arXiv:2301.02085v1 [math.GT] 5 Jan 2023

带边界的Seifert纤维化空间的最小三角剖分规模

ADELE JACKSON

Abstract. 三维流形复杂度的一种度量是其三角剖分复杂度，即该流形的三角剖分中四面体的最少数量。一个自然的问题是，我们能否将这一数量与其拓扑性质联系起来。我们根据塞弗特数据，确定了具有非空边界的Seifert纤维化空间的三角剖分复杂度，精确到一个乘法常数。我们还证明，这类Seifert纤维化空间的所有奇异纤维（重数二的除外），都可以在其任意三角剖分的 79th 重心细分中成为单纯的。

1. Introduction

紧致三维流形的三角剖分复杂度 $\Delta(M)$是其任意三角剖分中四面体的最小数量。M 这一不变量虽然易于定义，却难以确定。一些具体的自然族已得到精确结果，例如：

(1) 若 Σ 是亏格为 g 的闭可定向曲面，则 $\Delta(\Sigma \times I) = 10g - 4$ [5, 11]；(2) 若 M 是双曲一次穿孔环面丛，则其单值化理想三角剖分（按照 Agol 的定义，这与其偏转三角剖分相同）是最小的 [12]；(3) 透镜空间 $L(2n,\ 1)$ 和 $L(4n,\ 2n-1)$ 的最小三角剖分由其最小分层三角剖分 [13, 16] 实现。

对于闭双曲映射环面 [21] 以及具有椭圆或 Sol 几何的闭 3-流形 [22]，三角剖分复杂度在乘法界意义下已知。对于其他少数精确族 [14, 15, 29, 31], ，其结果也是精确已知的；但遗憾的是，其中大多数族最显著的特征仅仅是我们知道它们的三角剖分复杂度；对于那些在其他背景下自然出现的族，相关结果却相对较少。

我们采用低维拓扑学家惯用的三角剖分 定义：它由若干四面体组成，面与面之间通过粘合映射配对；执行这些粘合后，所得空间与 M 同胚。在证明中，我们约定此三角剖分是实的（而非理想情形；在理想情形中，需从三角剖分中删去顶点的开正则邻域，以得到边界分支）。不过，正如引理 3.3 所示，我们对 $\Delta(M)$ 得出的下界在理想情形中也成立。

Date:2023年1月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 57Q15，57K30，57K31，57K35。作者获得克拉伦登基金、牛津—澳大利亚信托基金和林肯学院的资助。

三角剖分复杂度是作为枚举3-流形的一种手段而出现的。构造3-流形普查时，会考虑至多含有 n 个四面体、针对某个 n 的所有可能面配对。可以将此与按交叉数枚举纽结进行比较：交叉数是另一种自然不变量，但它与底层空间（此处为纽结补空间）的几何和拓扑之间的联系可能难以理解。在闭合可定向不可约情形中，3-流形普查已推进至十三个四面体 [27], ；在带尖点双曲情形中，已推进至至多十个四面体（允许重复） [32] ，以及至多八个（不允许重复） [6]。对于这两个类别，另一个动机是，只要 Matveev复杂度不为零，三角剖分复杂度就与 Matveev复杂度一致 [25,定理 5]。

与 Matveev复杂度一样，三角剖分复杂度在有限覆叠下是次乘性的。与 Matveev复杂度和 Gromov单纯体积不同，它在连通和下并不具有可加性：在这种情况下，其界为 $\Delta(M\#N) \leq \Delta(M) + \Delta(N) + 4$ [3, 构造 4.1]。事实上，这个连通和界是尖锐的[1]。不过值得注意的是，具有给定三角剖分复杂度的流形只有有限多个。

给出三角剖分复杂度的上界（至少在常数因子范围内）通常比给出下界更直接，因为只需构造一个高效的三角剖分即可。给出其下界的一种方法是利用它不小于单纯体积这一事实（证明见 [9]中的命题0.1）。由于当 M 为双曲流形时，其单纯体积与其双曲体积成正比 [30, 命题 6.1.4],，因此这一量可以从几何角度加以解释。然而，当 M 的单纯体积为零时——也就是说，当 M 为 Seifert纤维化流形或图流形时——这一界对我们毫无帮助。这引出了一个问题：在这些情形下，我们能否对 $\Delta(M)$ 得到良好的估计？我们将证明，当 M 是具有非空边界的 Seifert纤维化流形时，其一个特别自然的三角剖分与最小三角剖分大小相差至多一个乘法常数。精确表述如下。

定理 1.1. 存在 $k > 0$ ，使得对于任意具有非空边界、且不为实心环面的 *Seifert*纤维化流形M ，若其塞弗特数据为$[\Sigma, (p_1, q_1) \ldots, (p_n, q_n)]$，且（不失一般性地）每个 i 都满足 $0 < q_i < p_i$ ，

$$\frac{1}{k}\left(|\chi(\Sigma)| + \sum_{i=1}^{n} \|q_i/p_i\| + 1\right) \leq \Delta(M) \leq k\left(|\chi(\Sigma)| + \sum_{i=1}^{n} \|q_i/p_i\| + 1\right).$$

实心环面是个例外，其 $\Delta(D^2 \times S^1) = 1$，因为它有无穷多个彼此不同构的塞弗特纤维化（对于所有 (p, q)，它都是 $[D^2,(p, q)]$），因此这样的下界不可能适用于它。

术语 $\|q/p\|$ 定义如下。既约分数 q/p （其中 q， $p > 0$）的正连分数是一个整数序列 $[a_0, \ldots, a_n]$，满足对于所有$i > 0$ 都有 $a_i > 0$，使得

$$\frac{q}{p} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

[1]作者使用 Regina [7] ，通过构造一个复杂度至多为 7 的闭可定向（可能可约）三维流形普查，计算了所有三角剖分复杂度至多为二的 M 和 N 的 $\Delta(M\#N)$。一个表明该界是紧的例子是 $\Delta(L(4, 1)\#L(4,1)) = 6$ 和 $\Delta(L(4, 1)) = 1$。

对 $i > 0$ 要求 $a_i > 0$，意味着这个连分数是唯一的。然后将 $\left\| \frac{q}{p} \right\|$ 定义为 $\sum_{i=0}^{n} a_i$。

这一三角剖分复杂度结果与 Matveev复杂度的情形大不相同：在那种情形下，已知 M 的 Matveev复杂度至多为 $\sum_{i=1}^{n} \max(\|p_i/q_i\| - 3,\ 0)$ [8, 定理 1.2]，；尤其是，如果 M 没有奇异纤维，则其复杂度为零。

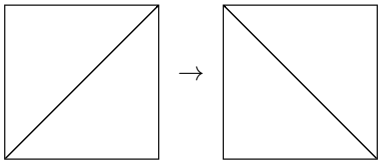
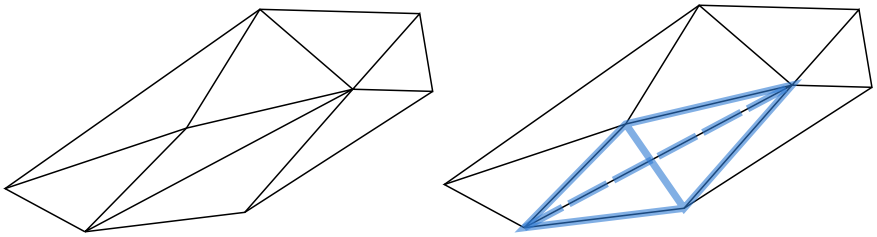
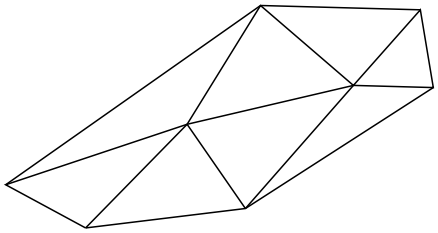


FIGURE 1. 一次 2-2 Pachner移动。



(A) 将蓝色四面体粘接到曲面上。



(B) 新诱导的曲面三角剖分。

FIGURE 2. 给定一个带有诱导三角剖分的曲面，若将蓝色四面体粘合上去，新的诱导三角剖分就是一次 2-2 Pachner移动的结果。

给出上界的三角剖分将在命题 5.1 的证明中更精确地描述，其大致如下：令 Σ' 为 Σ，并添加 n 个额外的边界分支。使用 $k|\chi(\Sigma')|$ 个四面体对 $\Sigma' \times S^1$ 进行三角剖分。对于每条奇异纤维，将一个边斜率为 $\frac{q_i}{p_i}$ 的分层实心环面粘到其中一个边界分支上。这些是实心环面的三角剖分：先用一个四面体 [2] 对其进行三角剖分，再将其他四面体的两个面与边界三角剖分中两个相邻的面粘合。这样的粘合相当于在边界三角剖分上执行一次*2-2 Pachner*移动。图1展示了一次 2-2 Pachner 移动，图2则展示了通过粘合一个四面体来执行该移动的示例。

对于下界，正如我们在引理 5.2 中所示，对 $|\chi$（Σ）|的线性依赖关系是显而易见的；真正棘手的是奇异纤维。我们将用来处理它们的主要技术结果本身也具有独立的研究价值。

定理 1.2。 设 M 是一个边界非空的 *Seifert*纤维化空间，且 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个（材料）三角剖分。 M 中重数不是二的奇异纤维组成的集合，在 $\mathcal{T}^{(79)}$ 中有彼此不相交的单纯形代表； $\mathcal{T}^{(79)}$ 是 $\mathcal{T}$ 的 79^{th}重心细分。此外，在 $\mathcal{T}_{(82)}$ 中，这些单纯奇异纤维有彼此不相交的单纯实心环面邻域，并且每个这样的邻域都存在一条长度为 *48* 的单纯子午曲线。

在第 2 节中，我们讨论连分数、法雷图和分层实心环面之间的联系。第 3 节介绍把手结构和平行性丛的背景知识。当沿正规曲面切割流形时，平行性丛为高效整理和研究位于彼此平行的正规圆盘之间的部分提供了一种方法。在本文的核心部分——第 4 节中，我们通过分析平行性丛证明定理 1.2；随后在第 5 节中证明主要定理。

2. Continued fractions and the Farey graph

定理 1.1 中的 $\|q/p\|$ 一词源于对环面进行 Dehn 填充，以生成参数为 q/p的奇异纤维。此操作通过一个映射粘入实心环面，该映射将其实心环面的子午线映到曲面丛 M上按（截面，纤维）坐标表示的斜率为 q/p的边；我们将其写作（μ， λ）。

命题 2.1. 设 T 是环面的一个单顶点三角剖分， λ 和 μ是其中的两条边。设 U 是通过某个映射将实心环面粘到 T 上得到的流形，该映射将其实心环面的子午线映到 $p\mu+q\lambda$，其中 $0<|q|<p$。存在 U的一个三角剖分，其诱导的边界三角剖分为 T，且至多包含 $\left\|\frac{|q|}{p}\right\|+2$个四面体。

考虑双曲平面中的法雷图：将 $\mathbb{H}^2$ 识别为上半平面后，这个图的顶点是实轴上的 $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ 各点；对于每一对既约分数 p/q 和 r/s ，只要$|ps-qr|=1$（将 ∞ 解释为$\frac{1}{0}$），对应顶点之间的测地线就是一条边。由此得到的法雷镶嵌是将 $\mathbb{H}^2$ 划分为理想三角形的镶嵌。

令 $Tr(T^2)$ 表示环面的单顶点三角剖分图（模同痕）。其顶点是环面的单顶点三角剖分，边则是 2-2 帕赫纳移动（如图 1 所示）。 $Tr(T^2)$ 与法雷镶嵌之间存在自然的对应。数值 $|ps-qr|$ 恰好是环面上斜率为 p/q 和 r/s 的曲线之间的交数。将法雷镶嵌中一个顶点为三个两两相交一次的斜率的三角形，视为由这些斜率构成的T^2 三角剖分。2-2 帕赫纳移动是指移除其中一个斜率，并用唯一的另一个可能斜率替换它，从而完成三角剖分；因此，这对应于跨过镶嵌的一条边。

当我们粘接一个分层实心环面时，首先从实心环面的单四面体三角剖分开始，它在其边界上诱导出一个单顶点三角剖分（示意见 [2] ）。令 k 和 l 为其中两条边，并选择它们使得坐标 $m=l-k$ 是子午线，而 l 是经线。注意，此时这个 T^2 的三角剖分的三条边为 l、 $l-m$ 和 $2l-m$。如图2所示，沿两个面粘接一个四面体，会使边界三角剖分发生

一次 2-2 Pachner移动。因此，我们可以粘接一个四面体，使边界三角剖分为（l，$l-m$，m）。

我们希望执行的粘合映射是 $m \mapsto p\mu + q\lambda$ 和 $l \mapsto r\mu + s\lambda$，其中 r和 s 是整数，使得 $ps - qr = 1$。需要注意的是，由于我们的唯一要求是经线粘合，因此任何这样的 r 和 s 都可以。

因此，只需确定我们需要在原三角剖分 $(\mu, \lambda, \lambda \pm \mu)$ 上粘合多少个四面体，使得新的边界三角剖分有一条斜率为 q/p的边。这等价于求法雷镶嵌中从 $(0, \infty, \pm 1)$ 到与 q/p 斜率相邻的顶点所在直线的距离。注意，除去 ± 1的选择，这个距离对于 q/p 和 $-q/p$是相同的，因此该量等于从与 $|q|/p$斜率相邻的顶点所在直线到 $(0, \infty, 1)$ 和 $(0, \infty, -1)$ 中较近者的距离。由于我们要求 $0 \le |q| \le p$，这等于从与 ∞ 相邻的面所在直线到与 $|q|/p$相邻的面所在直线的距离，即由引理 5.4给出的 $\|\,|q|/p\| - 1$ [22, 。我们可能需要额外添加一个四面体，才能从 $(0, \infty, 1)$ 到达 $(0, \infty, -1)$，或反之。因此，这个分层三角剖分可能首先需要一个四面体，以选取最接近的 ± 1参数；然后需要 $\|q/p\| - 1$ 个四面体来改变坐标，使其具有一条斜率为q/p 的边；最后再用两个四面体，实现粘入一个子午线斜率正确的实心环面：总共需要 $\|\,|q|/p\| + 2$ 个四面体。我们可以注意到，构型 $(0, \infty, \pm 1)$ 在交换坐标后保持不变。这样做会将 q/p 变为 p/q，而我们确实看到 $\|\,|q|/p\| = \|p/|q|\|$。

我们还需要以下引理，它给出了连分数和的另一种对称性。

引理 2.2. 设 $0 < q < p$。那么 $\left\| \frac{q}{p} \right\| = \left\| \frac{p-q}{p} \right\|$。

证明。 注意，$\left\| \frac{q}{p} \right\| - 1$ 是从关于 $\frac{q}{p}$ 的直线到无穷远处的直线的距离。关于经过 $1/2$ 的垂直直线反射后，$\frac{q}{p}$ 变为 $\frac{p-q}{p}$，由此可知，$\left\| \frac{q}{p} \right\| - 1$ 等于从关于 $\frac{p-q}{p}$ 的直线到无穷远处的距离，也就是 $\left\| \frac{p-q}{p} \right\| - 1$。

□

3. Handle structures and parallelity bundles

我们主要采用把手结构的框架，而非三角剖分，因为把手结构更便于沿正规曲面切割。

约定3.1。 我们对把手结构的定义作如下要求：

(1) 每个 k-把手都带有乘积结构 $D^k \times D^{3-k}$，并且与低指标把手恰好相交于 $\partial D^k \times D^{3-k}$，与其他 k-把手不相交；(2) 1-把手与2-把手的相交方式须与各自的乘积结构相容；也就是说，一个1-把手 $D^1 \times D^2$ 与一个2-把手$D^2 \times D^1$ 相交于若干片段，这些片段在1-把手中具有 $D^1 \times \gamma$ 的形式，在2-把手中具有 $\lambda \times D^1$ 的形式，其中 γ 和 λ 分别是在相应乘积结构中 ∂D^2 内的弧族。

由于我们所有的 3-流形都有非空边界，根据以下引理，我们可以假设它们没有 3-把手。

引理 3.2. 设 $\mathcal{H}$ 是一个边界非空的连通三维流形的把手结构。存在一组 $\mathcal{H}$ 中的 *2*-把手，使得移除这些 *2*-把手以及 $\mathcal{H}$ 中的所有 *3*-把手，不会改变所得三维流形的同胚类型。

证明。从 $\mathcal{H}$ 构造该三维流形的胞腔复形：每个 k-把手对应一个 $(3-k)$-胞腔，并按相应方式粘合。对于 k-把手与边界的每个交连通分支，也粘合一个 $(3-k-1)$-胞腔。该复形的内部胞腔与 $\mathcal{H}$的把手对偶。由于这个胞腔复形是连通的，它的 1-骨架也是连通的，因此从每个顶点都有一条由边组成的路径通向边界。这条路径的最后一条边与一个邻接 3-把手的 2-把手对偶。移除这对把手。由归纳法，我们可以重复这一过程，移除所有 3-把手。□

虽然我们研究的是 M 的实体三角剖分，而非理想三角剖分，但以下众所周知的结果表明，我们的下界在理想情形下也成立。理想三角剖分是由一组四面体及其面配对映射构成的；将这些四面体粘合后再移除所有顶点，所得空间与 $M-\partial M$ 的内部同胚。

引理 3.3. 设 $\Delta(M)$ 为紧致三维流形 M （带边界）的实体三角剖分中四面体的最小数目，并设 $\Delta'(M)$ 为 M 的理想三角剖分中四面体的最小数目。则 $\Delta(M) \leq 14\Delta'(M)$。

证明。考虑 M 的一个理想三角剖分。截断各四面体，得到一个与 M 同胚的胞腔结构。将每个非三角形面（它们各有六条边）锥化到该面上的一个顶点。注意，现在每个这样的六边形面都被剖分为四个三角形，因此每个 3-胞腔现在都有 20 个面。在每个截断四面体中，选取价最高的顶点：其价至少为六，因此至少邻接六个三角形。以该顶点为锥顶对四面体进行锥化，从而将该胞腔剖分为若干四面体，每个四面体对应一个不与该顶点相邻的三角形，数量至多为 14。因此，我们得到一个 M 的实三角剖分，使用了 $14\Delta'(M)$ 个四面体。□

3.1. **平行性丛**。平行性丛这一概念由 Lackenby [18] 引入，用来处理以下情形：我们通常知道，三维流形 M 中某个有趣的曲面有一个基本正规代表 F。我们可能希望沿该曲面切开，但若直接构造补集的三角剖分，就会产生指数级数量的新四面体。然而，这些四面体大多并无研究价值。它们位于彼此平行的正规圆盘之间的区域中，因此这些区域自然构成 *I*-丛：这些区域合起来就是平行性丛。用把手结构的语言可以更自然地表达这一概念。

定义 3.4。设 $\mathcal{T}$ 是三维流形 M的三角剖分（或胞腔结构）。M的对偶把手结构 $\mathcal{H}$的构造方法是：对 $\mathcal{T}$中每个不包含在边界内的k-单形（或胞腔），取一个（$3-k$）把手，并按相应方式将它们粘合起来。

定义 3.5。若一个 1维流形适当嵌入到配备把手结构的曲面 S 中，且它与 2-把手不相交、与 0-把手相交于弧，并与每个 1-把手 $D^1\times D^2$ 相交于一组弧，其中每条弧都对应于 D^2 中的某个点 $D^1\times\{*\}$，则称其为标准的 。

定义 3.6。设 S 是三维流形 M 边界的一个子曲面。若 M 的把手结构 $\mathcal{H}$ 满足：∂S 关于 ∂M 上诱导的把手结构是标准的，则称其为该对 $(M,\ S)$ 的**把手结构**。

此定义的动机来自以下情形：假设 S 是相对于 M的把手结构而言的正规曲面。（相关定义见 Matveev [26, §3.4]。）在 $M\backslash\backslash S$ 上诱导的把手结构是$(M\backslash\backslash S,\ S)$的把手结构。

定义 3.7。假设 $\mathcal{H}$ 是$(M,\ S)$的把手结构。若我们可以在 $\mathcal{H}$ 的一个把手 H上赋予乘积结构 $D^2\times D^1$，使得 $H\cap S=D^2\times\partial D^1$，并且若另一个与 H相交的把手为 H'，则 $H\cap H'$ 具有 $\gamma\times D^1$的形式，其中 γ是 ∂D^2的子集，那么称该把手为相对于 S 的**平行性把手**。

$(M,\ S)$的**平行性丛** 是相对于 S的平行性把手的并集。

此时，为了理解 $M\backslash\backslash S$，我们可以采取两种方法。首先，可以使用 Agol、Hass 和 Thurston [1] 的算法，高效确定平行性丛的拓扑类型：也就是说，计算每个连通分支以哪种曲面为底面，以及这些连通分支如何与非平行性部分相交。这种方法给出的算法，其运行时间关于 M 中的四面体数量以及 S 的权的对数为多项式时间（详情见 [10]的命题 13）；因此，当 S 是基本正规曲面时，该算法效率很高。不过，这样做会使我们无法追踪 $M\backslash\backslash S$ 到M 的包含映射。另一种方法是设法使平行性丛的各部分在拓扑上足够简单，并直接对其进行分析。为此，我们将研究范围扩展到广义平行性丛：把平行性丛延伸到 $M\backslash\backslash S$ 中与其纤维化结构相容的某些区域上。

定义 3.8. 如果 $N\cong\Sigma\overset{(\sim)}{\times}I$，其中 Σ 是一个曲面，则 N 的**垂直边界** ∂_vN 是 $\partial\Sigma\overset{(\sim)}{\times}I$，而 N 的**水平边界** ∂_hN 是 $\Sigma\overset{(\sim)}{\times}\partial I$。

定义 3.9（定义 5.2 [18]）。（$M,\ S$）的把手结构 $\mathcal{H}$ 中的一个广义平行性丛 $\mathcal{B}$，是 $\mathcal{H}$ 的把手的一个子集，满足：

(1) $\mathcal{B}$ 带有一个以曲面为底空间的 I-丛结构；(2) $\mathcal{B}$ 中任何与 $\partial_v\mathcal{B}$ 相交的把手都是平行性把手，且平行性把手上的 I-丛结构与 $\mathcal{B}$ 的结构一致；(3) $\partial_h\mathcal{B}$ 是 $B\cap S$；(4) 如果 $\mathcal{B}$ 中的把手 H 与 H 相邻且指标更高，那么 H' 也在 $\mathcal{B}$ 中。

正如我们所期望的，平行性丛是一个广义平行性丛 [18,引理 5.3]。一个极大广义平行性丛是指不包含在任何其他广义平行性丛中的广义平行性丛。我们将看到，除以下情况外，平行性丛分支在 S 中具有不可压缩水平边界。

定义 3.10。假设 M 中有两个环带 G 和 G'，且满足 $\partial G=\partial G'\subset S$，使得 G 适当嵌入，而 G' 包含在边界中。再假设 $G\cup G'$ 在 M 中围成一个把手并 P，满足：

(1) 要么 P 相对于 G 和 G' 是一个平行性区域，要么 P 包含在一个三维球中；

(2) 如果 H 是 P 中的一个把手，而 H' 是与 H 相邻且指标更高的把手，那么 H' 也位于 P 中；(3) 如果 (M, S) 的一个平行性把手 H 与 P 相交，那么 H 位于 P 中；(4) G 是位于 P 中的广义平行性丛的一个垂直边界分支；(5) $G' \cap (\partial M - S)$ 要么为空，要么是 G' 的一条核心曲线的正则邻域。

移除 P 和 G' 的内部是一种环带化简。

对（M, S）进行环带化简，可得到同一三维流形的更小把手结构，而该把手结构的边界继承了 S的一份副本。更多细节参见 [18] 的§5。

由于在环带化简中， G是广义平行性丛分支的一个垂直边界分支，并且此类分支中任何与垂直边界相交的把手都必定是平行性把手，因此得到以下结果。

引理 3.11。 如果 $\mathcal{H}$ 不含任何平行性把手，则它不允许任何环带化简。

定理 3.12 （命题 5.6 [18]）。 设 M 是一个紧致可定向不可约三维流形，带有把手结构 $\mathcal{H}$。设 S 是 ∂M 中的一个不可压缩曲面，且不是二维球面，并且 ∂S 是标准的。假设 M 不允许任何环带化简。设 $\mathcal{B}$ 是（M, S）的一个极大广义平行性丛。那么， $\mathcal{B}$ 的每个连通分支都具有不可压缩水平边界。

4. 构造单纯奇异纤维

本节将证明定理 1.2，现回顾如下。

定理 1.2. 设 M 是一个具有非空边界的塞弗特纤维空间，且$\mathcal{T}$ 是 M的（物质）三角剖分。 M 中重数不为二的奇异纤维构成的集合，在 $\mathcal{T}$的 79^{th}重心细分 $\mathcal{T}^{(79)}$中有互不相交的单纯形代表。此外，在 $\mathcal{T}^{(82)}$中，这些单纯奇异纤维具有互不相交的单纯实心环面邻域，并且每个这样的邻域都存在一条长度为 *48* 的单纯子午曲线。

Mijatovi´c [28, 定理5.1]证明了一个相关结果：他表明，每条奇异纤维（包括重数二的奇异纤维）的邻域，在 $\mathcal{T}$的某个适当细分中都是单纯的。他给出的界是：至多进行 $2^{2^{400|\mathcal{T}|^2}}$ 次 Pachner 变换即可得到该细分。如果用这种表述方式来表达我们的界，那么 Pachner 变换的次数将与三角剖分的大小呈线性关系。

如果 M 除重数二的奇异纤维外没有其他奇异纤维，则结论显然成立。我们将单独处理 M 是实心环面的情形。因此，本节余下部分假设 M 是一个塞弗特纤维空间，其中有 n 个重数不为二的奇异纤维（对某个 $n \geq 1$而言），且它不是实心环面。设 $\mathcal{T}$是 M的一个三角剖分，并设 $\mathcal{H}$ 是对偶把手结构（如定义 3.4 所述）。

我们的方法是取一组正规环带，将每条奇异纤维的邻域切割出来。接着我们将证明，对于这些奇异纤维中的每一条，在其固体环面邻域所诱导的把手结构中，存在

一条核心曲线，它在每个 0-把手和 1-把手中都由有界数量的弧组成，并且完全避开平行性丛。

我们将通过应用一个定理来实现这一点，该定理给出了相对于某些仿射数据的实心环面的受控核心曲线。我们将构造一个把手结构 $\mathcal{H}$ ：取三角剖分的对偶把手结构，沿正规曲面切割，移除把手，并以 2-把手替换平行性丛分支。其 0-把手由沿正规圆盘切割四面体后形成的部分构成，每个 0-把手都可自然地与 $\mathbb{R}^3$ 中的一个凸多面体对应，并且它们与 2-把手和 3-把手的交是若干面的并。在三角剖分中将 1-把手视为面的加厚部分，这些 1-把手同样可自然地与多边形 P 和区间的乘积对应，并通过仿射粘合映射沿 $P\times\partial I$ 与 0-把手粘合。这足以将 $\mathcal{H}$ 提升为 §4 中定义的 仿射柄结构，并使我们能够应用以下结果。

定理 4.1 (定理 4.2 [19])。 设 $\mathcal{H}$ 是实心环面的仿射把手结构。假设每个 *0*-把手与 *1*-把手的交至多有四个连通分支，且每个 *1*-把手与 *2*-把手的交至多有三个连通分支。那么， M 有一条核心曲线，它只与 *0*-把手和 *1*-把手相交，遵循 *1*-把手上的乘积结构；它与每个 *1*-把手至多相交于 *24* 条直弧，与每个 *0*-把手至多相交于 *48* 条弧。此外，每个 *0*-把手中的弧同时平行于相应多面体边界上的一组弧，且该组弧的每个连通分支与多面体的每个面至多相交于六条直弧。

“直”的这一概念由多面体面上的仿射结构所诱导。对于给定的多边形，在仿射同痕意义下， n直弧的构型只有有限种。

定义4.2。给定把手结构 $\mathcal{K}$ 中的次正规把手结构 $\mathcal{H}$ ，是指一个带有嵌入 $\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{K}$ 的把手结构，使得 $\mathcal{H}$ 的每个把手 H在该嵌入下的像，要么是 $\mathcal{K}$的一个把手，要么是 $\mathcal{K}$ 的一个把手 K 的子集，且该把手是 K中某些正规圆盘的补集的一个连通分支。

设 γ 是把手结构 $\mathcal{K}$中的一条曲线。 γ 的次正规邻域是 $\mathcal{K}$ 中包含 γ 的次正规把手结构 $\mathcal{H}$ ，它同胚于一个实心环面，且 γ 是其核心曲线。

设 S 和 S' 是某个三维流形 M中的三维子流形，其中 S 和S' 可以带有某些边界装饰。若 S 和 S' 在 M 中同痕，是指将 S 嵌入 M 的映射同痕至将 S'嵌入其中的映射，且该同痕保持边界装饰（但不一定固定 ∂M）。

设 A是 M 中一个适当嵌入的垂直环带，它与边界中一个环带 A' 一起，将奇异纤维的一个垂直邻域与 M 分隔开。对每个非重数为二的奇异纤维 γ_i，取一个这样的 A_i ，组成一个不交族。由于 M 不是实心环面，这些环带是本质的，因此我们可以将它们同痕为同时处于正规位置。用 $\{S_i\}$ 表示它们从 M 分隔开的奇异纤维次正规邻域的集合，并用 $\{\mathcal{H}_i\}$ 表示这些次正规邻域所诱导的把手结构。由于环带化简不会改变 S_i， ∂A_i 在 M 中的同痕类，且会减少把手的数量，因此反复进行环带化简，直至无法继续为止。

4.1. **移除平行性丛**。我们将注意力集中在一个奇异纤维邻域 S_i 上，并记住，其核心曲线所对应的奇异纤维的重数不是二。设 $\mathcal{B}$ 是相对于 A_i 的 $\mathcal{H}_i$ 的极大广义平行性丛。由于 A_i 在 M 中是本质且正规的，故其在 ∂S_i 中不可压缩，且边界是标准的。根据定理 3.12， $\mathcal{B}$ 的水平边界是 ∂S_i 的一个不可压缩子曲面，并根据定义包含于 A_i 中。因此， $\mathcal{B}$ 的每个连通分支都是以圆盘、环带或莫比乌斯带为底的 I 丛；在环带丛和莫比乌斯带丛的情形下，它们的水平边界构成 A_i 中的一个环带集合，其核心曲线同痕于 A_i 的核心曲线。我们将证明，由于奇异纤维 γ_i 的重数不是二，莫比乌斯带丛不会出现；随后移除环带丛以及在垂直边界上与 ∂S_i 相交的任何圆盘丛，同时不改变 S_i， A_i 在 M 中的同痕类。

引理 4.3. 设 B 是 $\mathcal{B}$的一个环带丛或莫比乌斯带丛分支。 $\partial_v B$ 的每个连通分支至多与 A_i的一个边界分支相交。

证明。 注意，由于 $\partial_h B$ 是由不可压缩环带组成的集合，且是A_i的子集，因此 $\partial_h B$ 的每个连通分支的核心曲线都与 A_i的核心曲线同痕。如果 $\partial_v B$ 的一个连通分支与两个边界分支都相交，那么同时与这两个分支相交的弧会将 A_i 切成一个圆盘，因此会与 $\partial_h B$某个连通分支的核心曲线相交，这就产生了矛盾。□

我们将利用此引理证明：如果移除这样的平行性丛分支，并且已知这不会改变 S_i 在 M中的同痕类，那么它会保持有序对（S_i， A_i）在 M中的同痕类。

引理 4.4. 如果 B 是广义平行性丛中一个莫比乌斯带丛或环带丛分支，并且 $\partial_v B$ 的某个连通分支与 S_i 的边界在其内部相交，但并非 ∂S_i的子集，那么我们可以从 (S_i, A_i) 的把手结构中移除若干把手，使该连通分支成为 ∂S_i 的子集，同时不改变所得子流形在 M中的同痕类。

证明。 如果 $\partial_v B$ 的一个连通分支 α 不是适当嵌入的，但也不包含在 ∂S_i中，我们可以如下分解这个环带。由于 $\partial_h B$ 不可压缩且不是圆盘， $\partial_v B$ 也不可压缩；又因为 α 位于实心环面中，所以它是边界平行的。考察它与每个把手的交的各个连通分支。这些连通分支都是四边形圆盘：其中两条边是它与 A_i的交，另外两条边可能位于实心环面的内部，也可能位于 $\partial S_i - A_i$中。根据每个正方形的内部是否位于 ∂S_i 中，为其着色。然后考察 α的铺砌，将颜色相同且相邻的正方形合并（注意，由于 α 既非适当嵌入，也不包含在边界中，整个环带不可能只有一种颜色）。设 D 是 $\partial_v B$ 中一个内部位于实心环面内部的铺块。注意， D 是适当嵌入的：它的两条边包含在 A_i 中，另外两条边包含在 $\partial S_i - A_i$中。这个圆盘不可能是 S_i 的子午圆盘，否则奇异纤维的重数将为二，因此它必定是边界平行的——也就是说， ∂D 在 ∂S_i中围成一个圆盘。因此，在同胚意义下， ∂D 相对于(S_i, A_i)的位置有三种可能，如图3(a)–(c)所示。由于 ∂D 在 A_i 中的两条弧是 $\partial_v B$ 的一部分，因此它们不横贯 A_i，所以每条弧的起点和终点都位于 ∂A_i 的同一个连通分支上。它们可以与同一个连通分支相交，也可以与两个

不同的连通分支相交；若它们与同一个连通分支相交，则它们可以彼此嵌套，也可以不嵌套。在同胚意义下， $\partial S_i - A_i$ 中的两条弧由 ∂D 在 ∂S_i中围成一个圆盘这一事实确定。

考虑由 R 围成的三维球 D 。注意，此三维球与 B 的交集仅为 D：若它们在其他地方相交，那么由于 B 连通且 D 在 M中是分离的， B 的全部将包含在一个三维球内，但这样其水平边界将是可压缩的。因此，我们可以移除此三维球，而不改变 M中 $(S_i,\ A_i)$ 在同痕意义下的情况：在图3(a)和(b)的情形中，用 $(S_i - R,\ A_i - R)$ 替换 $(S_i,\ A_i)$；在图3(c)的情形中，则用 $(S_i - R,\ (A_i - R) \cup D)$ 替换。我们减少了 α铺砌中的正方形数量，因此根据归纳法，可以重复这一过程，直到 α 是 ∂S_i的子集。□

注意，经过这一过程后，$(S_i,\ A_i)$ 的胞腔结构可能不满足约定 3.1，因此可能不是把手结构。移除平行性丛分支 B时，我们将对此进行修正。

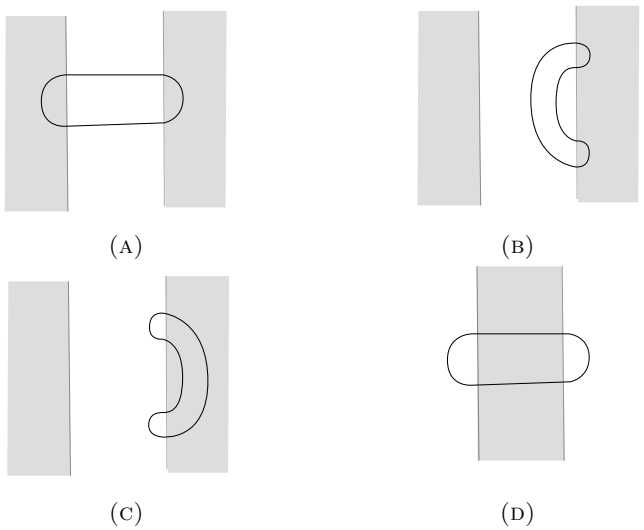


FIGURE 3. properly 嵌入圆盘的边界与 $\partial_v B$ 相交的可能方式（$\partial S_i,\ A_i$）。这些图示展示了 ∂S_i的子集。阴影部分是 A_i。黑色曲线是 ∂D。

引理 4.5。 极大广义平行性丛没有莫比乌斯带丛连通分支。

证明。 设 B 是这样的连通分支，因此 B 具有丛结构，是莫比乌斯带与区间的扭曲积。考虑构成其垂直边界的不可压缩环带；它因此是边界平行的， $\partial_v B$。

如果 $\partial_v B$ 与 ∂S_i相交，那么根据引理 4.4，我们可以假设它是 ∂S_i的子集。于是，由于其内部与 A_i 不相交，且其边界分支是 A_i的子集，因此它必定就是整个 $\partial S_i - A_i$。现在，由于 B 的边界就是整个 ∂S_i，我们可知 S_i 是一个重数为 2 的奇异纤维的邻域，因此得到矛盾。

如果 $\partial_v B$ 是适当嵌入的，我们可以对 $\partial_v B$ 作同痕，使其相对于由 M诱导的 S_i 的塞弗特纤维化为竖直的。令 D_p 为一个带有一个角度为 $\frac{2\pi}{p}$ 的锥点的圆盘轨形，注意 p 是该奇异纤维的重数。 M 的塞弗特纤维化给出一个轨形纤维化 $S_i \to D_p$，其纤维为 S^1。现在， $\partial_v B$ 是该映射下某条适当嵌入的弧的原像，而 A_i 是某条边界弧的原像。来自 $\partial_v B$ 的弧，其端点位于来自 A_i的弧上；来自 $\partial_v B$ 的弧与来自 A_i 的弧被这两个端点截出的连通线段的并，构成了 D_p中一个子圆盘的边界。若该子圆盘不包含锥点，则覆盖它的三维流形是一个实心环面，其子午圆盘的边界由来自 A_i 的一条弧和来自 $\partial_v B$的一条弧组成：这不是一个莫比乌斯带丛。若该子圆盘 确实 包含锥点，则覆盖它的实心环面的一个子午圆盘是一个 $2p$边形，其边界由来自 $\partial_v B$ 和 A_i的弧交替组成。要成为一个莫比乌斯带丛， p 必须为 2，这就产生了矛盾。□

引理4.6. 设 $\mathcal{H}$ 是 S 上的一种把手结构，其中 S 是一个三维流形，A 是其边界上的一个子曲面。设 B 是相对于 A的极大广义平行性丛的一个连通分支。则 $\mathcal{H} - B$ 满足约定*3.1*，因此是一个把手结构。

证明。 由于 $\mathcal{H} - B$ 中把手的交是 $\mathcal{H}$中把手交的子集，只需证明每个 k 把手 H（带有乘积结构 $D^k \times D^{3-k}$）与低指标把手的交恰为 $\partial D^k \times D^{3-k}$。显然， H 与低指标把手的交是该集合的子集。如果 $\mathcal{H}$ 中与 H 相邻的把手属于B，那么它的指标必定高于 H，否则 H 也会属于 B。因此，我们没有移除 H 与低指标把手之间的任何交。□

引理4.7。 存在一个 S_i' 的次正规邻域，其中 $\partial S_i'$ 内有一个指定环带 A_i' ；由 $\mathcal{H}$ 诱导的 S_i' 的把手结构是有序对 (S_i', A_i') 的把手结构，并且 (S_i', A_i') 与 (S_i, A_i) 在 M 中同痕；其极大广义平行性丛不含环带丛或莫比乌斯带丛连通分支。

证明。 我们知道，在 M 中，任何与 (S_i, A_i) 在 M 中同痕的次正规把手结构，都不含莫比乌斯带丛连通分支，这是由引理 4.5 得出的。假设 (S_i, A_i) 的平行性丛中有一个环带丛连通分支 B 。如果 $\partial_v B$ 的内部与 ∂S_i 相交，那么根据引理 4.4，我们可以从 (S_i, A_i) 中移除把手，而不改变所得子流形在 M 中的同痕类型。因此，由归纳法可知，我们可以假设：若 $\partial_v B$ 的内部与 ∂S_i 相交，则 $\partial_v B$ 的某个连通分支 α 包含于 ∂S_i 中。与莫比乌斯带丛的情形相同，这个连通分支就是 $\partial S_i - A_i$ 本身。 $\partial_v B$ 的另一个连通分支 β 必须是适当嵌入的，因为它与 α 不相交，且其内部与 A_i 不相交。因此， $\partial_v B$ 的一个连通分支是适当嵌入的，而另一个则是适当嵌入的，或是边界的子集。

与莫比乌斯丛的情形相同，我们可以将 A_i 以及 $\partial_v B$ 的每个连通分支同痕为塞弗特纤维化中的竖直对象；也就是说，使它们成为 D_p 中弧在投影 $S_i \to D_p$下的原像。 $\partial_v B$ 的两个连通分支投影为平行弧。环带 A_i 投影为 D_p边界上的一条弧。

如果 $\partial_v B$ 的一个连通分支包含在边界中，就沿另一个连通分支切开。这样得到两个部分：平行性丛（将其舍弃），以及一个部分 S_i'，其中（S_i'，$A_i \cap S_i'$）与 M中的（S_i，A_i）同痕。

否则，假设两个连通分支都适当嵌入。在 D_p 中，$\partial_v B$ 中的两条平行弧之一与 A_i 的一段共同围成一个圆盘，这段弧不包含 $\partial_v B$ 中的另一条弧。这个圆盘可能包含也可能不包含锥点。如果包含锥点，则奇异纤维不会穿过平行性丛。沿最内侧的弧（相对于锥点而言）切割，效果与前一种情况相同，只是现在补集的一部分是沿环带粘合到实心环面上的平行性丛。特别地，另一部分 S_i' 在包含于 M 时具有与 S_i 相同的核心曲线，并且 $(S_i', A_i \cap S_i')$ 在 M 中与 (S_i, A_i) 同痕。如果圆盘不包含锥点，我们就沿相对于锥点而言最内侧的弧切割，移除粘合到实心环面上的平行性丛；再次可见，另一部分 S_i' 与 S_i 具有相同的核心曲线，并且 $(S_i', (A_i \cup \partial_v B) \cap S_i')$ 在 M 中与 (S_i, A_i) 同痕，因此我们将 S_i' 中的指定环带设为 $(A_i \cup \partial_v B) \cap S_i'$。

由于此操作减少了把手的数量，我们可以重新计算平行性丛并重复此操作，直到$\mathcal{B}$ 中不再有环带丛分支。注意，执行这些修改后，根据引理4.6，我们得到一个把手结构。□

（S_i，A_i）中广义平行性丛 $\mathcal{B}$ 的所有剩余连通分支都是圆盘丛。

引理 4.8。如果 B 是极大广义平行性丛的一个圆盘丛分支，且其垂直边界与 ∂S_i 在其内部相交，那么存在一个适当嵌入的圆盘，它是 $\partial_v B$的子集，沿此圆盘切割会从 S_i 中分离出一个三维球，该三维球包含 B，且在 M中不改变（(S_i, A_i)）的同痕类。

证明。假设 $\partial_v B$ 与 ∂S_i 在其内部相交。注意，环带 $\partial_v B$ 不可能是 ∂S_i的子曲面：若是，则由于它仅在边界处与 A_i 相交，它必定与 A_i具有相同的边界曲线；但 A_i 的边界曲线不围成 A_i中的圆盘（即 $\partial_h B$的候选项）。因此，如引理 4.4 的证明中那样，我们可以根据 $\partial_v B$ 内部的区域是在∂S_i 中还是在 S_i的内部，将 $\partial_v B$ 划分为正方形。同样，与前一种情况一样，由于 $p \neq 2$，这些正方形都边界平行。

与前一种情况不同，适当嵌入的正方形的边界可能在 ∂S_i中彼此嵌套。考虑与 ∂S_i中的某条最外层曲线对应的正方形 D。假设 B 不包含在 D 所围成的球中。在这种情况下，B 与该球的交集仅为正方形 D；由于 ∂D 是一条最外层曲线，B 与 $\partial_v B$ 中每个适当嵌入的圆盘所围成的球的交集，也仅为该适当嵌入的圆盘本身。因此我们可以看出，$\partial_v B$ 在 S_i 中同痕于 ∂S_i 中的一个环带，该环带与 B的其余部分不相交，尤其与 $\partial_h B$不相交（尽管它可能与 A_i相交）。然而，这个环带的两条边界曲线都在 ∂S_i中围成圆盘，这是不可能的。

沿着 D 切割会从 S_i 中移除一个包含平行性丛分支 B的三维球 R。在同胚意义下，∂D 位于（∂S_i，A_i）中的方式有四种，分别对应图3所示的四种构型。在图3(a)或(b)的情形下，将（S_i，A_i）替换为（$S_i - R$，$A_i - R$）；

在图3(c)或(d)的情形下，则替换为（，（））。这不会改变M中（S_i，A_i）的同痕类。□

可能仍有无法移除的平行性丛分支，否则会改变 M 中 (S_i，A_i) 在同痕意义下的类型。我们将用 2-把手替换这些分支，从而为 (S_i，A_i) 获得一个把手结构，其中 0-把手、1-柄以及 2-把手的附着环带以一种特别理想的方式自然地包含于 M 中：此把手结构是 (0，0)- 良好嵌入的次正规结构，这是按 Lackenby 和 Schleimer [23] 的含义属于 (k，l)-良好嵌入的一种特殊情况。

定义4.9。设 N 是一个（分片线性地）嵌入三维流形 M 中的流形，其中 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 分别是 N 和 M 的把手结构。设 $\mathcal{G}'$ 是 N 中仅由 0-把手和 1-把手构成的把手结构，并设 $A \subseteq \partial\mathcal{G}'$ 是 2-把手的附着环带。若满足以下条件，则称 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是 (0，0)-良好嵌入的次正规结构：

- $\mathcal{G}'$ 中的每个 k-把手都是 $\mathcal{H}$中某个 k-把手的次正规子集，
  $\mathcal{H}$的每个1-把手都有一种乘积结构，使得 $\mathcal{G}'$ 中位于其中的所有1-把手的乘积结构都与该乘积结构相容，

  在 $\mathcal{H}$的任意 k-把手中，$\mathcal{G}'$ 的 k-把手均不会位于 $\mathcal{H}$中的平行正规圆盘之间，

  A 与 $\mathcal{G}'$ 的任意把手 G 的交，是 G 与 $\mathcal{H}$的把手之间的交的若干连通分支之并。

推论 4.10。通过移除 $\mathcal{H}_i$ 的把手并将极大平行性丛替换为*2*-把手，我们可以得到一组把手结构 $\mathcal{G}$，用于对偶(S_i', A_i')；该结构在 $\mathcal{H}$ 中是$(0，0)$-良好嵌入的次正规结构，并且在 M中与(S_i, A_i) 同痕。特别地，它没有平行性*0*-把手或*1*-把手。

证明。如果存在环带丛，则应用引理4.7将其移除；如果存在垂直边界与 ∂S_i 相交的圆盘丛，则应用引理4.8移除垂直边界与 ∂S_i 相交的环带丛和圆盘丛。根据引理4.6，所得把手结构满足约定3.1。剩余的广义平行性丛由一组垂直边界适当嵌入的圆盘丛组成。

将这些平行性丛分支替换为 2-把手，并令 $\mathcal{H}_i'$ 为所得的把手集合。只要这仍是一个把手结构，它显然满足作为 $\mathcal{H}$ 中 (0，0)-良好嵌入次正规子结构的定义。由于任何通过低指标平行性把手与极大平行性丛 $\mathcal{B}$ 相邻的把手本身都属于 $\mathcal{B}$，且 $\mathcal{B}$ 的垂直边界适当嵌入，这些新的 2-把手 $D^2 \times D^1$ 在 $\partial D^2 \times D^1$ 的所有位置都与低指标把手相交。它们也与其他 2-把手不相交，而它们与 1-把手的交的任意连通分支都来自 $\mathcal{H}_i'$ 中 2-把手与 1-把手交的连通分支；由于 $\mathcal{H}_i'$ 是一个把手结构，因此 $\mathcal{H}_i'$ 是一个满足约定3.1的把手结构。□

4.2. **定理 1.2 的证明**。

命题 4.11。对于具有把手结构 $\mathcal{H}_i$、且对应于非二重奇异纤维的每个次正规邻域 S_i，我们都能找到一条满足定理 *4.1* 条件的核心曲线，使其与相对于环带 A_i的 S_i 的平行性丛不相交。

证明。设 $\mathcal{G}_i$ 为推论 4.10 中的把手结构。回想一下， $\mathcal{G}_i$ 没有平行性把手，在 M 中是 (0， 0)-良好嵌入的次正规结构，其 0-把手和 1-把手也是 $\mathcal{H}_i$的 0-把手和 1-把手，并且 $\mathcal{G}_i$ 是 γ_i的实心环面邻域。因此， $\mathcal{G}_i$ 的一条核心曲线包含到 $\mathcal{H}_i$ 中后仍是一条核心曲线。注意，定理 4.1 中的交点计数条件对 $\mathcal{H}_i$ 成立，因为它是通过沿着正规曲面切割一个与三角剖分对偶的把手结构得到的。在 $\mathcal{G}_i$中这些条件也成立：其 0-把手和 1-把手分别是 $\mathcal{H}_i$ 的 0-把手和 1-把手，因此只需检查 2-把手上的交点条件。将广义平行性丛分支替换为 2-把手后，1-把手与这些新 2-把手之间的所有交，在包含到 $\mathcal{H}_i$ 中后，都是 1-把手与 2-把手交的连通分支。因此定理 4.1 适用；也就是说，存在一条 S_i 的核心曲线 γ ，它在 $\mathcal{G}_i$中具有定理 4.1 所述的性质，因而特别地与 $\mathcal{G}_i$ 中的 2-把手不相交，也就与 $\mathcal{H}_i$的平行性丛不相交。□

定理 *1.2* 的证明。当 M 是实心环面时，已知 M 存在一条核心曲线，它在 $\mathcal{T}^{(51)}$ 中是单纯的，且这条单纯曲线的边不是 $\mathcal{T}^{(50)}$ [23, 的边的子集，见定理 6.14]。

否则，回忆一下， $\mathcal{H}$ 与 M的三角剖分 $\mathcal{T}$对偶。考虑命题 4.11 中的核心曲线集 $\gamma = \{\gamma_i\}$： 该集合由每条非二重奇异纤维的一条同痕曲线组成。这些核心曲线包含在把手结构 $\mathcal{G}_i$的 0-把手和 1-把手中，而这些把手结构同时是 $\mathcal{H}$中的 (0，0)-良好嵌入的次正规结构。根据 [23], 中的定理 7.7，曲线$\{\gamma_i\}$ 因此在 $\mathcal{T}^{(79)}$中同时是单纯的。此外， [23] 中定理 7.7 证明的最后一步是考虑 $\mathcal{T}^{(77)}$某个面中的若干单纯弧，并进行两次重心细分，以得到与这些弧同痕且被推离该面的单纯弧。完成这一步后，我们看到，被推离的弧只包含 $\mathcal{T}_{(79)}$的边，不包含 $\mathcal{T}^{(78)}$中的任何边。在实心环面的情形下，我们在 $\mathcal{T}^{(51)}$的设置中得到了这一点，因此可以再进行 27 次重心细分；每次对单纯核心曲线的每条边，都用重心细分中新生成的两条边替换它。

请注意，在重心细分中，细分过程中产生的边 e 的链环是一个由四条或六条边组成的圆。再进行一次重心细分后，这些边各细分一次，因此得到一个由八条或十二条边组成的圆。再进行两次重心细分后，这些单纯奇异纤维的单纯邻域是实心环面，且其内部互不相交；再进行一次细分即可确保它们彼此不相交。因此，若我们进行三次重心细分以得到 $\mathcal{T}^{(82)}$，就能确保奇异纤维的单纯邻域是彼此不相交的实心环面，并且每个奇异纤维的每条边上都横截着一条长度至多为 $6\times 2^3 = 48$ 的子午线曲线。□

5. 三角剖分复杂度的界

现在我们将利用 $\mathcal{T}^{(82)}$ 中的单纯奇异纤维，以一个乘法常数的精度确定 M 的三角剖分复杂度。上界以及下界中以基底曲面的欧拉示性数表示的部分都很直接。

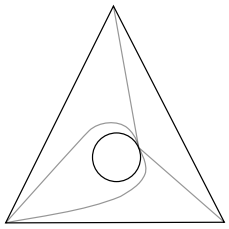


FIGURE 4. 细分一个三角形，为曲面三角剖分添加一个新的边界分支。灰色的边是新增的内部边；中央的圆圈是新的边界分支。

命题 5.1. 设 M 是一个具有塞弗特数据 $[\Sigma, (p_1, q_1) \ldots, (p_n, q_n)]$且边界非空的流形。则其三角剖分复杂度的上界为

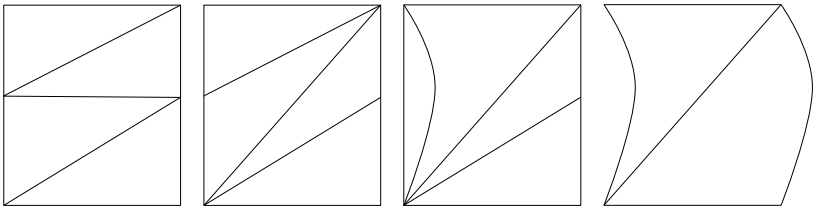
$$\Delta(M) \leq 96|\chi(\Sigma)| + 176 + 70 \sum_{i=1}^{n} \|q_i/p_i\| .$$

证明。令 b 为 Σ的边界分支数；若 Σ可定向，则令 a 为其亏格的两倍，否则令其为其不可定向亏格。注意， $\chi(\Sigma) = 2 - a - b$。记 Σ_n 为添加了 n 个额外边界分支后的曲面 Σ 。

首先，假设 Σ_n 可定向。当 Σ_n 是环带或圆盘时，我们可以构造一个大小为三的三角剖分——特别地，其大小至多为 $6a-1+4(b+n)$——且每个边界分支上各有一个顶点。否则，我们可以对亏格适当的闭可定向曲面进行三角剖分，使其面数至多为 $2a - 2$ 。随后，我们可以在一个面的中央添加一个边界分支，代价是增加3个面，如图4所示；这样每个边界分支上仍各有一个顶点，并得到相同的上界。将此三角剖分与一个区间作笛卡尔积，得到 $\Sigma_n \times I$ 的一个细分，其中由三棱柱组成，且顶面和底面上诱导出相同的三角剖分。将顶面与底面粘合，得到 $\Sigma_n \times S^1$，它被划分为至多 $6a - 1 + 4(b + n)$个三棱柱。

如果 Σ_n 是不可定向的，请注意，莫比乌斯带可以用两个三角形进行三角剖分，且其边界上有两个顶点；再添加一个三角形，就能确保边界上只有一个顶点。与可定向情形一样，我们可以用三个额外的三角形为这样的曲面增加一个边界分支。我们可以用总共 $3p$ 个三角形对具有不可定向亏格一和 p 个边界分支的不可定向曲面 Γ_p 进行三角剖分，并据此在 $\Gamma_p \tilde{\times} I$ 上构造胞腔结构，使用 $3p$ 个三棱柱，每个三角形上方各放置一个。现在，我们可以沿着两个环带 $\gamma \times I$ 粘合分别对应于 $\Gamma_{p'} \tilde{\times} I$ 和 $\Gamma_{p''} \times I$ 的这两个胞腔结构，每个环带位于各自结构的一个边界分支上方。由此得到 $\Sigma_n \tilde{\times} I$ 的胞腔结构；再通过边界上的恒等映射将两个这样的结构粘合起来，就能得到由至多 $2(6a - 6 + 4(b + n))$ 个三棱柱组成的 $\Sigma_n \tilde{\times} S^1$ 的胞腔结构。

将每个四边形面细分为两个三角形，然后从一个内部点向每个三棱柱作锥化，将其细分为八个四面体：每个四面体对应棱柱边界三角剖分中的一个面。此过程



(A) (B) 2-2 移动 (C) 2-2 移动 (D) 3-1 移动

FIGURE 5. 对 $\Sigma_n \times I$ 的边界环面三角剖分应用三次Pachner 变换，将其化为单顶点三角剖分，其中两条边分别是乘积结构的纤维和截面。

给出一个至多含有 16(6a − 1 + 4(b + n)) 个四面体的 $\Sigma_n \overset{(\sim)}{\times} S^1$ 三角剖分。注意，我们可以自由选择边界上四边形的三角剖分方式。

这些边界环面中，有些对应于 M 的边界分支，另一些则将通过 Dehn 填充形成奇异纤维。我们只关注后一类。每个边界环面上的诱导三角剖分取决于 Σ_n 的可定向性。我们希望它是一个单顶点三角剖分，其中纤维曲线和乘积结构的截面曲线是两条边。若 Σ_n 可定向，这一条件自动满足。若其不可定向，则每个边界分支的初始三角剖分通过取两个矩形组成的带状区域并识别其相对边得到，然后以一种可自行选择的方式将每个矩形细分为两个三角形。如图 5 所示，我们可以进行三次 Pachner 变换（即增加三个四面体），以获得所需性质。我们总共使用了至多 $16(6a - 6 + 4(b + n)) + 3n$ 个四面体。

考虑一个环面边界分支，我们希望通过将实心环面的子午线粘合到斜率为 q_i/p_i 的曲线上，对其进行 Dehn 填充。根据命题 2.1，我们至多可以使用 $\|q_i/p_i\| + 2$ 个四面体来完成。因此 $\Delta(M)$ 满足

$$\Delta(M) \le 16(6a - 1 + 4(b + n)) + 3n + \sum_{i=1}^{n} (\|q_i/p_i\| + 2)$$

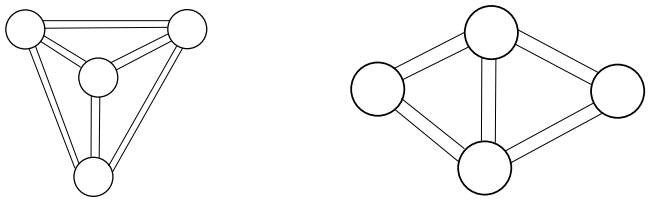
因此，注意到 $\|q_i/p_i\|$ 至少为 1，所以 $\sum_i \|q_i/p_i\|$ 至少为 n，且 $|\chi(\Sigma)| = |a + b - 2|$，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta(M) &\le 96a - 16 + 64b + 69n + \sum_{i=1}^{n} \|q_i/p_i\| \\ &\le |96a + 96b - 192| + 176 + 70 \sum_{i=1}^{n} \|q_i/p_i\|\end{aligned}$$

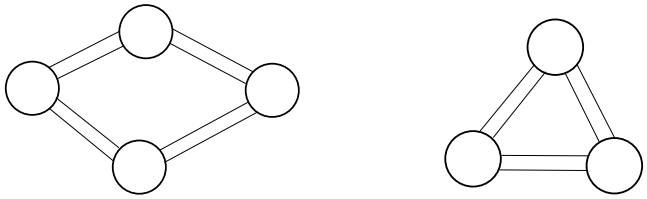
由此得到该界。 □

引理 5.2。 设 M 是一个具有塞弗特数据 $[\Sigma, (p_1, q_1) \ldots, (p_n, q_n)]$ 且边界非空的流形。那么 $\Delta(M)$ </style}至少为 1 6 $(|\chi(\Sigma)| + 1)$。

证明。 首先请注意，由于 $\Delta(M) \ge 1$，当 Σ 是圆盘时，此界成立，因此我们可以假设 $\chi(\Sigma)$ 至多为 0。令 $\mathcal{T}$ 为 M的最小三角剖分。注意，$\mathcal{T}$至多有 $6|\mathcal{T}|$ 条边，因此其第一同调群的秩至多为 $6|\mathcal{T}|$。我们



(A) 四面体边界图。补集 (B) 半四面体边界图的任一连通分支。补集的一个连通分支与四个 1-胞腔相邻，必定来自与 ∂M 的交。必定来自 ∂M。



(C) 长度为四的平行性边界图。补集的两个连通分支都必定来自与 ∂M 的交。 (D) 长度为三的乘积边界图。补集的连通分支中至少有一个必定来自与 ∂M 的交。

FIGURE 6. 预四面体把手结构中可能出现的边界图。

可以使用范坎彭定理按与命题 5.1 证明中相同的顺序构造 $\pi_1(M)$：首先取 $\Sigma_g^{b+n}\overset{(\sim)}{\times}S^1$，然后粘上 n 个实心环面，并使它们的子午线粘合到指定的斜率上。 [4]中的定理2.2.2给出了这一表示的明确形式。进行阿贝尔化后，我们发现，若 Σ 可定向，则第一同调群有一个秩为 $|2-\chi(\Sigma)|$ 的自由部分；若 Σ 不可定向，则有一个秩为 $|1-\chi(\Sigma)|$ 的自由部分。由于 $\chi(\Sigma)$ 非正，这些秩都至少为 $|\chi(\Sigma)|+1$。□

现在我们需要证明， $\Delta(M)$ 有一个下界，该下界由连分数展开之和决定。思路如下：在 $\mathcal{T}^{(82)}$ 中，对于每个重数不为二的奇异纤维，我们都有一个单纯邻域，其子午线曲线长度至多为 48。考虑该奇异纤维的 (0，0)-良好嵌入的次正规邻域 $\mathcal{G}_i$，以及其边界中的指定环带 A_i （见推论 4.10）， A_i 的边界分支在 $\mathcal{G}_i$ 的边界上给出一条斜率为 q_i/p_i 的正规曲线（相对于实心环面边界上的某个（子午线、经线）坐标系），该曲线在边界的每个把手中至多穿过一次。因此，我们将关注 $T^2\times I$ 的复杂度；其每个边界分支中都有一条长度受控、斜率指定的曲线。我们的结果需要用把手结构来表述，因此，我们不讨论三角剖分复杂度，而是给出关于把手结构 $\mathcal{G}_i$ 的四面体复杂度的结果。

0-把手的边界图 H 是其与1-把手和2-把手的交所形成的胞腔结构，并嵌入在 $\partial H\cong S^2$ 中。

定义 5.3。 如果每个0-把手的边界图都是四面体型、半四面体型、长度为三的积或长度为四的平行性，则称把手结构为预四面体型，如图 6 所示。

设 $\mathcal{H}$ 是一个预四面体把手结构。对于每个0-把手 H，令 α 表示它与3-把手的交的连通分支数；若H 是四面体型，则令 β 为1_2；若 H 是半四面体型，则令 β 为$1_{\overline{4}}$；否则令 β 为零。 $\mathcal{H}$的四面体复杂度 $\Delta(\mathcal{H})$是所有0-把手对应的 $\frac{\alpha}{8}+\beta$ 之和。

这个定义看起来或许颇为缺乏动机；其由来是，若 S 是闭流形 M的三角剖分 $\mathcal{T}$中的一个正规曲面，且 $\mathcal{H}$ 是 $M\backslash\backslash S$上的诱导对偶把手结构，那么 $\Delta(\mathcal{H})=\Delta(\mathcal{T})$ [21, 引理4.12]。我们将把(0，0)-良好嵌入的次正规实心环面转化为预四面体把手结构，其四面体复杂度与其原先包含的0-把手数量呈线性关系，然后引用以下结果。

引理 5.4。 存在常数 $k>0$，使得以下结论成立。设 $\mathcal{H}$ 是 $T^2\times[0,1]$ 的前四面体把手结构，且不能进行环带化简。令 $\mathcal{C}$ 为 $T^2\times[0,1]$ 的胞腔结构，其中每个把手都是一个 *3*-胞腔，而 j 把手或 $j-1$ 把手与边界的每个交连通分支都是一个 $(4-j)$-胞腔。设 γ_0 和 γ_1 是 $\mathcal{C}$的 *1*-骨架中的两条指定本质简单闭曲线，分别位于 $T^2\times\{0\}$和 $T^2\times\{1\}$ 中。在 $T^2\times\{0\}$ 上取坐标，使得 γ_0 的斜率为 $1/0$。令 q/p 为 γ_1 的斜率，其坐标由乘积结构从 $T^2\times\{0\}$ 上的坐标诱导而来。设每个 γ_i 的长度至多为 ℓ_i，且 $0<q<p$。那么，四面体复杂度$\Delta(\mathcal{H})$至少为 $\frac{1}{k}(\|q/p\|-578-96\min(l_0,l_1))$。

我们首先定义一些术语。闭曲面中的脊是一个嵌入图，没有度为 1 或 2 的顶点，且其补集是一个圆盘。配备胞腔结构的曲面中的胞腔脊是脊的一种，它是该胞腔结构的 1-骨架的子集。我们可以通过一些操作来修改脊：边收缩是将连接两个不同顶点的一条边收缩的操作，而边扩张是其逆操作。若 Γ 是曲面 S中的一个脊，e 是适当嵌入于 Γ的补集中的一条弧，且 f 是图$\Gamma\cup e$ 的一条边，其两侧分别有 $S\backslash\backslash(\Gamma\cup e)$的两个不同连通分支，那么边交换就是从 Γ中移除 f 并添加 e的操作。S 的脊图记作 $Sp(S)$，其顶点是 S 在同痕意义下的脊，边则对应边收缩和边扩张。

这个引理的证明是对 [22] 中定理 1.1 证明的一部分所作的修改。

证明。 通过重新标记，我们可以假设 $\ell_0\geq\ell_1$。考虑 $\mathcal{C}$ 在边界上诱导的胞腔结构。我们可以利用乘积结构，将两个边界分支上的胞腔结构投影到同一个环面上进行比较。选取一个胞腔脊 Γ_0，使其位于 $T^2\times\{0\}$ 中且包含 γ_0。这样的脊确实存在，因为 γ_0 不分离，因此我们可以令 Γ 为 γ_0 与 1-骨架中的一条弧的并，该弧的起点和终点都在 γ_0 上。存在一个普适常数 k'，使得至多经过 $k'\Delta(\mathcal{H})$ 次边收缩与扩张，就能将 Γ_0变为 $T^2\times\{1\}$ [22, 中的某个胞腔脊 Γ_1（定理 9.1]）。现在，至多经过 $24+4\ell_1$ 次边交换，就能将 Γ_1 变为 $T^2\times\{1\}$中包含 γ_1 [22, 的某个胞腔脊 Γ_2（引理 4.15]）。由于在曲面 S 上的脊中进行任意一次边交换，最多只需 $24g(S)$ 次边扩张与收缩，其中 $g(S)$ 为

S [21, 的亏格（引理 8.3], ），因此我们可以通过总计至多 $k'\Delta(\mathcal{H}) + 24(24 + 4\ell_1)$ 次边扩张与收缩，从 Γ_0 变到 Γ_2 。

考虑与环面相关的两个复形：单顶点三角剖分的图 $Tr(T^2)$，其中边表示 2-2 帕赫纳移动；以及脊图 $Sp(S)$。每个单顶点三角剖分都有一个与之对偶的脊，而单顶点三角剖分之间的边（即 2-2 帕赫纳移动）可以映射为一次边收缩与一次扩张的复合，因此存在一个拟嵌入 $Tr(T^2) \to Sp(T^2)$，将所有距离扩大为原来的 2 倍。注意， $Sp(T^2)$ 中任意顶点到某个这样的对偶脊的距离至多为 1，因此这个映射实际上是拟等距。（一般来说，对可定向曲面，此论证仍然成立，但任意脊到某个与三角剖分对偶的脊之间的距离上界取决于亏格。）

现在， Γ_0 和 Γ_2 到脊 Γ_0' 和 Γ_2' 的距离均不超过 1，且这些脊仅含三价顶点。令 T_0 和 T_2 为这些脊的对偶三角剖分，它们分别含有与 γ_0 和 γ_1 斜率相同的边。由于可以将法雷树与 $Tr(T^2)$视为相同，它们在 $Tr(T^2)$中的距离至少为法雷图中包含这些斜率边的三角剖分所对应的直线之间的距离，即 $\|q/p\| - 1$ [22, 引理 5.4]。

由拟等距关系 $\frac{1}{A} d_{Tr(T^2)}(T_0, T_2) - B \leq d_{Sp(T^2)}(\Gamma_0', \Gamma_2')$，其中某些普适常数为 A 和 B，因此

$$\frac{1}{A}(\|q/p\| - 1) - B \leq d_{Sp(T^2)}(\Gamma_0, \Gamma_2) + 2 \leq k'\Delta(\mathcal{H}) + 24(24 + 4\ell_1) + 2$$

如果我们取 k 至少为 $k'A$ ，且也至少为 $2B$，就得到所需结果。 □

此结果中的常数 k 取决于定理 6.1 [24], 中的常数；据作者所知，该常数尚未得到界定。

我们还需要以下组合结果。

定理 5.5 (定理 7.6, [23])。 设 M 是一个带有三角剖分 $\mathcal{T}$ 的紧致三维流形。设 M' 是一个带有把手结构 $\mathcal{H}'$ 的把手体，且 A 是 $\partial M'$ 中互不相交的环带之并，它们是边界上诱导胞腔结构中的胞腔之并。假设 M' 嵌入 M 的方式使得 $(\mathcal{H}', A)$ 在 T 的对偶中是$(0,0)$-良好嵌入的次正规子集。那么，我们可以使下列各项均成为 $T^{(30)}$ 的单纯子集：

(1) M' 的每个零柄；*(2)* M' 的每个一柄，沿垂直方向压缩到其余核上；*(3)* 以及这些环带 A。

引理 5.6。 设 A 是由 $|A|$ 个三角形构成的环带的单纯三角剖分。存在一个 $D^2 \times I$ 的三角剖分，至多包含 $3|A|$ 个四面体，并在边界 $\partial D^2 \times I$ 上诱导出三角剖分 A 。

证明。 考虑 CA 的 A锥。这与在中心一点（锥点）处压缩的 $D^2 \times I$ 同胚，并具有 $|A|$ 个最高维胞腔。我们得到由 X 从 $C\partial A$ 在 ∂A上的锥诱导出的 $D^2 \times \partial I$ 三角剖分。对 X的每个连通分支取锥；该锥同胚于两个球，并通过将 $C\partial A$ 到 CX 和 CA的包含映射进行识别，将其粘到 CA上。所得胞腔复形Y同胚于 $D^2 \times I$ ，其在 $\partial D^2 \times I$ 上诱导的三角剖分为 A；由于它是通过将三角剖分曲面上的锥粘合而构造的，每个3-胞腔都是一个四面体。注意， Y包含 $|A| + |\partial A|$ 个最高维胞腔，其中 $|\partial A|$

是 A的边界长度，并且 $|\partial A|$ 至多为 $2|A|$ ，因为 A 的任何三角形都不可能有三条边全部位于边界上。□

引理 5.7。设 $\mathcal{T}$ 是紧致三维流形 M 的一个实三角剖分。存在一个用于 M 的预四面体把手结构 $\mathcal{H}$ ，其中至多有 $5|\mathcal{T}|$ *0* 个把手；该结构不包含相对于 ∂M 的任何平行性把手，并且其在边界上诱导的胞腔结构与由 $\mathcal{T}$ 诱导的边界三角剖分相同。

证明。这里的思路是取 $\mathcal{T}$ 的对偶把手结构，并确保每个把手与边界的交至多有一个连通分支，从而排除出现任何平行性把手的可能性。注意，闭曲面 S 上的一个（二）维胞腔结构 A 会在 $S\times I$ 上诱导一个（三）维胞腔结构，记为 $A\times I$；它在每个边界分支上诱导的边界胞腔结构都是 A 的一个副本，并且每个胞腔与边界分支的交都是连通的。我们可以将三角剖分 $\mathcal{T}$ 视为一个胞腔结构。令 A 为由 $\mathcal{T}$ 在 ∂M 上诱导的胞腔结构。通过将 $A\times I$ 的一个副本附加到 $\partial\mathcal{T}$ 上，由胞腔结构 $\mathcal{T}$ 构造 $\mathcal{C}$ 。按照定义 3.4，令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{C}$ 的对偶把手结构。与边界相交的把手只有通过附加 $A\times I$ 而加入的那些；其中每个胞腔与 $A\times I$ 的每个边界分支的交都是连通子曲面，因此与 ∂M 的交至多有一个连通分支。由于由 $\mathcal{T}$ 得到的 ∂M 的三角剖分至多包含 $4|\mathcal{T}|$ 个面，$\mathcal{C}$ 至多有 $5|\mathcal{T}|$ 3 个胞腔，因此 $\mathcal{H}$ 至多有 $5|\mathcal{T}|$ 0 个把手。

现在， $\mathcal{H}$ 是预四面体型的。内部 0-把手与 $\mathcal{C}$ 的内部胞腔对偶，而这些胞腔是四面体，因此这些 0-把手具有四面体边界图。与边界相交的那些则是半四面体型的：它们与由一个三角形和一个区间的乘积构成的胞腔对偶，其中一个三角形面位于边界上。□

现在，我们可以在不存在重数为二的奇异纤维时证明这个界。

命题 5.8. 设 M 是一个具有塞弗特数据 $[\Sigma,(p_1,q_1)\ldots,(p_m,q_n)]$的流形，且不是实心环面，其中此列表中前 m 个奇异纤维的重数均不为二。那么 $\Delta(M)\geq\frac{1}{6}m$，并且存在一个普适常数 $k>0$，使得

$$\Delta(M)\geq\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{m}\|q_i/p_i\|-9794m\right).$$

证明。设 $\mathcal{T}$ 是 M的一个三角剖分， $\mathcal{H}$ 是其对偶把手结构。对于每个重数不为二的奇异纤维 γ_i ，考虑其来自推论 4.10 的次正规邻域 $(S_i,\ A_i)$ 中的 (0，0)-良嵌入次正规把手结构 $\mathcal{G}_i$ ，其中 M ；由于 M 不是实心环面，这种把手结构存在。令 $\mathcal{C}$ 为这些把手结构的不交并。

每个次正规邻域 $\mathcal{G}_i$ 至少包含一个非平行的次正规 0-把手，位于 $\mathcal{H}$中；而 $\mathcal{H}$ 中的每个 0-把手至多包含六个这样的潜在次正规 0-把手。因此，由于 $\mathcal{H}$ 中的每个 0-把手都与 $\mathcal{T}$中的一个四面体对偶，$m\leq 6|\mathcal{T}|$。

由于这些次正规邻域同时以 (0，0)-良好嵌入，根据 $\mathcal{T}^{(30)}$ 中的定理 5.5，我们可以安排使 $\mathcal{C}$ 的以下部分成为单纯的：

0-手柄、1-把手的余核，以及 2-把手的附着环带。注意，根据定理 1.2，我们已经知道，在额外进行 82 次重心细分后，每个实心环面的核心曲线都是单纯曲线，并且这些单纯曲线的单纯邻域是彼此不交的实心环面，每个这样的邻域都包含一条长度为 48 的单纯子午曲线。

再细分一次，得到 $\mathcal{T}^{(113)}$，使每条核心曲线的单纯邻域都与 $\mathcal{C}$ 的 2-把手附着环带不相交。这样做会使每条边的度数加倍，因此将单纯子午曲线的长度增加到 96，并确保对于每个 i，这些单纯邻域都与 $\partial\mathcal{G}_i$ 不相交。 $\mathcal{T}^{(113)}$ 中附着环带的诱导三角剖分由 $\mathcal{T}^{(30)}$ 中细分后的三角形构成。每个面在每次重心细分中都会细分成六个三角形，因此附着环带三角剖分至多包含 $6^{83} \times 4 \times 24^{30}|\mathcal{T}|$ 个三角形。根据引理 5.6，我们可以对 2-把手进行三角剖分（尽管不一定是 $\mathcal{T}^{(113)}$ 的子集），至多使用 $3\times 6^{83}\times 4\times 24^{30}|\mathcal{T}|$ 个额外的四面体，因此四面体总数至多为 $2\times 24^{113}|\mathcal{T}|$ 。现在，取核心曲线的某个次正规邻域（S_i，A_i）的一个此类三角剖分，它是把手结构 $\mathcal{G}_i$ 的三角剖分。环带A_i 是单纯的，因为它是边界胞腔结构的子集，因此其边界曲线也是单纯的。取其中一条曲线。对于实心环面边界上的某种（子午线，经线）坐标选取，这条曲线的斜率为（q_i，p_i），即该奇异纤维对应的塞弗特数据。

钻除每条核心曲线的一个单纯邻域。回顾一下，按构造，这些邻域与 2-把手的附着环带以及$\partial\mathcal{G}_i = \partial S_i$ 不相交，且其子午线长度至多为 96。于是，对于每个奇异纤维，我们都有一个$T^2 \times I$ 的副本，其三角剖分总共使用至多 $2 \times 24^{113}|\mathcal{T}|$ 个四面体；每个副本的坐标选取得当，使得一侧有一条长度至多为 96 的 (1,0) 曲线，另一侧则有一条单纯的 (q_i, p_i) 曲线。由引理 5.7，这组 $T^2 \times I$副本存在一个预四面体把手结构，它诱导出相同的边界三角剖分，不含平行性把手，且至多包含 $10 \times 24^{113}|\mathcal{T}|$ 0 个 0- 把手。每个 0- 把手对该把手结构的四面体复杂度的贡献至多为 1，因此这组对象的四面体复杂度至多为 $10 \times 24^{113}|\mathcal{T}|$。由引理 5.4，我们于是得到

$$|\mathcal{T}| \geq \frac{1}{10 \cdot 24^{113}k'} \left(\sum_{i=1}^{m} \|q_i/p_i\| - 9794m \right)$$

对某个 $k' > 0$。 □

推论 5.9。设 M是一个具有塞弗特数据 $[\Sigma_g^b, (p_1, q_1) \ldots, (p_n, q_n)]$的流形，其中列表中前 m 个奇异纤维的重数都不为二。那么存在一个普适常数 k 使得

$$\Delta(M) \geq \left(\frac{1}{24} - \frac{9794}{k} \right) m + \frac{1}{24}|\chi(\Sigma)| + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{m} \|q_i/p_i\| + \frac{7}{24}.$$

证明。设 $\mathcal{T}$ 是 M 的一个三角剖分。根据引理 5.2 和命题 5.8，我们得到 $|\mathcal{T}|$ 的四个不同下界，其中包括平凡的下界：至少为一。这四个下界中的最大值必然至少等于它们的平均值，因此我们

可以将 k 也设为至少一，

$$|\mathcal{T}| \geq \frac{1}{4}\left(\frac{m}{6}+\frac{1}{6}(|\chi(\Sigma)|+1)+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}\|q_i/p_i\|-\frac{9794}{k}m+1\right)$$

由此得到该上界。 □

定理 *1.1* 的证明。 命题 5.1 给出了以下上界：

$$\Delta(M) \leq 96|\chi(\Sigma)|+176+70\sum_{i=1}^{n}\|q_i/p_i\|\,.$$

当不存在重数为二的奇异纤维时，下界由命题 5.8 得出。为了将我们的下界推广到存在重数为二的奇异纤维的情形，我们取一个二重覆盖，从而除至多一个之外消除所有这类奇异纤维。

考虑如下构造的 M 的二重覆盖：将 M 视为以 S 为底空间的圆丛，其中 S 是一个带有 n 个锥点的 Σ 。重数为二的奇异纤维是重数为二的锥点的原像。通过选取一族不交的弧来配对这些锥点（至多剩下一个），这些弧的起点和终点均为重数为二的锥点。令 s 为弧的条数。存在一个同态 $\pi_1(S) \to \mathbb{Z}/2$ ，它将一个环路映射为该环路与这族弧的交点数 $\widetilde{}$ 模 2。与该同态 $\widetilde{}$ 的指数为 2 的核相对应的二重覆盖 $S \to S$ ，在三维流形层面诱导出一个水平二重覆盖 $M \to M$ 。（等价地，我们可以考虑 M 中由 S 里这些弧的原像构成的克莱因瓶族，并取相应的二重覆盖。）

哪个塞弗特纤维化流形是 M？利用黎曼-赫尔维茨公式， $\widetilde{S}$ 的基底曲面 $\widetilde{M}$ 的欧拉示性数为 2χ（S）$-\sum_{i=1}^{2s}1 = 4-2a-2b-2s$，其中 a 根据 S 是否不可定向，分别表示不可定向亏格或定向亏格的两倍，而 b 是 S的边界分支数。它有 $2b$ 个边界分支；对于 M 的每个 $\widetilde{}$ 非二重奇异纤维，都有两个指标为 $\pm q_i/p_i$ 的奇异纤维；此外，如果还剩下一个重数二的奇异纤维，则另有两个重数二的奇异纤维。根据引理 2.2，经过坐标变换后为（p_i-q_i）$/p_i$ 奇异纤维的 $-q_i/p_i$ 奇异纤维，贡献相同的 $\widetilde{}$ 连分数和。由此可得，若 S 可定向，则其亏格为 $a+s-1$；若不可定向，则有 $2a+2s-2$ 个交叉帽。将 M 的奇异纤维列表排序，使重数为二的奇异纤维排在末尾，并令 m 为非二重奇异纤维的数量。

当 $a+b-2 \geq 0$， $|s+a+b-2| = |s|+|a+b-2|$。否则，此时 Σ是一个圆盘，$|s+a+b-2| = |s|-1$所以无论哪种情况， $|s+a+b-2|+2 \geq |s|+|a+b-2|$。我们可以令 k 足够大，使得 $\frac{1}{24}-\frac{9794}{k}$ 至少为 $\frac{1}{48}$。利用这两个界， $\widetilde{}$ 我们可以按如下方式修改推论 5.9 中关于 $\Delta(M)$ 的下界：

$$\begin{aligned}\Delta(\widetilde{M}) &\geq \left(\frac{1}{24}-\frac{9794}{k}\right)2m+\frac{1}{24}|4-2a-2b-2s|+\frac{1}{24}\cdot 4+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m}2\|q_i/p_i\|+\frac{3}{24}\\ &\geq 2\cdot\frac{1}{48}m+\frac{1}{12}(|s|+|a+b-2|)+\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{m}\|q_i/p_i\|+\frac{3}{24}\\ &\geq \frac{1}{24}m+\frac{1}{12}|\chi(S)|+\frac{1}{12}s+\frac{2}{k}\sum_{i=1}^{m}\|q_i/p_i\|+\frac{3}{24}\end{aligned}$$

但此时每个二重重数纤维对所有奇异纤维上的 $\|q_i/p_i\|$ 总和贡献 2，因此 $\sum_{i=1}^{n}\|q_i/p_i\| \leq \sum_{i=1}^{m}\|q_i/p_i\| + 4s + 2$。令 k 至少为 96，我们可得 $\frac{4}{k}$ 至多为 $\frac{1}{24}$，且 $\frac{8}{k}s$ 至多为 $\frac{1}{12}\bar{s}$。因此我们可以得到如下界：

$$\Delta(\widetilde{M}) \geq \frac{1}{24}m + \frac{1}{12}|\chi(S)| + \frac{2}{k}\sum_{i=1}^{n}\|q_i/p_i\| + \frac{1}{12}.$$

将 M 的最小三角剖分提升到二重覆盖上，我们看到 $\backsim\Delta(M) \leq 2\Delta(M)$。因此，选择合适的 k，即可得到该结果。□

6. Further questions

这项工作还留下了几个尚待解决的问题。

我们在定理 1.2 中证明，对于具有非空边界的塞弗特纤维空间，其三角剖分经过 79th 重心细分后，非重数二的奇异纤维总是单纯的。重数为二的奇异纤维是否也如此？我们处理这一情形时遇到的障碍是，无法排除由加厚的 M¨比乌斯带构成的平行丛连通分支。类似地，这对闭塞弗特纤维空间也成立吗？我们充分利用了切割出奇异纤维的环带是本质环带这一事实。在闭情形下，不仅必须处理切出奇异纤维邻域的环面是平凡的这一问题，还必须考虑到某些小塞弗特纤维空间中根本不存在不可压缩可定向曲面。

能否将定理 1.1 中关于三角剖分复杂度的界也推广到闭塞弗特纤维空间？设 M 是一个塞弗特纤维空间，其塞弗特数据为 $[\Sigma, e, (p_1, q_1)、\ldots\ldots、(p_n, q_n)]$,，其中 e 是欧拉数，Σ 是亏格为 g 的闭曲面。若 M 含有本质竖直环面，那么根据 [17], 的推论 6.8，我们可以得到一个顶点正规本质环面。因此，除少数存在水平环面的情形外，我们可以找到一个基本本质竖直环面。沿此环面切割后，所得流形具有把手结构，其大小上下均受原三角剖分大小的某个线性函数所界 [20, 定理 9.3], ，由此可知，对于某个 k'，$\Delta(M)$ 至少为 $k'(g + \sum_{i=1}^{n}\|q_i/p_i\|)$。但这并未利用欧拉数，因此不能给出相差乘法常数的上界。通过类似于命题 5.1 的证明，我们知道对于任何闭塞弗特纤维空间，都有 $\Delta(M) \leq k(g + b + |e| + \sum_{i=1}^{n}\|q_i/p_i\|)$。我们猜想（相差一个乘法常数）这也是一个下界。

能否将定理 1.1 中的常数明确写出？这一证明方法唯一的障碍在于，引理 5.4 中的常数依赖于 Masur、Mosher 和 Schleimer 工作中的定理 6.1 所给出的非构造性常数 [24]。

考虑塞弗特纤维空间三角剖分复杂度的一个动机是，流形的单纯体积给出的下界毫无帮助，因为它们的单纯体积为零。另一类格罗莫夫范数为零的不可约 3-流形是图流形。我们仍需根据其拓扑确定它们的三角剖分复杂度（至乘法常数）。设 $\mathcal{T}$ 是这样一个流形 M 的三角剖分。设 $\{T_i\}$ 是给出 JSJ 分解的极大不交正规环面集，因此将 M 切割成一组塞弗特纤维空间 $\{M_j\}$。由于这些环面是本质的，该集合的广义平行性丛 $(\{M_j\}, \{T_i\})$ 是由环带、莫比乌斯带和圆盘丛组成的集合；利用 Agol、Hass 和 Thurston [1], 的算法，

正如 Lackenby [20, 定理 9.3]，所应用的，我们可以计算出 ($\{M_j\}$) 的一个三角剖分，其规模与 $\mathcal{T}$ 的规模呈线性关系。这一策略告诉我们，对于某个 k，$\Delta(M) \geq k \sum_j \Delta(M_j)$。然而，这不可能是最优的，因为一般而言，由给定的一组塞弗特纤维块可以构造出无穷多个图流形；在这项计算中，与闭塞弗特纤维空间的情形大致相同，我们完全丢失了粘合映射中的信息。

References

[1] I. Agol、J. Hass 和 W. Thurston。纽结亏格与跨越面积的计算复杂度。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(9):3821–3850, 2006. [2] K. L. Baker。实心环面的单四面体、单顶点三角剖分。 https://sketchesoftopology.wordpress.com/2008/05/15/the-one-tetrahedron-one-vertex-triangulation-of-the-solid-torus/. [3] A. Barchechat。闭可定向三角剖分三维流形的连通和，2004。预印本，参见 arXiv:0404309。[4] M. G. Brin。塞弗特纤维空间：1993 年春季课程讲义。预印本，参见 arXiv:0711.1346，1993。[5] M. Bucher、R. Frigerio 和 C. Pagliantini。带边界三维流形的单纯体积。 *Journal of Topology*, 8(2):457–475, 2015. [6] B. A. Burton。带尖点双曲流形普查已完成，2014。预印本，参见 arXiv:1405.2695。[7] B. A. Burton、R. Budney、W. Pettersson 等。Regina：低维拓扑软件。`http://regina-normal.github.io/`, 1999–2022. [8] E. Fominykh 和 B. Wiest。环面纽结补空间复杂度的上界。*Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 22(10):1350053, 2013. [9] S. Francaviglia、R. Frigerio 和 B. Martelli。流形的稳定复杂度与单纯体积。 *Journal of Topology*, 5(4):977–1010, 2012. [10] R. Haraway 和 N. R. Hoffman。论带尖点非双曲性的复杂度，2019。预印本，参见 arXiv:1907.01675。[11] W. Jaco、J. Johnson、J. Spreer 和 S. Tillmann。正规曲面亏格的界。*Geometry & Topology*, 20(3):1625–1671, 2016. [12] W. Jaco、H. Rubinstein、J. Spreer 和 S. Tillmann。关于带尖点双曲三维流形的极小理想三角剖分。 *Journal of Topology*, 13(1):308–342, 2019. [13] W. Jaco、H. Rubinstein 和 S. Tillmann。无限族透镜空间的最小三角剖分。 *Journal of Topology*, 2(1):157–180, 2009. [14] W. Jaco、J. H. Rubinstein、J. Spreer 和 S. Tillmann。 $\mathbb{Z}_2$-瑟斯顿范数与三维流形的复杂度，II。 *Algebraic and Geometric Topology*, 20:503–529, 2020。arXiv:1711.10737。[15] W. Jaco、J. H. Rubinstein、J. Spreer 和 S. Tillmann。通过德恩填充得到的三维流形的复杂度，2022。arXiv:2207.12066。[16] W. Jaco、J. H. Rubinstein 和 S. Tillmann。三维流形的覆盖与最小三角剖分。 *Algebraic & Geometric Topology*, 11(3):1257–1265, 2011. [17] W. Jaco 和 J. L. Tollefson。闭三维流形完全分解的算法。*Illinois Journal of Mathematics*, 39(3):358–406, 1995. [18] M. Lackenby。复合纽结的交叉数。

Journal of Topology 2 4 747 768, , ( ): – 2009 0805 4706 . arXiv: . .[19] M. Lackenby。三角剖分实心环面的核心曲线。*Transactions of the American Mathematical Society* 366 11 6027 6050, 2014 1106 2934 , ( ): – . arXiv: . .[20] M. Lackenby。打结性与瑟斯顿范数的高效认证。 *Advances in Mathematics* 387 107796, 2021 , : .

[21] M. Lackenby 和 J. S. Purcell。纤维化三维流形的三角剖分复杂度，2019。预印本，参见 arXiv:1910.10914。[22] M. Lackenby 和 J. S. Purcell。椭圆及 Sol 三维流形的三角剖分复杂度，2022。预印本，参见 arXiv:2212.04683。[23] M. Lackenby 和 S. Schleimer。椭圆流形的识别，2022。预印本，参见 arXiv:2205.08802。

[24] H. A. Masur、L. Mosher 和 S. Schleimer。关于火车轨分裂序列。 *Duke Mathematical Journal* 161 9 1613 1004 4564 , ( ): –

1656, 2012. arXiv: . . [25] S. V. Matveev。三维流形的复杂度理论。 *Acta Applicandae Mathematica* 19 2 101 , ( ): –

130, 1990. [26] S. V. Matveev。

Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds 9 *Algorithms and Computation in Mathematics* 2007 , 卷 of。施普林格出版社，纽约，第二版，。[27] S. V. Matveev 和 V. V. Tarkaev。复杂度不超过 13 的三维流形的识别与列表。 *Chebyshevskii sbornik*, 21(2):290–300, 2020. [28] A. Mijatovi´c。塞弗特纤维化流形的三角剖分。 *Mathematische Annalen*, 330:235– 273, 2004。[29] J. H. Rubinstein、J. Spreer 和 S. Tillmann。带尖点双曲三维流形的一类新极小理想三角剖分，2021。arXiv:2112.01654。[30] W. Thurston。三维流形的几何与拓扑。访问地址: http://library.msri.org/books/gt3m/ 1980 , 。[31]

A. Y. Vesnin 和 E. A. Fominykh。Paoluzzi-Zimmermann流形复杂度的精确值。 *Doklady Mathematics*, 84(1):542–544, 2011. [32] A. Y. Vesnin、V. V. Tarkaev 和 E. A. Fominykh。复杂度为 10 且体积最大的带尖点双曲三维流形。 *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 289(1):227–239, 2015。

University of Oxford*Email address*:
adele.jackson@maths.ox.ac.uk