arXiv:2301.02093v2 [hep-th] 24 Apr 2023

棱柱张量模型的双标度极限

T. Krajewski[1],T. Muller *[2]和 A. Tanasa[2,3]

[1]艾克斯-马赛大学、土伦大学、法国国家科学研究中心、CPT，法国马赛，欧盟[2]波尔多大学、LaBRI 法国国家科学研究中心 UMR 5800，法国塔朗斯，欧盟[3]DFT、H. Hulubei国家核物理与工程研究所，默古雷莱，默古雷莱，罗马尼亚，欧盟

2023年4月25日

摘要

在 S. Giombi、I. Klebanov、F. Popov、S. Prakash 和 G. Tarnopolsky 的研究中，*Phys. Rev.***D** 98 (2018) 10, 105005，提出了一种棱柱张量模型。本文使用中间场方法研究该模型的图形展开和双标度极限。我们明确展示了 $1/N$ 展开中的次领先阶费曼图。借助适当的组合工具，我们进一步研究了 $1/N$ 展开的一般项，并计算了双标度极限下的 $2-$点函数。我们发现，此处实现的双标度极限机制与若干四次张量模型中实现的机制类似。

目录

1 引言 2 2 双标度极限简述 4 3 棱柱模型；中间场方法 5 4 大 N 极限下的领先阶图 9 4.1 四面体表示中的领先阶图 . . . . . 9 4.2 棱柱表示中的领先阶图 . . . . . **11 5 领先阶图的生成函数 11** 5.1 融子图的生成函数. 11 5.2 棱柱表示中领先阶图的生成函数 . . 14

*通讯作者

6 图解分析 15
6.1 偶极子及其生成函数.156.2 链及其生成函数.166.3 方案分解.22

7 次领先阶图 2 **6**
7.1 无偶极子的二粒子不可约图.267.2 含偶极子的2PI图.277.3 二粒子可约次领先阶图.28

8 二点函数的双标度极限 29

9 双标度极限下的自由能 34

10 总结 **36**

1 引言

张量模型是零维量子场论模型，其场为任意秩的张量（参见著作 [1] [2] 或综述文章 [3],[4], [5], [6] 或 [7]）。

张量模型作为著名随机矩阵模型在三维及更高维度上的推广而被引入（参见 [8] 以及综述 [9, 10]），目前正于数理物理、组合学及数学的其他诸多领域中受到研究。因此，秩为 d 的张量模型与 d 维随机几何自然相关，因为其微扰展开中出现的费曼图与随机三角剖分对偶。此外，Witten [11] 随后以及 Klebanov 和 Tarnopolsky [12] 证明，这类模型与全息 Sachdev-Ye-Kitaev 模型 [13]有关。

张量模型最初于20世纪90年代提出（例如参见 [14]），但当时缺少大 N 机制的实现（在此背景下，N 表示张量的大小）。2011年，随着 Gurau 提出所谓的彩色张量模型 [15], ，这一情况发生了改变；他证明该模型具有定义良好的大 N 展开 [16]。不久之后，人们提出了限制较少的多定向模型 [17]（从微扰展开所允许的费曼图类别来看），并证明它具有定义良好的大 N 展开 [18]。

一种 $O(N)^3$ 不变张量模型在 [19] 中被提出（另见 [20, 21]，其中讨论了各种图形发展的情况）。我们将这类模型称为单场四面体模型，因为其作用量中只有一个张量场，且相互作用呈四面体结构（其指标结构具有四面体的拓扑）。

还要提到的是，[19] 中提出的模型后来由 Klebanov 和 Tarnopolsky 在 [12] 中与著名的全息 SYK 模型联系起来。

Giombi 等人在 [22] 中研究了这类 $O(N)^3$ 不变张量模型的六次相互作用情形。该模型被称为棱柱模型，因为在大 N 极限下，主导项是一个正定算子，其指标结构具有棱柱的拓扑。在本文中，我们将研究这一棱柱模型。

让我们回顾一下，张量模型的大发展 N 通常由一个称为度的参数 ω 控制。大 N 展开由度为零的图主导。在 [23], 中，已证明领先

阶（LO）图 N 在棱柱模型的大 [1][2] 展开中，并非张量模型文献中常见的 melonic 图（另见书籍 [1][2] 或综述文章 [3], [4], [5] 或 [7]）。基本黑瓜由三重蝌蚪图取代。此外，现在有两类 melonic 插入：一类发生在传播子层面（与张量模型文献中的通常情况相同），另一类发生在顶点层面。相较于张量模型文献中已知的操作，这是一种新型的 melonic 操作。

本文给出了对 [23] 的 LO 图识别的另一种证明。我们的证明大量运用了中间场方法，该方法将棱柱模型表示为具有四次四面体相互作用的模型，但包含两个不同的张量场（初始张量场和一个中间场）。

此外，本文使用的中间场方法使我们能够识别大 N 展开中的次领先阶（NLO）图。

因此，本文的主要结果是为棱柱张量模型实现著名的双标度极限机制。采用组合方案分解按照 [24] ，可以在任意度下识别出一个称为主导的图子族，其振幅在模型的耦合常数趋于临界点时发散最强。因此，在这一双标度极限下，各种度的费曼图都会作出贡献，这一点此前已在着色 [25] 模型、多定向模型 [26]以及单场四面体模型 [20]中得到注意。

请注意，本文在实现双标度机制时研究的是 2–点函数，而非自由能。这是因为，从组合学的角度来看，研究二点函数更容易；它对应于组合学家所说的有根图（且没有对称性）。这是组合学中的标准工具，已经被引入数理物理中，用于研究四次张量模型（另见 [20], [26] 和 [25]）。不过，本文得到的二点函数结果可以推广到自由能（或 $2k$点函数），并呈现类似的行为，其中 k 可以是任意值；参见 [26], ，其中这一方法被用于多定向张量模型。

此外，我们证明，该模型的二点函数在双标度极限下是可求和的。这种行为与矩阵模型的情形不同。

本文的总体策略如下：

1. 应用中间场方法，将棱柱模型的六次相互作用化为四次的四面体相互作用。如上所述，这样一来，作用量中便有两个场：原始张量场和中间场（它也是一个张量场）。我们称之为模型的四面体表示（与使用棱柱顶点的“原始”表示相对，后者称为模型的棱柱表示）。

2. 将上述单场四面体模型中已知的结果推广到通过运用中间场方法得到的双场模型。3. 在可能的情况下，从上述双场模型推导出关于原始棱柱模型的结果（从而以某种方式应用“逆向”中间场方法）。

需要指出的是，我们认为，从上述双场模型推导出关于原始棱柱模型的一些结果并非直接可行，因为这里使用的一些组合工具适用于四次相互作用，但无法直接从四次模型迁移到六次模型。

不过需要指出的是，尽管 [22] 本文研究的棱柱模型处于 $3-\varepsilon$维空间中，但本文所采用的双标度极限机制针对的是一个 0–维棱柱张量模型。我们不确定能否将我们的结果轻易推广到 $3-\varepsilon$ 维情形。

为求完整起见，我们还提及，已有研究考察了一些六阶张量模型（但不包括本文研究的棱柱模型）以及其他类型的张量模型；相关作者在 [27], 中分析了这些模型的主导区域和临界行为。

本文结构如下。下一节简要回顾矩阵模型和四次张量模型的双标度极限机制。第三节回顾棱柱模型的定义，以及中间场方法在该模型中的应用。第四节分别展示该模型在四面体表示和棱柱表示下的领先阶图。下一节研究该模型在两种表示下领先阶图的生成函数。第六节引入适当的图示工具，从组合学角度研究该模型在大 N 展开中的一般项。随后几节运用这些工具展示次领先阶费曼图。第八节确定主导图，并计算双标度极限下的 2–点函数。第九节根据双标度极限下的 2–点函数，求得双标度极限下的自由能。最后一节总结全文。

2 双标度极限简述

本节将简要回顾矩阵模型和四次张量模型的大 N 极限与双标度极限。

对于这两类模型，配分函数等感兴趣的量都可以按费曼图展开，并整理成关于 $\frac{1}{N}$ 的幂级数。不过，这两类模型的展开性质有所不同。

一方面，矩阵模型 [28, 29] 展开为带状图。该 $\frac{1}{N}$ - 展开由这些费曼带状图的亏格 g 控制。这些模型的配分函数写作：

$$Z_M(\lambda) = \sum_{g=0} N^{2-2g} Z_g(\lambda) \ ,$$

其中， λ 是相互作用的耦合常数，而 $Z_g(\lambda)$是所有亏格为 g 的图的贡献。在大 N 极限下，只有 $Z_0(\lambda)$ 有贡献——平面图在展开中占主导地位。

另一方面，秩为 D 的四次张量模型可展开为 $D+1$ 边可着色图，其 $\frac{1}{N}$ 展开由 Gurau 度 ω控制。这些模型的配分函数写作：

$$Z_T(\lambda) = \sum_{\omega} N^{3-\omega} Z_\omega(\lambda)$$

与亏格 g 不同，度并非拓扑不变量。再次，在大 N极限下，只有项 $Z_0(\lambda)$ 有贡献，它对应于所谓的融子图。

现在让我们回顾矩阵模型和四次张量模型的双标度极限机制。对于矩阵模型，可以证明，$\frac{1}{N}$ 展开中各阶的系数满足

$$Z_g(\lambda) \sim f_g(\lambda - \lambda_c)^{\frac{5}{2}(1-\gamma_{str})g/2} \ ,$$

其中， λ_c 是耦合常数的临界值，在该值处所有 Z_g 都发散； γ_{str}是模型的临界指数。将双标度参数 κ 定义为

$$\kappa^{-1} = N(\lambda - \lambda_c)^{2-\gamma_{str}/2} \ ,$$

便可将展开重写为

$$Z_M(\lambda) = \sum_{g=0} \kappa^{2g-2} f_g.$$

随后，通过取 $N \to \infty$ 和 $\lambda \to \lambda_c$ ，同时保持 κ 不变，即可得到双标度极限。在此极限下， Z_M 包含了所有图的贡献，而不仅仅是平面图；然而， $Z_M(\lambda)$级数是发散的。

对于四次张量模型，双标度极限机制可通过以下方式得到。据我们所知，在张量模型文献中，双标度极限机制仅针对 2−点或 $2r$点函数（r 为整数）。然而，双标度极限下的自由能可以从 2−点函数中获得，具体解释见下文第3 节。

人们发现，对于具有四面体相互作用的不同模型，双标度极限中的主导图与有根二叉树一一对应，并且 2−点函数有一个精确表达式 [25, 20, 26]。例如，对于具有四面体相互作用的 $O(N)^3$不变模型，可以得到

$$G_2^{DS} = M_c \left(1 + N^{11/12} \frac{\sqrt{3}\lambda_c^{1/2}}{(1+6\lambda_c^2)^{1/2}} \frac{1-\sqrt{1-4\kappa}}{2\kappa}\right),$$

其中 κ 是与.....成正比的双标度参数

$$\kappa^{-1} \sim N^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}\right) \ .$$

3 棱柱模型；中间场方法 d

本节回顾 [22] 棱柱张量模型的定义，以及中间场方法在该模型中的应用。

设一个具有三个指标的随机张量 $T_{i_1 i_2 i_3}$ ，每个指标的取值范围为 1 到 $N \in \mathbb{N}^*$。群 $O(N)^3$ 对张量场的作用如下：

$$T_{i_1 i_2 i_3} = O^{(1)}_{i_1 j_1} O^{(2)}_{i_1 j_1} O^{(3)}_{i_1 j_1} T_{j_1 j_2 j_3}, \tag{1}$$

其中 $O^{(k)}$ 是相互独立的正交矩阵。该模型的作用量为:

$$\begin{aligned} S_N &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} T_{ijk}T_{ijk} \\ &\quad + \frac{tN^{-\alpha}}{6} \sum_{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3} T_{a_1b_1c_1}T_{a_1b_2c_2}T_{a_2b_1c_2}T_{a_3b_3c_1}T_{a_3b_2c_3}T_{a_2b_3c_3}, \quad (2) \\ S_N &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} T_{ijk}T_{ijk} + \frac{tN^{-\alpha}}{6} I_p(T). \end{aligned}$$

其中

$$I_p(T) = \sum_{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3} T_{a_1b_1c_1}T_{a_1b_2c_2}T_{a_2b_1c_2}T_{a_3b_3c_1}T_{a_3b_2c_3}T_{a_2b_3c_3} \quad (3)$$

是**棱柱张量不变量**，其图形表示如图1所示。这里需要指出，上述棱柱相互作用是正定的。

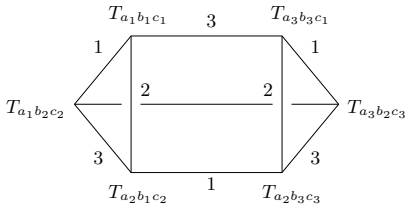


图1：棱柱相互作用

配分函数由此给出为

$$Z(t,N) = \int [dT] e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k} T_{ijk}T_{ijk} + \frac{tN^{-\alpha}}{6} I_p(T)}, \quad (4)$$

其中 $[dT]$ 是张量测度

$$[dT] = \prod_{i,j,k=1}^{N} dT_{ijk}. \quad (5)$$

利用中间场方法，上述六次相互作用可以化简为四次相互作用 [30]。回顾一下

$$\begin{aligned} e^{\frac{tN^{-\alpha}}{6} I_p(T)} &= \int \frac{[d\chi]}{(2\pi)^{N^3/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{N} \chi_{ijk}\chi_{ijk}} \\ &\quad e^{\sqrt{\frac{2tN^{-\alpha}}{6}} \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2=1}^{N} T_{a_1b_1c_1}T_{a_1b_2c_2}T_{a_2b_1c_2}\chi_{a_2b_2c_1}}, \quad (6) \\ &= \int \frac{[d\chi]}{(2\pi)^{N^3/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{N} \chi_{ijk}\chi_{ijk} + \sqrt{\frac{2tN^{-\alpha}}{6}} \tilde{I}_t(T,\chi)}, \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{I}_t(T,\chi) = \sum_{a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2=1}^{N} T_{a_1b_1c_1}T_{a_1b_2c_2}T_{a_2b_1c_2}\chi_{a_2b_2c_1}. \quad (7)$$

因此，使用这种中间场方法得到的相互作用是一种四面体型相互作用，它耦合三个 T 场和一个中间场 χ。这种相互作用的图形表示见图2。

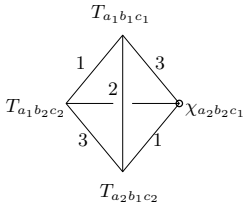


图 2：四面体相互作用

因此，配分函数可以写为

$$\begin{aligned} Z(t,N) &= \int [dT] \frac{[d\chi]}{(2\pi)^{N^3/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{N}(T_{ijk}T_{ijk}+\chi_{ijk}\chi_{ijk})+\sqrt{\frac{2tN^{-\alpha}}{6}}\tilde{I}_t(T,\chi)}, \\ &= \int [dT] \frac{[d\chi]}{(2\pi)^{N^3/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{N}(T_{ijk}T_{ijk}+\chi_{ijk}\chi_{ijk})+\frac{\lambda' N^{-\alpha'}}{4}\tilde{I}_t(T,\chi)}, \end{aligned} \tag{8}$$

这里我们重新定义了耦合常数 $\frac{\lambda' N^{-\alpha'}}{4} = \sqrt{\frac{2tN^{-\alpha}}{6}}$ 。等式 $2\alpha' = \alpha$ 表明，棱柱相互作用的缩放必须是四面体相互作用缩放的两倍。回想一下，单场四面体相互作用已知等于$\frac{3}{2}$ [19]。因此，棱柱相互作用的缩放参数为：

$$\alpha = 3. \tag{9}$$

展开作用量中的相互作用部分并应用维克定理，可以将配分函数写成关于耦合常数的形式幂级数：

$$Z(t,N) = \sum_{n_p \in \mathbb{N}} \sum_{\mathcal{G} \in \mathbb{G}_{n_p}} A_{\mathcal{G}} t^{n_p}$$

其中，第二个求和遍历所有真空 4–正则且适当–边–着色图的集合，这些图在移除所有费曼边[1]后得到的子图是以下对象的不交并： n_p 若未使用中间场，则为棱柱顶点；若引入了中间场，则为$2n_p$ 四面体顶点。参数 $A_{\mathcal{G}}$ 是图$\mathcal{G}$的振幅。在下文中，使用棱柱顶点时，我们称分析是在**棱柱表示**下进行的。使用中间场表示，也就是四面体相互作用时，我们将其称为**四面体表示**。

根据上述中间场方法，费曼图中的任意棱柱顶点都可以拆分为两个由中间场传播子连接的四面体顶点 χ 如图所示 3，其中场 χ 用一条曲线表示。

我们还可以注意到，四面体表示与四面体模型中各个图的二聚体模型有关。二聚体模型研究的是图的完美匹配。请回想一下，图的完美匹配是一种配置，其中每个顶点都恰好与一个相邻的连接顶点配对 [31]。由于每个顶点都只有一个 χ 节点，用一条 χ 传播子连接两个顶点就等同于将它们配对。因此，考虑

[1]由维克定理得到的“费曼”边，在图中以颜色 0 表示

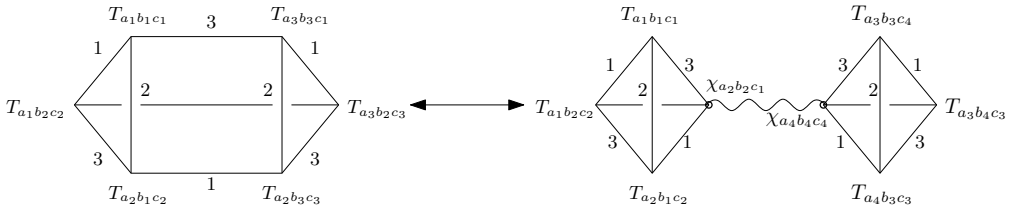


图3：棱柱张量相互作用的中间场方法。

四面体模型中所有图的二聚体，就可以推导出棱柱模型的四面体表示中出现的所有图 [2]。图4展示了四面体模型中一个图的完美配对及其在四面体表示中的对应形式。

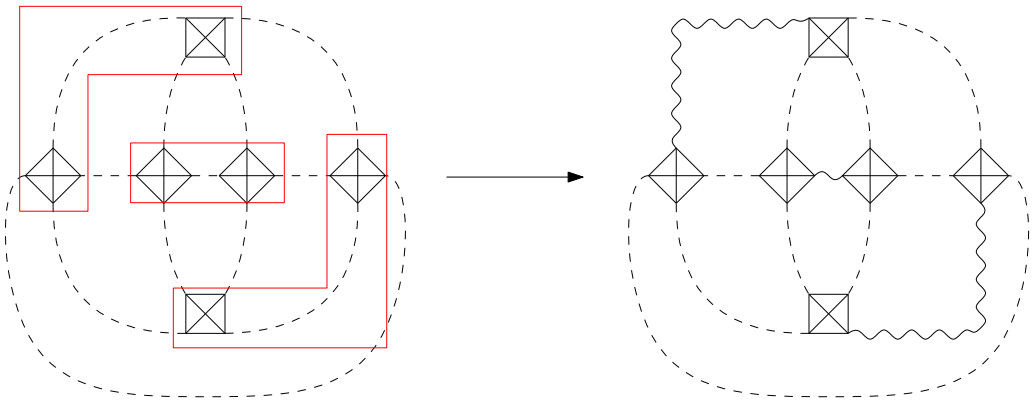


图4：左侧是四面体模型中的一个图及其一种完美配对。右侧是四面体表示中对应的图。

可以证明，真空图的费曼振幅正比于

$$A_{\mathcal{G}} \propto N^{3-\omega(\mathcal{G})}, \tag{10}$$

其中， $\omega(\mathcal{G})$是一个参数，我们称之为度。

从每个图 $\mathcal{G}$中，都可以定义三个颜色为 l 的夹克图，方法是删去$\mathcal{G}$中对应颜色的边。这些夹克图可以视为非定向亏格为 k_l 的带状图（参见 [18]）。利用欧拉示性数公式，可以得到 $\omega(\mathcal{G})$的表达式:

$$\omega(\mathcal{G}) = \sum_{l=1,2,3} \frac{k_l}{2} = 3 + 3n_p - f_{\mathcal{G}} = 3 + \frac{3}{2}n_t - f_{\mathcal{G}} \ . \tag{11}$$

在上面的方程中， $f_{\mathcal{G}}$ 是图$\mathcal{G}$的面的数量。

由配分函数可以定义自由能为

$$F(t, N) = -\frac{1}{N^3}\ln(Z) \ .$$

[2]在更一般的情形下，将单场相互作用中的一个场替换为中间场，等价于考虑原模型中图的二聚体。

以及将 2–点函数定义为

$$\langle T_{abc}T_{a'b'c'}\rangle = G_2(t)\delta_{aa'}\delta_{bb'}\delta cc' \ ,$$

其中 $G_2(t) = \frac{1}{N^3}\langle\sum_{abc} T_{abc}T_{abc}\rangle$。与配分函数类似， $G_2(t)$ 可以展开为真空根图之和。真空根图是带有一条标记边（称为根）的真空图。在第 2–节研究8点函数时，我们默认使用有根真空图。

要从 2–点函数得到自由能 $F(t,N)$，可以引入一个新参数 s ，使得 $t = \tilde{t}s^3$ ；并引入一个重标度场 $\tilde{T}$，使得 $T_{abc} = \frac{1}{\sqrt{s}}\tilde{T}_{abc}$。这样，棱柱作用量的二次部分会乘上一个参数。用波浪号表示引入 s 后的各个量，作用量可改写为

$$\tilde{S}_N = -\frac{1}{2}s^{-1}\sum_{i,j,k}\tilde{T}_{ijk}\tilde{T}_{ijk} + \frac{\tilde{t}N^{-3}}{6}I_p(\tilde{T})$$

而自由能可写为

$$\tilde{F}(s,\tilde{t},N) = -\frac{1}{N^3}\ln\left(\int[d\tilde{T}]e^{-\frac{1}{2}s^{-1}\sum_{i,j,k}\tilde{T}_{ijk}\tilde{T}_{ijk}+\frac{\tilde{t}N^{-3}}{6}I_p(\tilde{T})}\right) \ .$$

重标度场的 2–点函数也可表示为

$$\tilde{G}_2(\tilde{t},s) = \sum_{a,b,c}\frac{1}{\tilde{Z}(s,t,N)}\int[d\tilde{T}]\frac{\tilde{T}_{abc}\tilde{T}_{abc}}{N^3}e^{-\frac{1}{2}s^{-1}\sum_{i,j,k}\tilde{T}_{ijk}\tilde{T}_{ijk}+\frac{\tilde{t}N^{-3}}{6}I_p(\tilde{T})} \ ,$$

$$\tilde{G}_2(\tilde{t},s) = sG_2(\tilde{t}s^3) = \frac{2s^2}{N^3}\frac{1}{\tilde{Z}(s,t,N)}\frac{\partial\tilde{Z}(s,t,N)}{\partial s} = -2s^2\frac{\partial\tilde{F}(s,t,N)}{\partial s} \ .$$

在固定 $\tilde{t}$的条件下，将 $-\frac{G_2(\tilde{t}s^3)}{2s}$从 $s=0$积分到 $s=1$，即可得到原始自由能，因为 $\tilde{F}(s=1,\tilde{t},N) = F(t,N)$，且 $F(s=0,\tilde{t},N) = 0$:

$$F(t,N) = -\int_0^1\frac{ds}{2s}G_2(\tilde{t}s^3),$$

其中我们利用了以下事实： $\tilde{t} = t$ 当 $s=1$时。

4 大 N 极限下的领先阶图

在本节中，我们研究棱柱模型的 $\frac{1}{N}$ 展开，并在四面体表示和棱柱表示中明确展示主导图。正如引言中已经提到的，我们的研究使用了中间场方法。

4.1 四面体表示中的领先阶图

上面的方程（11）表明，棱柱模型的度是一个非负整数。因此，该模型的领先阶费曼图满足以下条件:

$$\omega(\mathcal{G}) = 0. \tag{12}$$

我们先在四面体表示中辨认这些图。按照张量模型文献中的惯例，我们称这些图为 melonic 图。可以证明，它们由图 5 所示的真空基本 melon 出发，通过在任意边上递归插入一个初等二点melon构成。两种类型边上可进行的插入如图 6所示。

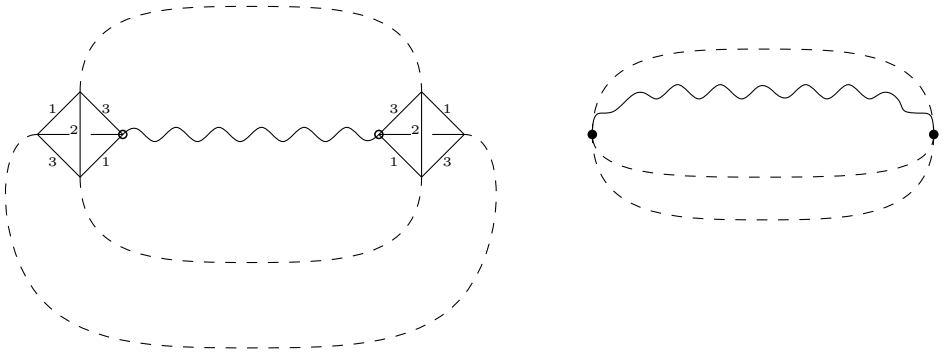


图5：左侧为四面体表示中的真空基本melon。右侧为该图的简化图形表示，其中四面体顶点被黑点取代。

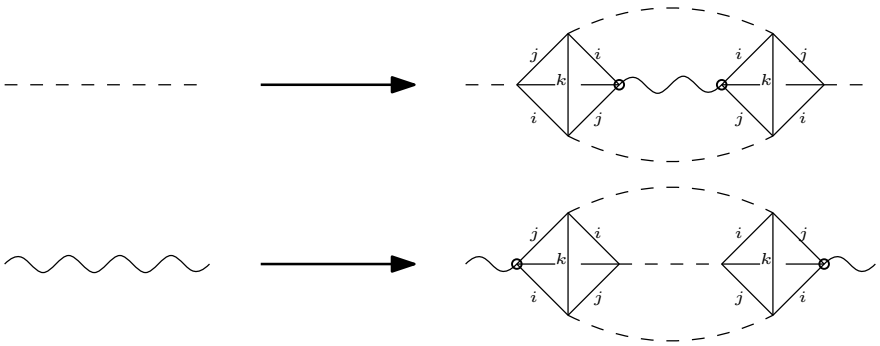


图6：两种类型传播子上的 melonic 插入。

我们在图7 中给出一个通过在传播子上插入融子结构而得到的融子图示例：左侧为 T 传播子，右侧为 χ 传播子。

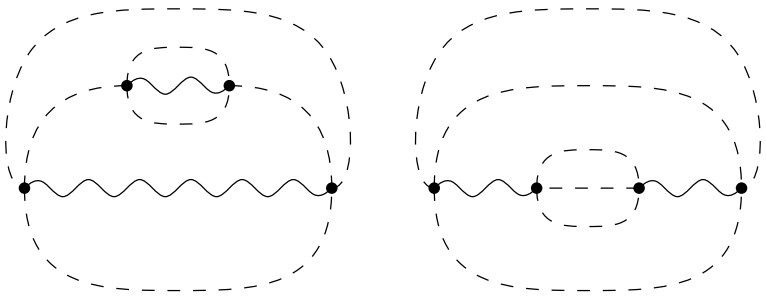


图7：melonic 图示例。

4.2 棱柱表示中的领先阶图

在棱柱表示中，四面体表示中的初等梅尔隆变成了一个三重蝌蚪图（其各种图形表示见图8 ）。我们将这个三重蝌蚪图称为初等三重蝌蚪图。

现在我们来说明，四面体表示中的两种 melonic 插入在棱柱表示中分别对应什么。在一条 T 传播子上的插入等价于插入一个 2–点双重蝌蚪图（通过“切断”基本三重蝌蚪图的一条边得到）。在一条 χ 传播子上的插入等价于在棱柱顶点处进行插入。具体做法是将一个棱柱顶点“分裂”为两个由 T 条传播子连接的棱柱顶点（见图9）。

我们在图10 中给出棱柱表示下 LO 图的一些示例。第一个图是基本三重蝌蚪图。第二个图是通过分裂基本三重蝌蚪图的顶点得到的。第三个图是在第一个图（基本三重蝌蚪图）的一条边上插入一个 2–点双重蝌蚪图得到的，依此类推。

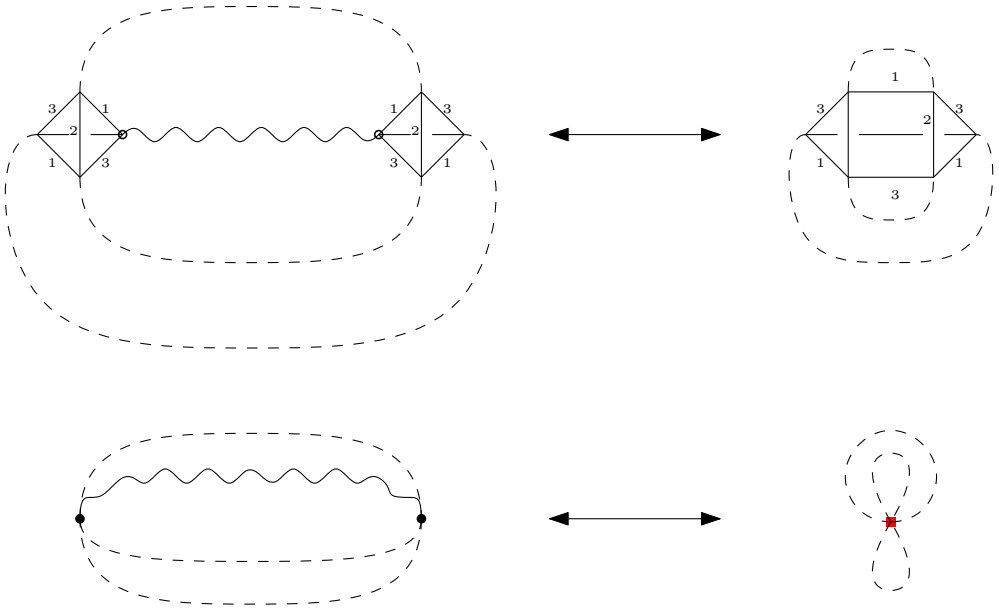


图 8：左侧为两种图形表示中的初等真空梅尔隆。右侧为它们的棱柱等价物。右下方用红色方块表示棱柱顶点。

5 领先阶图的生成函数

5.1 melonic 图的生成函数

在本小节中，我们分析四面体表示下 melonic 图的生成函数，找出其奇点，并研究该生成函数在奇点附近的行为。

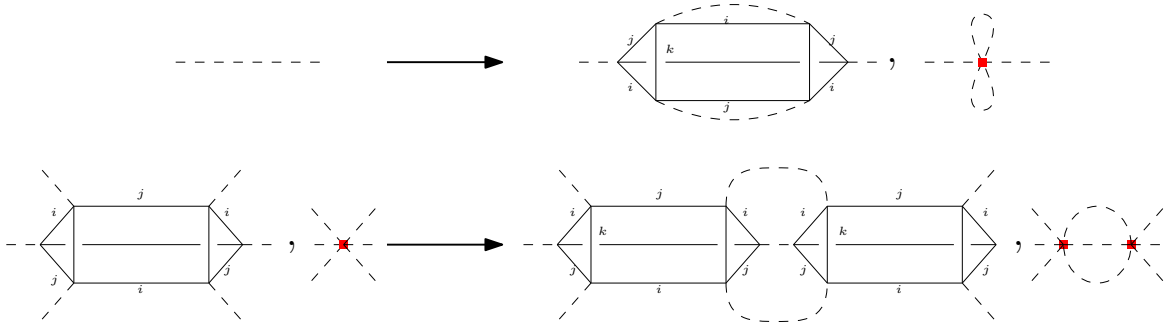


图 9：两种 melonic 插入的棱柱等价物。

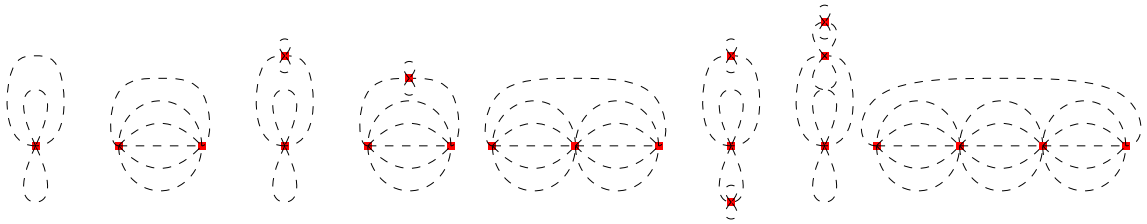


图 10：棱柱表示中的领先阶图示例。

由于有两类 2–点函数（分别对应两种传播子），我们用 $M_T(t)$ 和 $M_\chi(t)$ 表示对应的两组 melon 图的生成函数。如图11所示。

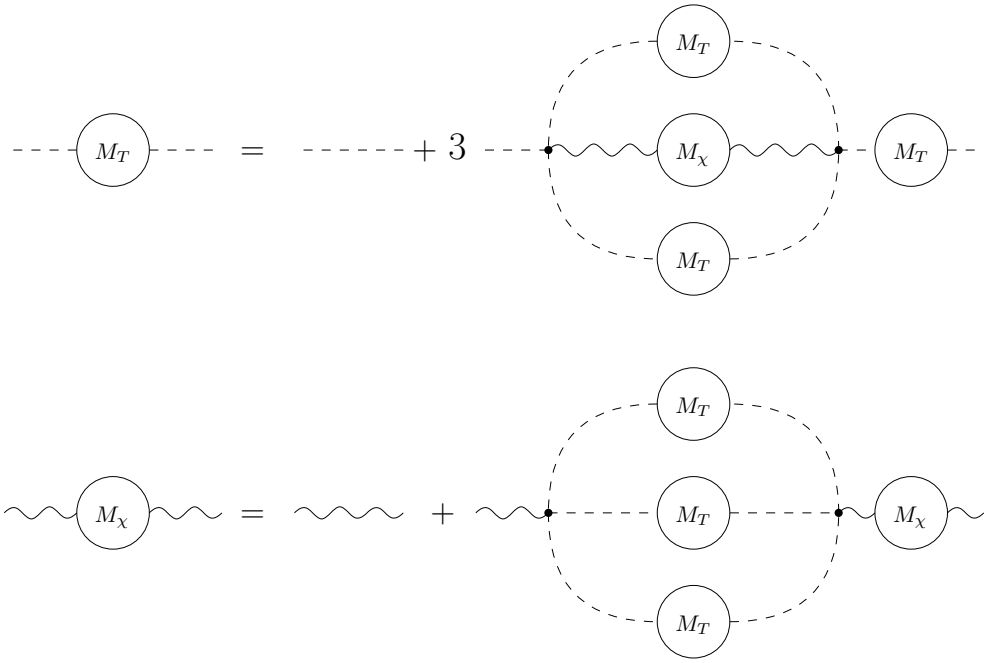


图 11：四面体表示中的领先阶 2–点函数。

有

$$\begin{aligned} M_T(t) &= 1 + 3tM_T^3(t)M_\chi(t), \\ M_\chi(t) &= 1 + tM_T^3(t)M_\chi(t), \end{aligned} \tag{13}$$

其中，第一个方程中的因子 3 统计了将一条连接融子图两个顶点的 χ 传播子放置在三种不同位置的选择。将第一个方程中的 $M_\chi(t)$ 代入可得

$$1 + t(M_T^4(t) + 2M_T^3(t)) - M_T(t) = 0. \tag{14}$$

求出这类方程的通解是一项复杂的工作。不过，可以推导出它的奇点，即解不再是解析函数的那些点。

可以考虑由下式给出的更一般的问题

$$F(M_T, t) = 0, \tag{15}$$

其中需要求出 $M_T(t)$。利用隐函数定理 [32], , 可以写成

$$\frac{dM_T(t)}{dt} = -\frac{\partial F/\partial t}{\partial F/\partial M_T}. \tag{16}$$

这意味着，当 $\frac{\partial F}{\partial M_T} = 0$ 时， $M_T(t)$ 不再是解析函数，因为其导数发散。

对于 melon 图，有 $F(M_T, t) = 1 + t(M_T(t)^4 + 2M_T(t)^3) - M_T(t)$。由此得到以下方程组（记 $M_T(t_c)$ 为 $M_{T,c}$）：

$$\begin{aligned} M_{T,c} &= 1 + t_c(M_{T,c}^4 + 2M_{T,c}^3), \\ 1 &= t_c(4M_{T,c}^3 + 6M_{T,c}^2). \end{aligned} \tag{17}$$

第二个方程意味着 $t_c = \frac{1}{4M_{T,c}^3 + 6M_{T,c}^2}$，将其代入第一个方程可得

$$M_{T,c} = 1 + \frac{M_{T,c}^4 + 2M_{T,c}^3}{4M_{T,c}^3 + 6M_{T,c}^2}. \tag{18}$$

经过一些代数运算，可得 $M_{T,c}^2 = 2$。奇点因此是满足 $M_T = \pm\sqrt{2}$ 且 $t_c = \frac{1}{12 \pm 8\sqrt{2}}$ 的点。回想一下，普林斯海姆定理（例如参见 [32]）指出，距离 $t = 0$ 最近的奇点决定了 $M_T(t)$ 在原点处级数展开的收敛半径。这个点就是主导奇点。由于 $\frac{1}{12+8\sqrt{2}} < \frac{1}{12-8\sqrt{2}}$，有

$$t_c = \frac{1}{12 + 8\sqrt{2}} \text{ and } M_T(t_c) = \sqrt{2}, \tag{19}$$

在主导奇点处。

现在来求函数 $M_T(t)$ 在这个主导奇点附近的行为。为此，需要在临界点附近对函数 $F(M_T, t)$ 进行泰勒展开。

假设 $\frac{\partial^2 F}{\partial M_T^2} \neq 0$,
并利用条件 $F(M_T, t) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial M_T}|_{t_c} = 0$ 且由于 $\frac{\partial F}{\partial t^2} = 0$, 可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}|_{t_c}(t_c - t) + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial M_T}|_{t_c}(t_c - t)(M_T(t) - M_{T,c}) + O(|t_c - t|^2) \\ = \frac{\partial^2 F}{\partial M_T^2}|_{t_c}\frac{1}{2}(M_T(t) - M_{T,c})^2. \end{aligned} \tag{20}$$

在极限 $t \to t_c$ 下（展开中仅保留领先阶项），可得:

$$M_T(t) \overset{t\to t_c}{\sim} M_{T,c} \pm \sqrt{2\frac{\partial F/\partial t|_{t_c}}{\partial^2 F/\partial M_T^2|_{t_c}}}\sqrt{t_c - t}. \tag{21}$$

由于 $M_T(t)$ 是融子图的生成函数，这意味着 $M_T(t)$是 t 的增函数，并进一步意味着，在两个解（21）中，需要选择负号对应的解。

因此，函数 $M_T(t)$ 在主导奇点附近的行为为

$$\begin{aligned} M_T(t) &\overset{t\to t_c}{\sim} M_{T,c} - \sqrt{\frac{M_{T,c}^4 + 2M_{T,c}^3}{6(M_{T,c}^2 + M_{T,c})}}\sqrt{1 - t/t_c}, \\ M_T(t) &\overset{t\to t_c}{\sim} M_{T,c} - K\sqrt{1 - t/t_c}. \end{aligned} \tag{22}$$

代入 t_c 和 $M_{T,c}$的显式表达式（19）后，这一行为可写为

$$M_T(t) \overset{t\to t_c}{\sim} \sqrt{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}(1 - \frac{t}{12 + 8\sqrt{2}})}. \tag{23}$$

5.2 棱柱表示中的领先阶图生成函数

本小节中，我们分析棱柱表示中的领先阶图生成函数，并给出一个计数组合学结果，求出微扰理论中任意阶数下此类领先阶图的数量。

我们用 P 表示 2−点领先阶图的生成函数。其展开式为 $P = \sum_n a_n t^n$ 因此，系数 a_n 给出了微扰理论中给定阶数 n 下领先阶图的数量。为了计算这些系数，需要找到 P 的闭合方程。该方程可以通过图示方式得到。

回顾一下，我们发现了两种不同的插入（分别作用于传播子和棱柱顶点层面），它们可以生成棱柱表示中的所有领先阶图。这对应于图示方程，如图 12所示，适用于 2−点函数和 6−点函数。

有

$$\begin{aligned} P &= 1 + 3P^3\Gamma, \\ \Gamma &= t + tP^3\Gamma. \end{aligned} \tag{24}$$

由此得到

$$P - 1 = t(P^4 + 2P^3). \tag{25}$$

将变量换为 $y = P - 1$，得到

$$y = t\big((y+1)^4 + 2(y+1)^3\big) = tf(y). \tag{26}$$

利用拉格朗日反演定理（另见书籍 [32]），系数 a_n 可按以下方式计算。设 $f(x)$ 展开为 $f(x) = \sum_{k\geq 0} f_k x^k$和 $f_0 \neq 0$。则方程 $y = tf(y)$ 有唯一一个形如$y(t) = \sum_{n\geq 1} y_n t^n$的解，其中 $y_n = \frac{1}{n}[x^{n-1}]f(x)^n$；这里，记号 $[x^m]g(x)$ 表示 $g(x)$ 的 m 阶系数。

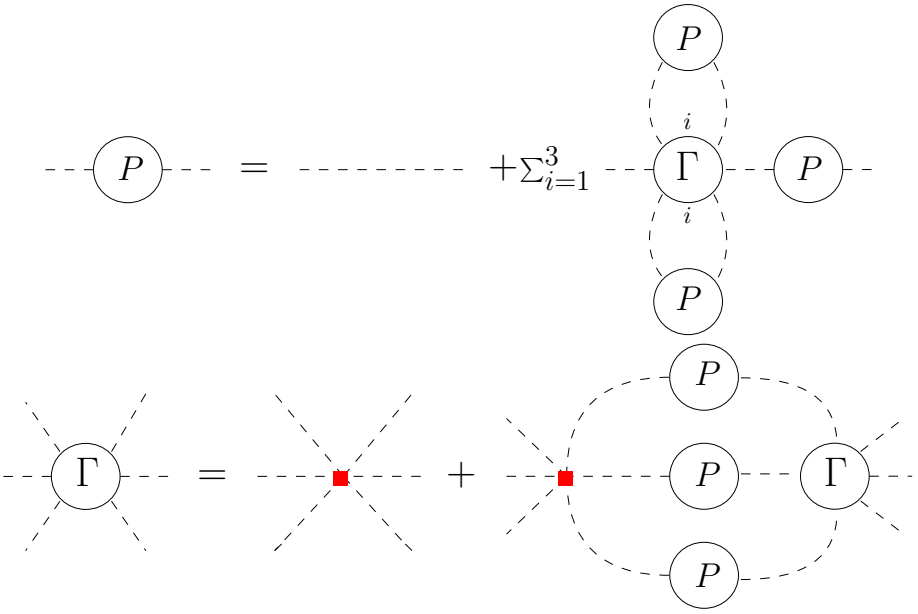


图12：生成函数方程的图形表示 P。

回顾一下，在此处考虑的情形中，$f(y) = (y+1)^4 + 2(y+1)^3 = (y+1)^3(y+3)$。这意味着 $y_n = \frac{1}{n}[x^{n-1}]((x+1)^{3n}(x+3)^n)$。利用二项式展开，可以确定各系数为

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k\geq 0}^{n-1} \frac{3n!}{k!(3n-k)!}\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}3^{k+1}. \tag{27}$$

由于 $y = P - 1$，因此有

$$P = 1 + \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0}^{n-1} \frac{3n!}{k!(3n-k)!}\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}3^{k+1}t^n, \tag{28}$$

由此最终可得棱柱表示中领先阶图的数量为：$a_0 = 1$ 和 $a_n = y_n$，对于任意 $n \in \mathbb{N}$。

6 图解分析

本节将介绍实现该模型双标度极限所需的图示工具。

6.1 偶极子及其生成函数

偶极子的概念最初是针对彩色张量模型提出的 [16],，随后也应用于 MO张量模型 [33]，以及 $O(N)^3$–不变四次模型 [20]。在本小节中，我们将在四面体表示下，为此处研究的模型定义偶极子子图的图示概念。

颜色 i 的一个**偶极子** 是由两个四面体顶点和连接它们的两条平行边构成的子图，使得该子图包含一个长度为二、颜色为 i的面。

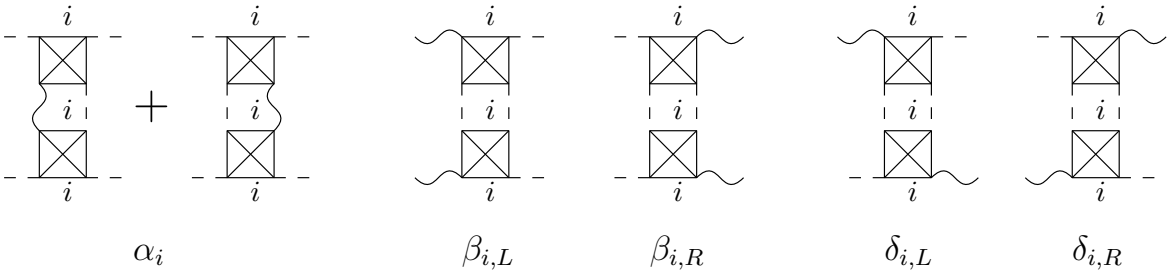


图13：五种类型的偶极子。

对于每一种给定的颜色 i，都有五种不同类型的偶极子。我们将这些类型的偶极子称为类型 α、β_L、β_R、δ_L 和 δ_R，见图13。

为了简化图形表示，可以将偶极子替换为图中所示的偶极子顶点14。



图14：五种类型的偶极子顶点。

现在来给出偶极子的生成函数。需要在每条边上插入 melon 图的生成函数，并在每条半边上插入其平方根。通过这种方式计算边上的 melonic 插入，可以避免在两个偶极子相邻时对 melon 图重复计数。

因此，五种类型偶极子的生成函数为：

$$\begin{aligned} D_\alpha &= 2tM_T(t)^3 M_\chi = \frac{2}{3}(M_T(t)-1), \\ D_{\beta_L} &= D_{\beta_R} = D_\beta = tM_T(t)^3 M_\chi(t) = \frac{1}{3}(M_T(t)-1) \\ D_{\delta_L} &= D_{\delta_R} = D_\delta = tM_T(t)^3 M_\chi(t) = \frac{1}{3}(M_T(t)-1). \end{aligned} \tag{29}$$

注意，偶极子的生成函数与颜色无关。还要注意，类型为 β_L 和 β_R 的偶极子的生成函数相同；类型为 δ_L 和 δ_R 的偶极子的生成函数也相同。在下文中，描述链的结构时（第6.2节），我们会区分这些偶极子的生成函数。不过，在写出主导图对 2–点函数的贡献时（第8节），我们会分别简单地将它们记为 D_β 和 D_δ。这样既能理清链的结构，又能使主导图贡献的表达式保持简洁。

从上面不同生成函数的表达式可以看出，偶极子生成函数的临界点与 melon 图生成函数的临界点相同。

6.2 链及其生成函数

链的定义与……中的定义类似 [20] [33] 是由 4–通过连接至少两个偶极子，并将链中一个偶极子的一侧与下一个偶极子的对应侧相匹配而得到的点图。

如果一条链包含 ℓ 个偶极子，则称其长度为 ℓ。每条长度为 ℓ 的链都包含长度为 $2 \leq \ell' \leq \ell$ 的子链。因此，如果一条链无法包含在该图中更长的链内，则称其为极大链。

注意，改变一条链的长度不会改变图的度。这可以通过对链的长度进行归纳法证明：在长度为 k 的链中插入一个偶极子，并仔细计算面的数量和顶点的数量。

利用前述五种类型的偶极子，链的外部边共有八种不同的可能性。因此，我们有八种类型的链。如果一条链中的所有偶极子都具有颜色 i，则称该链为颜色 i 的未断链。如果链中的偶极子颜色不全相同，则称该链为断链。

与偶极子的情况类似，为了简化图示，我们用链顶点 i 表示给定类型和颜色的未断链 C，而用链顶点表示断链 B。不同类型的未断链顶点见图15。

此外，我们将链分为两个族：

- A族 A，如果链两侧的外腿相同。
- A族 B，如果链两侧的外腿不同。

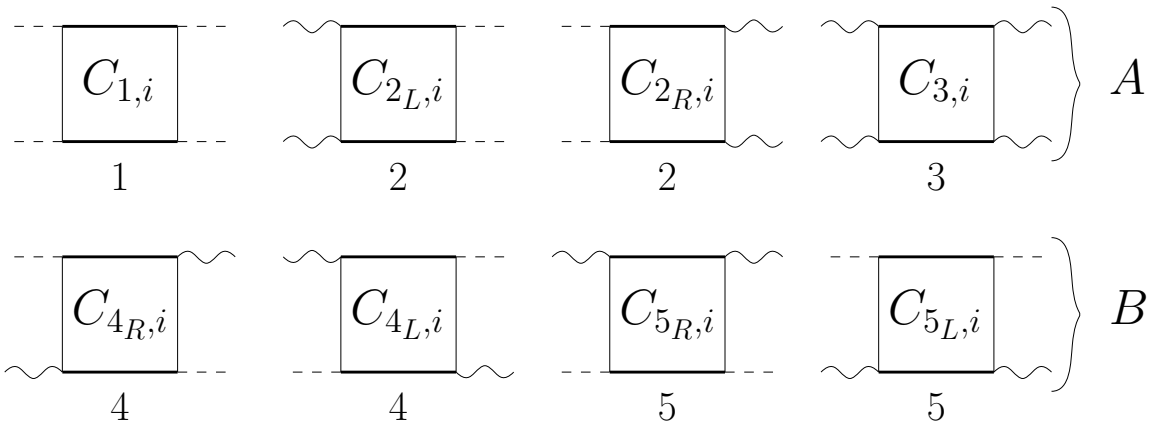


图15：各种不同类型的断裂链顶点。

现在让我们更加仔细地看看这些链各自的偶极子结构和生成函数：

A族： A族链的构成单元是 α、 β_L 和 β_R类型的偶极子。如果 β_R 类型的偶极子不是链的末端，则其后必须跟随一个 β_L类型的偶极子。

偶极子粘合的所有可能性如图所示 16。族 A 中的其他类型链1 可直接由图中所示的链推得17。

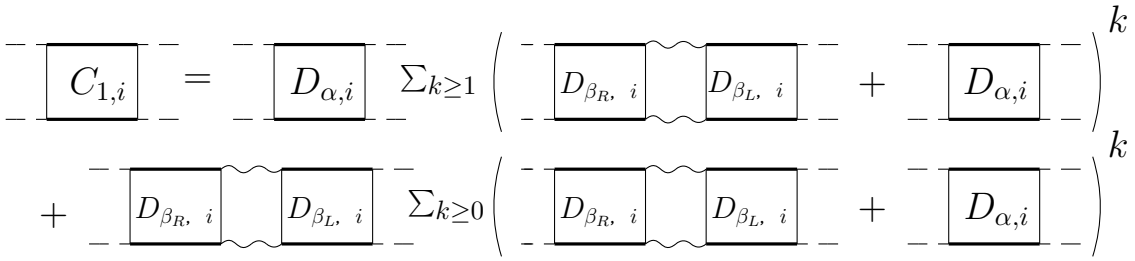


图16：1型链的结构。

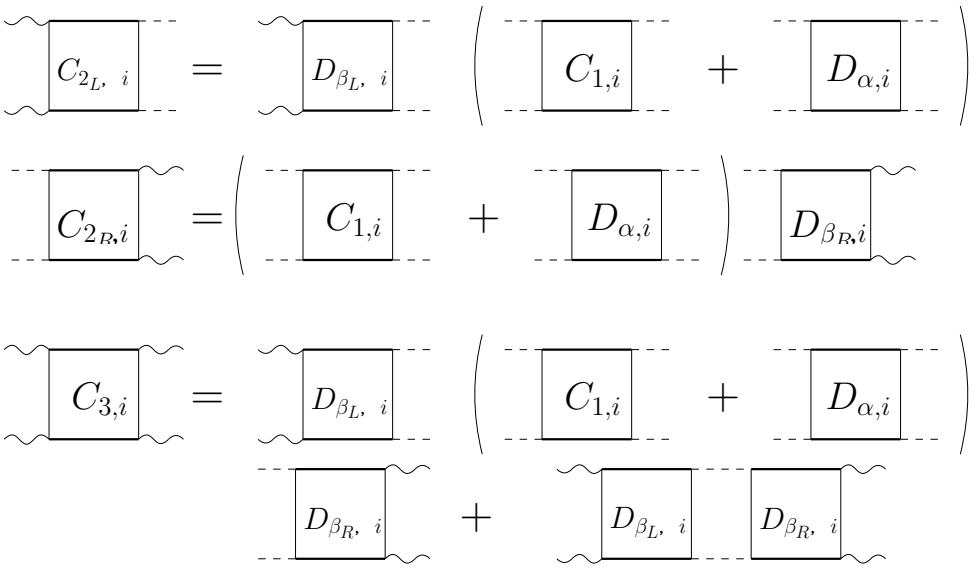


图17：2，3型链的结构。

生成函数推导如下:

$$\begin{aligned} C_1 &= D_\alpha \sum_{k\geq 1}(D_{\beta_R}D_{\beta_L}+D_\alpha)^k + D_{\beta_R}D_{\beta_L}\sum_{k\geq 0}(D_{\beta_R}D_{\beta_L}+D_\alpha)^k, \\ &= (D_\alpha + D_{\beta_R}D_{\beta_L})\sum_{k\geq 0}(D_\beta^2+D_\alpha)^k - D_\alpha, \\ &= \frac{D_\alpha + D_{\beta_R}D_{\beta_L}}{1-(D_\alpha+D_{\beta_R}D_{\beta_L})} - D_\alpha, \end{aligned} \tag{30}$$

and

$$\begin{aligned} C_{2_L} &= D_{\beta_L}(C_1+D_\alpha) = D_{\beta_L}\frac{D_\alpha + D_{\beta_R}D_{\beta_L}}{1-(D_\alpha+D_{\beta_R}D_{\beta_L})}, \\ C_{2_R} &= D_{\beta_R}(C_1+D_\alpha) = D_\beta\frac{D_\alpha + D_{\beta_R}D_{\beta_L}}{1-(D_\alpha+D_{\beta_R}D_{\beta_L})}, \\ C_3 &= D_{\beta_L}(1+C_1+D_\alpha)D_{\beta_R} = \frac{D_{\beta_L}D_{\beta_R}}{1-(D_\alpha+D_{\beta_L}D_{\beta_R})}. \end{aligned} \tag{31}$$

类型1的断链生成函数可由上述生成函数的表达式推导得出：注意到，每条颜色不是给定颜色的1型链都必须是断链。在构造链时，可插入的偶极子有三种颜色。将每个偶极子生成函数乘以三，再减去颜色为

i的链，即可得到断链 B_1的生成函数。可写为：

$$B_1 = \frac{3D_\alpha + 9D_{\beta_L}D_{\beta_R}}{1-(3D_\alpha + 9D_{\beta_L}D_{\beta_R})} - 3D_\alpha - \sum_{i=1,2,3} C_{1,i}. \tag{32}$$

其余类型的断链表达式可由图18得出，并写为：

$$\begin{aligned} B_{2_L} &= 6D_{\beta_L}(C_1 + D_\alpha) + 3D_{\beta_L}B_1, \\ B_{2_R} &= 6(C_1 + D_\alpha)D_{\beta_R} + 3B_1 D_{\beta_R}, \\ B_3 &= 24D_{\beta_L}(C_1 + D_\alpha)D_{\beta_R} + 6D_{\beta_L}D_{\beta_R} + 9D_{\beta_L}B_1 D_{\beta_R}. \end{aligned} \tag{33}$$

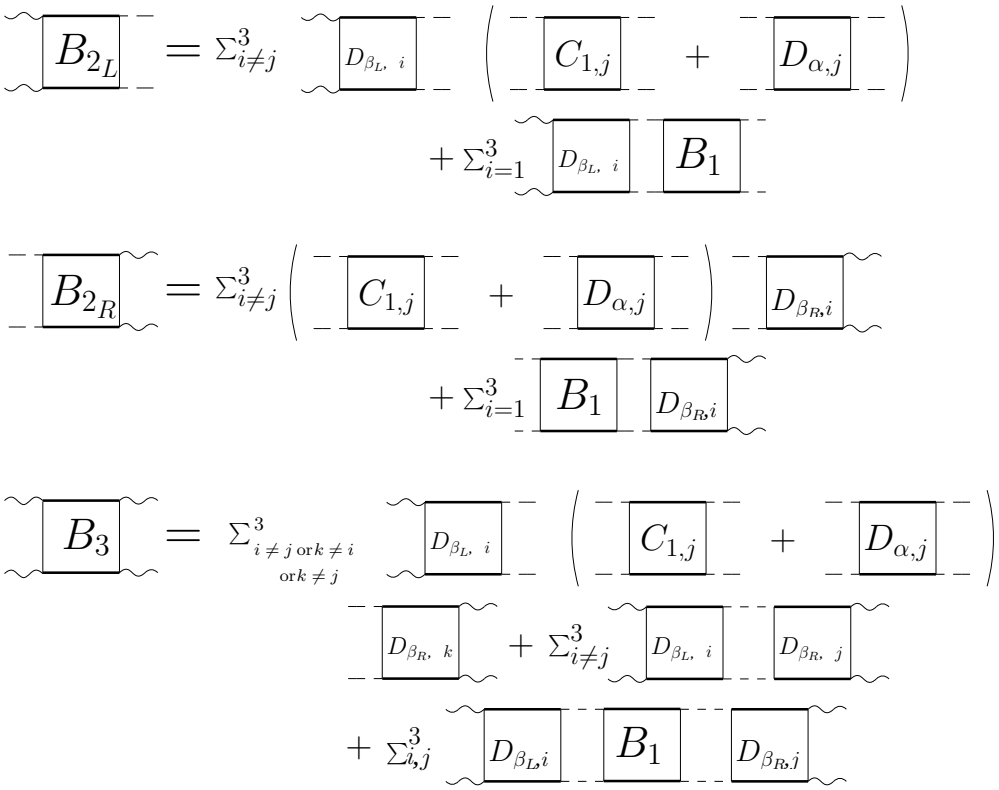


图18：A族断链的结构。

对式（32）最后一项的三种颜色求和，并进行一些进一步的代数运算后，可得：

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{6D_{\beta_L}D_{\beta_R} + 18(D_{\beta_L}D_{\beta_R})^2 + 6D_\alpha^2 + 24D_\alpha D_{\beta_L}D_{\beta_R}}{(1-(3D_\alpha + 9D_{\beta_L}D_{\beta_R}))(1-(D_\alpha + D_{\beta_L}D_{\beta_R}))}, \\ B_{2_L} &= D_{\beta_L}\frac{24D_{\beta_L}D_{\beta_R} + 6D_\alpha}{(1-(3D_\alpha + 9D_{\beta_L}D_{\beta_R}))(1-(D_\alpha + D_{\beta_L}D_{\beta_R}))}, \\ B_{2_R} &= D_{\beta_R}\frac{24D_{\beta_L}D_{\beta_R} + 6D_\alpha}{(1-(3D_\alpha + 9D_{\beta_L}D_{\beta_R}))(1-(D_\alpha + D_{\beta_L}D_{\beta_R}))}, \\ B_3 &= \frac{3D_{\beta_L}D_{\beta_R}(2 + 6D_{\beta_L}D_{\beta_R})}{(1-(3D_\alpha + 9D_{\beta_L}D_{\beta_R}))(1-(D_\alpha + D_{\beta_L}D_{\beta_R}))}. \end{aligned} \tag{34}$$

B族： 如上所述，B族中链的结构由其基本构件推导而来，这些构件是类型为 δ_L 和 δ_R的偶极子。若类型为 δ_L 或δ_R 的偶极子没有结束一条链，则其后必须接一个类型为 δ_R 或 δ_L的偶极子。类型为5 的链的所有可能情况见图19。

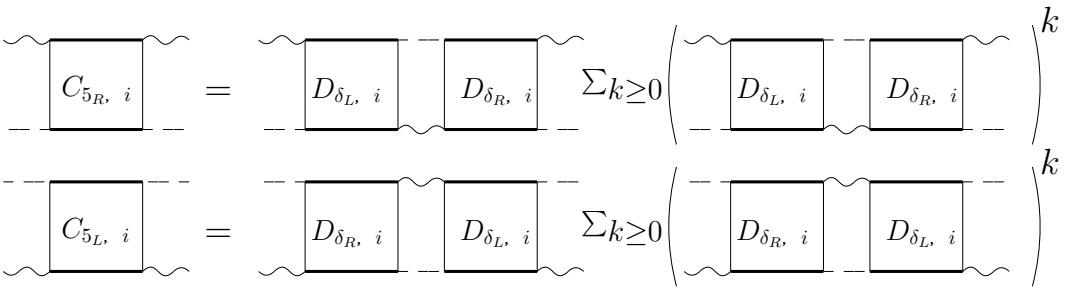


图 19：类型 5 链的结构。

其他链的结构可由类型5 链推导得出，并如图 20所示。

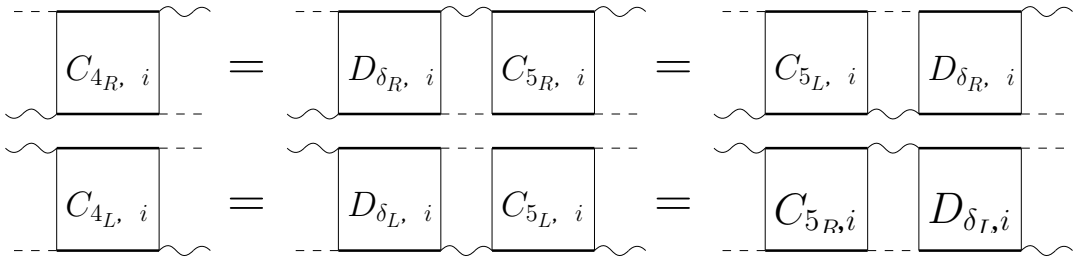


图 20：类型 4 链的结构。

族 B 链的生成函数写作：

$$
\begin{aligned}
C_{5_L} = C_{5_R} &= D_{\delta_L} D_{\delta_R} \sum_{k\geq 0} (D_{\delta_L} D_{\delta_R})^k = \frac{D_{\delta_L} D_{\delta_R}}{1 - D_{\delta_L} D_{\delta_R}}, \\
C_{4_L} &= D_{\delta_L} C_{5_L} = \frac{D_{\delta_L}^2 D_{\delta_R}}{1 - D_{\delta_L} D_{\delta_R}}, \\
C_{4_R} &= D_{\delta_R} C_{5_R} = \frac{D_{\delta_L} D_{\delta_R}^2}{1 - D_{\delta_L} D_{\delta_R}}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

通过与 A 族链的情况类似的论证，可以得出该族的断链为

$$
\begin{aligned}
B_{5_L} = B_{5_R} &= D_{\delta_L} D_{\delta_R} \frac{6 + 18 D_{\delta_L} D_{\delta_R}}{(1 - D_{\delta_L} D_{\delta_R})(1 - 9 D_{\delta_L} D_{\delta_R})}, \\
B_{4_L} &= \frac{24 D_{\delta_L}^2 D_{\delta_R}}{(1 - D_{\delta_L} D_{\delta_R})(1 - 9 D_{\delta_L} D_{\delta_R})}, \\
B_{4_R} &= \frac{24 D_{\delta_L} D_{\delta_R}^2}{(1 - D_{\delta_L} D_{\delta_R})(1 - 9 D_{\delta_L} D_{\delta_R})}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

因此，上文得到的各类链的生成函数公式有五种不同类型的奇点：

- 由于任意偶极子都与 melon 图具有相同的奇点，链也与 melon 图具有相同的奇点。
- 对于 A 族的未断链和断链，满足 $D_\alpha + D_{\beta_L} D_{\beta_R} = 1$ 的点是奇点。
- 对于 A 族的断链，满足 $3D_\alpha + 9D_{\beta_L} D_{\beta_R} = 1$ 的点是奇点。
- 对于 B 族的有色断链，满足 $D_{\delta_L} D_{\delta_R} = 1$ 的点是奇点。
- 对于 B 族的断链，满足 $9D_{\delta_L} D_{\delta_R} = 1$ 的点是奇点。

将偶极子生成函数的表达式代入上述奇点条件，可得：

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}(M_T(t)-1) + \frac{1}{9}(M_T(t)-1)^2 = 1, \\
&2(M_T(t)-1) + (M_T(t)-1)^2 = 1, \\
&\frac{1}{9}(M_T(t)-1)^2 = 1, \\
&(M_T(t)-1)^2 = 1.
\end{aligned} \tag{37}$$

每个条件都会得到一个 2^{nd} 阶方程，这些方程的解为：$M_T = -2 \pm 3\sqrt{2}$、$M_T = \pm\sqrt{2}$、$M_T = 4$、-2，以及相应的 $M_T = 2$、0。因此，满足 $3D_\alpha + 9D_\beta^2 = 1$ 的点也是 melon 图的奇点。回想一下，$M_T(t)$ 被选为 t 的递增函数。这意味着，最小 $|M_T|$ 对应的奇点也是 t 最接近零的奇点。将 $M_T = 0$ 代入方程（14）得到 $1 = 0$，因此不可能成立。于是，主导奇点为点（M_T，c，t_c）=（$\sqrt{2}$，$\frac{1}{8\sqrt{2}+12}$），它是 melon 图和 A 族断链生成函数的奇点。

另请注意，根据方程（34），只有由 1 型断链构成的 2_L、2_R、3 型断链在临界点处是奇异的。我们用星号标记这些特定的链，即 $B_{2_L^*} = 3D_{\beta_L} B_1$、$B_{2_R^*} = 3D_{\beta_R} B_1$ 和 $B_{3^*} = 9D_{\beta_L} B_1 D_{\beta_R}$。

于是，在临界点附近，可得：

$$\begin{aligned}
B_1 &\overset{t\to t_c}{\approx} \frac{3D_\alpha + 9D_\beta^2}{1-(3D_\alpha + 9D_\beta^2)} \overset{t\to t_c}{\sim} \frac{1}{2M_{T,c}K\sqrt{1-\frac{t}{t_c}}}, \\
B_{2_L} &\overset{t\to t_c}{\approx} B_{2_L^*} = 3D_{\beta_L} B_1 \overset{t\to t_c}{\sim} \frac{M_{T,c}-1}{M_{T,c}K\sqrt{1-\frac{t}{t_c}}}, \\
B_{2_R} &\overset{t\to t_c}{\approx} B_{2_R^*} = 3D_{\beta_R} B_1 \overset{t\to t_c}{\sim} \frac{M_{T,c}-1}{M_{T,c}K\sqrt{1-\frac{t}{t_c}}}, \\
B_3 &\overset{t\to t_c}{\approx} B_{3^*} = 9D_{\beta_L} D_{\beta_R} B_1 \overset{t\to t_c}{\sim} \frac{(M_{T,c}-1)^2}{M_{T,c}K\sqrt{1-\frac{t}{t_c}}}.
\end{aligned} \tag{38}$$

6.3 方案分解

如 [20] [33], 图 G 的方案S 的定义所示，通过从相应的图中消去任意2点 melonic 子图，并将每条极大链替换为相应的链顶点，将任意偶极子替换为相应的偶极子顶点。

如果一个方案源自一个有根图，那么相应的方案自然包含一条有根边。

可以证明，方案 $\omega(\mathcal{S})$的度与初始图 $\omega(\mathcal{G})$的度相同（再次参见 [20] [33]）。

因此，每个方案都代表一个图族，而任何图都可以通过将相应的偶极子、链和 melon 图替换／插回其对应方案中而得到。

让我们在图 21. 中给出一个方案及其对应的有根费曼图示例。

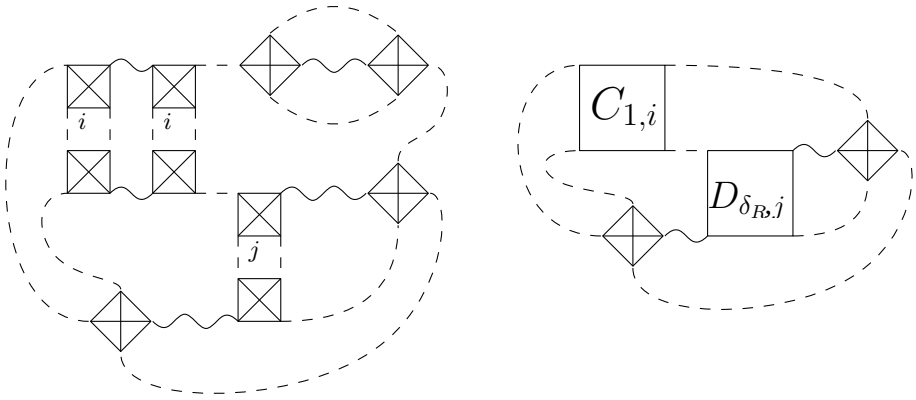


图 21：图（左）及其对应方案（右）的示例。

在 [20] 中，已经证明，在给定的度下， $O(N)^3$-不变量模型中的方案数量有限。为得到这一结果，已经证明偶极子/链顶点的数量以及四面体顶点的数量都有上界。

棱柱模型中的方案可以通过对四面体模型中已有方案里连接成对顶点的边进行装饰来得到。对于具有给定数量的偶极子顶点、链顶点和四面体顶点的方案，这种装饰方式也只有有限种。因此，棱柱模型中给定度下的方案数量必定有限。

由于每个度下的方案数量有限，我们可以利用它们将固定度下无限多个图压缩为有限个方案。因此， $G_2(t)$中的无限多个费曼图之和可以写成有限个方案之和。 2–点函数于是写作

$$G_2(t) = M_T(t) + \sum_{\omega \geq 1} N^{-\omega} \sum P_{\mathcal{S},\omega}(M, C), \tag{39}$$

其中， $P_{\mathcal{S},\ \omega}(M,\ C)$ 是梅尔子生成函数和链生成函数的多项式。上式中的求和遍及所有度为 ω 的图式。于是， $G_2(t)$ 的主导奇点是 1 型断链， 2_L^*， 2_R^*和 3^* 的奇点 $(\underline{M_{T,\ c}},\ t_c) = (\sqrt{2},\ \frac{1}{8\sqrt{2}+12})$。

偶极子/链顶点移除 研究组合方案时，一种标准操作是移除偶极子/链顶点，并将顶点两侧的半边重新连接起来，如图22。

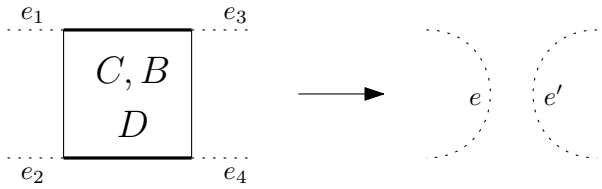


图 22：偶极子移除的过程。

如果移除某个偶极子/链顶点会使方案 $\mathcal{S}$断开，则称其为分离型偶极子/链顶点。可以证明，移除分离型偶极子/链顶点会使度分配到两个连通分量中（另见 [20] 和 [33]）。因此，移除分离型偶极子/链顶点后，度保持不变。此外，有

$$\omega(\mathcal{S}) = \omega(\mathcal{S}_1) + \omega(\mathcal{S}_2), \tag{40}$$

其中，$\mathcal{S}_1$ 和$\mathcal{S}_2$ 是移除后得到的两个连通分量。

将$\mathcal{S}'$ 记为在$\mathcal{S}$中移除偶极子后得到的方案。通过仔细计算面的数量和顶点的数量，可以证明（另见 [20] 和 [33]），移除颜色为 i 的非分离型偶极子或链会使度变为

$$\omega(\mathcal{S}) - 1 \geq \omega(\mathcal{S}') \geq \omega(\mathcal{S}) - 3. \tag{41}$$

类似地，移除非分离型断链会得到 $\omega(\mathcal{S}') = \omega(\mathcal{S}) - 3$

按照 [20], ，这里给出（40）和（41）证明的一些细节。回想一下，改变链的长度不会改变方案的度。因此，在研究链的面结构时，可以考虑最小情形，即链长为2。

分离型偶极子/链顶点。如果一个方案$\mathcal{S}$ 含有一个分离型偶极子/链顶点，则它属于图23所示的某种形式，其中边要么是 χ ，要么是 T 传播子。此时，该方案在偶极子/链顶点两侧各有两条 2–边切割。进行这两次切割后得到一个新的方案$\mathcal{S}'$ ，它含有3个非连通分量，记作$\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2,$ ，如图24所示。方案$\mathcal{S}'$ 的面数为 $f_{\mathcal{S}'} = f_{\mathcal{S}_1} + f_{\mathcal{S}_2} + f_{\mathcal{S}_0} = f_{\mathcal{S}} + 6$ ，顶点数 $n_{\mathcal{S}'}$ 等于 $n_{\mathcal{S}}$。度 $\omega(\mathcal{S})$ 于是满足：

$$\omega(\mathcal{S}) = 3 + n_{\mathcal{S}} - f_{\mathcal{S}} = 3 + n_{\mathcal{S}_1} + n_{\mathcal{S}_2} + n_{\mathcal{S}_0} - f_{\mathcal{S}_1} - f_{\mathcal{S}_2} - f_{\mathcal{S}_0} + 6 \ .$$

这可以改写为

$$\omega(\mathcal{S}) = \omega(\mathcal{S}_1) + \omega(\mathcal{S}_2) + \omega(\mathcal{S}_0) \ ,$$

且由于分支$\mathcal{S}_0$ 是度为 0 的分量，因此有：

$$\omega(\mathcal{S}) = \omega(\mathcal{S}_1) + \omega(\mathcal{S}_2) \ .$$

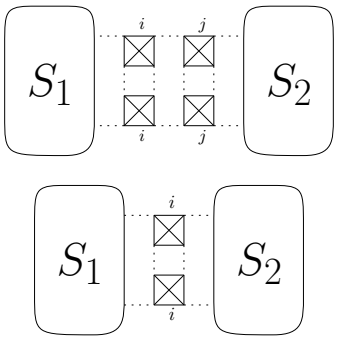


图 23：含有分离型偶极子/链顶点的方案结构。

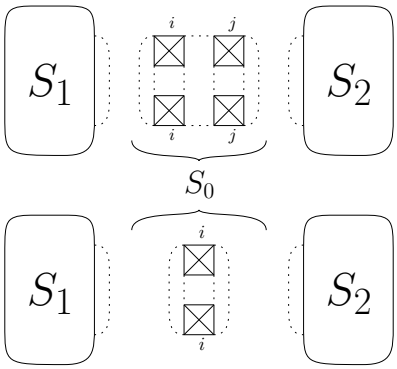


图 24：从图 23中可以得到的三个分量。

非分离偶极子顶点。对于颜色 i 偶极子，只有颜色为 i 的面会受到移除操作的影响。如图25所示，与此类偶极子相邻的颜色为 i的面可能有1个或2个。移除该偶极子会使顶点数减少2个，面数则减少0个、1个或 2 个。这意味着，对于非分离偶极子移除，度的变化量 $\Delta\omega$ 为

$$-3 \leq \Delta\omega \leq -1 \ .$$

非分离链顶点。 移除链顶点时，需要将断裂情形与带颜色的情形区分开来。如果链是断裂的，则与该顶点关联的链不受移除操作影响。随后可以统计内部面数和顶点数的变化，从而得到度的变化。对于长度为 2 的链进行此操作，可得

$$\Delta\omega = 3 \ .$$

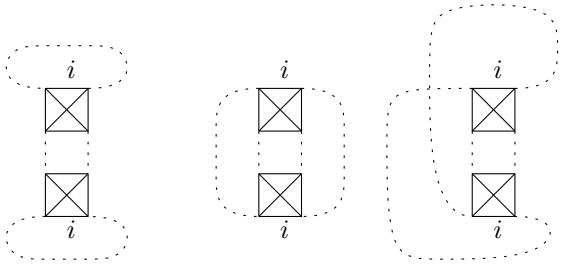


图25：与颜色 i 相邻的颜色 i 偶极子的面可能具有的三种结构。

如果链未断裂，则分析与非分离偶极子移除的情形相同，从而得到

$$-3 \leq \Delta\omega \leq -1 \ .$$

骨架图识别主导方案时，骨架图发挥着关键作用（再次参见 [20]）。这些图的定义如下。

考虑一个方案$\mathcal{S}$，其骨架图$\mathcal{I}(\mathcal{S})$通过移除所有1型断裂链顶点，并在由此形成的边之间添加箭头（标记为 B_1）得到。请注意，此处给出的定义与 [20]中的定义略有不同。

同样，如果骨架图由有根方案构造而来，它也会包含一个根。

图26给出了此类偶极子顶点移除的示例。在骨架图中，箭头起到边的作用，而移除后得到的非连通分量$\mathcal{S}_i$则起到顶点的作用。不过，这些边和顶点不像费曼图中的边和顶点那样计入度。图27给出了一个方案及其骨架图的示例。

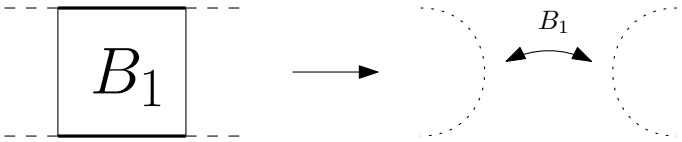


图 26：构造骨架图时的偶极子移除。

骨架图具有若干有趣的性质（再次参见 [20]）：

- 如果某个分量 S_i 的度为 0，那么该分量的价数大于或等于 3。证明这一点的方法是注意到，价数为 1 的度为 0 的图必定是 melonic 二点函数，而价数为 2 的度为 0 的图必定是偶极子或链。对于骨架图而言，这些情况都不可能出现。

- 设 $\mathcal{S}$ 是一个含有 q 个 1型非分离链顶点的方案，并设 $\mathcal{S}'$为移除这些 q 链顶点后得到的方案。骨架图$\mathcal{I}(\mathcal{S}')$ 是一棵树，且其度满足不等式： $\omega(\mathcal{I}(\mathcal{S})) \leq \omega(S) - q$。

  这是因为，如果一个方案只含有分离型偶极子/链顶点，那么其骨架图中就不会出现环。对 $\omega(\mathcal{I}(\mathcal{S}))$ 的上界是利用方程（41）推导出来的，并且要记住，移除一个分离型偶极子/链顶点不会改变度。

- 如果$\mathcal{I}(\mathcal{S})$是一棵树，那么它的度等于其方案的度，并由其分量的度之和给出

$$\omega(\mathcal{I}(\mathcal{S})) = \sum_i \omega(\mathcal{S}_i). \tag{42}$$

  这是因为，如果$\mathcal{I}(\mathcal{S})$ 是一棵树，那么它的所有偶极子/链顶点都是分离的。这直接由方程（40）得出。

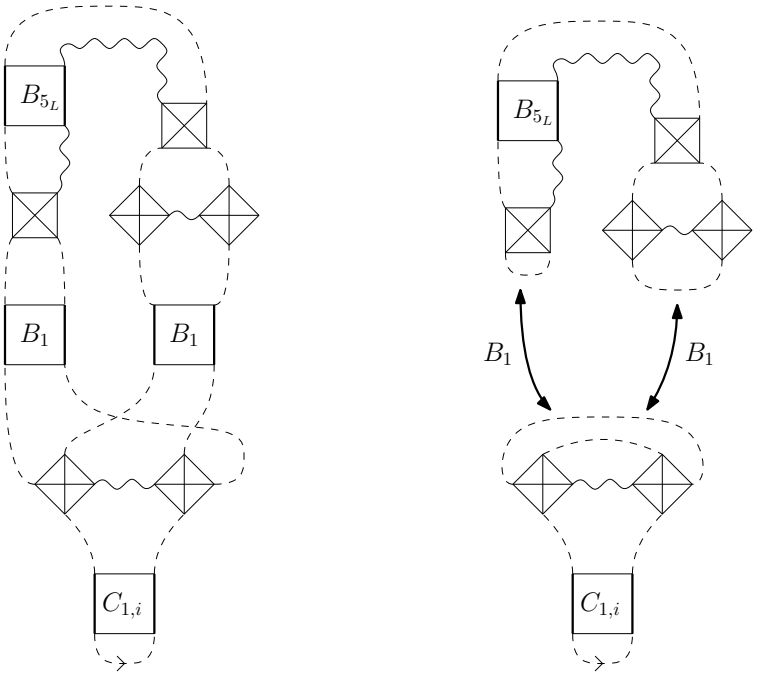


图27：图式及其骨架图示例。

7 次领先阶图

在本节中，我们明确识别棱柱模型的次领先阶费曼图。由方程（11）可知，棱柱模型的度是一个非负整数。因此，如果 $\mathcal{G}$ 是一个次领先阶费曼图，则有： $\omega(\mathcal{G}) = 1$。

四面体模型的度为一的图已在 [21]中确定。基于这一分析，可以推导出本文所考虑模型的相应次领先阶费曼图。具体采用以下策略：我们考察 [21], 中确定的所有度为一的图，并研究为每个图中的每对顶点各添加一个 χ 传播子的所有方式。最后，通过收缩中间场传播子 χ 并去除潜在的冗余，即可得到棱柱表示中所有度为一的图。

在四面体表示中，次领先阶图可分为三类（再次参见 [21]）：

1. 二粒子不可约、无偶极子费曼图
2. 含偶极子的二粒子不可约费曼图
3. 二粒子可约费曼图

下文将给出四面体表示中这些图的图式，并举例说明四面体表示和棱柱表示中的一些费曼图。请注意，替换一个链顶点的四面体顶点数量可以任意选取；相应的棱柱顶点数量也是如此（使用模型的棱柱表示时）。

7.1 无偶极子的二粒子不可约图

它是在 [21]中推导得出的：四面体模型中存在唯一一个度为一且不含偶极子的方案。该方案如图（28）所示。

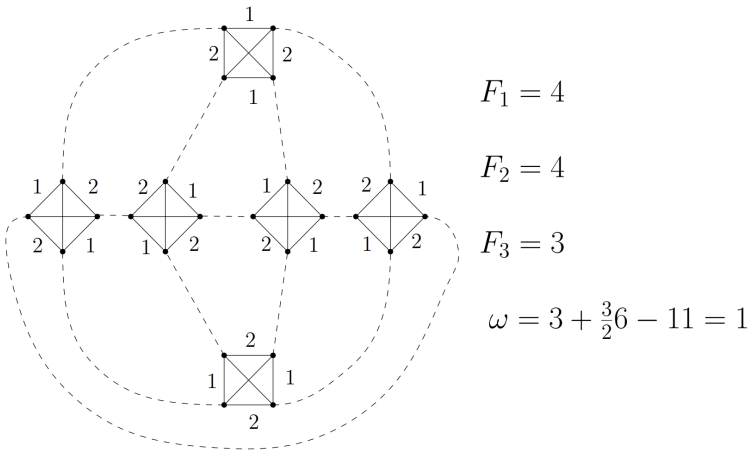


图 28：四面体模型中唯一的度为一的无偶极二粒子不可约方案。

请注意，由于该方案没有偶极子顶点和链顶点，因此可以在其任意一条边上进行常规的 melonic 插入，从而得到对应的图。

因此，有 3 种独立的方式可以放置 χ 传播子于此次领先阶图上，见图29。

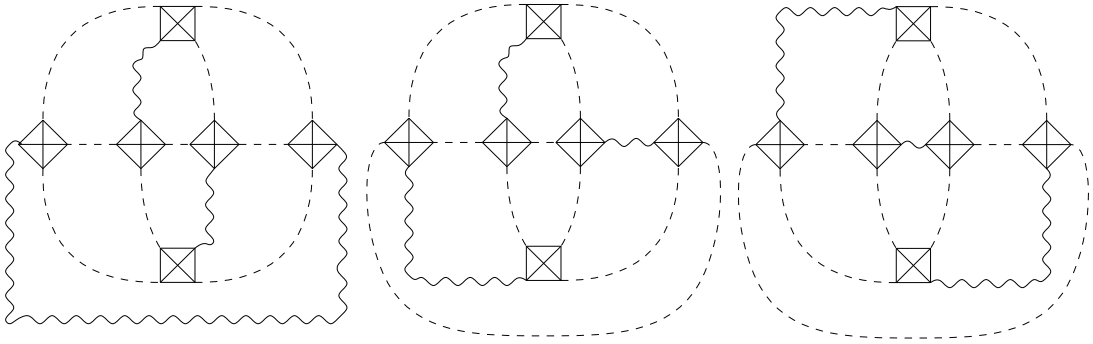


图29：在图 χ 28所示的次领先阶图上放置传播子的不同方式。28。

然而，为了得到棱柱表示中的次领先阶图而收缩 χ 传播子时，可以证明，图 29 中的三个图最终都得到图30所示的唯一图。

因此，棱柱表示中的次领先阶图是通过对图30所示的图执行两次棱柱缅子变换（见上文）得到的。

7.2 含偶极的2PI图

四面体表示中含偶极的2PI图式见图 31。边 e 和 e' 可以是 T 或 χ类型，这意味着 $s = 1$或 5 （情况 $s = 4$ 等价于 $s = 1$）。对应的显式图式及其 T 或 χ 传播子见图 32。

最后，我们通过给出一些带有偶极子的次领先阶二粒子不可约图的具体示例来结束本小节（其中我们将链顶点替换为长度为四的链），以及它们在棱柱表示中对应的图——见图 33。

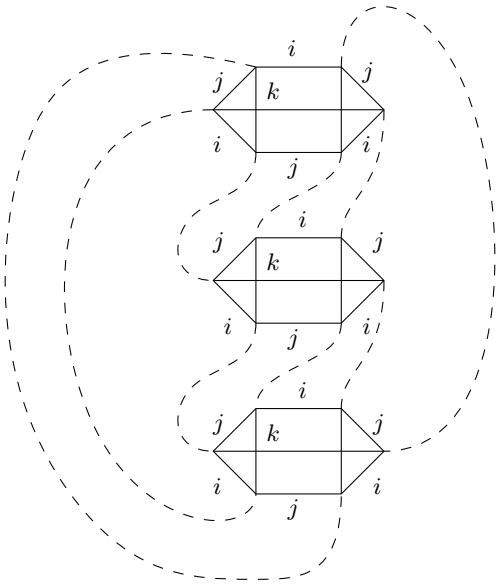


图3　　0：通过收缩图中图的 χ 边所得到的唯一图28　　.

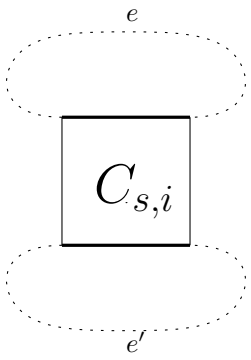


图31：带有偶极子的二粒子不可约次领先阶图的显式图式。

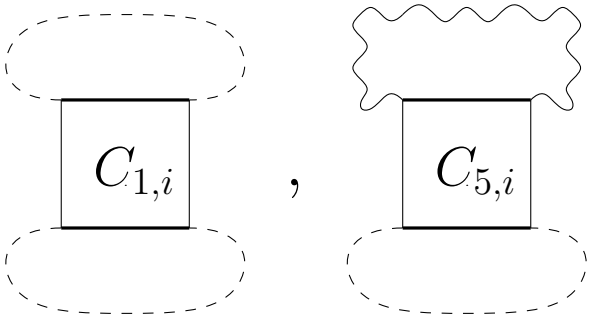


图32：带有偶极子的二粒子不可约次领先阶图的显式图式。

7.3 二粒子可约次领先阶图

回顾 [21]四面体模型中二粒子可约图的图式见图 34。

放置 χ 传播子时，相应的图式如图35所示。图中的空方框可以是偶极子顶点、断链顶点或有色链顶点。

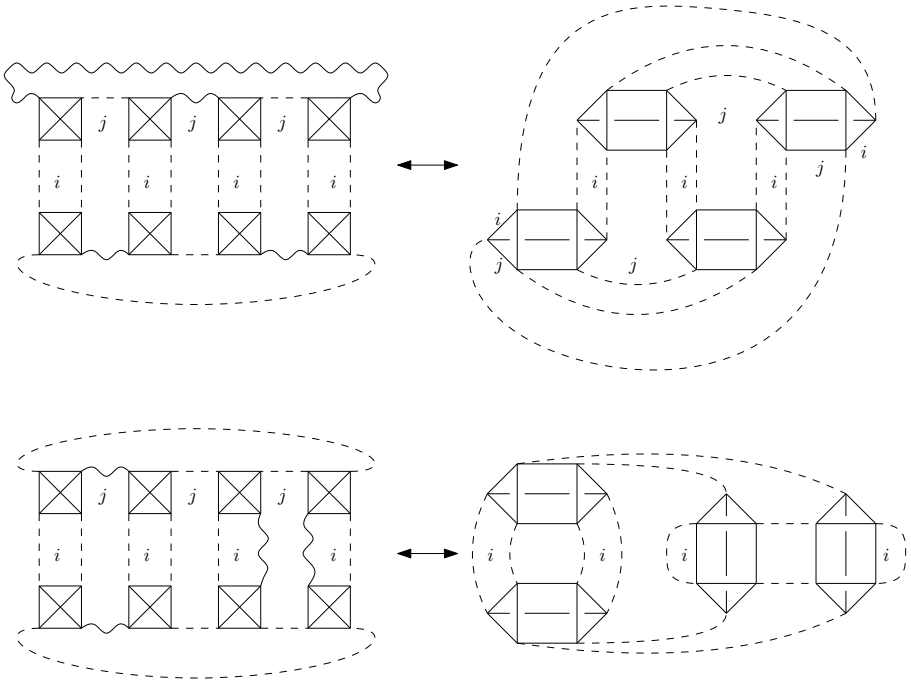


图33：四面体表示（左）和棱柱表示（右）中的含偶极子的次领先阶二粒子不可约图示例。

本节最后给出一些 NLO 2PR 图以及它们在棱柱表示中的对应图，见图36。图中的第一个图是图35中的第一个图。第二个图由图35中的第二个图式得到，其中我们将空方框替换为长度为四、颜色为 i的链。最后，第三个图由图35中的第二个图式得到，其中我们将空方框替换为长度为四的断链。

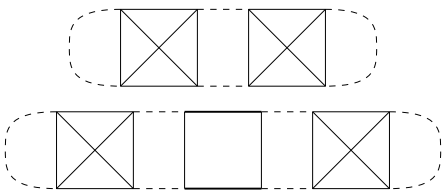


图 34：单场四面体模型中 NLO 2PR 图的图式。

8 二点函数的双重标度极限

请回想一下，由于我们的目标是计算 $G_2(t,\ N)$，因此我们研究的是有根对象。此外，$G_2(t,\ N)$ 的主导奇点位于点 $(M_{T,\ c},\ t_c) = (\sqrt{2},\ \frac{1}{8\sqrt{2}+12})$，此处类型1的断链，$2_L^*$，$2_R^*$ 和 $\overline{3^*}$ 是奇异的。因此，主导图式就是使这些链的数量达到最大的图式。

本节采用的总体策略如下：

- 我们移除方案$\mathcal{S}$的所有非分离偶极子/链顶点；将所得方案记为$\mathcal{S}'$ 。

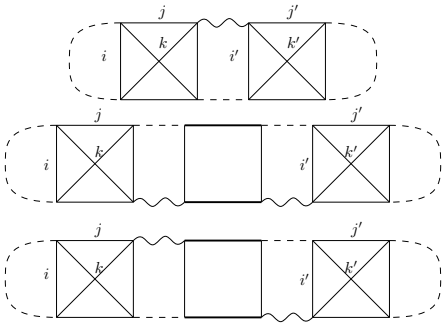


图3 5：NLO 2PR 图的图式。

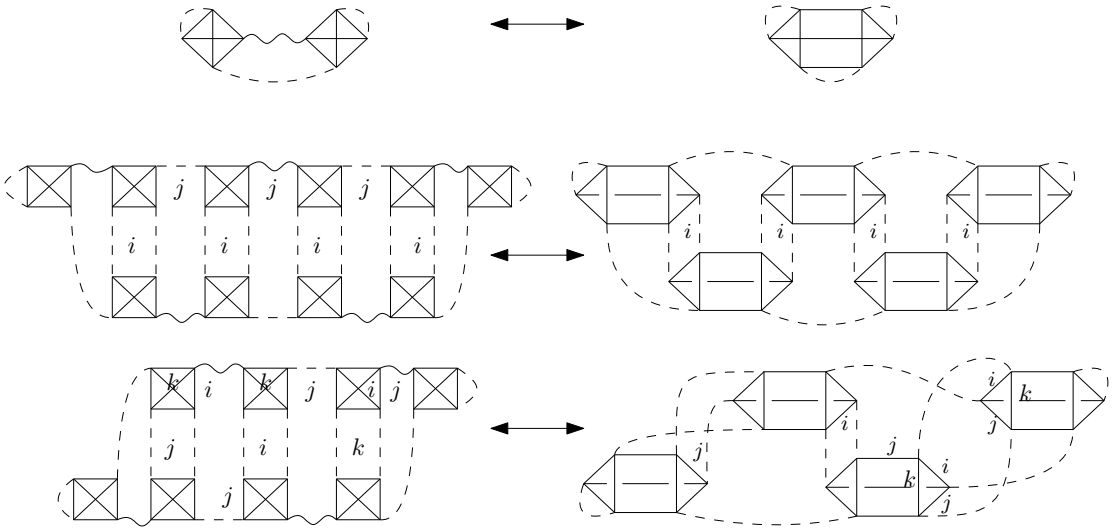


图36：四面体表示（左）和棱柱表示（右）中的度1、2PR图示例。

- 我们推导出$\mathcal{S}'$的分量数量的不同界。
- 最后，我们利用这些界，为原始图式$\mathcal{S}$中类型1断裂链顶点的数量总和 2_L^*、2_R^* 和 3^* 得出适当的界。

因此，考虑一个图式$\mathcal{S}$ ，其中 b 表示类型1断链数量的总和， 2_L^*， 2_R^*， 3^*。注意，这些断链可以是分离的，也可以是非分离的；我们分别用 p 和 q 表示分离断链和非分离断链的数量：

$$b = p + q. \tag{43}$$

我们需要找到 b的一个上界。为此，如上所述，我们移除所有 q 非分离断链顶点，并将所得方案记为 S' 。于是，S' 的度为 $\omega(\mathsf{S}') = \omega(\mathsf{S}) - 3q$，所得方案包含 p 条类型1的分离断链， 2_L^*， 2_R^*， 3^*。接着，我们将每个类型为2_L^* （分别为 2_R^* ）的断链顶点拆分为一个类型为 β_L （分别为 β_R ）的偶极子顶点（颜色任意）和一个类型为1的断链顶点。类似地，我们将每个类型为 3^* 的断链顶点拆分为两个类型为 β 的偶极子顶点和一个类型为1的断链顶点。图37给出了这一拆分过程的图形表示。经过拆分后，方案 S' 有 p 个类型为1的分离断链顶点。

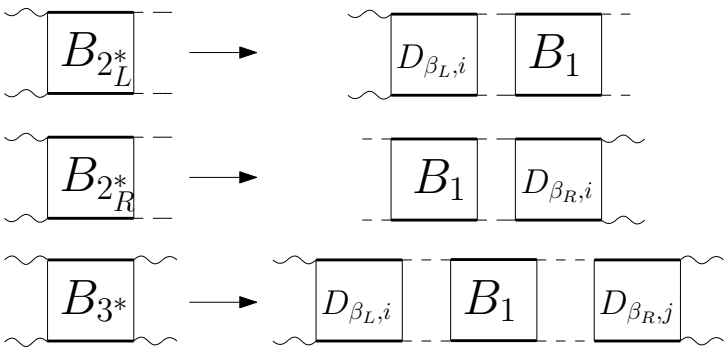


图37：类型为 $2^*, 3^*$ 的链的拆分。

考虑 S' 的骨架图$\mathcal{I}(\mathcal{S}')$。由于$\mathcal{S}'$ 只有分离断链，$\mathcal{I}(\mathcal{S}')$ 是一棵树，其度等于各分量度数之和。回想一下，$\mathcal{I}(\mathcal{S}')$ 的分量可能具有的最小正度为 1。

由于我们研究的是 2–点函数，骨架图 $\mathcal{I}(\mathcal{S}')$ 有一个根，并且具有 3 种连通分量：

- 有根分量，它是唯一的。
- 正度无根分量，其数量记为 N_+。
- 零度无根分量。如果这类分量与被跟踪的1型非分离断链顶点在$\mathcal{S}$中相连，则称其为被跟踪分量。否则，称其为未跟踪分量。零度无根分量的数量记为 $N_0 = N_{0,t} + N_{0,nt}$ 其中 $N_{0,t}$分别是被跟踪和未跟踪的零度无根分量的数量。

因此，骨架图的分量数 N_c 为

$$N_c = N_{0,nt} + N_{0,t} + N_+ + 1. \tag{44}$$

回想一下，在骨架图$\mathcal{I}(\mathcal{S})$中，度为 0 的分量的价数至少为三。这意味着，在$\mathcal{I}(\mathcal{S}')$中，一个被追踪的度分量的价数至少为一，因为它最多只与$\mathcal{S}$中两个类型为 1 的分离断链顶点相连。

由 [20], 可得以下界：

$$N_{0,t} \le 2q, \tag{45}$$

$$N_+ \le \omega(\mathcal{S}'), \tag{46}$$

$$2p \ge 3N_{0,nt} + N_{0,t} + N_+ + 1, \tag{47}$$

$$p = N_{0,nt} + N_{0,t} + N_+. \tag{48}$$

经过一些代数运算后，可得以下不等式

$$p \le 2\omega(\mathcal{S}') + 4q - 1,$$

利用 $\omega(\mathcal{S}') = \omega(\mathcal{S}) - 3q$ 可得

$$p \le 2\omega(\mathcal{S}) - 2q - 1, \tag{49}$$

进一步可得:

$$b \leq 2\omega(\mathcal{S}) - q - 1. \tag{50}$$

因此， b 的最大值为 2ω（$\mathcal{S}$） -1 （当 $q = 0$时）。可以验证，当 b 达到上界时，不等式（45）、（46）和（47）均变为等式。这意味着 $N_{0,\ t} = 0$, $N_{+} = \omega$（$\mathcal{S}$），且所有度为 0 的分量的价数均为 3，而正度分量的价数均为 1。

I$\mathcal{I}$（$\mathcal{S}'$）中的所有正度分量均为一度，因此有两种可能性。移除之前，与类型为1、 2_L^* 或 2_R^* （在T 传播子一侧）的断链相连的分量，是第7节所述的次领阶方案。

与类型为 3^*、2_L^* 或 2_R^* （在 χ 传播子一侧）的断链相连的分量，是第7 节所述的次领阶方案，其中插入了一个 2–点图（由收缩类型为 β_L 或 β_R 的偶极子得到，如图38所示），并插入到它们任意一个 χ 传播子中。



图 38：收缩一个类型为 β 偶极子，得到一个 2– 点图。（$P = L$ 或 R）

度0 分量均未被追踪，且邻接度为3。因此，它们必定来自图39 所示形式的图式，其中 $s = 1$， 2_L^*， 2_R^*， 3^*。

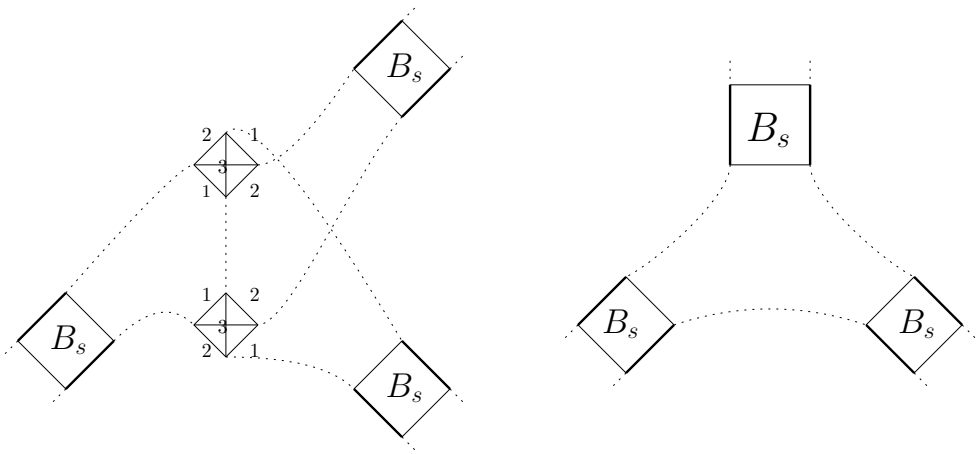


图 39：能够在骨架图中产生度为 0、邻接度为 3 的分量的不同子方案。$B_{t,\ A}$ 可以是任意一个类型为 $s = 1$， 2_L^*， 2_R^*， 3^*或 A族的断链。

最后，根据 [20], 可知，骨架图$\mathcal{I}(\mathcal{S}')$ 是一个有根二叉树，其 $\omega(\mathcal{S})$ 个叶节点由有根分量或度为1 的分量给出，而 $\omega(\mathcal{S}) - 1$ 个内部节点由度为0的分量给出。

由于图式可由其骨架图完全编码，因此主导图式与上述有根二叉树一一对应。

这些树的生成函数为

$$G_{\omega,\mathcal{T}}(t) = B_1(t)^{2\omega-1} I(t)^{\omega-1} L(t)^{\omega}, \tag{51}$$

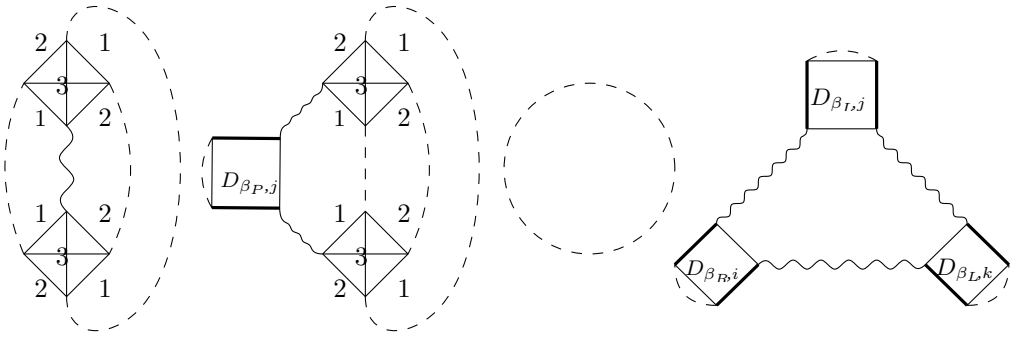


图 40：图式 $\mathcal{I}'(\mathcal{S}')$ 的内部节点

其中， I（t）和 L（t）分别是来自内部节点和叶节点的权重 .

$L(t)$ 的表达式可通过考察所有会在图式 $\mathcal{S}$ 的骨架图 $\mathcal{I}'(\mathcal{S})$ 中产生一个度和价数均为 1 的分支的 2–点子方案推导出来。这样的子方案数量有限，因此 $L(t)$ 将是这些子方案所对应的有限项之和。经过繁琐但直接的计算，可以得到以下表达式：

$$\begin{aligned} I(t) &= 6tM_T(t)^3M_\chi(t)(1+3D_\beta)+1+(3D_\beta)^3, \\ &= 2(M_T(t)-1)(1+3D_\beta)+1+(3D_\beta^3) \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} L(t) &= 9M_T(t)^9M_\chi(t)^3(1+D_\beta(t))+3C_1(t)+6(C_1(t)+D_\alpha(t))M_T^3(t)M_\chi(t) \\ &+12(C_2(t)+D_\beta(t))M_T(t)^3M_\chi(t)+3C_5(t)+6(C_4(t)+D_\delta(t))M_T^3(t)M_\chi(t) \\ &+9D_\beta(t)C_5(t)+9D_\beta(t)C_4(t)+18C_1(t)M_T^3(t)M_\chi(t) \\ &+M_T(t)^3M_\chi(t)\Big[18+27D_\beta(t)+54D_\beta(t)+54C_4(t)+18B_4(t)+54C_5(t) \\ &+18B_5(t)\Big]+M_T^3(t)M_\chi(t)27(1+3D_\beta(t))\Big[3D_\beta^2(t)+3D_\beta(t)(C_4(t)+C_5(t)) \\ &+D_\beta(t)(B_4(t)+B_5(t))+\frac{3}{2}(C_4^2(t)+C_5^2(t))+3C_4(t)C_5(t) \\ &+C_4(t)B_5(t)+B_4(t)C_5(t))\Big]+M_T^3(t)M_\chi(t)9(1+3D_\beta(t))(B_4^2(t)+B_5^2(t) \\ &+B_4(t)B_5(t))+54M_T(t)^6M_\chi^2(t)\Big[3D_\beta(t)+3C_4(t)+B_4(t)+3C_5(t) \\ &+3D_\beta(t)(3C_4(t)+3D_\beta(t)+3C_5(t)+B_4(t)+B_5(t))+B_5(t)+3C_4(t)\Big(3C_5(t) \\ &+\frac{3}{2}C_4(t)+B_4(t)+B_5(t)\Big)+3C_5(t)(\frac{3}{2}C_5(t)+B_4(t)+B_5(t))\Big]. \end{aligned} \tag{53}$$

现在，我们可以对上述所有树求和，并在根处添加一个 melon 插入，从而得到给定度数 ω 的主导费曼图的生成函数

$$G_{\omega,\mathrm{dom}}(t)=M_T(t)\sum_{\mathcal{T}}G_{\omega,\mathcal{T}}=M_T(t)\mathrm{Cat}_{\omega-1}B_1(t)^{2\omega-1}I(t)^{\omega-1}L(t)^\omega, \tag{54}$$

其中 $\mathsf{Cat}_{\omega-1}$ 是$(\omega-1)^{\mathrm{th}}$ 卡塔兰数。利用方程（38）可得

$$G_{\omega,\mathrm{dom}} \overset{t\to t_c}{\sim} \mathrm{Cat}_{\omega-1}M_{T,c}\left(\frac{1}{2M_{T,c}K\sqrt{1-\frac{t}{t_c}}}\right)^{2\omega-1} I(t_c)^{\omega-1}L(t_c)^\omega. \tag{55}$$

现在定义双标度参数 $\kappa(t,\ N)$ 为

$$\kappa(t,N)=\frac{I(t_c)L(t_c)}{4NM_{T,c}^2K^2(1-\frac{t}{t_c})}. \tag{56}$$

回顾一下，在 $\frac{1}{N}$ 展开中，度为 ω 的一般真空图的费曼振幅按 $N^{3-\omega}$ 缩放，因此二点函数图的费曼振幅按 $N^{-\omega}$ 缩放（因为从真空图中切断一条边以得到一个 2–点函数图时，会失去 3 个面，从而少一个因子 N^3）。因此，在双标度极限中，度为 ω 的主导图对二点函数的贡献为

$$N^{-\omega}G_{\omega,\mathrm{dom}}=M_{T,c}N^{-1/2}\left(\frac{L(t_c)\kappa(t,N)}{I(t_c)}\right)^{1/2}\mathrm{Cat}_{\omega-1}\kappa(t,N)^{\omega-1}. \tag{57}$$

我们来谈谈双标度参数的选择。在$N^{-\omega}G_{\omega\text{的表达式}dom}$中，只需要将 ω的幂作为因子 κ（t，N）的指数，原因有二。首先，我们需要所有非零度的主导图在双标度极限中都以 N 的相同幂次作出贡献。其次，选择这样的双标度参数后，可以对所有度求和因子 $\mathrm{Cat}_{\omega-1}\kappa$（$t$，$N$）$^{\omega-1}$，从而得到$\sum_{\omega>0}N^{-\omega}G_{\omega\text{的精确表达式dom}}$，如下面的方程（58）所示。

加入 melon 图的贡献并对所有度求和后，双标度极限下的二点函数为

$$\begin{aligned}G_{2,DS}(t,N)&=M_{T,c}+\sum_{\omega>0}N^{-\omega}G_{\omega,\mathrm{dom}}\\&=M_{T,c}+M_{T,c}N^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{L(t_c)\kappa(t,N)}{I(t_c)}\right)^{1/2}\sum_{\omega\in\mathbb{N}^*}\mathrm{Cat}_{\omega-1}\kappa(t,N)^{\omega-1}\\&=M_{T,c}\left(1+N^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{L(t_c)}{I(t_c)}\right)^{1/2}\frac{1-\sqrt{1-4\kappa(t,N)}}{2\kappa(t,N)^{1/2}}\right)\end{aligned} \tag{58}$$

最后，我们对上述结果作一些解释，以结束本节。可以看出，在双标度极限下，二点函数会获得所有度的贡献，而不仅仅是来自度为零的贡献（大N 极限下的情况则是如此）。此外，可以注意到，当耦合常数趋近临界值时，图的度越高，相应度的贡献就越大。还要注意，在极限 $\kappa\to 0$ 下，可以恢复大 N 极限。这一行为与矩阵情形中的行为相同。

由于方程（58）中的级数在 $\kappa\le 1/4$时收敛，因此棱柱模型的双标度极限级数也收敛。这不同于矩阵模型情形，在那里双标度级数发散。此处得到的结果与四次张量模型的结果类似（再次参见 [20], [26] 和[25]）。最后，值得一提的是，对于其他六次张量模型，也可以预期会得到类似的双标度极限行为。

9 双重标度极限下的自由能

本节从 2–点函数的双标度极限出发，计算双标度极限下的自由能。

回顾自由能与 2–点函数之间的关系

$$F(t,N)=\tilde{F}(s=1,\tilde{t},N)=-\int_0^1\frac{ds}{2s}G_2(\tilde{t}s^3)\ .$$

由于 $\tilde{F}$ 在 $s=1$处取值，取极限 $t\to t_c$ 等价于取 $\tilde{t}\to t_c$。还要回顾一下， 2–点函数可以写作

$$G_2(t)=M_T(t)+\sum_{\omega>0}N^{-\omega}G_\omega\ .$$

于是，自由能写为:

$$F(t,N)=-\int_0^1\frac{ds}{2s}M_T(s^3\tilde{t})-\sum_\omega\int_0^1\frac{ds}{2s}N^{-\omega}G_\omega(s^3\tilde{t})\ .$$

上式的第一项是领先阶贡献，我们将其记为 $F_{LO}(t)$。第二项可在双标度极限下计算。在此极限下，只有积分中接近 1 的部分以及主导图会对 $F(t,\ N)$有贡献。记 ϵ为一个固定的小量。我们将第二项拆分为

$$-\sum_\omega N^{-\omega}\int_{1-\epsilon}^1\frac{ds}{2s}G_\omega(s^3\tilde{t})-\sum_\omega N^{-\omega}\int_0^{1-\epsilon}\frac{ds}{2s}G_\omega(s^3\tilde{t})$$

我们只关注上式的第一项以及主导图的贡献 $G_{\omega,\ dom}$。由于取了极限 $\tilde{t}\to t_c$，我们可以利用方程（55）重写积分:

$$-\sum_\omega\int_{1-\epsilon}^1\frac{ds}{2s}G_\omega(s^3\tilde{t})\overset{t\to t_c}{\sim}-\sum_\omega\mathrm{Cat}_{\omega-1}\frac{M_{T,c}I(t_c)^{\omega-1}L(t_c)^\omega}{(2M_{T,c}K)^{2\omega-1}}\int_{1-\epsilon}^1\frac{ds}{2s}(1-\frac{s^3\tilde{t}}{t_c})^{1/2-\omega}\ .$$

通过变量替换 $u=s^3$ 和$v=1-u\frac{t}{t_c}$，我们得到

$$\int_{1-\epsilon}^1\frac{ds}{2s}(1-\frac{s^3\tilde{t}}{t_c})^{1/2-\omega}=\frac{3}{2}\int_{1-\frac{\tilde{t}}{t_c}}^{1-(1-\epsilon)^3\frac{\tilde{t}}{t_c}}dv\frac{v^{1/2-\omega}}{1-v}\ .$$

我们可以将 $\frac{1}{1-v}$ 展开为

$$\frac{1}{1-v}\approx\sum_n(\frac{t_c}{\tilde{t}})^{n+1}v^n\ .$$

因此，该积分可计算为

$$\frac{3}{2}\int_{1-\frac{\tilde{t}}{t_c}}^{1-(1-\epsilon)^3\frac{\tilde{t}}{t_c}}dv\frac{v^{1/2-\omega}}{1-v}=\sum_n\frac{3}{2(3/2-\omega+n)}\left(\frac{t_c}{\tilde{t}}\right)^{n+1}\left[v^{3/2-\omega+n}\right]_{1-\frac{\tilde{t}}{t_c}}^{1-(1-\epsilon)^3\frac{\tilde{t}}{t_c}}\ .$$

在极限 $t\to t_c$ 下，最发散的贡献由 $v=1-\frac{t}{t_c}$ 处的项 $n=0$ 给出。因此，我们有

$$-\sum_\omega N^{-\omega}\int_{1-\epsilon}^1\frac{ds}{2s}G_\omega(s^3\tilde{t})\overset{\tilde{t}\to t_c}{\sim}\sum_\omega N^{-\omega}\mathrm{Cat}_{\omega-1}\frac{M_{T,c}I(t_c)^{\omega-1}L(t_c)^\omega}{(2M_{T,c}K)^{2\omega-1}}\frac{\left(1-\frac{t}{t_c}\right)^{3/2-\omega}}{(1-2/3\omega)}\ ,$$

利用双标度参数（56）的定义，可将其改写为:

$$-\sum_\omega N^{-\omega}\int_{1-\epsilon}^1\frac{ds}{2s}G_\omega(s^3\tilde{t})\overset{\tilde{t}\to t_c}{\sim}\frac{N^{-3/2}I(t_c)^{1/2}L(t_c)^{3/2}}{4M_{T,c}K^2\kappa(t,N)^{1/2}}\sum_\omega\mathrm{Cat}_{\omega-1}\frac{\kappa(t,N)^{\omega-1}}{(1-2/3\omega)}\ .$$

因此，我们得出双标度极限下的自由能为：

$$F_{DS}(t,N) = F_{LO,c} + \frac{N^{-3/2} I(t_c)^{1/2} L(t_c)^{3/2}}{4 M_{T,c} K^2 \kappa(t,N)^{1/2}} \sum_{\omega} \mathrm{Cat}_{\omega-1} \frac{\kappa(t,N)^{\omega-1}}{(1-\frac{2}{3}\omega)} \ ,$$

其中 $F_{LO,\ c}$ 是 $F_{LO}(t)$ 在 $t = t_c$ 处的值。

10 总结

本文研究了具有六次棱柱相互作用的 $O(N)^3$ 不变张量模型的双标度极限。利用中间场方法，我们将这一六次相互作用约化为四次 $T^3\chi$ 四面体相互作用， χ 其中间场为中间场。该方法使我们能够采用所谓的四面体表示，在这种表示中，费曼图的所有棱柱顶点都被拆分为成对的四面体顶点。为了得到本文的结果，我们将研究具有 T^4 四面体相互作用的单场模型时所用的方法推广到了$T^3\chi$ 情形。

这一策略使我们能够提出一种新方法，在模型的大 N 展开中显式识别领先阶图。在四面体表示中，领先阶图是融子图，可以在两种类型的传播子上进行融子插入。在棱柱表示中，领先阶图属于另一类图。这些图由图8 中的三重蝌蚪图出发，通过递归地在任意传播子上插入一个 2–点双蝌蚪图，或将任意棱柱顶点拆分为两个由一对边相连的同类顶点而得到，如图9所示。随后，我们引入了链、偶极子和图式，并用它们描述模型展开的一般项。我们利用它们展示了模型在四面体表示中的次领先阶图和主导图。主导图的图式与有根二叉树一一对应；这些树的叶节点是次领先阶图的图式，内部节点则是度为0 的分支。最后，我们计算了双标度极限下的二点函数，见上文公式（58）。

一个自然的后续方向，是将本文所用的方法应用于其他六次相互作用，例如[22]中从重整化角度考察的六次相互作用。例如，可以考虑一个包含图41所示四种相互作用的模型。通过引入实中间场，该模型的相互作用可以

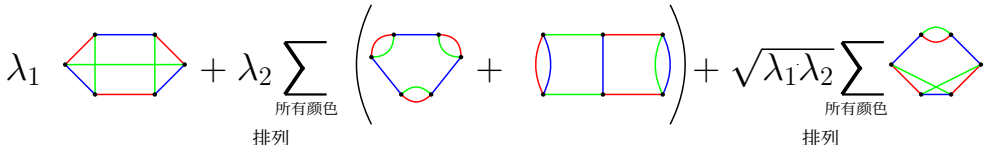


图 41：$\mathcal{I}'(\mathcal{S}')$ 的内部节点

简化为四面体相互作用和枕形相互作用 $T^3\chi$ ，如图42所示。在该模型中，四面体相互作用可以与枕形相互作用配对。与棱柱模型相比，这使得该模型的组合结构更为丰富复杂。此外，对该模型的研究可以作为计算包含所有六次连通相互作用的 $O(N)^3$不变张量模型的双标度极限的一步。

请注意，该模型并非最一般的情形，因为可以考虑为每个相互作用项分别设置不同的耦合常数。在这种情况下，需要同时使用实中间场和复中间场，才能将所有六次相互作用表示为四次表示。因此，同时存在复中间场和实中间场，会使本文所述分析更加复杂。

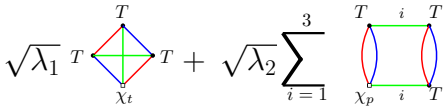


图 42：$\mathcal{I}'(\mathcal{S}')$ 的内部节点

此外，我们想强调，我们的分析并不限于此处介绍的相互作用。在更一般的情形下，可以将分离D–切定义为一条切割 D 带颜色的边、将一个泡相互作用分割为两个非连通分量。任何具有分离 D–切的相互作用，都可以借助秩为 D 的中间场写成中间形式。如果两个非连通分量相同，则该中间场为实场，否则为复场。不过，这种表示方式未必有用，因为它可能导致无法以自然方式赋予颜色的相互作用，或导致不同秩的张量发生混合。推广本文所述方法时，应将范围限定于具有与初始作用量中的张量秩相同的切的相互作用。本文的分析无法直接适用的一个相互作用例子是图43中所示的轮状相互作用（或(3,3)相互作用）。该相互作用仅具有分离 4–切（或更高阶的切），但由秩为3 的张量构成。

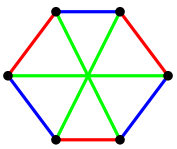


图 43：轮相互作用。

致谢。作者获得了 ANR-20-CE48-0018“3DMaps”项目的部分资助。A. T. 获得了 PN 09370102 项目的部分资助。作者感谢亨利·庞加莱研究所（法国国家科学研究中心—索邦大学 UAR 839）和 LabEx CARMIN（ANR-10-LABX-59-01）的支持。作者衷心感谢 Victor Nador 在本研究项目的各个阶段所进行的有益讨论。

参考文献

[1] R. G. Gurau. 随机张量。牛津大学出版社，2017年。[2] A. Tanasa. 组合物理学。牛津大学出版社，2021年。[3] A. Tanasa. “多定向随机张量模型：综述”。载于：《对称性、可积性与几何：方法与应用》（2016年6月）。doi: 10.3842/sigma.2016.056。

[4] A. Tanasa. “张量模型：一种量子场论特例”。载于：Proc. Rom. Acad. A 13.3（2012），第225–234页。arXiv: 1211.4444 [math.CO].[5] R. Gurau.《张量模型与张量场论札记》。2019年。doi: 10.48550/ARXIV.1907.03531.[6] R. G. Gurau. “张量模型与张量场论札记”。载于：Ann. Inst. H. Poincare D Comb. Phys. Interact. 9.1（2022），第159–218页。doi: 10.4171/aihpd/117。arXiv: 1907.03531 [hep-th].[7] I. R. Klebanov、F. Popov 和 G. Tarnopolsky. “大型N 张量模型 TASI 讲座”。载于：PoS TASI2017（2018），第004页。doi: 10.22323/1.305.0004。arXiv: 1808.09434 [hep-th].[8] J.-B. Zuber.《随机矩阵导论》。2011年。[9] P. Francesco、P. Ginsparg 和 J. Zinn-Justin. “二维引力与随机矩阵”。载于：Physics Reports 254.1-2（1995年3月），第1–133页。doi: 10.1016/0370-1573(94)00084-g.[10] P. Di Francesco.《二维量子引力、矩阵模型与图组合学》。2004年。doi: 10.48550/ARXIV.MATH-PH/0406013.[11] E. Witten.《无无序类 SYK 模型》。2016年。doi: 10.48550/ARXIV.1610.09758.[12] I. R. Klebanov 和 G. Tarnopolsky. “无色随机张量、甜瓜图与 Sachdev-Ye-Kitaev 模型”。载于：《物理评论D》95.4（2017），第046004页。doi: 10.1103/PhysRevD.95.046004。arXiv: 1611.08915 [hep-th].[13] Kitaev。http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/，（KITP 演讲）。[14] J. Ambjørn、B. Durhuus 和 T. Jónsson. “三维单纯形量子引力与广义矩阵模型”。载于：Modern Physics Letters A 06.12（1991），第1133–1146页。doi: 10.1142/S0217732391001184

电子预印本：https://doi.org/10.1142/S0217732391001184.[15] R. Gurau。《彩色群场论》。载于：《数学物理通讯》304.1（2011年3月），第69–93页。doi: 10.1007/s00220-011-1226-9.[16] R. Gurau。《彩色张量模型的 1/N 展开》。载于：《亨利·庞加莱年刊》12.5（2011年3月），第829–847页。doi: 10.1007/s00023-011-0101-8.[17] A. Tanasa。《多定向群场论》。载于：《物理学杂志 A》45（2012年），第165401页。doi: 10.1088/1751-8113/45/16/165401。arXiv: 1109.0694 [math.CO].[18] S. Dartois、V. Rivasseau 和 A. Tanasa。《多定向随机张量模型的 1/N 展开》。载于：《亨利·庞加莱年刊》15.5（2013年6月），第965–984页。doi: 10.1007/s00023-013-0262-8。

[19] S. Carrozza 和 A. Tanasa。《O(N)随机张量模型》。载于：《数学物理快报》106.11（2016年8月），第1531–1559页。doi：10.1007/s11005-016-0879-x.[20] V. Bonzom、V. Nador 和 A. Tanasa。《$O(N)^3$-不变张量模型的双标度极限》。载于：《物理学杂志A：数学与理论》55.13（2022年3月），第135201页。doi：10.1088/1751-8121/ac4898.[21] V. Bonzom、V. Nador 和 A. Tanasa。《四次 $O(N)^3$ -不变 Sachdev-Ye-Kitaev 类张量模型的图形展开》。载于：《数学物理杂志》60（2019年7月），第072302页。doi：10.1063/1.5095248.[22] S. Giombi 等。《玻色张量的棱柱形大N模型》。载于：《物理评论D》98.10（2018年11月）。doi：10.1103/physrevd.98.105005.[23] S. Prakash 和 R. Sinha。《亚色六次张量模型中的梅隆图占优》。载于：《物理评论D》101.12（2020年6月）。doi：10.1103/physrevd.101.126001.[24] G. Chapuy、M. Marcus 和 G. Schaeffer。《可定向曲面上有根地图的一个双射》。载于：（2007年）。doi：10.48550/ARXIV.0712.3649.[25] R. Gurau 和 G. Schaeffer。《正度正则彩色图》。2013年。doi：10.48550/ARXIV.1307.5279.[26] R. Gurau、A. Tanasa 和 D. R. Youmans。《多定向张量模型的双标度极限》。载于：《欧洲物理快报》111.2（2015年7月），第21002页。doi：10.1209/0295-5075/111/21002.[27] L. Lionni 和 J. Thürigen。《四维张量模型截至六阶的多临界行为》。载于：《核物理B》941（2019年4月），第600–635页。doi：10.1016/j.nuclphysb.2019.02.026.[28] P. Di Francesco。《二维量子引力、矩阵模型与图组合学》。载于：北约高级研究所：玛丽·居里培训课程：随机矩阵在物理学中的应用。2004年6月，第33–88页。arXiv：math-ph/0406013.[29] P. Di Francesco、P. H. Ginsparg 和 J. Zinn-Justin。《二维引力与随机矩阵》。载于：《物理报告》254（1995年），第1–133页。doi：10.1016/0370-1573(94)00084-G。arXiv：hep-th/9306153.[30] L. Lionni 和 V. Rivasseau。《正矩阵与张量相互作用的中间场表示》。2016年。doi：10.48550/ARXIV.1609.05018.[31] R. Kenyon。《二聚体模型导论》。2003年。doi：10.48550/ARXIV.MATH/0310326.[32] P. Flajolet 和 R. Sedgewick。《解析组合学》。第1版。美国：剑桥大学出版社，2009年。ISBN：0521898064。

[33] E. Fusy 和 A. Tanasa。《多定向随机张量模型的渐近展开》。发表于：(2014)。 DOI： 10.48550/ARXIV.1408.5725。