arXiv:2301.02082v1 [math.GT] 5 Jan 2023

完全图随机书嵌入中单调圈的链接数

YASMIN AGUILLON、ERIC BURKHOLDER、XINGYU CHENG、SPENCER EDDINS、EMMA HARRELL、KENJI KOZAI、ELIJAH LEAKE 和 PEDRO MORALES

Abstract. 完全图的书嵌入是一种空间嵌入，其平面投影中的顶点位于一个圆上，相邻顶点由圆弧连接，而图中其余“内部”边的投影则是连接圆上相应顶点所表示点的直线段。通过随机分配这些内部边的相对高度，可以生成完全图的随机嵌入。我们研究一类二分支链环，它们是图的随机嵌入中不相交圈对的实现。具体而言，我们证明，链接数的分布可以用欧拉数来描述。因此，所有随机嵌入中链接数平方的均值为 $\frac{i}{6}$，其中 i 是这些圈中的内部边数。我们还证明，在 K_{2n} 中所有 n-圈对的链接数平方的均值随 n线性增长。

1. Introduction

随机纽结模型已用于研究聚合物（如 DNA）的空间构型。DNA 的长度是细胞核直径的 1,000 至 500,000 倍 [12]。如此长的分子被限制在紧凑的空间内，可能会打结、缠绕或相互链接。为了使细胞能够复制，DNA 必须在一种特殊酶的帮助下解开自身的结。这种酶称为拓扑异构酶，它会切开 DNA 分子打结的部分，并重新连接任何断开的末端。如果拓扑异构酶无法正常工作，细胞复制过程中就可能出现问题 [14]。通过比较酶作用前后 DNA 的拓扑不变量，我们可以进一步了解这些酶的作用机制及其对 DNA 结构的影响 [15]。由于许多聚合物太小，无法进行详细成像，一些研究者采用数学模型，通过在立方体中引入多边形链的均匀随机分布变体，研究长聚合物链的构型 [1, 2, 6, 7, 18, 20, 22]。Even-Zohar 等人提出了一种基于纽结与链环花瓣图的随机模型，可用随机排列研究链环的分布，并对链接数的渐近分布给出了明确描述 [11]。

随机图嵌入可以视为随机纽结嵌入在具有非线性结构的分子中的推广。在 [13], 一项研究中，采用了一种随机图嵌入模型，将立方体中多边形链的均匀随机分布推广开来，并据此研究链接数和缠绕数的行为。本文

2020 *Mathematics Subject Classification.* 57M15, 57K10, 05C10.*Key words and phrases.*图的书嵌入、空间图中的链接、欧拉数。作者的研究工作部分由美国国家科学基金会 DMS-1852132 资助。

研究一种不同的随机嵌入模型，它类似于佩塔卢马模型[11]，随机嵌入的分布可以用随机选择排列来描述。该模型基于完全图 K_n 的书嵌入。Rowland 对 K_6 [21] 的书嵌入中可能出现的所有链环进行了分类，而我们考虑 K_{2n} 中链环的更一般情形。具体而言，我们研究书嵌入中出现的一类特殊二分支链环，它们是互不相交的单调圈的并集；并根据圈长和书嵌入中内部边数量的组合性质，描述链接数的行为。我们证明，链接数平方的均值与这两个量均呈线性增长，见定理 10 和定理 11。

2. Random book embeddings

给定一个图 G，Atneosen [3] 和 Persinger [19] 提出了图 G的书嵌入这一概念。这是一类特殊的图空间嵌入，其中图的顶点沿着 $\mathbb{R}^3$ 中的一条固定直线排列，这条直线称为书的脊线。 G 的边嵌入由脊线界定的半平面中，这些半平面称为层。传统上，各边在各自的层上绘制为互不相交的圆弧。与此不同，我们将考虑远藤和大槻提出的图 K_n 的书嵌入圆形图：脊线是由顶点及相邻顶点之间的边组成的圆，页是由脊线围成的圆盘，其余的边则是在给定页 [8, 9]的顶点之间绘制的直线。

我们重点研究完全图 K_{2n} （有时也记作 K_{m+n}）在 $2n$ 个顶点上的书嵌入。在我们的模型中， $2n$ 个顶点将按顺时针顺序沿圆形脊线标记为 v_1，……， v_{2n}。圆周构成相邻顶点之间的边 v_j和 v_{j+1}，其中所有 $j \in \{1, 2, \cdots, 2n\}$均成立，指标按模 $2n$计算。我们将这些边称为外部边。其余的 $\binom{2n}{2} - 2n$ 条边是内部边；书嵌入由将内部边分配到有限个层中确定，并且同一页内任意两条边都不相交。

为了生成随机书嵌入，我们将每条内部边分别嵌入各自独立的一层。随后，可以通过从 $\{1, \ldots, \binom{2n}{2} - 2n\}$ 中均匀分布的随机排列 σ 确定各层的顺序。我们可以将该排列理解为各层的高度顺序，因此，如果 $\sigma(i) > \sigma(j)$，则边 e_i 位于边 e_j 上方的一层中。请注意，随机书嵌入通常等价于层数少得多的书嵌入。当相邻两层中的边在圆形图中不相交时，可以将这两层合并为一层，使两条边嵌入其中且彼此不相交，从而得到一个少一层的等价嵌入。

3. 初步定义

图中两个不相交圈的像 G 在嵌入下构成一个双分支链环。我们可以通过考察平面投影中两个分支的有符号交叉来计算 $\mathbb{R}^3$中任意定向链环 L 的链接数，规则如图1所示。我们将有符号交叉数之和的一半记作链环 L的链接数 $\ell(L)$。这定量地衡量了两个分支相互缠绕的程度。稍作符号滥用，给定两个



FIGURE 1. 一个正交叉（左）和一个负交叉（右）

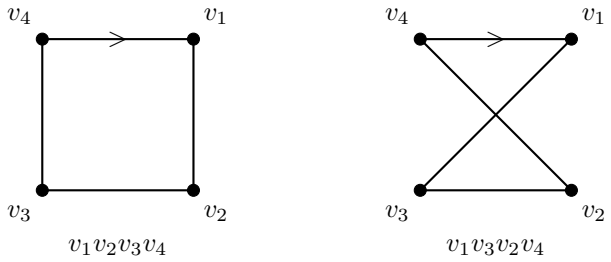

FIGURE 2. 单调（左）与非单调（右）圈

有向圈 P 和 Q 、图 G 以及一个固定嵌入，我们用 $\ell(P \cup Q)$表示这两个圈在该嵌入下的像的链接数。

我们在图的书嵌入中引入一类特殊的链环。

定义 1. 设 K_{2n} 是一个完全图，其顶点按 $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ 的顺序沿着 K_{2n} 的书嵌入的脊线排列。若一个有向圈的连续边为 $\{\overrightarrow{v_{i_1}v_{i_2}}, \overrightarrow{v_{i_2}v_{i_3}}, \ldots, \overrightarrow{v_{i_{k-1}}v_{i_k}}, \overrightarrow{v_{i_k}v_{i_1}}\}$，则称其为

(1) 严格递增的，如果存在 i_1，...，i_k 的一个循环排列 i'_1，...，i'_k，使得对于所有 $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$，都有 $i'_j < i'_{j+1}$。(2) 严格递减的，如果存在 i_1，...，i_k 的一个循环排列 i'_1，...，i'_k，使得对于所有 $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$，都有 $i'_j > i'_{j+1}$。(3) 单调的，如果该圈严格递增或严格递减。

图 2 左侧的 4-循环是单调的，因为从顶点 v_1 开始，沿循环依次经过的顶点为 v_1, v_2, v_3, v_4，其索引严格递增。然而，右侧 4-循环中的顶点顺序为v_1, v_3, v_2, v_4。即使进行循环置换，这些索引也不单调，因此该循环不是单调的。

最后，我们还引入欧拉数，它们作为欧拉多项式 [4, 10, 16] 的系数出现在组合学中。

定义 2. 设 $\sigma \in S_n$ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 上的一个排列。该排列的一个上升是指满足 $\sigma(k) < \sigma(k+1)$ 的值 $1 \le k \le n-1$。

定义 3. 欧拉数 $A(n, m)$ 是恰有 m 个上升的排列 $\sigma \in S_n$ 的数量。

例如，我们有 S_3 中排列的完整列表如下：

(1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2); (3,2,1).

在这些排列中，(1,2,3) 有两个上升；(1,3,2)、(2,1,3)、(2,3,1) 和 (3,1,2) 各有一个上升；而 (3,2,1) 没有上升。因此，$A(3,2) = 1$,$A(3,1) = 4$，且 $A(3,0) = 1$。注意，对所有 $n > 0$，$A(n,n) = 0$。此外，在 S_n 中总是恰好有一个排列没有上升，在 S_n 中总是恰好有一个排列有 $n-1$ 个下降，它们分别是 $(n, n-1, \ldots, 1)$ 和 $(1, 2, \ldots, n)$。因此，$A(n,0) = A(n,n-1) = 1$。

欧拉数是欧拉多项式的系数，

$$A_n(t) = \sum_{m=0}^{n} A(n,m)t^m,$$

其中 $A_n(t)$ 由以下关系递归定义，

$$\begin{aligned} A_0(t) &= 1, \\ A_n(t) &= t(1-t)A'_{n-1}(t) + A_{n-1}(t)(1+(n-1)t), \qquad \text{对于 } n > 0. \end{aligned}$$

另已知

$$A(n,m) = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n,$$

欧拉数的指数生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A(n,m)t^m \frac{x^n}{n!} = \frac{t-1}{t - e^{(t-1)x}}.$$

由定义也显然可知，对于固定的 n，对 m 的所有可能取值求欧拉数 $A(n,m)$ 之和，即得所有排列的数量 $|S_n|$，因此

$$\sum_{m=0}^{n} A(n,m) = n!.$$

4. Linking numbers of disjoint monotonic cycles

本文将考察随机书嵌入中两个互不相交的单调圈的链接数分布。首先，注意书嵌入中两个单调圈的内部边数满足以下性质。

引理 4. 在 K_{m+n} 的书嵌入中，长度分别为 m 和 n 的两个互不相交的单调圈，其内部边数相等，且等于这两个圈之间交叉数的一半。

证明. 分别设 P 和 Q 是书嵌入中的一个 m-圈和一个 n-圈，并假设 P 有 i 条内部边。设 $\overrightarrow{v_j v_k}$ 是 P 的一条内部边。那么 v_{k-1} 必须是 Q 中的一个顶点，并且存在最小的 $h > k$，使得 v_h 是 Q 中的一个顶点。于是，$\overrightarrow{v_{k-1} v_h}$ 是 Q 中的一条边，它与 P 的边 $\overrightarrow{v_j v_k}$ 相交。类似地，Q 中存在一条边 $\overrightarrow{v_s v_{j+1}}$ 与 $\overrightarrow{v_j v_k}$ 相交，而 Q 中没有其他边能与 $\overrightarrow{v_j v_k}$ 相交。因此，P 与 Q 之间的交叉数是 P 中内部边数的两倍。由对称性可知，这也等于 Q 中内部边数的两倍。□

引理 4 意味着，如果 P 和 Q 都是 n-圈，且 P 由 n 条内部边组成，那么 Q 中的所有边也必定是内部边。现在，我们将具有固定链接数的不相交圈的数量与欧拉数 $A(m, n)$ 联系起来。

定理 5. 设 P 和 Q 都是 K_{2n} 中严格递增的 n-圈，且 P 和 Q 都由 n 条内部边组成。对于 P 和 Q 的链接数等于 ℓ 的情形， K_{2n} 的随机书嵌入所占比例为

$$\frac{A(2n-1, n+\ell-1)}{(2n-1)!}.$$

证明。设 P 和 Q 是两个严格递增的圈，每个圈都有 n 条内部边。考虑 K_{2n}所有内部边的一个排列，它决定了这些边在书嵌入中的相应层的顺序。由于我们只关注链接数 $\ell(P \cup Q)$，因此只需知道 P和 Q 的边的相对顺序，就能确定 P和 Q 的内部边之间任何交叉的符号。将这些边指定为 e_1、.....、 e_{2n}后，我们可以将排列σ 视为 $\{1, \ldots, 2n\}$的一个排列。

不失一般性，我们将内部边排列中最靠上的边标记为边 e_{2n}。由于圈中的边定向使得该圈严格递增，我们可以从 K_{2n} 的顶点开始编号，使 e_{2n} 的起始顶点为顶点 v_{2n}。然后按循环顺序为顶点编号，使得在 K_{2n} 中沿顺时针方向紧接着位于 v_{2n} 之后的顶点为 v_1，下一个顶点（即 e_{2n}的终止顶点）为 v_2，依此类推。随后，边的编号也将对应于其起始顶点，因此边 $\overrightarrow{v_1v_3}$ 为e_1，边 $\overrightarrow{v_2v_4}$ 为 e_2，依此类推，直到边 $\overrightarrow{v_{2n-1}v_1}$ 标记为 e_{2n-1} ，边$\overrightarrow{v_{2n}v_2}$ 标记为 e_{2n}。在此标记方案下，边 e_j 将与边 e_{j-1} 和 e_{j+1}交叉，其中指标均按模 $2n$计算。

双射 σ 从 $\{1, \ldots, 2n\}$ 到自身决定了各边的相对高度，因此每当 $\sigma(j) > \sigma(k)$ 时， e_j 就位于包含 e_k 的层之上；而每当 $\sigma(j) < \sigma(k)$ 时， e_j 就嵌入在包含 e_k 的层之下。由于两个环都是严格递增的，边 e_j 与边 e_{j+1} 之间交叉的符号可由 $\sigma(j)$ 和 $\sigma(j+1)$ 确定。当 $\sigma(j) > \sigma(j+1)$ 时，交叉为负。当 $\sigma(j) < \sigma(j+1)$ 时，交叉为正，如图 3 所示。因此，链接数等于 $\sigma(j) < \sigma(j+1)$ 出现次数减去 $\sigma(j) > \sigma(j+1)$ 出现次数所得数量的一半。

根据构造， $\sigma(2n) = 2n$，因此 $\sigma(2n-1) < \sigma(2n)$ 且 $\sigma(2n) > \sigma(1)$。由于这恰好产生一个正交叉和一个负交叉，与边 e_{2n} 相关的交叉对链接数的净影响为零。我们可以在排列中忽略边 $2n$ ，并只考虑将排列进一步限制为 $\{1, \ldots, 2n-1\}$ 的一个排列 σ'。从拓扑学角度看，这相当于施加第二类 Reidemeister 变换：将最上方的边滑至绑定外侧，使边 e_{2n} 不再与边 e_{2n-1} 和 e_1 发生任何交叉。

注意， $\sigma'(j) < \sigma'(j+1)$ 等同于 σ' 中的一次上升，而 $\sigma'(j) > \sigma'(j+1)$ 等同于 σ' 中的一次下降。因此， P 和 Q 的链接数取决于排列 σ' 中的上升次数。若 σ' 有 m 次上升，则它有 $2n-2-m$次下降，所以链接数为 $\frac{1}{2}[m-(2n-2-m)]$。令其等于 ℓ，则 $m = n+\ell-1$。由此可得，在 S_{2n-1}中使链接数为 ℓ 的排列数为 $A(2n-1, n+\ell-1)$。对于每个排列 $\sigma' \in S_{2n-1}$，边集 K_{2n} 中限制为 σ' 的排列数量相同，因此，随机书嵌入中 P 和

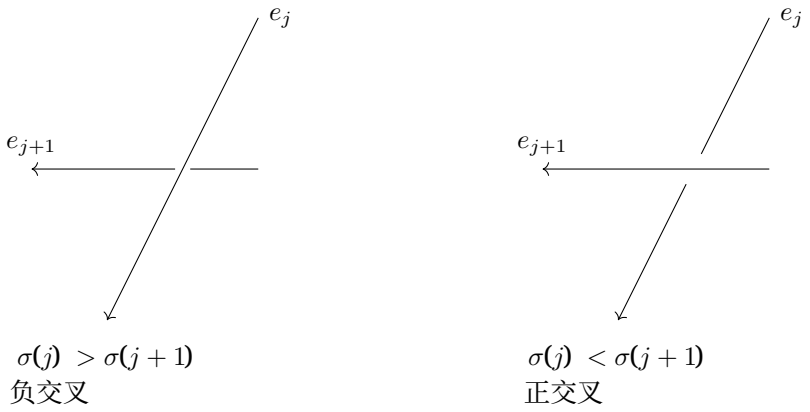

FIGURE 3. 关于 $\sigma(j)$ 和 $\sigma(j+1)$ 的负交叉（左）与正交叉（右）

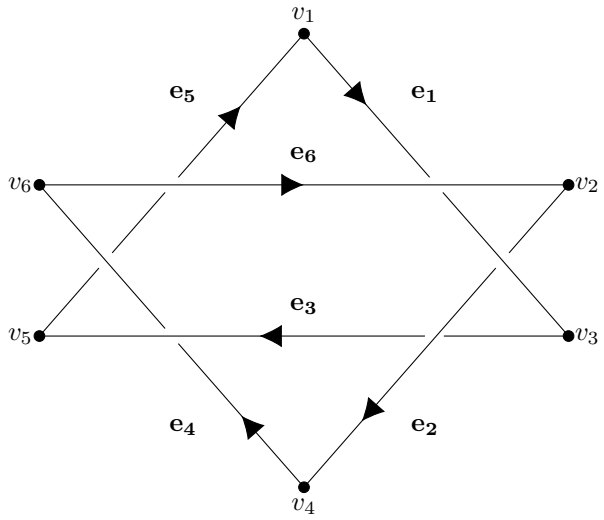

FIGURE 4. 作为 K_6 中两个单调 3-循环之并的所罗门链环。

Q 的链接数为 ℓ 的比例是

$$\frac{A(2n-1, n+\ell-1)}{(2n-1)!}.$$

□

上升、下降、交叉符号与链接数之间关系的一个示例见图 4 和表 1。注意表 1 中，$\sigma(5) < \sigma(6)$。因此，$j = 5$ 会是一次上升。然而，由于 $\sigma(6) > \sigma(1)$，e_5 与 e_6 之间的有符号交叉会与 e_6 与 e_1之间的有符号交叉相互抵消。只考虑 $j = 1$、2、3、4 后，我们还剩下四次下降，这会产生四个负交叉，链接数为 -2。

j	$\sigma(j)$	e_j 与 e_{j+1}的交叉	上升或下降
1	5	−	下降
2	4	−	下降
3	3	−	下降
4	2	−	下降
5	1	+	上升
6	6	−	

TABLE 1. 图 4 中示例的高度函数的有符号交叉数与上升/下降σ

我们指出，定理 5 的结果可推广到更一般的情形：两个单调圈的长度分别为 m 和 n，且各自有 i 条内部边。每当反转其中一个圈的定向时，链接数的符号就会翻转。因此，若有两个长度为 n 的单调圈 P 和 Q，它们不一定严格递增，那么定理 5 的结果中就应以 $-\ell$ 替换 ℓ。然而，欧拉数具有对称性：$A(n, m) = A(n, n-1-m)$，因此 $A(2n-1, n-\ell-1) = A(2n-1, n+\ell-1)$。由此，圈的链接数为 ℓ 的书嵌入比例相同。因此，只要两个圈都是单调的，它们严格递增还是严格递减，对链接数分布都没有影响。

当 P和 Q 的长度分别为 m 和 n时，引理 4 指出， P和 Q 的内部边数量相同，我们将其记为i。沿着 P和 Q 中的所有外部边收缩 K_{m+n}，不会改变链环 $P \cup Q$的拓扑类型。根据与定理 5 类似的论证， K_{m+n} 的随机书嵌入中，$P \cup Q$ 的链接数等于 ℓ 的比例，将与收缩后图 K' 的书嵌入中， $P \cup Q$ 的链接数等于 ℓ 的比例相同。因此，当 $i \geq 3$时，我们得到如下结论。

推论 6. 设 P和 Q 是K_{m+n}中的单调圈，其长度分别为 m 和 n。在 K_{m+n} 的随机书嵌入中， $P \cup Q$ 的链接数等于 ℓ 的比例为

$$\frac{A(2i-1, i+\ell-1)}{(2i-1)!},$$

其中， $i \geq 2$ 是 P和 Q两者的内部边数量。

当 $i = 2$ 时，可以通过将其收缩为两个各有两条内部边和一条外部边的 3-圈，然后仅对内部边应用定理 5 中的论证，验证这一特殊情况遵循与推论 6 相同的公式。表 2 给出了 $1 \leq i \leq 5$中 $A(2i-1, i+\ell-1)$的取值。对于具有 i 条内部边的两个圈，其链接数为 ℓ 的随机书嵌入比例，可将表中数值除以$(2i-1)!$ 得到。

下述定理描述了具有给定数量内部边的互不相交的 m 圈和 n 圈的数量。结合前一个推论，我们可以计算在 K_{m+n} 的随机书嵌入中，随机 m 圈 P 与互不相交的 n 圈 Q 的链接数为 ℓ 的频率。

$i\backslash\ell$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1						1					
2					1	4	1				
3				1	26	66	26	1			
4			1	120	1191	2416	1191	120	1		
5		1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	

TABLE 2. $A(2i-1, i+\ell-1)$的值

定理 7. 设 $m, n \geq 3$。那么，在 K_{m+n} 的书嵌入中，满足 P 是一个 m 圈且 Q 是一个 n 圈的互不相交（无向）单调圈 P 和 Q 的数量，其中每个圈都有 $2 \leq i \leq \min\{m, n\}$ 条内部边，为

$$\binom{m}{m-i}\binom{n-1}{n-i} + \binom{n}{n-i}\binom{m-1}{m-i},$$

如果 $m \neq n$。当 $m = n$时，不相交圈的数量为

$$\binom{n}{n-i}\binom{n-1}{n-i}.$$

证明。按循环顺序 v_1，.....， v_{m+n}对 K_{m+n} 的顶点进行标记。假设P 是一个 m-圈，且 Q 是一个 n-圈。

首先，假设 P 包含 v_1。如果 P 有 i 条内部边，那么有 $\binom{m}{i}$ 种方式可以从 P 的 m 条边中选出哪些是内部边。对于 P中选出的每一条 i 边，若要使其成为内部边，循环 Q 中必须有一个顶点位于该边在 P中的起点和终点之间。此外，对于循环 P中的每一条外部边， Q 的顶点都不能位于其起点和终点之间。这会形成 i 个区域， Q 的顶点必须放置在这些区域中：P中的每条内部边的起点和终点之间各有一个区域，且每个区域至少包含一个顶点。利用插板法，在将 Q 的一个顶点放入 i 个位置中的每个位置后，还需分配 Q 的 $n-i$ 个顶点，并用 $i-1$ 块板分隔 i 个位置，由此得到选择 Q顶点的 $\binom{n-1}{n-i}$ 种方式。这样便有 $\binom{m}{m-i}\binom{n-1}{n-i}$ 种方式选择 P和 Q，使得 P包含v_1，且两个循环都具有 i 条内部边。

通过类似的论证，有 $\binom{n}{n-i}\binom{m-1}{m-i}$ 种方法选择 P 和 Q，使得 Q 包含 v_1，从而在 $m \neq n$ 时完成证明。

如果 $m = n$，那么当 v_1 位于 P 中和 v_1 位于Q 中时，两种情况没有区别。□

在 K_{2n} 中，含有 i 条内部边的互不相交 n 圈的数量列于表 3，适用于 $3 \leq n \leq 10$。

数值 $\binom{n}{n-i}\binom{n-1}{n-i}$ 对应 OEIS 数列 A103371 [17]，由于书嵌入的圆形图具有循环对称性，索引存在偏移。对所有 i 求和，得到选择两个互不相交的单调 n-圈的方法数。无向单调圈由圈中的顶点确定，因此这相当于从 K_{2n} 中的 $2n$ 个顶点里选取两个互不相交的、各含 n 个顶点的子集。这种选择的方式数由 $\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$ 给出。

结合定理 7 和定理 5，可得以下推论。

$n \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	6	1							
4	4	18	12	1						
5	5	40	60	20	1					
6	6	75	200	150	30	1				
7	7	126	525	700	315	42	1			
8	8	196	1176	2450	1960	588	56	1		
9	9	288	2352	7056	8820	4704	1008	72	1	
10	10	405	4320	17640	31752	26460	10080	1620	90	1

TABLE 3. 每个各有 i 条内部边、由 n 构成的单调圈对数（位于 K_{2n} 中）。

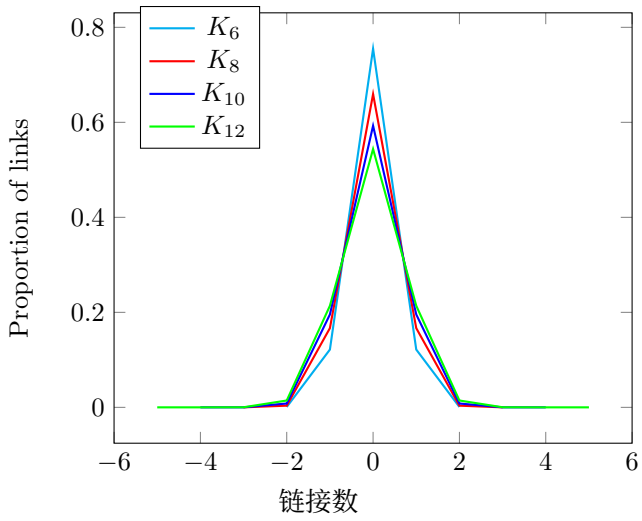

FIGURE 5. 在 K_{2n} 的随机书嵌入中，具有给定链接数的 n 圈不相交对所占比例。

推论 8. 在 K_{2n} 的随机书嵌入中，n-圈 P 和 Q 之间链接数为 ℓ 的链环 $P \cup Q$ 所占比例为

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{A(2i-1, \ell+i-1)}{(2i-1)!} \binom{n}{n-i} \binom{n-1}{n-i}}{\displaystyle\binom{2n-1}{n-1}}.$$

推论 8 中 $n = 3$、4、5 和 6 的取值已计算并展示于图5。注意，对于 K_{2n} 中的两个 n-圈，可能出现的交叉数上限为 $2n$，这意味着链接数绝对值的上界为 n。因此，我们可以将两个单调圈的链接数除以 n，以进行归一化。当 $n = 100$、200、500 和 1000 时，具有给定归一化链接数的链环分布如图6所示。随着 n 增大，链接数为 0 的链环比例会降低。然而，这种表现具有误导性，因为随着 n 增大，链环分布在更大范围的可能链接数值上

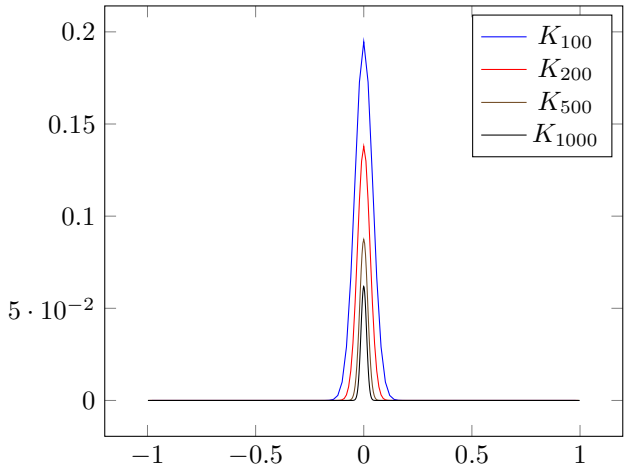

FIGURE 6. 随机书嵌入中，具有指定归一化链接数的两条单调 n-环链环所占的比例 K_{2n}

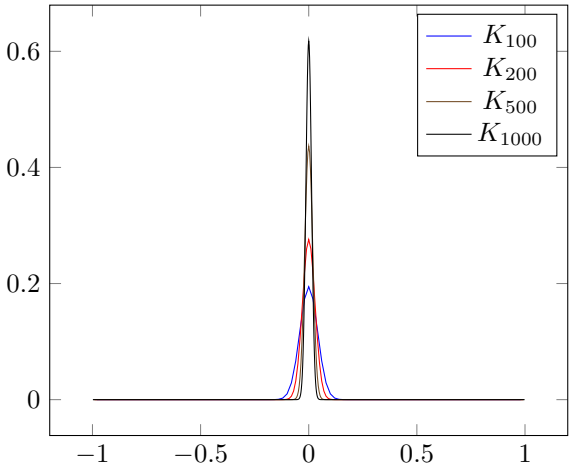

FIGURE 7. 随机书嵌入中，具有指定归一化链接数的两条单调 n-环链环的密度K_{2n}

随着 n 增大，链接数的取值范围也随之扩大。像图7那样将图归一化为密度图后，可以发现，在 K_{2n} 的随机书嵌入中，不相交的 n-圈的链接数呈现出截然不同的变化趋势。随着顶点数量增加，归一化链接数趋近于 0；随着 n 增大，这一趋势更加明显。该模型的表现不同于其他模型：在其他模型中，平均平方链环数会随 θ 增长，如 [1, 2, 18] 中的 n^2 所示。

事实上，利用欧拉数的指数型生成函数，我们可以得到平均平方链环数关于以下量的显式公式

内部边的数量 i。我们将用到微分学中的以下事实。

引理 9. 设 $g(x) = \frac{x^n}{(1-x)^m}$，那么，对于 $k \geq 1$, $g^{(k)}(0) = k!\binom{k-n+m-1}{m-1}$。

证明。对于 $|x| < 1$，我们可以将 $\frac{1}{1-x}$ 表示为幂级数

$$\frac{1}{1-x} = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots.$$

于是，

$$g(x) = x^n(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^m,$$

因此，$\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$ 是幂级数展开式 $g(x)$中 x^k 的系数。这是 $(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^m$ 的第 x^{k-n} 个系数，也就是选取 m 个非负整数，使其和为 $k-n$ 的方法数。根据插板法，该数量为 $\binom{k-n+m-1}{m-1}$；若 $k < n$，则此二项式系数定义为 0。□

现在我们可以证明，两个不相交圈的平均平方链环数随内部边数 i 线性增长。直观而言，这意味着我们预期链接数大致随内部边数的平方根增长。

定理 10. 设 $P \cup Q$ 是由若干个不相交的 n 圈组成的并，且每个圈都有 i 条内部边。那么，在随机书嵌入中， $P \cup Q$ 的平均平方链环数为 $\frac{i}{6}$。

证明. 欧拉数的指数生成函数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A(n,m)t^m\frac{x^n}{n!} = \frac{t-1}{t-e^{(t-1)x}}.$$

将等式两边乘以 t^{-i+1}，得到:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A(n,m)t^{m-i+1}\frac{x^n}{n!} = \frac{t^{-i+1}(t-1)}{t-e^{(t-1)x}}.$$

注意，对左边关于 t 求两次导数，并令 $t \to 1$ 取极限，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left((m-i+1)^2 - (m-i+1)\right) A(n,m)\frac{x^n}{n!}.$$

对这个表达式关于 x 求 $2i-1$ 次导数，并在 $x=0$ 处取值，得到

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m-i+1)^2A(2i-1,m) - (m-i+1)A(2i-1,m).$$

代入 $\ell = m-i+1$ 后，得到

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=-i+1}^{i-1} A(2i-1,i+\ell-1)\ell^2 - A(2i-1,i+\ell-1)\ell &= \sum_{\ell=-i+1}^{i-1} A(2i-1,i+\ell-1)\ell^2 \\ &= (2i-1)!E[\ell(P\cup Q)^2],\end{aligned}$$

由于欧拉三角形的对称性，链接数的期望值为 0。因此，求和的第二部分为零。

现在，我们再次对指数生成函数求导，以利用对数求导得到一个等价表达式。我们将 $f(t,x)$ 设为指数生成函数，

$$f(t,x) = \frac{t^{-i+1}(t-1)}{t-e^{(t-1)x}},$$

并首先使用洛必达法则计算，

$$\lim_{t\to 1} f(t,x) = 1 \cdot \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t-e^{(t-1)x}} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{1-xe^{(t-1)x}} = \frac{1}{1-x}.$$

使用对数求导，我们得到，

$$\begin{aligned}
\frac{f_t(t,x)}{f(t,x)} &= \frac{-i+1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1-xe^{(t-1)x}}{t-e^{(t-1)x}} \\
&= \frac{-i+1}{t} + \frac{(t-e^{(t-1)x}) - (t-1)(1-xe^{(t-1)x})}{(t-1)(t-e^{(t-1)x})} \\
&= \frac{-i+1}{t} + \frac{1-e^{(t-1)x} + (t-1)xe^{(t-1)x}}{(t-1)(t-e^{(t-1)x})}.
\end{aligned}$$

使用洛必达法则两次求 $t\to 1$ 的极限，我们得到，

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{f_t(t,x)}{f(t,x)} &= (-i+1) + \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)x^2e^{(t-1)x}}{(t-e^{(t-1)x}) + (t-1)(1-xe^{(t-1)x})} \\
&= (-i+1) + \lim_{t\to 1} \frac{x^2e^{(t-1)x} + (t-1)x^3e^{(t-1)x}}{1-xe^{(t-1)x} + 1 - xe^{(t-1)x} + (t-1)(-x^2e^{(t-1)x})} \\
&= (-i+1) + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

log $f(t,x)$ 的二阶导数为

$$\begin{aligned}
\frac{f_{tt}(t,x)}{f(t)} - \left(\frac{f_t(t,x)}{f(t,x)}\right)^2 &= -\frac{-i+1}{t^2} - \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{x^2e^{(t-1)x}}{t-e^{(t-1)x}} + \frac{(1-xe^{(t-1)x})^2}{(t-e^{(t-1)x})^2} \\
&= -\frac{-i+1}{t^2} + \frac{-(t-e^{(t-1)x})^2 + (t-1)^2[(t-e^{(t-1)x})x^2e^{(t-1)x} + (1-xe^{(t-1)x})^2]}{(t-1)^2(t-e^{(t-1)x})^2}.
\end{aligned}$$

对 $t\to 1$ 取极限，并连续使用四次洛必达法则，得到:

$$\lim_{t\to 1} \frac{f_{tt}(t,x)}{f(t)} - \left(\frac{f_t(t,x)}{f(t,x)}\right)^2 = -(-i+1) + \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{x^4}{12}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}.$$

于是我们可以得到，

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} f_{tt}(t,x) &= \lim_{t\to 1} f(t)\left(\frac{f_{tt}(t,x)}{f(t)} - \left(\frac{f_t(t,x)}{f(t,x)}\right)^2 + \left(\frac{f_t(t,x)}{f(t,x)}\right)^2\right) \\
&= \frac{i(i-1)}{1-x} + \frac{(-i+1)x^2}{(1-x)^2} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6}\right)\frac{1}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

根据引理 9，在 $x = 0$ 处求值的 x 中第 $(2i-1)$ 阶导数为

$$\begin{aligned}(2i-1)!&\left(i(i-1)+(-i+1)(2i-2)+\frac{1}{3}\binom{2i-2}{2}+\frac{1}{6}\binom{2i-3}{2}\right)\\&=(2i-1)!\left((i-1)(-i+2)+\frac{(2i-2)(2i-3)}{6}+\frac{(2i-3)(2i-4)}{12}\right)\\&=(2i-1)!\frac{i}{6}.\end{aligned}$$

因此，

$$(2i-1)!E[\ell(P\cup Q)^2]=(2i-1)!\frac{i}{6},$$

证明至此完成。 □

利用定理 10，我们可以求出在 K_{2n} 中所有不相交的 n 圈对的平均平方链环数的渐近行为。回忆一下，若存在正数常量 a、A 和 N，使得对所有 $n > N$，$an \le f(n) \le An$，则函数 $f(n)$ 的阶为 $\theta(n)$。

定理 11. 设 $n \ge 3$。则在所有 K_{2n} 的随机书嵌入中，对所有不相交的 n-圈对求平均，两条 P 和 Q 的平均平方链环数为 $\theta(n)$ 阶。

证明。结合定理 7 和定理 10，并对内部边的数量求和，平均平方链环数为

$$\frac{1}{\binom{2n-1}{n-1}}\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{n-i}\binom{n-1}{n-i}\frac{i}{6}.$$

由于

$$i\binom{n}{n-i}=i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1},$$

这就变成

$$\frac{1}{\binom{2n-1}{n-1}}\sum_{i=2}^{n}\frac{n}{6}\binom{n-1}{i-1}^2=\frac{n}{6}\cdot\frac{1}{\binom{2n-1}{n-1}}\sum_{i=2}^{n}\binom{n-1}{i-1}^2. \tag{1}$$

利用范德蒙德恒等式，右侧的求和部分变为

$$\sum_{i=2}^{n}\binom{n-1}{i-1}^2=\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}^2\right)-\binom{n-1}{0}^2=\binom{2n-2}{n-1}-1.$$

因此，公式 (1) 得出

$$\frac{n}{6}\cdot\frac{1}{\binom{2n-1}{n-1}}\left(\binom{2n-2}{n-1}-1\right)=\frac{n}{6}\left(\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{\binom{2n-1}{n-1}}\right).$$

对于上界，我们有

$$\frac{n}{6}\left(\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{\binom{2n-1}{n-1}}\right)\le\frac{n}{6}\cdot\frac{n}{2n-1}\le\frac{n}{6}.$$

对于下界，我们注意到如果 $n \ge 3$,

$$\binom{2n-1}{n-1}=\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n}\ge(2n-1)(n-1)\ge 2(2n-1).$$

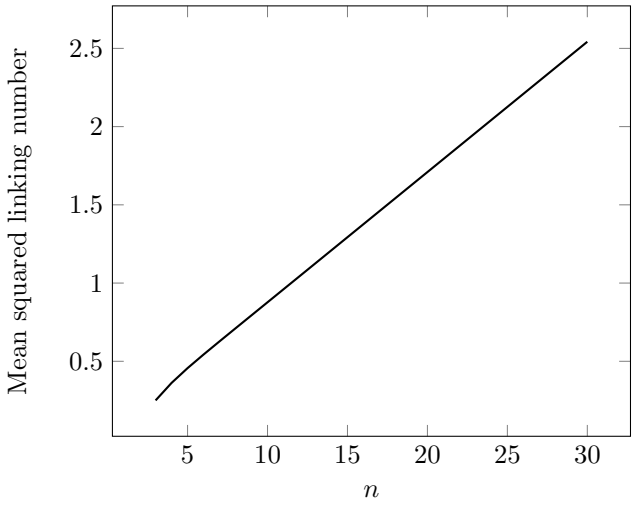

FIGURE 8. n 个不相交的 K_{2n}-圈在 的随机书嵌入中的平均平方链环数

因此，

$$\frac{n}{6}\left(\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{\binom{2n-1}{n-1}}\right)\geq\frac{n}{6}\left(\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{2(2n-1)}\right)=\frac{n}{6}\cdot\frac{n-\frac{1}{2}}{2n-1}=\frac{n}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{12}.$$

□

样本计算显示， n 中两个 K_{2n}-圈的平均平方链环数渐近趋近于 $\frac{n}{12}$；从图 8 中 n 与平均平方链环数之间近乎线性的关系可以看出这一点。当 $n=100$ 且 $n=1000$ 时，可以利用定理 11 中的求和公式计算出平均平方链环数的近似值分别为 ≈ 8.37521 和 ≈ 83.375。

5. LINKS IN RANDOM BOOK EMBEDDINGS OF K_6

本节中，我们考虑 K_6 的随机书嵌入这一特殊情形。Rowland 研究了 K_6 书嵌入的所有可能拓扑类型，指出出现的非平凡纽结与链环包括三叶结、八字结、霍普夫链环和所罗门链环 [21]。 K_6 中的任何二分支链环都必定由两个不相交的 3-圈组成，而且每个 3-圈必定是单调的。此外，平凡链环的链接数为 0，霍普夫链环的链接数为 ± 1，而所罗门链环（见图 4）的链接数为 ± 2。因此，我们可以利用定理 7 和定理 10，并在 $n=3$ 的情况下，确定随机书嵌入中各种链环类型出现的概率。

如图9所示，我们分别考察 3-环中内部边数为 $i=1$、2 和 3 的情形，并确定每种情形下各类链环出现的概率。然后结合表 3 中的计数，计算随机选取的二分支链环为平凡链环、霍普夫链环或所罗门链环的总体概率。

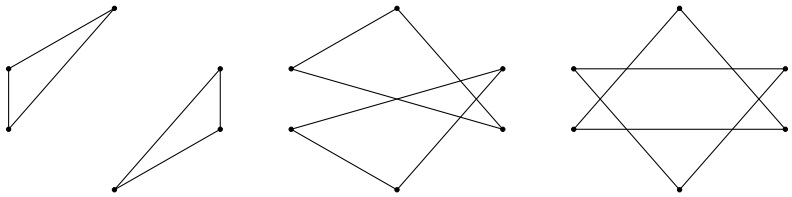

FIGURE 9. K_6 中两个 3-圈的投影，其内部边分别为 $i = 1$ （左）、$i = 2$ （中）和 $i = 3$ （右）。

当 $i = 1$ 时，由于两个环的投影没有交叉，因此显然该二分支链环是平凡的。

当 $i = 2$ 时，表 2 表明，这两个圈构成霍普夫链环的概率为 $p_2 = \frac{1}{3}$，构成平凡链环的概率为$1 - p_2 = \frac{2}{3}$。

当 $i = 3$ 时，表 2 表明，这两个圈构成所罗门链环的概率为 $q_3 = \frac{1}{60}$，构成霍普夫链环的概率为 $p_3 = \frac{13}{30}$，构成平凡链环的概率为$1 - p_3 - q_3 = \frac{11}{20}$。

表 3 详细列出了 K_6 中 10 个圈分别具有 1 条、2 条或 3 条内部边的频率。由此，我们确定在 K_6 的随机书嵌入中，随机选取的一对不相交 3-圈为平凡链环的概率是

$$\frac{1}{10}\left(3 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{11}{20}\right) = \frac{151}{200}.$$

同样地，在 K_6 的随机书嵌入中，随机选取的一对不相交 3-圈为霍普夫链环的概率是

$$\frac{1}{10}\left(3 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{13}{30}\right) = \frac{73}{300}.$$

最后，在 K_6 的随机书嵌入中，随机选取的一对不相交 3-圈为所罗门链环的概率是

$$\frac{1}{10}\left(3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{60}\right) = \frac{1}{600}.$$

由于 K_6 包含 10 对不同的不相交 3-圈，这意味着在 K_6 的随机书嵌入中，平凡链环的期望数量为 $\frac{151}{20}$，霍普夫链环的期望数量为 $\frac{73}{30}$，所罗门链环的期望数量为 $\frac{1}{60}$。空间图论中的一个经典结果表明，K_6 的每个嵌入都至少包含一个非平凡链环 [5]。在 K_6 的随机书嵌入中，非平凡链环的期望数量为 $\frac{49}{20}$，其中几乎所有非平凡链环都表现为霍普夫链环。

6. 致谢

作者谨向美国国家科学基金会致谢，感谢其对本研究的支持。本研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1852132。

此外，作者谨向罗斯-霍尔曼理工学院数学系致谢，感谢其热情接待并举办了

罗斯-霍尔曼理工学院本科生数学研究体验项目；本研究的大部分工作均在该项目期间完成。

References

[1] J. Arsuaga、B. Borgo、Y. Diao 和 R. Scharein。受限空间中等边多边形平均平均交叉数的增长。《物理学杂志 A》，42(46):465202，9，2009。[2] Javier Arsuaga、T Blackstone、Yuanan Diao、E Karadayi 和 M Saito。受限空间中均匀随机多边形的链接。《物理学杂志 A：数学与理论》，40:1925，2007年2月。[3] Gail Atneosen。一维 n 叶连续统。《数学基础》，74 45，1972 43. – 。[4] Louis Comtet。《高级组合学：有限与无限展开的艺术》，第6章。D. Reidel 出版公司，波士顿，美国，修订扩充版，1974。[5] J. H. Conway 和 C. McA. Gordon。空间图中的纽结与链环。《图论杂志》，7(4):445–453，1983。[6] Y. Diao、C. Ernst、S. Saarinen 和 U. Ziegler。受限空间中具有刚性的随机游走和多边形的生成。《物理学杂志 A》，48(9):095202，19，2015。[7] Y. Diao、N. Pippenger 和 D.W. Sumners。关于随机纽结。载于《随机打结与链环》（温哥华，BC，1993），《纽结与万物丛书》第7卷，第187–197页。世界科学出版社，里弗埃奇，新泽西州，1994。[8] Toshiki Endo 和 Takashi Otsuki。关于图的空间表示的注记。《北海道数学杂志》，23(3):383–398，1994。[9] Toshiki Endo 和 Takashi Otsuki。某些空间完全图中的纽结与链环。《组合理论杂志 B辑》，68:23–35，1996。[10] 莱昂哈德·欧拉。《微分学基础》。施普林格科学与商业媒体，2000。[11] Chaim Even-Zohar、Joel Hass、Nati Linial 和 Tahl Nowik。随机纽结与链环的不变量。《离散与计算几何》，56(2):274–314，2016年6月。[12] Erica Flapan。《纽结、分子与宇宙：拓扑学导论》。美国数学会，美国，2016。[13] Erica Flapan 和 Kenji Kozai。图的随机线性嵌入中的链接数与缠绕数。《数学化学杂志》，54(5):1117–1133，2016。[14] S. Harrell、M. Beals、L. Gross。DNA与纽结理论。TIEM，1999，在线。[15] R. Mishra 和 S. Bhushan。纽结理论在理解蛋白质方面的应用。《数学生物学杂志》，65:1187–1213，2012。[16] OEIS基金会。A008292 - OEIS。https://oeis.org/A008292。访问日期：2022-10-18。[17] OEIS基金会。A103371 - OEIS。https://oeis.org/A103371。访问日期：2022-10-18。[18] E. Panagiotou、K. C. Millett 和 S. Lambropoulou。受限空间中均匀随机游走和多边形的链接数与缠绕数。《物理学杂志 A》，43(4):045208，28，2010。[19] C.A. Persinger。E^3中的 n-书子集。《太平洋数学杂志》，18(1):169–173，1966。[20] J. Portillo、Y. Diao、R. Scharein、J. Arsuaga 和 M. Vazquez。随机多边形缠绕数的均值与方差。《物理学杂志 A》，44(27):275004，19，2011。[21] D. Rowland。K_6的书嵌入分类。《纽结理论及其应用杂志》，26(12):1–26，2017。[22] K. Tsurusaki 和 T. Deguchi。随机多边形拓扑缠结的数值分析。载于《统计模型、杨-巴克斯特方程及相关主题》和《对称性、统计力学模型及其应用》（天津，1995），第320–329页。世界科学出版社，里弗埃奇，新泽西州，1996。

Department of Mathematics, University of Notre Dame, 255 Hurley Bldg, NotreDame, IN 46556 USA*Email address*: yaguillo@nd.eduDepartment of Mathematics, University of Kentucky, 719 Patterson Office Tower,Lexington, KY 40506 USA
Email address: ebu241@uky.edu

Department of Mathematics, University of North Carolina at Chapel Hill, 120 ECameron Avenue, Chapel Hill, NC 27599 USA*Email address*: xcheng1@unc.edu

University of Kentucky, Lexington, KY 40506
Email address: spencer.eddins@uky.edu

Mount Holyoke College, 50 College Street, South Hadley, MA 01075 USA
Email address: harre22e@mtholyoke.edu

Department of Natural Sciences and Mathematics, Lesley University, 29 EverettStreet, Cambridge, MA 02138 USA*Email address*: kkozai@lesley.edu

DePaul University, 1 E. Jackson Boulevard, Chicago, IL 60604 USA
Email address: ejohnj247@gmail.com

Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, WestLafayette, IN 47907 USA*Email address*: moralep@purdue.edu