 121 , ( ): – 200, 1998. [16] G. Schneider 和 H. Uecker. *Nonlinear PDEs: A dynamical systems approach*, *Graduate Studies in Mathematics*第182卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017.[17] A. Soyeur. 调和映射热流的整体存在性结果. *Comm. Partial Differential Equations* 15 2 237 244, 1990 , ( ): – . [18] M. Struwe. 高维调和映射的演化. *J. Differential Geom.*, 28 3 485( ): –502, 1988. [19] H. Uecker. 二维实值与复 Swift-Hohenberg 方程中卷状解的扩散稳定性. *Comm. Partial Differential Equations*, 24:2109–2146, 1999. [20] C. Wang. 粗糙初始数据下调和映射热流与液晶流的适定性. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 200(1):1–19, 2011. [21] C. Wang. 粗糙初始数据下双调和映射热流的适定性. *J. Geom. Anal.* 22 1 223 243, 2012 , ( ): – . [22] F.B. Weissler. 半线性热方程整体解的存在性与非存在性. *Israel Journal of Mathematics*, 38:29–40, 1981.

(T. Lamm) Institute for Analysis, Karlsruhe Institute of Technology, Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe, Germany*Email address*: tobias.lamm@kit.edu

（G. Schneider） Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart, Germany

Email address: guido.schneider@mathematik.uni-stuttgart.de