莫尔晶格边缘线性和非线性光局域化的观测

A. A. Arkhipova,[1,2] Y. V. Kartashov,[1,3,*] S. K. Ivanov,[3] S. A. Zhuravitskii,[1,4] N. N. Skryabin,[1,4] I. V. Dyakonov,[4] A. A. Kalinkin,[1,4] S. P. Kulik,[4] V. O. Kompanets,[1] S. V. Chekalin,[1] F. Ye,[5,*] V. V. Konotop,[6] L. Torner,[3,7] 和 V. N. Zadkov[1,2]

[1]俄罗斯科学院光谱学研究所，*108840*，俄罗斯莫斯科特罗伊茨克[2]高等经济学院物理系，*105066*，俄罗斯莫斯科[3]*ICFO*光子科学研究所，巴塞罗那科学技术研究院，*08860*，西班牙卡斯特尔德费尔斯（巴塞罗那）[4]量子技术中心，*M. V.* 罗蒙诺索夫莫斯科国立大学物理系，*119991*，俄罗斯莫斯科[5]上海交通大学物理与天文学院，中国上海 *200240*[6]里斯本大学科学学院物理系及理论与计算物理中心，*Campo Grande*，*Ed. C8*，里斯本 *1749-016*，葡萄牙[7]加泰罗尼亚理工大学，*08034*，西班牙巴塞罗那

我们观察到，在由以勾股角相互扭转的周期性方形子晶格叠加形成的截断莫尔晶格的边缘和角部，存在光的线性与非线性局域化。在飞秒激光刻写的莫尔晶格中，通过实验激发角部线性模，我们发现，与体激发相比，其局域化特性存在显著差异。我们还研究了非线性对角部模和体模的影响，并通过实验观察到，随着输入功率增大，系统由线性准局域态跨越至表面孤子。我们的结果首次通过实验展示了光子系统中由周期性莫尔结构截断所诱导的局域化现象。

PhySH 主题分类：孤子；边缘态；波导阵列

莫尔晶格（ML结构）是由两个相互扭转的相同子晶格构成的独特物理结构。对于某些扭转角（具体取决于底层子晶格的对称性），ML结构会变为周期性（别名公度），而对于其他所有角度则呈非周期性（别名不相称）。这类晶格可用于研究在从周期性向非周期性转变的过程中，因能谱发生定性变化而产生的物理现象。ML结构在低维材料领域具有极其重要的意义，例如扭转石墨烯双层；在这类材料中，ML结构促成了非常规超导性和铁电性的发现[1-3], 分形能谱的观测[4], 关联陈绝缘体的实现[5,6], 边缘输运的研究[7,8], ，以及许多其他由构成材料层的扭转所控制的效应[9]。此外，研究人员还在冷原子、玻色–爱因斯坦凝聚态和热原子蒸气中对ML结构进行了理论研究[10-12]。

在光学领域，ML结构有助于阐明具有特定反射率的超表面[13,14]，还可用于实现魔角激光器[15]。不同于对应的材料结构，光子莫尔晶格可实现为由单一平面内扭转子晶格构成的单层结构。这使得人们能够观察二维光束的局域化—离域化转变；当构成子晶格的深度或扭转角发生变化时，便会出现这种转变[16,17], ，而此前这种现象仅在一维几何结构中实现过[18,19]。从公度几何结构转变为非公度几何结构时，线性莫尔晶格光谱发生的定性变化，会显著影响自持非线性态——晶格孤子的形成。扩展莫尔晶格中几何结构对二维晶格孤子形成的影响已有研究[20,21]。人们提出了各种材料莫尔晶格的光子模拟方案[22,23]，旨在探索平带物理以及莫尔能带的拓扑性质[24]；这些性质最初是在双层石墨烯中发现的[25-27]。

在本文中，我们首次展示了由两个以勾股角相互扭转的方形波导阵列构成的光子飞秒激光刻写莫尔晶格。该莫尔晶格的刻写方法允许将其截断于一个较大的方形区域之外，从而能够研究角点和边缘激发，以及主晶格轴相对于其外部边界具有不同取向时的线性和非线性区域。我们发现，尽管此类莫尔晶格的能带并非拓扑能带，但它们支持带内线性模，这些模主要局域于深处的角点或边缘波导中，在晶格内部仅有微弱的背景。与体区中观察到的快速衍射不同，即使是低功率角点激发也表现出良好的局域化。这类局域角点／边缘模的存在，与由相同波导构成的常规有限二维阵列中线性模的性质形成鲜明对比[28], ：在后者中，观察不到强局域化，所有模态都保持非局域。因此，莫尔晶格中存在两个子晶格对于局域态的出现至关重要。这也不同于边缘和角孤子的形成：它们仅在截断的一维[29,30] 和二维阵列[28,31,32] 中超过功率阈值后才会存在（综述见[33-35]），也不同于光子石墨烯中边缘孤子的动力学[36]。

在具有聚焦型三次非线性且刻写有多波导阵列的介质中，光束的传播由光场无量纲振幅 ψ 所满足的非线性薛定谔方程描述：

$$i\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2}\Delta \psi - |\psi|^2 \psi - \mathcal{P}(\mathbf{r})\psi, \tag{1}$$

其中 ^{2} ^{2} ^{2} ^{2} / /x y$\Delta = \partial$ ∂ $+\partial$ ∂；(,)x y=r 归一化至特征尺度 0 10 mr $=$ μ；z 是归一化至衍射长度 20kr 的传播距离；$= 2\pi$ λ/k n；$\lambda = 800$ nm 为工作波长；函数 $\mathcal{P}$ $=$ $\mathcal{V}[$ θ_1 $]+$ $\mathcal{V}[$ $-\theta_2$ $]$ ( ) ( ) ( ) p R p R r r r 描述了由两个相同的方形子晶格 $\mathcal{V}[$ θ_1 $]$ ( ) R r 和 $\mathcal{V}[$ $-\theta_2$ $]$ ( ) R r 叠加形成的 ML，其深度为 2 20 /p k r n n= δ，其中 nδ 为折射率对比度（本例中 1.95p $\approx$ ，对应于 δ ~ 2 2×10^{-4}.n）。两个子晶格沿相反方向旋转，因此它们之间的总扭转角为 $\theta_1 + \theta_2$；( )R R $=$ θ 是旋转角度为 θ 的二维旋转算子。每个子晶格 s s ,( ) (,) l j x lw y jw $\mathcal{V}$ r $= \sum$ $\mathcal{Q}$ $-$ $-$ 都是周期为 s $= 3$ 3 .w (33 m)μ 的方形阵列，由相同波导 ^{2} ^{2} x y (/) (/) (,) x w y w x y e $\mathcal{Q}$ $=$ $^-$ $^-$ 构成；由于写入工艺，这些波导呈椭圆形，宽度分别为 x $= 0$ 25 .w (2.5 m)μ 和 y 0.75w =(7.5 m)μ 。旋转会改变 ML 主轴的方向，

但椭圆形波导的长轴和短轴始终分别与x轴和y轴平行[，参见图 3(a)中的照片及 [37]]中的图S1大图。当子晶格之间的扭转角等于 $\theta_1+\theta_2=$ [$^2-$ ^{2} 2] arctan( )/ $m\,n\,mn$——与勾股数组 $^2-$ ^{2} 2 ， $^2+$ ^{2} (,) $m\,n\,mn\,m\,n$对应的角度，其中0$m\,n$> >，， $m\,n\in\mathbb{N}$ ——相应的无限ML恰好具有周期性（即公度），且重叠波导位于节点处[，参见图 1(a)、3(a)中与(,) (= 2,1])$m\,n$对应的结构；而对于所有其他角度，结构均为非周期性（即不相称）。由于我们关注截断对原本具有周期性的 ML 结构本征模的影响，因此这里只考虑前一种情况。为截断 ML，我们保留两个子晶格中，仅保留坐标为$_{\rm c\,s}$(cos sin) $x\,w\,l\,j=$ $\theta-$ θ、$_{\rm c\,s}$(sin cos) $y\,w\,l\,j=$ $\theta+$ θ的波导，其中,$l\,j$为整数， $\theta=\theta_1$ 且 $\theta=-\theta_2$落在边长为$_{\rm s}L\,N\,w=$的大正方形区域$_{\rm c\,c}$(,) $\in[-$ 2,+ 2] / / $x\,y\,L\,L$内，其中N为奇数，其边缘平行于x轴和y轴[。图 1(a)、(b)展示了尺寸为$_{\rm s}=11$ $L\,w$和$_{\rm s}21w$的 ML结构]。我们将改变角度$\theta_{1\,2}$.，该角度决定 ML 的晶格矢量相对于结构外部边界的方向，同时保持这些角度之和等于毕达哥拉斯角。

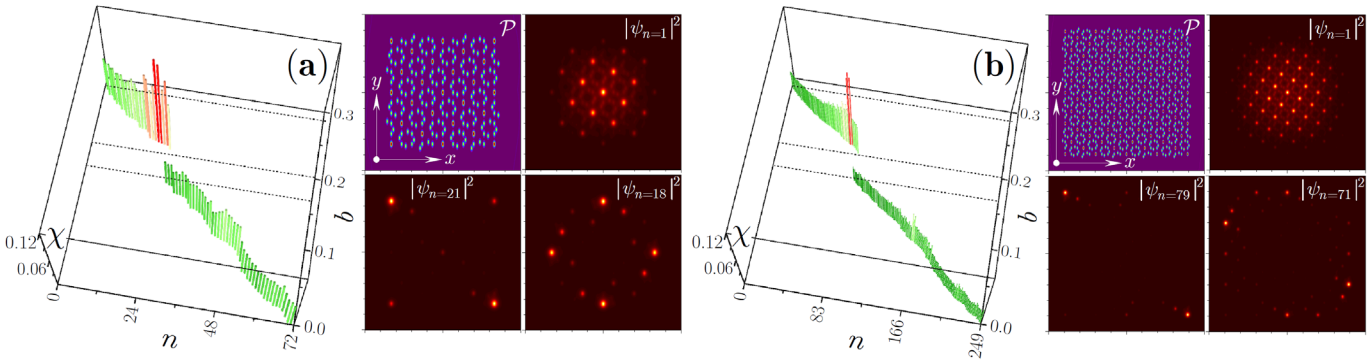

图 1. 尺寸为$_{\rm s}=11$ $L\,w$的截断 ML 中所有线性本征模的形状因子 χ ，随模态索引n和传播常数$_{n}b\,b=$的变化：(a) 和 (b) 分别对应$_{\rm s}=21$ $L\,w$。依赖关系(,)$n\,b\chi$ 右侧的图像展示了具有$_{1}0.\theta=$ 2048π、$\theta_2=0\pi$ 和 ψ ^{2} $_n$分布的代表性本征模中的 ML。图 (a) 和 (b) 分别显示了窗口， $\in[-25,+25]$ $x\,y$和， $\in[-42,+42]$ $x\,y$内的晶格与模态。此处及下文中1.95p =，$_{\rm s}3.3w$ =。

首先，我们计算截断 ML 的线性本征模 ( ) nib znw e$\psi=$r，其中 nb 是模态索引为 n 的模态的传播常数（仅考虑 $_n$ 0b≥ 处的离散谱）。为表征局域化，我们计算所有模态的形状因子 ^{1}[^{4} ^{2}]$^{1\,2}$/U w d $\chi=$ $^-$ $\iint$r（此处 nw w=），其中^2 ^{2} U w d= $\iint$r 为模功率（数值越高 χ 表示局域化越强）。模态按 b 值随 n 增大而递减的顺序排列，简并模除外（所研究的晶格具有 2C 对称性）。图 1(a) 和 1(b) 分别展示了 ML 尺寸为 s= 11 L w 和 s21w 时1.95p 下的依赖关系 (,)n bχ ，其中深波导由不同子晶格中的波导重叠形成，并位于 ML 的角处。图 1(a)、(b) 中的虚线表示相应无限 ML 的能带边缘。尽管截断结构的所有模态都落在允许带内，令人惊讶的是，形状因子显著较大的模态 χ （红色柱）出现在第一能带中，它们主要局域于深角部或边缘波导，仅在 ML 体区有微弱背景，在图示尺度下甚至不可见[（见图 1(a)、(b)）]。随着 ML 尺寸增大[（图 1(b)）]，这类模态仍保持局域，因此它们与非局域态之间的形状因子对比 χ 更加明显。这类模态由 ML 截断所产生：其形状因子随扭转角 $\theta_{1\,2}$ 变化（扭转角决定边缘深波导的位置，见图 4）。这些模态并非拓扑模态（至少对于最高的 5 条能带，能带陈数为 0）。鉴于这些模态中的强度峰在空间上彼此相距较远，为解释其局域化，我们考察底层无限晶格的能带结构。对于图 1 中的扭转角，ML 对应的布里渊区面积为^2 ^{2} ^{2} sK 4 /5w= π，明显小于单个子晶格的面积^2 ^{2} ^{2}sK 4 /w= π。因此，周期性 ML 的能带平坦得多（见 [37] 中的图 S2）。能带的平坦性显著抑制了 ML 中的光束衍射，并使其布洛赫模具有相对尖锐的局部极大值。由于这类布洛赫模态主要局域在最深的波导周围；当这些波导位于截断ML的边界或角时，便会观察到局域态的形成，如图 1 所示。由于ML的能带平坦度会随着子晶格深度的增加而提高，因此随着p增大，截断结构中位于深角或边缘波导内的模态也会表现出更强的局域化。

截断的ML中，孤子可通过牛顿法从公式（1）得到，其形式为 ( ) $_{ibz}w$ $e\psi=$ r 。我们发现，有一些无阈值孤子族从上述带内局域模处分岔而来（例如，图 2(a)中的红线和绿线——这些分支的孤子功率U在b值处恰好为零，这些值对应于发生分岔的线性模的传播常数，模的指标为 $=18$ n和 $=21$ n）。这些孤子主要局域在 ML的角或边缘附近，但在足够高的功率下会与体模杂化。在分岔点附近的低功率和中等功率下，它们是稳定的（绿线对应.$U\leq1$ 36 ）。此外，我们还在半无限带隙中发现了位于结构角部（洋红色曲线）和中心（蓝色曲线）的孤子。前一族对应于功率超过阈值功率 $0.59U\approx$后存在的表面孤子；后一种状态则没有阈值（在横向无限阵列的极限情况下，二维晶格孤子只有在功率超过阈值后才存在，因为此时它们在截止[33], 处趋近于离域布洛赫波；但在我们的有限 ML中，它们从具有有限宽度$L\sim$ 的 $=1$ n模分岔而来）。这两个孤子族在/ $0\,dU$ $db>$ 的区域内均稳定。由于带内孤子族在功率超过表面孤子形成阈值的区间内稳定，因此对于单点输入，可以观察到属于这两个孤子族的状态之间平滑的转换。

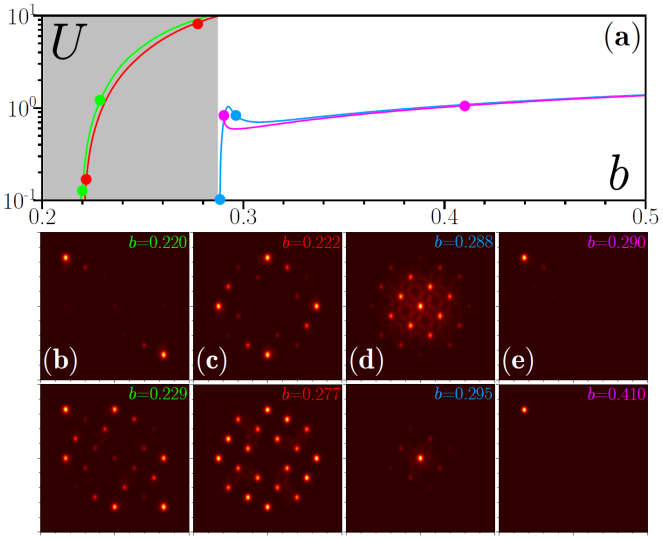

图 2. (a) 孤子族的( )U b 依赖关系：一类孤子族从允许带中的模式分岔而来（灰色区域中的绿色和红色曲线），另一类从半无限带隙分岔而来，其中一支从线性极限分岔（蓝色），另一支具有非零激发阈值（洋红色）；它们分别局域于多波导阵列的中心和角落，参数为$_s11L$ $w=$,$_1$ $0.\theta$ $=$ 2048π, $\theta_2 = 0\pi$。(b)–(e) 对应$()$ U b 曲线上各点所示孤子的 ψ^2 分布。

在实验中，我们采用飞秒激光直写技术，在长 10 cm 的熔融石英玻璃中刻写了ML结构（详情见[37]）。图3(a)展示了其中一个制备完成的ML结构的显微图像，其尺寸为$_s=11$ L w。彩色圆圈标出了单点激发的典型位置（ML结构的角部、边缘和中心）；我们使用来自1 kHz飞秒钛蓝宝石激光器的可变能量E、脉宽为300 fs的脉冲进行激发。

在多波导阵列中心激发波导，在光到达晶格边缘时会在线性区间产生强烈衍射，甚至会沿样品长度反弹回来

≈ 88 z见图

[3

(d)：左侧展示不同脉冲能量下蓝色的实验输出图样，右侧则为基于公式（1）的理论结果]。这是因为对中心波导进行单点激发会同时以相近的权重激发系统的许多线性模，其中大多数是非局域的（见[37]中的图S3(b)）。随着输入脉冲能量增加，可以观察到输出图样逐渐收缩，最终在 ~ 540

[3]

nJE形成高度局域的中心孤子（图 (d)）。与此形成鲜明对比的是，激发角落处的深波导只会产生弱得多的展宽[图 3(e)]。在低能量下，输出图样与图 1 中计算得到的线性角点模式非常相似。

事实上，这种输入与角态模式有很强的重叠，因此主要激发局域于角上的态，如 [37] 中图 S3(a) 的模态权重所示。所有其他态，包括非局域态，激发权重都很小，不会对动力学过程产生影响。即使将数值模拟距离延长至 $= 10^3$ z，远超样品长度，也未观察到图样展宽，但可以观察到对角处的光强逐渐增强（这是受激角态模式之间拍频的结果，例如，单点输入使对角处几乎等量占据了具有同相和反相光斑的模式）。即使很弱的非线性也能抑制这种拍频，从而形成角态，其形状在输入功率达到 ~ 400 [nJE时仍几乎保持不变，见图 3(e)]。在更高能量下，我们观察到系统平滑过渡到强局域化的角孤子，见图 3(e) 中 [面板的 $= 650$ nJE]。即使输入功率接近材料的损伤阈值，激发浅波导也未观察到局域化。

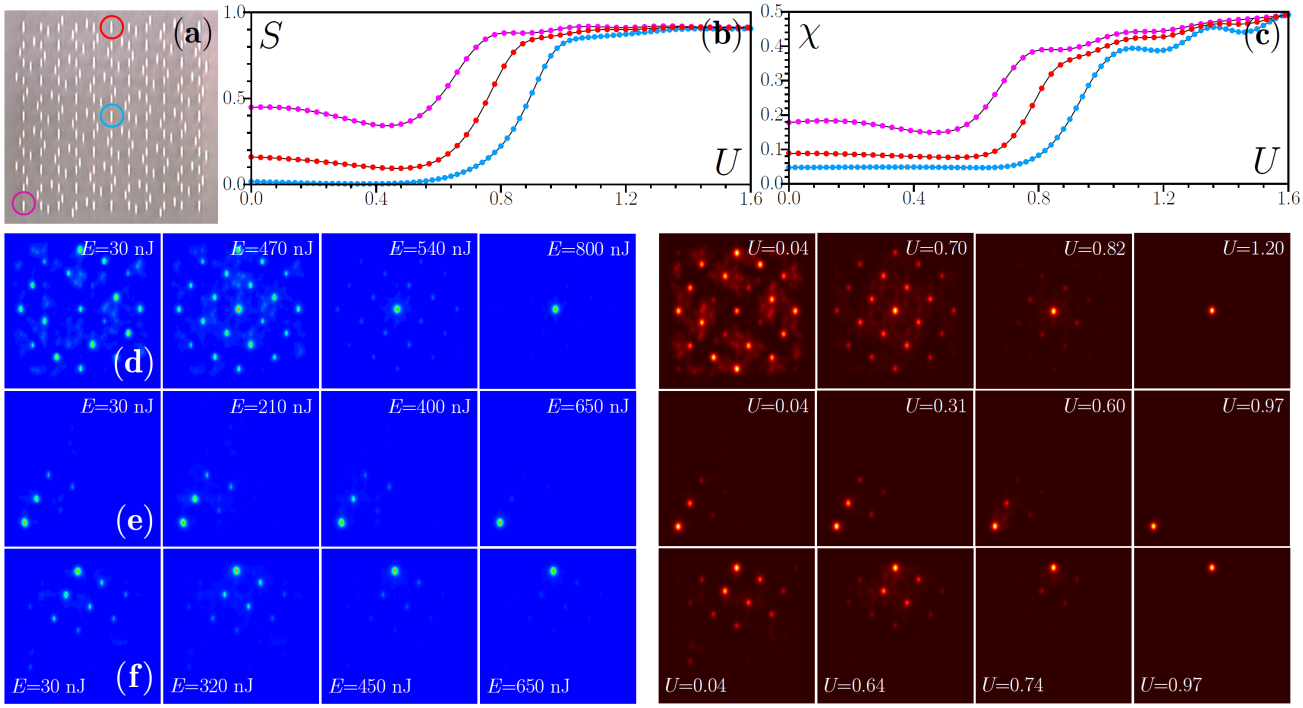

图 3. (a) 飞秒激光直写多波导阵列的照片，其参数为$_1$ $0.\theta$ $=$ $2048\pi, \theta_2 = 0\pi,$ $_s11L$ $w=$ 。理论计算的功率分数（b），即保留在受激波导中的功率分数，以及输出形状因子（c）随输入功率的变化。曲线的颜色对应于 (a) 中表示受激波导的圆圈。激发多波导阵列中心时的实验输出分布（蓝色图像）及其对应的理论分布（深红色图像）

(d)，其左下角 (e) 和顶行中央 (f)。强度分布显示在，$\in[-22,+22]$ x y 窗口内，对应于 440 mμ 。

在多波导阵列上边缘的深波导激发中也观察到了类似行为，见图 3(f)[]，，尽管此时线性输出的扩展程度稍大，这与相应线性模式的形状一致，见图 1(a) 中具有 $=18$ n 的模式[]。中心激发发生向强局域化单点孤子转变时所需的功率高于角激发，见图 3(d)、(e)[]。理论计算的功率分数随输入功率的变化关系也证实了这一点，见图 2(b)[]：输出时仍位于以受激波导为中心、半径为 $_{s}w$ 的圆形区域内的功率分数 $_{\text{out in}}/S\,U\,U=$ 随输入功率U的变化。在不同激发方式下，表明强局域化的较大S值转变发生在明显不同的功率水平。对于角激发，即使在$0U\rightarrow$时，S也已足够大，表明线性角点模式得到了有效激发。从图 3(c) 中输出场形状因子$^{1}[\quad{}^{4}\ {}^{2}\ ]^{1\,2}/$ $Uwd\chi=\ {}^{-}\iint\mathbf{r}$随$U$的变化关系也可得出类似结论。

为了研究截断ML中的局域化特性如何取决于ML相对于截断框架的相对旋转，我们刻写了若干尺寸相同的晶格$_{s}=11\quad L\quad w$，并采用对应于固定$\theta_1+\theta_2\approx 0\ 2048\pi$.的不同角度组合，然后分析其角点和边缘激发。图4左列展示了不同晶格的照片及受激波导。

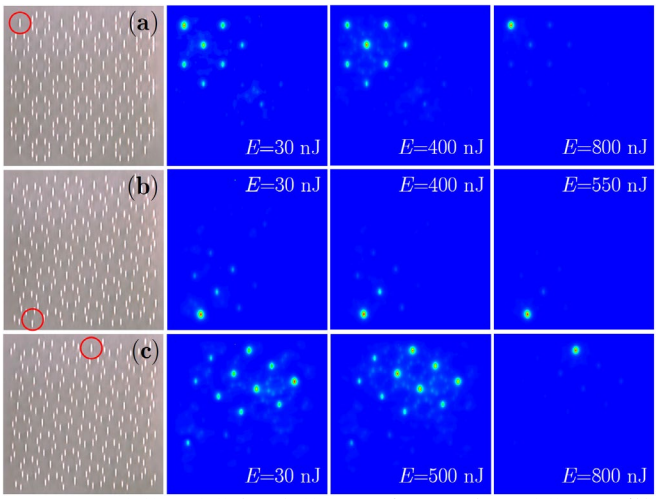

图4. 不同取向的飞秒激光写入的ML照片，圆圈标出受激波导（第一列）；不同输入脉冲能量下测得的输出强度分布（第二至第四列），分别对应于 (a) $_{1}0.\theta\ =\ \ 1024\pi$, $_{2}0.\theta\ =\ \ 1024\pi$, (b) $_{1}0.\theta\ =\ \ 1536\pi$, $_{2}0.\theta\ =\ \ 0512\pi$, (c) $_{1}0.\theta\ =\ \ 1639\pi$, $_{2}0.\theta\ =\ \ 0409\pi$。

局域化特性强烈依赖于$\theta_{1\,2,}$。因此，在$_{1}\ 0.\theta\ =\ \ 1024\pi$、$_{2}\ 0.\theta\ =\ \ 1024\pi$的构型中，由于 ML 的主轴恰好沿截断正方形区域的对角线取向，该构型具有很高的对称性；在线性情形下，角点模态的局域化较弱[图 4(a)]。在中等能量水平下$\sim 400\quad$ nJE，甚至可以观察到非线性诱导的离域化，此时强度最大值移入 ML 体区。相较之下，对于$_{1}\ 0.\theta\ =\ \ 1536\pi$、$_{2}\ 0.\theta\ =\ \ 0512\pi$，ML 中每条边附近都只有一个重叠波导；我们观察到其角点局域化甚至优于图 3 中的情况，几乎局限在单个波导内[图 4(b)]，且随着E增大，这一现象更加明显。最后，当$\theta_{1\,2}$，取值使所有重叠波导都略微移向结构内部时，例如$_{1}\ 0.\theta\ =\ \ 1639\pi$、$_{2}\ 0.\theta\ =\ \ 0409\pi$，可以观察到强烈的衍射，边缘激发表明边缘附近不存在局域化模态[图 4(c)]。此时需要相当强的非线性才能实现边缘局域化。

总之，我们证明，原本具有周期性的光子莫尔晶格经截断后会引入全新的物理现象，尤其可能出现带内模态，且这些模态主要局域在角点或边缘波导附近。我们的发现为探索各种物理体系中的非常规局域化现象铺平了道路，例如低维材料、扭转双层石墨烯、原子系统和声学体系。特别是，在非线性区域驱动的其他莫尔异质结构中，随着功率升高，也可能发生向强局域化角点、边缘和体孤子的转变。

*kartashov@isan.troitsk.ru
*fangweiye@sjtu.edu.cn

参考文献

1. R. Bistritzer 和 A. H. MacDonald，“扭转双双层石墨烯中的莫尔能带”，美国国家科学院院刊 108，12233（2011年）。2. Y. Cao、V. Fatemi、S. Fang、K. Watanabe、T. Taniguchi、E. Kaxiras、P. J arillo-Herrero，“魔角石墨烯超晶格中的非常规超导性”，《自然》556，43（2018年）。3. Z. Zheng、Q. Ma、Z. Bi、S. de la Barrera、M.-H. Liu、N. Mao、Y. Zhang、N. Kiper、K. Watanabe、T. Taniguchi、J. Kong、W. A. Tisdale、R. Ashoori、N. Gedik、L. Fu、S.-Y. Xu、P. Jarillo-Herrero，“莫尔异质结构中的非常规铁电性”，《自然》588，71（2020年）。4. C. R. Dean、L. Wang、P. Maher、C. Forsythe、F. Ghahari、Y. Gao、J. Katoch、M. Ishigami、P. Moon、M. Koshino、T. Taniguchi、K. Watanabe，“莫尔超晶格中的霍夫施塔特蝴蝶与分形量子霍尔效应”，《自然》497，598（2013年）。5. Y. Cao、V. Fatemi、A. Demir、S. Fang、S. L. Tomarken、J. Y. Luo、J. D. Sanchez-Yamagishi、K. Watanabe、T. Taniguchi、E. Kaxiras、R. C. Ashoori、P. Jarillo-Herrero，“魔角石墨烯超晶格半填充时的关联绝缘体行为”，《自然》556，80（2018年）。6. G. Chen、A. L. Sharpe、E. J. Fox、Y. H. Zhang、S. Wang、L. Jiang、B. Lyu、H. Li、K. Watanabe、T. Taniguchi、Z. Shi、T. Senthil，“莫尔超晶格中可调控的关联陈绝缘体与铁磁性”，《自然》579，56（2020年）。7. M. Koshino，“扭转双双层石墨烯的能带结构与拓扑性质”，《物理评论B》99，235406（2019年）。8. Y. Wang、J. Herzog-Arbeitman、G. W. Burg、J. Zhu、K. Watanabe、T. Taniguchi、A. H. MacDonald、B. A. Bernevig、E. Tutuc，“扭转双双层石墨烯的体态和边缘性质”，《自然·物理》18，48（2022年）。9. S. Carr、D. Massatt、S. Fang、P. Cazeaux、M. Luskin、E. Kaxiras，“扭转电子学：通过扭转角调控二维层状结构的电子性质”，《物理评论B》95，075420（2017年）。10. A. Gonzalez-Tudela、J. I. Cirac，“扭转双层光学势中的冷原子”，《物理评论A》100，053604（2019年）。11. L. J. O'Riordan、A. C. White、T. Busch，“受驱玻色-爱因斯坦凝聚体中的莫尔超晶格结构”，《物理评论A》93，023609（2016年）。12. Z. Chen、X. Liu、J. Zeng，“相干原子气体中的电磁诱导莫尔光学晶格”，《物理学前沿》17，42508（2022年）。13. G. W. Hu、A. Krasnok、Y. Mazor、C. W. Qu、A. Alù，“莫尔双曲超表面”，《纳米快报》20，3217（2020年）。14. G. Hu、M. Wang、Y. Mazor、C.-W. Qiu、A. Alù，“利用层状莫尔超表面调控光”，《化学趋势》3，342（2021年）。15. X.-R. Mao、Z.-K. Shao、H.-L. Luan、S.-L. Wang、R.-M. Ma，“纳米结构莫尔超晶格中的魔角激光器”，《自然·纳米技术》16，1099（2021年）。16. P. Wang、Y. Zheng、X. Chen、C. Huang、Y. V. Kartashov、L. Torner、V. V. Konotop、F. Ye，“光子莫尔晶格中的光局域化与去局域化”，《自然》577，42（2020年）。

17. C. Huang、F. Ye、X. Chen、Y. V. Kartashov、V. V. Konotop、L. Torner，“毕达哥拉斯非周期势中的局域-离域波包转变”，《科学报告》6，32546（2016年）。18. Y. Lahini、R. Pugatch、F. Pozzi、M. Sorel、R. Morandotti、N. Davidson、Y. Silberberg，“准周期光子晶格中局域化转变的观测”，《物理评论快报》103，013901（2009年）。19. J. Billy、V. Josse、Z. Zuo、A. Bernard、B. Hambrecht、P. Lugan、D. Clement、L. Sanchez-Palencia、P. Bouyer、A. Aspect，“受控无序中物质波安德森局域化的直接观测”，《自然》453，891（2008年）。20. Q. Fu、P. Wang、C. Huang、Y. V. Kartashov、L. Torner、V. V. Konotop、F. Ye，“通过角度扭转控制光子莫尔晶格中的光学孤子形成”，《自然·光子学》14，663（2020年）。21. Y. V. Kartashov、F. Ye、V. V. Konotop、L. Torner，“公度-非公度光子莫尔晶格中的多频孤子”，《物理评论快报》127，163902（2021年）。22. B. Lou、N. Zhao、M. Minkov、C. Guo、M. Orenstein、S. Fan，“扭转双层光子晶体薄板理论”，《物理评论快报》126，136101（2021年）。23. K. Dong、T. Zhang、J. Li、Q. Wang、F. Yang、Y. Rho、D. Wang、C. P. Grigoropoulos、J. Wu、J. Yao，“小扭转角下魔角双层光子晶体中的平带”，《物理评论快报》126，223601（2021年）。24. C.-H. Yi、H. C. Park、M. J. Park，“强耦合光子莫尔超晶格”，arXiv:2108.14002（2021年）。25. Z. Song、Z. Wang、W. Shi、G. Li、C. Fang、B. A. Bernevig，“扭转双层石墨烯中的所有魔角均具有拓扑性”，《物理评论快报》123，036401（2019年）。26. M. J. Park、Y. Kim、G. Y. Cho、S. Lee，“扭转双层石墨烯中的高阶拓扑绝缘体”，《物理评论快报》123，216803（2019年）。27. B. Liu、L. Xian、H. Mu、G. Zhao、Z. Liu、A. Rubio、Z. F. Wang，“扭转莫尔超晶格中的高阶能带拓扑”，《物理评论快报》126，066401（2021年）。28. Yu. V. Bludov 和 V. V. Konotop，“有限非线性波导阵列中的表面模与呼吸子”，《物理评论E》76，046604（2007年）。29. S. Suntsov、K. G. Makris、D. N. Christodoulides、G. I. Stegeman、A. Haché、R. Morandotti、H. Yang、G. Salamo、M. Sorel，“离散表面孤子的观测”，《物理评论快报》96，063901（2006年）。30. K. G. Makris、S. Suntsov、D. N. Christodoulides、G. I. Stegeman、A. Hache，“离散表面孤子”，《光学快报》30，2466（2005年）。31. X. Wang、A. Bezryadina、Z. Chen、K. G. Makris、D. N. Christodoulides、G. I. Stegeman，“二维表面孤子的观测”，《物理评论快报》98，123903（2007年）。32. A. Szameit、Y. V. Kartashov、F. Dreisow、T. Pertsch、S. Nolte、A. Tünnermann、L. Torner，“非对称波导阵列中二维表面孤子的观测”，《物理评论快报》98，173903（2007年）。33. F. Lederer、G. I. Stegeman、D. N. Christodoulides、G. Assanto、M. Segev、Y. Silberberg，“光学中的离散孤子”，《物理报告》463，1（2008年）。34. Y. V. Kartashov、V. A. Vysloukh、L. Torner，“光学晶格中的孤子形状与运动控制”，《光学进展》52，63（2009年）。35. Y. V. Kartashov、G. Astrakharchik、B. A. Malomed、L. Torner，“非线性场与物质多维自陷的前沿”，《自然综述：物理》1，185（2019年）。36. Z. Zhang、R. Wang、Y. Zhang、Y. V. Kartashov、F. Li、H. Zhong、H. Guan、K. Gao、F. Li、Y. Zhang、M. Xiao，“光子石墨烯中边缘孤子的观测”，《自然·通讯》11，1902（2020年）。37. 关于多波导阵列的能带结构，以及对角部和中心波导进行单点激发时的模态成分，请参阅补充材料。