arXiv:2301.02095v1 [math.AP] 5 Jan 2023

抛物型梯度系统中行波前、静止前沿和驻定脉冲的一般横截性

Romain Joly 和 Emmanuel Risler

2023年1月6日

对于如下形式的非线性抛物型系统

$$\partial_t w(x,t) = \partial_x^2 w(x,t) - \nabla V(w(x,t))\,,$$

证明了以下结论关于势函数 V 一般成立：每个侵入 V 的极小点的行波前都是双稳态的，不存在静止前沿，每个驻定脉冲在无穷远处稳定；这些前沿和脉冲的剖面在 $\pm\infty$ 处趋近其极限时，沿着对应于这些点处 D^2V 最小特征值的特征子空间与之相切；这些前沿和脉冲对于势函数的小扰动具有鲁棒性，且其剖面集合是离散的。这些结论是作为针对控制这类前沿和脉冲剖面的微分系统中的异宿解和同宿解的一般横截性结果的推论而得到的。在这些结果中，证明了对于如下形式的一般哈密顿系统

$$\ddot{u} = \nabla V(u)\,,$$

每条非对称同宿轨道都是横截的，每条对称同宿轨道都是初等的。

*2020*年数学主题分类： 35K57, 37C20, 37C29, 37J46。关键词与短语： 抛物型梯度系统、行波前、静止前沿和脉冲、哈密顿系统的同宿轨道和异宿轨道、一般横截性、莫尔斯–斯梅尔定理。

目录

1 引言 **1**

1.1 行波前、静止波前与静止脉冲.11.2 描述前沿与脉冲剖面的微分系统 31.3 波前与脉冲波的横截性.61.4 势空间.71.5 主要结果.81.6 简短历史回顾.10

2 平衡点的稳定流形与不稳定流形 11

2.1 平衡点附近的线性化.122.2 速度为 c 正时的局部稳定与不稳定流形 . . . . . 132.3 速度 c 等于 0 时的局部稳定与不稳定流形 16

3 行波前沿、静止前沿和脉冲的初步性质 **18**

3.1 命题1.2 的证明.183.2 对称驻波脉冲的等价定义.193.3 行波前沿／驻定脉冲剖面仅到达一次的值 20

4 泛性工具 **22**

4.1 Sard–Smale 横截定理的一个实例.224.2 将局部泛型性推广为全局泛型性.244.3 在给定半径之外为二次型的势函数.244.4 限制映射的拓扑性质.25

5 行进前沿的一般横截性 27

5.1 记号与陈述.275.2 化归为局部陈述.275.3 局部陈述的证明（命题 5.2）.295.3.1 设定.295.3.2 关于 ν 和 r 的附加条件.305.3.3 横截性的等价刻画.315.3.4 验证定理1 4.2的假设.345.3.5 验证定理2 4.2的假设.345.3.6 结论.39

6 对称驻定脉冲的一般位置初等性 **40**

6.1 记号与陈述.406.2 命题的证明6.2 .416.2.1 定理的应用4.2 .416.2.2 检验定理1 的假设4.2 .416.2.3 检验定理2 的假设4.2 .42

7 非对称静止脉冲的一般横截性 44

7.1 记号与陈述.44 7.2 有界长度且远离 S_{sym} 的非对称驻定脉冲 . . . 45 ¯ 7.3 $\nu_{\pitchfork}$ asymstandpulses(ξ,ε) 的开性.46 ¯ 7.4 $\nu_{\pitchfork\,\mathrm{asym}}$ stand pulses(ξ,ε) 的稠密性.47 7.4.1 定理 4.2 的应用.47 7.4.2 检验定理 4.2 的假设 1.48 7.4.3 检验定理 4.2 的假设 2.48 7.4.4 结论.50 7.5 对称驻定脉冲的横截性？.50

8 静止前沿的一般位置不存在性 51

9 主要结果的证明 51

9.1 定理1的结论1.7 的证明 .519.2 定理2 和 3 的结论1.7 的证明 .569.3 定理4的结论 1.7 的证明 .579.4 推论 1 至4 的结论1.1 的证明.57

10 双稳态行波前和在无穷远处稳定的静止脉冲剖面的普遍渐近行为 58

10.1 剖面的渐近行为.5810.2 速度为 c 正时的局部强稳定流形与不稳定流形 5910.3 定理2 结论1.8 的证明思路.6110.4 定理1结论的证明1.8 .6310.5 定理2结论的证明 1.8（针对双稳态行波前） . . . . . 6410.5.1 化归为局部陈述.6410.5.2 局部陈述的证明. 6510.5.3 延拓至所有势函数.65

1 引言

本文旨在探讨非线性抛物型系统的行波前沿和静止前沿/脉冲的一般性质，其形式为

$$\partial_t w(x,t) = \partial_x^2 w(x,t) - \nabla V(w(x,t)), \tag{1.1}$$

其中，时间变量 t 和空间变量 x 均为实数，空间区域为整个实数轴，函数 $(x,t) \mapsto w(x,t)$ 的取值属于 $\mathbb{R}^d$，其中 d 为正整数；非线性项是势函数 $V\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 的梯度，且假设该势函数具有正则性（至少为 C^2 类）。行波前沿和静止前沿/脉冲是系统 (1.1) 的解，其形式为 $w(x,t) = u(x-ct)$，在行波（$c>0$）或静止（$c=0$）参考系中保持不变，并且在空间两端趋近于 V 的临界点。本文的主要结果（定理 1.7，并由定理 1.8 补充）的概貌可由下述推论体现，图1.1对此作了说明。相关术语将在以下小节中给出精确定义。

推论1.1。 对于泛型势函数 V，以下结论成立：

1. 每个侵入 V 某个极小点的行波前都是双稳态的；*2.* 不存在静止前沿，且每个驻定脉冲都在无穷远处稳定；*3.* 所有双稳态行波前和驻定脉冲构成的集合是离散的；*4.* 每个行波前和驻定脉冲（分别单独考虑）对于 V的小扰动都是鲁棒的；*5.* 每个双稳态行波前或在无穷远处稳定的驻定脉冲的剖面，在 $+\infty$ （$-\infty$）处沿着该点对应于 D^2V 最小特征值的特征子空间，切向趋近其极限。

1.1 行波前、静止波前与静止脉冲

设 c 为一个实数量。函数

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \quad \xi \mapsto u(\xi)$$

分别是以速度 c 传播的波的剖面（若 c 非零），以及平稳解（若 c 等于0），对于系统（1.1）而言，如果函数 w：（x，t）$\mapsto u$（$x-ct$）是该系统的解，也就是说，如果 u 是二阶微分系统的解

$$\ddot{u} = -c\dot{u} + \nabla V(u), \tag{1.2}$$

其中 $\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$ 分别表示 u的一阶和二阶导数。经过变换$(\xi, c) \mapsto (-\xi, -c)$后，系统（1.2）保持不变，因此我们可以假设速度 c 非负（并且以下始终如此）。回顾一下，势函数的临界点是

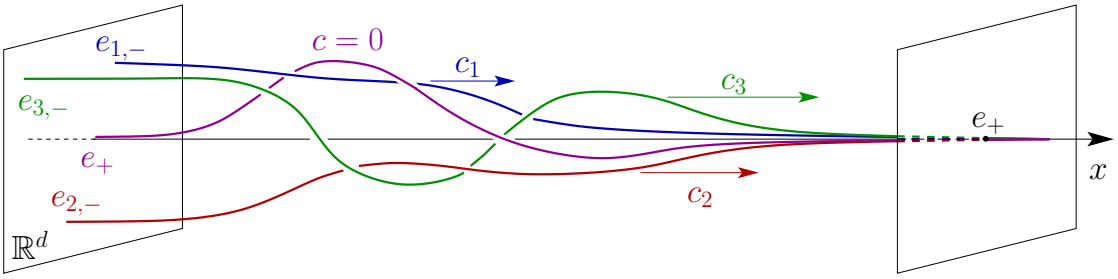

图1.1：推论 1.1 的示意图。彩色曲线表示行波前或静止前沿/脉冲的剖面 $w_i(x,\ t) = u_i(x - c_i t)$，它们在空间右端趋近给定势函数的一个极小点。若该势函数是一般的，则每个此类剖面在空间左端趋近的临界点 $e_{i,\ -}$ 都必须是极小点；对于静止剖面（速度 $c = 0$），这个极小点还必须是e_+。此外，这些剖面（忽略自变量的平移）彼此孤立，因此此类剖面（忽略自变量的平移）关于速度和剖面均构成可数集，并且对于势函数的小扰动具有鲁棒性。另外（结论5），这些剖面趋近其极限 $e_+(e_{i,\ -})$ 时，与对应于 $D^2V(e_+)$ 的最小特征值的特征子空间相切（$D^2V(e_{i,\ -})$），但图中未展示这一最后的性质。

势函数 V 的一个点 e，属于 $\mathbb{R}^d$，且满足 $\nabla V(e) = 0$；而 V 的非退化局部极小点是一个临界点 m，属于 V，且满足 $D^2V(m)$ 为正定。若 e_- 和 e_+ 是势函数 V的两个临界点，且 u 是一个 非恒定的系统（1.2）的全局解，并满足以下极限

$$u(\xi) \xrightarrow[\xi\to-\infty]{} e_- \quad \text{and} \quad u(\xi) \xrightarrow[\xi\to-\infty]{} e_+\,, \tag{1.3}$$

那么解 $(x,\ t) \mapsto u(x - ct)$ 若满足（1.1），则称其连接 e_- 到 e_+，并称为：

- 一个行波前，若 $c \neq 0$ 且 $e_- \neq e_+$，
- 一个静止前沿，若 $c = 0$ 且 $e_- \neq e_+$，
- 一个驻定脉冲，若 $c = 0$ 且 $e_- = e_+$。

此外，连接临界点 e_- 和临界点 e_+ 的行波前或静止前沿称为双稳态，若这两个临界点都是 V的非退化（局部或全局）极小点。相应地，连接某个临界点与其自身的驻定脉冲称为无穷远处稳定，若该临界点是 V的非退化（局部或全局）极小点。在驻定脉冲中，值得区分对称脉冲与非对称脉冲：前者关于某一时刻对称（解沿同一路径往返），后者则不是。

行波前和静止前沿以及脉冲可以用能量解释如下：˜记 V 为相反势函数 $-V$。那么，在系统 (1.2) 中（其中变量 ξ 起时间的作用），速度起阻尼系数的作用，并且

˜非线性保守力由势函数 V导出。换言之，系统˜描述了一个球在 V的图像上滚动时的运动，并受到重力和摩擦力 $-c\dot{u}$的作用。其 哈密顿能量 是定义为以下形式的函数 H_V：

$$H_V : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}\,, \qquad (u,v) \mapsto \frac{1}{2}|v|^2 - V(u) = \frac{1}{2}|v|^2 + \tilde{V}(u)\,, \tag{1.4}$$

并且，对于该系统的每个解 $\xi \mapsto u(\xi)$ 以及该解有定义的每个时刻 ξ，沿着此解的 H_V 的时间导数为

$$\frac{d}{d\xi} H_V(u(\xi), \dot{u}(\xi)) = -c|\dot{u}(\xi)|^2\,. \tag{1.5}$$

因此，如果这样的解满足极限（1.3），

- 若 c 为正，则 e_- 和 e_+ 必不相同，且 $V(e_-)$ 必须小于 $V(e_+)$；那么，——从抛物型系统 (1.1) 的角度来看，该行波前将被称为侵入“较高的”（相对于 V 而言）临界点 e_+ （它被“较低的”临界点 e_- 所“取代”）；——从哈密顿系统 (1.2) 的角度来看，阻尼会“吸收”˜ ˜ ˜正的滞后 $V(e_-) - V(e_+)$（相对于 V 而言，“较高的”临界点是 e_-，“较低的”则是 e_+）；

- 若 c 为零，则 e_- 和 e_+ 必须属于 V 的同一水平集。

此外，正如图 1.2 至 1.4所示，力学解释为推论 1.1提供了直观的说明。

1.2 控制前沿和脉冲剖面的微分系统

沿用前面的记号，考虑向量场

$$F_{c,V} : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}, \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ \nabla V(u) - cv \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

二阶微分系统（1.2）等价于一阶微分系统

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \nabla V(u) - cv \end{cases} \quad \text{or equivalently} \quad \dot{U} = F_{c,V}(U) \ \text{ with } \ U = (u,v) \in \mathbb{R}^{2d}\,. \tag{1.7}$$

点 E 属于 $\mathbb{R}^{2d}$，是系统 (1.7) 的平衡点，当且仅当存在 V 的临界点 e，使得 E 等于 $(e, 0)$。假设 e 非退化，换言之，0 不属于对称矩阵 $D^2V(e)$ 的谱。令 $W^{\mathrm{s}}_{c,V}(E)$ 和 $W^{\mathrm{u}}_{c,V}(E)$ 表示微分系统 (1.7) 中 E 的稳定流形与不稳定流形。回顾一下，这些流形中的每一个都定义为以下各像的并集

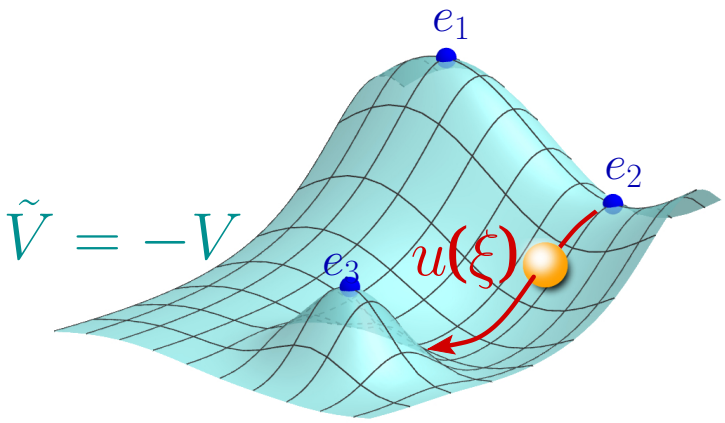

图 1.2：对于系统 (1.2)，属于不同等值集的临界点之间的异宿连接（维数 d 等于 2）。该系统描述了˜一个球在曲面 $u \mapsto V(u) = -V(u)$ 上滚动时的运动，球受到重力和摩擦力 $-c\dot{u}$的作用。 V 的极小点 e_1 和 e_3 是 $-V$的极大点，而 e_2 表示一个鞍点。连接 e_1 或 e_2 与 e_3的行波前，对应于球在时刻 $-\infty$以零速度离开 e_1 或 e_2，并以适当的阻尼 c 朝e_3 滚动，使其在时间趋于 $+\infty$时静止到达 e_3 。粗略地说，要使这种未来的渐近行为发生，需要满足两个条件：方向正确（朝向 e_3）且阻尼适当（到达 e_3 并停在那里）。如图所示，从 e_1 出发有两个自由度（方向和阻尼），而从 e_2 出发则只有一个自由度（阻尼）。因此， e_1 与 e_3 之间的连接（侵入 e_3的双稳态行波前）预计会普遍出现，并且是鲁棒的；相比之下， e_2 与 e_3 之间的连接（侵入 e_3的非双稳态行波前沿）则只应在势函数罕见的情况下出现。上文推论1.1的结论 1 和 3，以及下文定理 1.7，正式证实了这些预期。

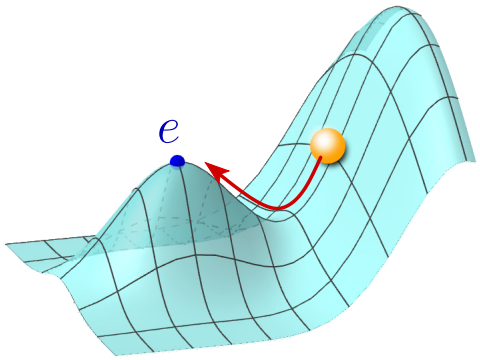

图 1.3：一个对称驻定脉冲。在与临界点 V 相同的高度处，以零速度释放一个球，且不存在阻尼。由于哈密顿量（能量）守恒，要在时间趋于 e 时到达 $+\infty$，只需调整朝向 e的“方向”。如果 e 是 V 的极小点（ $-V$的极大点），如图所示，那么只需在一维水平集 $V^{-1}(\{e\})$上选择合适的释放点，即可满足这一条件。反之，如果 e 是鞍点，那么释放点还必须同时位于 e的一维稳定流形上，这就增加了一个额外条件。因此，预期无穷远处稳定的对称驻定脉冲是一种一般且鲁棒的特征，而无穷远处不稳定的对称驻定脉冲只会出现在罕见的势函数中。上文推论 1.1 的结论 2 和 3，以及下文定理 1.7证实了这些预期。

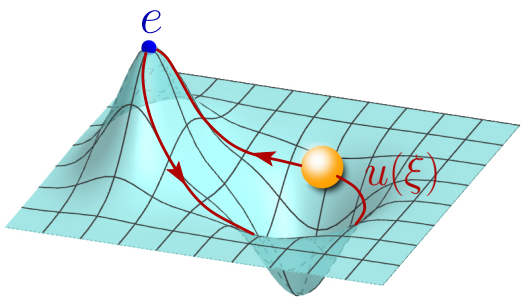

图 1.4：一个非对称驻定脉冲。球以零速度在时刻 e “离开”临界点 $-\infty$，且不存在阻尼。由于哈密顿量（能量）守恒，随着时间趋于 e，要回到 $+\infty$ 只需调整朝向 e的“方向”。如果 e 是 V 的极小点（ $-V$的极大点），如图所示，那么只要沿适当方向离开 e，就能满足这一条件。相反，如果 e 是鞍点，那么离开的方向便没有选择余地（此外，要回到 e，还必须沿某个特定方向）。因此，预期无穷远处稳定的非对称驻定脉冲是普遍且鲁棒的特征，而无穷远处不稳定的驻定脉冲则只会出现在罕见的势函数中。上文推论 1.1的结论 2和 3，以及下文定理 1.7证实了这些预期。

解 $\xi \mapsto U(\xi)$ 当 E 在 ξ 趋于 $+\infty/-\infty$时，以指数速率收敛到该平衡点，并与其稳定/不稳定线性空间相切（见第2节）。以下陈述在第 3.1小节中得到证明，它将行波前剖面与静止前沿/脉冲剖面同这些流形的交集对应起来。

命题 *1.2.* 设 e_- 和 e_+ 是V的两个（可以相等的）非退化临界点， E_- 和 E_+ 分别表示系统 *(1.7)* 中对应的平衡点， c 表示一个实数（可以为零或非零）。对于连接 e_-和 e_+ 、以速度 c 行进的前沿/脉冲的任意剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$（若 c 等于零，则为静止），对应的系统 *(1.7)* 解 $\xi \mapsto (u(\xi)\ \dot{u}(\xi))$ 的像属于 $W^{\mathrm{u}}_{c,V}(E_-) \cap W^{\mathrm{s}}_{c,V}(E_+)$。

该命题的含义有两方面。首先，它表明 u（ξ）趋向于 $e_\pm$ 在 $\pm\infty$ 处的收敛，会导致 $(u(\xi)\ \ \dot{u}(\xi))$ 趋向于 $(e_\pm, 0)$的收敛。换言之，偏微分系统（1.1）的每个行波前沿或静止前沿的剖面，都对应于系统（1.7）的一条异宿轨道，而每个驻定脉冲的剖面，都对应于该系统的一条同宿轨道。其次，这些收敛以指数速率发生，因此并非沿着中心流形进行（当 c 消失时，对于一个不是极小点的非退化临界点，中心流形存在，参见小节 2.1）。

1.3 波前与脉冲波的横截性

通常，将连接两个平衡点 E_- 和 E_+的异宿轨道定义为：不稳定流形 E_-与稳定流形 E_+的交集具有横截性。然而，对于行波前沿，必须考虑移动速度 c 的自由度，从而得到以下定义。

定义 1.3（行波前的横截性）。 设 e_- 和 e_+ 是 V 的两个非退化临界点，并设 E_- 和 E_+ 分别表示系统（1.7）对应的平衡点。一个剖面为 $\xi \mapsto u$（ξ） 以正速度 c 传播并连接 e_- 与e_+ 的前沿称为横截的，如果交集

$$\left(\bigcup_{c'>0}\{c'\}\times W^{\mathrm{u}}_{c',V}(E_-)\right)\cap\left(\bigcup_{c'>0}\{c'\}\times W^{\mathrm{s}}_{c',V}(E_+)\right)$$

在 $\mathbb{R}^{2d+1}$ 中沿集合 $\{c\} \times U(\mathbb{R})$ 横截。

对于一个静止脉冲（连接一个临界点 e 的 V 自身），其速度 c 等于0，因此系统（1.7）保持哈密顿量 H_V（在（1.4）中定义）。因此，与 E 对应的平衡点 e 的稳定流形与不稳定流形属于 H_V的同一水平集，所以这些流形之间的横截性不可能在$\mathbb{R}^{2d}$中成立，而只能在该水平集内成立（该水平集在平衡点集合之外是一个类 $2d-1$的$\mathcal{C}^{k+1}$ 流形）。由此得到以下定义。

定义 1.4（驻定脉冲的横截性）。设 e 是 V 的一个非退化临界点，并令 $E = (e, 0)$。若一个剖面为 $\xi \mapsto u(\xi)$、且连接 e 与其自身的驻定脉冲满足交集

$$W^{\mathrm{u}}_{0,V}(E) \cap W^{\mathrm{s}}_{0,V}(E)$$

is t 沿轨道 $U(\mathbb{R})$，在去除 E 的水平集 $H_V^{-1}(-V(e))$ 内横截 .

如上所述，驻定脉冲分为两类（对称和非对称，见图 1.3 和 1.4），因此在证明中需要分别处理。下面给出更精确的定义。

定义 1.5（对称驻定脉冲，转向时刻）。设 e 是 V 的一个非退化临界点。若存在一个时刻 ξ_{turn}，称为该脉冲的转向时刻，使得 $\dot{u}(\xi_{\mathrm{turn}})$ 消失；或者等价地，使得 $U(\xi_{\mathrm{turn}})$ 属于 $\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^d}\}$，则称一个以 e 为起点并回到自身、剖面为 $\xi \mapsto u(\xi)$ 的驻定脉冲是对称的。这个子空间 $\mathbb{R}^d \times\{0_{\mathbb{R}^d}\}$ 通常称为时间反演子空间或对称子空间，记作 $\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}$。

如果存在这样的转向时刻，那么它是唯一的，并且该脉冲的剖面确实关于此转向时刻对称，参见引理3.2。注意，在标量情形$d = 1$ 中，每个驻定脉冲都是对称的（如果解在 $\dot{u}$ 两端趋于相同的极限，那么导数 $\mathbb{R}$必定为零）。对于对称驻定脉冲（维数 d任意），将要求满足以下较弱的横截性性质（[17, 23, 51]），而非定义 1.4 中所定义的横截性。

定义 1.6（基本对称驻定脉冲）。 假设驻定脉冲$\xi \mapsto u(\xi)$关于转向时刻 ξ_{turn} 对称。若交集

$$W^{\mathrm{u}}_{0,V}(E) \cap \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}$$

在 $\mathbb{R}^{2d}$ 中于点 $U(\xi_{\mathrm{turn}})$ 横截，则称该脉冲为初等的。驻定脉冲具有初等性这一特征称为初等性。

注意，每个横截的对称驻定脉冲都是初等的：由于当 c 为零时具有时间可逆性，$W^{\mathrm{u}}_{0,V}(E)$ 与 $\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}$ 之间的非横截交集会导致 $W^{\mathrm{u}}_{0,V}(E)$ 与 $W^{\mathrm{s}}_{0,V}(E)$ 之间出现非横截交集。但反过来则不成立：对于对称驻定脉冲，交集 $W^{\mathrm{u}}_{0,V}(E) \cap W^{\mathrm{s}}_{0,V}(E)$ 按定义 1.4 的意义可能是非横截的，但该交集仍可能与时间反演子空间 $\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}$ 横截相交。例如，当一个对称驻定脉冲是非对称解的单参数族的极限时，就可能出现这种情况。

1.4 势空间

在本文余下部分，取定一个整数 $k \geq 1$。记$\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R})$为函数 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 空间，其中的函数属于 $\mathcal{C}^{k+1}$ 类，并且函数本身及其阶数不超过 $k+1$ 的导数均有界；赋予该空间范数

$$\|W\|_{\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}} = \max_{\alpha \text{ multi-index},\ |\alpha| \leq k+1} \|\partial^{|\alpha|}_{u_\alpha} W\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} .$$

我们按如下拓扑将较大的空间 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R})$嵌入：对于该空间中的 V，V 的邻域基由集合 $V+\mathcal{O}$给出，其中 $\mathcal{O}$ 是嵌入$\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R})$中的开子集，其所赋拓扑由 $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k+1}\ \mathrm{b}}$ 定义。该拓扑（可视为扩展度量所诱导的拓扑）很方便，因为局部性质可以在形如以下的巴拿赫空间中进行研究

$$V+\left(\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}}\right),$$

其中$\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k+1}\ \mathrm{b}}$ 被视为经典范数。本文中，空间$\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$始终赋予这一拓扑（若需要拓扑），而 $\left(\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k+1}\ \mathrm{b}}\right)$将简记为$\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$。

回顾一下，拓扑集合 A 中的子集 B 称为中的泛型子集 B，如果它包含 B的稠密开子集的可数交；相应地，若某个性质对泛型势函数成立，即它对$\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$的泛型子集中的每个势函数都成立。值得注意的是，$\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 是贝尔空间，因为它局部等同于贝尔空间$\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$。因此，一般性的概念为“较大”的子集和“几乎处处成立”的性质提供了有意义的定义。还有其他定义，本文所述结果想必对这些定义仍然成立（感兴趣的读者可参见 [2, 3, 25, 34]）。

事实上，本文所陈述的结果对于其他自然拓扑（如惠特尼拓扑）也成立。然而，在惠特尼拓扑下，空间 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 不是局部度量空间（惠特尼拓扑不能用序列刻画），这会带来技术上的困难。因此，上述框架便于陈述主要论证，同时避免不必要的技术细节；不过，拓扑的选择并非关键问题。

最后，我们回顾一下：仅具有非退化临界点的函数通常称为莫尔斯函数。根据一个经典结果（例如参见 [24]），莫尔斯函数构成 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 的一个泛型子集。由于两个泛型子集的交集仍是泛型子集，而且我们的目的是陈述泛型成立的结果，因此假设所考虑的势函数 V 是莫尔斯函数并无不便。因此，以下只考虑非退化临界点，并且常假设势函数 V 是莫尔斯函数。

1.5 主要结果

以下一般横截性结论是本文的主要结果。

定理 1.7 （前沿和脉冲的一般横截性）。存在一个 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 的泛型子集，使得对于该子集中的每个势函数 V，V 都是莫尔斯函数，并且由 V 定义的前沿和脉冲满足以下结论：

1. 每个侵入 V 极小点的行波前都是横截的；
2. 每个对称驻波脉冲都是初等的；

3. 每个非对称驻定脉冲都是横截的；

4. 不存在静止前沿。

本文的核心（第5至8节）致力于证明这一结果对某个半径之外为二次型的势函数成立（其定义见 (4.2)）。对于这类势函数，命题 5.1 证明结论1，命题 6.1 证明结论2，命题 7.1 证明结论3，命题8.1证明结论4。第 5 节和第 6 节分别用于证明这些命题。在第 9 节中，通过将这些结论延拓至 $C^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 的一般势（不一定在某个半径之外为二次型），完成定理 1.7 的证明；并由定理 1.7 推导出推论1.1中的定性结论1至4。

利用相同的技巧，第1.7 定理（以及推论1 至4 的结论1.1）的以下延拓在第10节中得到证明。该延拓的第二个结论就是推论5 1.1中的最后一个结论。

定理 1.8。 存在一个泛型子集 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$，使得对于该子集中的每个势函数 V，除了定理 *1.7* 的结论（以及推论 *1* 至 *4* 的结论 *1.1*）之外，还成立以下两条结论：

1. 对于 V 的每个极小点，海森矩阵 D^2V 在该极小点处的最小特征值是单重的；*2.* 每个双稳态行波前沿或在无穷远处稳定的驻定脉冲的剖面，在 $+\infty$ *(*$-\infty$*)* 处趋近其极限时，都与该点处对应于 D^2V 的最小特征值的特征子空间相切。

如第 1.1 小节所述，定理 1.7 的结论 2 至 4 可以用哈密顿系统的同宿轨道和异宿轨道来解释

$$\begin{cases} \dot u = \partial_v \mathcal{H}(u,v) \\ \dot v = -\partial_u \mathcal{H}(u,v) \end{cases} \quad \text{where} \quad \mathcal{H}(u,v) = \frac{1}{2}|v|^2 + \tilde V(u) \quad \text{and} \quad \tilde V = -V\,. \tag{1.8}$$

以下陈述明确给出了这种解释（仅针对结论 2 和 3，因为结论 4 实际上是初等且众所周知的，见第 8 节）。此处不提供证明，因为这只是对上述结论的直接翻译，其中关于同宿轨道的（非）对称性和初等性含义显而易见。

定理 1.9 （哈密顿观点）。 存在一个 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 的泛型子集，使得对于该子集中的每个势函数 V，

*1*哈密顿系统的每条非对称同宿轨道 (1.8) 都是横截的；

*2*哈密顿系统的每个对称同宿轨道都是初等的。(1.8) 是初等的。

1.6 简短历史回顾

定理 1.7及其证明依赖于横截性定理（也称 Sard–Smale 定理或 Thom 定理），并与微分系统的经典横截性结果密切相关，参见例如 [1, 31, 36, 45, 48]。与以往研究相比，仍有一些显著差异值得指出。

首先，定理 1.7 中的一般性仅针对势函数 V，而非 一般向量场 $\mathbb{R}^{2d}$。因此，对给定势函数的扰动只能对动力学提供部分控制（换言之，形如（1.7）的微分系统不能生成 $\mathbb{R}^{2d}$中的所有可能流）。这一约束与所研究系统的特殊性质相辅相成，而这些性质必须纳入考量。据我们所知，关于一类特殊微分系统动力学的一般性结果最早可追溯至 [45], ，该结果涉及多项式流。

对于哈密顿流，同宿轨道从理论和物理角度来看都发挥着重要作用，相关综述可参见 [12, 16] 以及论文[4, 15, 23, 32, 50, 51]。这类轨道的横截性／初等性具有重要的动力学意义，例如会出现与复杂动力学相关的 Smale 马蹄。在 [30, 50], 中，研究了这些性质在一般抽象框架下的一般性，但只有在满足充分条件时才能得到结果；这些条件对应于横截性定理 4.2的假设。在 [32], 中证明了这类一般性，但讨论的是非自治系统。关于连接轨道一般横截性的其他参考文献包括 [33, 37, 38, 46]及其中的参考文献。在 [46], 中，一般性适用于所有哈密顿流，而不仅限于形如（˜1.8）的二阶保守系统。在 [33, 37, 38], 中，一般性仅针对势函数 V，讨论的设定更为一般，其中哈密顿量里的“动能” $|v|^2/2$ 被更一般的表达式所取代。但这些论文没有研究同宿轨道的横截性。在 [33], 中，异宿轨道的横截性由 [13]的一个扰动结果推得。 [33, 37, 38] 的其他结果关注的是闭轨。因此，据我们所知，即使是定理 1.9（用哈密顿系统的术语来说，即关于驻定脉冲的结果）也是新的。

关于非零耗散情形（定理1 的结论 1.7），其陈述不同于通常的一般性性质。若 c 固定（且非零），那么对于系统（1.7）的流，侵入 V的极小点的行波前所对应的异宿连接一般并不存在。但参数 c 所提供的自由度确保了双稳态行波前所对应的异宿连接一般存在，且具有横截性和稳健性。因此，在应用横截性定理的设定中必须考虑这一参数 c；这与关于微分系统流的经典一般性结果有显著区别。

本文最初的研究动机实际上与如下形式的抛物型系统有关（1.1）。对于这类系统，第二作者在 V 中，在关于 V 的相当一般（假定为一般性） [39, 40, 43]条件下，描述了双稳态解的全局动力学；这里的双稳态解是指在空间两端都接近势函数 V 的局部极小点的解。每个这样的解在时间趋于 $+\infty$时，都必须在空间远左侧趋近于一列向左传播的双稳态前沿，并在空间远右侧趋近于一列向右传播的双稳态前沿

，而两者之间则呈现出静止脉冲/前沿彼此缓慢远离的图样（这将 Fife 和 McLeod 于七十年代末为标量方程 [19–21] 开创的研究纲领推广到了梯度系统）。本文对 V 中关于势函数 [39, 40, 43] 所作假设的一般性给出了严格证明。相同的假设还可为双曲梯度系统 [41] 以及高空间维数下抛物型梯度系统的径向对称解 [42]导出类似结论。后一篇文献中的结果依赖一个额外假设，该假设是结论2 （定理 1.7中对称驻定脉冲的初等性）的高空间维数对应版本。配套论文 [44], 采用与本文相同的方法证明了这一假设的一般性。

定理 1.7 的延拓定理 1.8（包含推论1.1的最后一条结论 5）源于对抛物型系统 (1.1) 中前沿与脉冲之间远程相互作用的研究。关于这类“局域结构”之间远程相互作用的文献浩如烟海，涵盖数学和物理学领域，例如 [6, 11, 14, 18, 28, 52] 等众多可能的参考文献。鉴于以下原因，定理 1.8 的结论与这一主题尤为相关。考虑抛物型系统 (1.1) 的一个解，它在相距甚远的区域内，分别接近两个静止前沿或脉冲，或两个以相同速度传播的前沿。记它们的剖面为 $u_{\text{left}}(\cdot)$ 和 $u_{\text{right}}(\cdot)$，于是该解在 $\mathbb{R}_-$ 上接近 u_{left} 的一个平移，在 $\mathbb{R}_+$上接近 u_{right} 的一个平移。接下来，这两个平移之间的（较大）距离预计会缓慢变化，其变化遵循一个可以通过一阶近似计算的（远程）相互作用定律，该定律与 u_{left} 在 $+\infty$ 处以及 u_{right} 在 $-\infty$ 处的渐近行为有关。基本而言，当（如当前情形）u_{left}和 u_{right} 的尾部不振荡时，这种一阶远程相互作用可能是吸引的、排斥的或中性的，具体取决于一个内积的符号；该内积取自 u_{left} 和 u_{right} 趋近其（共同）极限时所沿的（定向）方向（分别在 $+\infty$ 处和 $-\infty$ 处）。例如，见 [5], 第 59 页底部的猜想，或 [18]中定理2.3的表达式 (2.12) 和 (2.13)。在当前情形下，根据定理 1.8 的结论，对于泛型势函数，这两个定向方向与势函数在上述共同极限——即极小点——处的海森矩阵 D^2V 的最小特征值所对应的一维特征子空间对齐。由此可知，一阶远程相互作用只能是吸引的或排斥的，不会是中性的。

2 平衡点的稳定流形与不稳定流形

在本节中， V 表示 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中的势函数，而 c 表示一个非负量（速度）。如命题 1.2所述，抛物型方程（1.1）的行波前沿和静止前沿/脉冲，对应于由一阶微分系统（1.7）生成的 $\mathbb{R}^{2d}$ 中流的异宿连接和同宿连接。设 Ω 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d}$ 中该流有定义的最大（开）子集，并令

我们来考察其流 $S_{c,\ V}$ 定义如下

$$S_{c,V} : \Omega \to \mathbb{R}^{2d}, \quad (\xi, U_0) \mapsto U(\xi), \tag{2.1}$$

wh这里 $U(\xi)$ 是满足初值 $U(0) = U_0$的方程 (1.7) 的解。根据定义，对于 Ω 中的每个 (ξ, U_0) ，

$$\frac{\partial}{\partial \xi} S_{c,V}(\xi, U_0) = F_{c,V}\big(S_{c,V}(\xi, U_0)\big) \quad \text{where} \quad F_{c,V} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ \nabla V(u) - cv \end{pmatrix}.$$

尽管变量 ξ 主要表示初始偏微分系统 (1.1) 中以速度 c 行进的参考系里的空间变量，但在规定行波和驻波剖面的微分系统 (1.2) 和 (1.7) 中，这个变量也起到时间的作用。因此，下文常将这个变量称为“时间”。

2.1 在平衡点附近的线性化

设 e 为 V的一个非退化临界点。令 $(u_1, \dots, u_d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的一组由海森矩阵 $D^2V(e)$ 的特征向量构成的标准正交基，并令 $\mu_1, \dots, \mu_d$ 表示相应的（实）特征值。

定义 2.1。 我们将 e的莫尔斯指标 记为 $m(e)$，其值为海森矩阵 $D^2V(e)$ 的负特征值个数，按其代数重数计数。

由于假设临界点 e 是非退化的，因此：当 $m(e)$等于 0 时，它是极小点；当 $m(e)$ 介于 1 和 $d-1$之间时，它是鞍点；当 $m(e)$等于 d时，它是极大点。此外，所有量 μ_1、……、 μ_d 均不为零，我们可以假设

$$\begin{aligned} \mu_1 \le \cdots \le \mu_{m(e)} < 0 < \mu_{m(e)+1} \le \cdots \le \mu_d \quad &\text{if} \quad m(e) > 0, \\ \text{and} \quad 0 < \mu_1 \le \cdots \le \mu_d \quad &\text{if} \quad m(e) = 0. \end{aligned}$$

现在，考虑平衡点 $E = (e,\ 0_{\mathbb{R}^d})$，它属于 $S_{c,\ V}$ 对应于 e。在 1.7式所示的线性化微分系统在 E 处为：

$$\dot{U} = DF_{c,V}(E)U, \quad \text{or equivalently} \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = D^2V(e)u - cv \end{cases}. \tag{2.2}$$

注意，复数量 λ 是线性系统（2.2）的特征值，当且仅当量 $\lambda(\lambda + c)$ 是海森矩阵 $D^2V(e)$的特征值，也就是说，若 $\lambda(\lambda + c)$ 等于以下某个量 μ_1、……、 μ_d。对于 j属于 {1、……、 d}，令

$$\lambda_{j,+} = -\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \mu_j} \quad \text{and} \quad \lambda_{j,-} = -\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \mu_j} \tag{2.3}$$

表示线性系统（2.2）对应于μ_j的两个（实或复）特征值，并令

$$U_{j,+} = \begin{pmatrix} u_j \\ \lambda_{j,+} u_j \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad U_{j,-} = \begin{pmatrix} u_j \\ \lambda_{j,-} u_j \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

表示相应的特征向量。令

$$\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{c,V}(E) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^{\mathrm{c}}_{c,V}(E) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{c,V}(E) \tag{2.5}$$

分别表示 $\mathbb{R}^{2d}$ 在以下线性算子 DF_c 下的稳定、中心和不稳定子空间，V该算子定义于 (2.2) 中，即分别对应于实部为负、零和正的特征值的特征子空间。这些空间及相应不变流形（下文定义）的维数可由表达式 (2.3) 得出，汇总于表 2.1 中。负速度 c 的情况可通过

	$c=0$	$c>0$
$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_c$ 的维数 $_{,V}(E)$ 和 $W^{\mathrm{u}}_{c\ ,V}(E)$	$d-m(e)$	$d-m(e)$
维数$\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_c$ $_{,V}(E)$ 和 $W^{\mathrm{s}}_{c\ ,V}(E)$	$d-m(e)$	$d+m(e)$
维数$\mathcal{E}^{\mathrm{c}}_c$ $_{,V}(E)$ 和 $W^{\mathrm{c}}_{1\ \mathrm{oc,c,V}}(E)$	$2m(e)$	0

表 2.1：平衡点的稳定流形、不稳定流形和中心流形的维数$E=(e,\ 0)$ 微分系统 (1.7) 中对应于势函数临界点 e ，其莫尔斯指标为 $m(e)$。

变换 $(c,\ \xi)\mapsto(-c,\ -\xi)$ 使系统 (1.2) 和 (1.7) 保持不变（并交换稳定维数和不稳定维数）。

“$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{c,V}(E)$”的维数也通常称为 E 的莫尔斯指标。为避免混淆，“莫尔斯指标 ”这一称谓仅用于势函数的临界点，而不用于 $\mathbb{R}^{2d}$ 中对应的平衡点。

2.2 速度 c 为正时的局部稳定与不稳定流形

微分系统平衡点的局部稳定（不稳定）流形的构造是经典问题。Kelley 的文章 [29], 包含了构造过程以及对参数的依赖性，但正则性略非最优。许多教科书中都能找到完整的构造，例如[22] 中的定理 3.2.1，或 [49]中的定理 9.4。本小节和下文小节 2.3 旨在针对速度 2.2 和小节 2.4 中的命题（以及小节2.3中速度 c 等于 0时的命题）1.7所对应的微分系统）给出关于这些流形的精确陈述（命题 1.7）以及相关记号（不含证明）；后文将引用这些陈述和记号。

取 V_0 属于 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$，令 e_0 表示 V_0的一个非退化临界点，并令 c_0表示一个正量。根据表 2.1，点 $(e_0,0)$ 是双曲平衡点，记作 E_0；式（2.5）中引入的子空间 $\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{c_0,V_0}(E_0)$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{c_0,V_0}(E_0)$ 张成整个空间 $\mathbb{R}^{2d}$ （换言之，中心部分$\mathcal{E}^{\mathrm{c}}_{c_0,V_0}(E_0)$ 退化为 $\{0_{\mathbb{R}^{2d}}\}$）。令

$$\beta^{\mathrm{u}}=\min\{\mathrm{Re}(\lambda):\lambda \text{ eigenvalue of } DF_{c_0,V_0}(E_0) \text{ with } \mathrm{Re}(\lambda)>0\} \tag{2.6}$$

以及 $\beta^{\mathrm{s}}=\max\{\mathrm{Re}(\lambda):\ \lambda\ DF_{c_0}$ 的特征值$_{,V_0}(E_0)$，满足 $\mathrm{Re}(\lambda)<0\}$ 。

存在范数$\|\cdot\|_{\mathrm{u}}$，定义在不稳定子空间$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{c_0,V_0}(E_0)$上；以及范数$\|\cdot\|_{\mathrm{s}}$，定义在稳定子空间$\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{c_0,V_0}(E_0)$上，使得对于每个非负量 ξ,

$$\begin{aligned} &\left\|\exp\left[-\xi DF_{c_0,V_0}(E_0)_{|\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{c_0,V_0}(E_-)}\right]\right\|_{\mathrm{u}} \le \exp\left(-\frac{\beta^{\mathrm{u}}}{2}\xi\right), \\ \text{and}\quad &\left\|\exp\left[\xi DF_{c_0,V_0}(E_0)_{|\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{c_0,V_0}(E_+)}\right]\right\|_{\mathrm{s}} \le \exp\left(\frac{\beta^{\mathrm{s}}}{2}\xi\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

对于每个正量 r，令

$$\begin{aligned} &\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r) = \left\{U^{\mathrm{u}} \in \mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{c_0,V_0}(E_0) : \|U^{\mathrm{u}}\|_{\mathrm{u}} \le r\right\}, \\ \text{and}\quad &\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r) = \left\{U^{\mathrm{s}} \in \mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{c_0,V_0}(E_0) : \|U^{\mathrm{s}}\|_{\mathrm{s}} \le r\right\}, \\ \text{and}\quad &\overline{B}_{E_0}(r) = \left\{U^{\mathrm{u}} + U^{\mathrm{s}} : U^{\mathrm{u}} \in \overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r) \text{ and } U^{\mathrm{s}} \in \overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)\right\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

命题 2.2（局部稳定与不稳定流形）。存在 V_0 在 $C^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 中的一个邻域 ν，c_0 在 $(0,+\infty)$ 中的一个邻域 C，以及一个正量 r，使得对于 $C\times\nu$ 中的每个 (c,V)，以下陈述成立。

1. 存在唯一的临界点 $e(V)$，它属于 V，且满足 $E(V)=(e(V),0)$ 属于 $E_0+B_{E_0}(r)$。此外，$e(V)$ 与 e_0 具有相同的莫尔斯指标，且映射$\nu\to\mathbb{R}^d$, $V\mapsto e(V)$ 属于 C^k 类。

2. 存在 C^k 类函数

$$w^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V} : \overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r) \to \overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r) \quad \textit{and} \quad w^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V} : \overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r) \to \overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)$$

使得，若考虑集合

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V)) &= \left\{E(V) + U^{\mathrm{u}} + w^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{u}}) : U^{\mathrm{u}} \in \overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)\right\} \\ \textit{and}\quad W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V)) &= \left\{E(V) + U^{\mathrm{s}} + w^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{s}}) : U^{\mathrm{s}} \in \overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)\right\}, \end{aligned}$$

那么，对于 $B_{E_0}(r)^-$ 中的每个 U，以下两个断言等价：

a) U is in $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V))$;

b) $S_{c,V}(\xi,U)-E(V)$ remains in $\overline{B}_{E_0}(r)$ for all ξ in $(-\infty,0]$ and $S_{c,V}(\xi,U)\to E(V)$ as $\xi\to-\infty$;

并且对每个 U 属于$\overline{B}_{E_0}(r)$，以下两个断言等价：

c) $U\in W_{\mathrm{sloc}\ c,V}(E(V))$; *d)* $S_{c,V}(\xi,U)-E(V)$ 对所有 ξ 属于 $[0,+\infty)$ 以及 $S_{c,V}(\xi,U)\to E(V)$，始终属于 $B_{E_0}(r)^-$ 其中 $\xi\to+\infty$。

3. 两个微分 $Dw^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c_0,\,V_0}(0)$ 和 $Dw^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c_0,\,V_0}(0)$ 均为零，且两个映射

$$\begin{aligned} &C\times\nu\times\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r) \to \overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r), \quad (c,V,U^{\mathrm{u}}) \mapsto w^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{u}}) \\ \textit{and}\quad &C\times\nu\times\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r) \to \overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r), \quad (c,V,U^{\mathrm{s}}) \mapsto w^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{s}}) \end{aligned}$$

属于 C^k 类。

使用命题 2.2提供的记号，对于每个 (c, V) 属于 $\mathcal{C} \times \nu$，引入映射

$$\begin{aligned} \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V} &: \overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r) \to \mathbb{R}^{2d}, \quad U^{\mathrm{u}} \mapsto E(V) + U^{\mathrm{u}} + w^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{u}})\,, \\ \text{and} \quad \hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V} &: \overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r) \to \mathbb{R}^{2d}, \quad U^{\mathrm{s}} \mapsto E(V) + U^{\mathrm{s}} + w^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{s}})\,. \end{aligned}$$

$E(V)$ 的局部不稳定流形和稳定流形可定义为

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V)) &= \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r))\,, \\ \text{and} \quad W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V)) &= \hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r))\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

这些流形关于 c 和 V 光滑地依赖。全局不稳定流形和稳定流形

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{u}}_{c,V}(E(V)) &= \{U \in \mathbb{R}^{2d} : S_{c,V}(\xi, U) \to E(V) \text{ when } \xi \to -\infty\} \\ \text{and} \quad W^{\mathrm{s}}_{c,V}(E(V)) &= \{U \in \mathbb{R}^{2d} : S_{c,V}(\xi, U) \to E(V) \text{ when } \xi \to +\infty\} \end{aligned}$$

随后可通过流$S_{c,\,V}$ 由这些局部流形导出，如下所示:

$$\begin{aligned} W^{\mathrm{u}}_{c,V}(E(V)) &= S_{c,V}\left(\mathbb{R} \times W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V))\right)\,, \\ \text{and} \quad W^{\mathrm{s}}_{c,V}(E(V)) &= S_{c,V}\left(\mathbb{R} \times W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V))\right)\,. \end{aligned}$$

注。 以下两点观察将在后续证明中发挥一定作用。

- 根据该命题给出的刻画（2a 与 2b 等价，且 2c 与 2d 等价），对于系统 (1.7) 的每个解 $\xi \mapsto U(\xi)$，若该解属于 $E(V)$ 的稳定（不稳定）流形，则它恰好一次穿过 ∂W sloc $_{c,V}(E(V))$，即 $E(V)$ 的局部稳定流形的边界（∂Wuloc $_{c,V}(E(V))$，即局部不稳定流形的边界）。此外，根据范数 k·ku 和 k·ks 所满足的条件 (2.7)，将半径 r 替换为较小的值后，$\xi \mapsto U(\xi)$ 的轨道与 $E(V)$ 的局部稳定（不稳定）流形边界之间的交集，在整个稳定（不稳定）流形内是横截的。尽管下文并未正式要求该交集具有横截性，但假设这一点有助于理解整体思路，例如参见图 5.1。

- 函数 $w_{\mathrm{uloc}\ c,\ V}$ 和 $w_{\mathrm{sloc}\ c,\ V}$ 一旦选定半径 r 以及这两个函数的出发集，便由命题 2.2 所给出的刻画唯一确定。因此，若在集合的某个邻域之外修改势函数 V，这两个函数以及局部稳定与不稳定流形 $W_{\mathrm{uloc}\ c,\ V}(E(V))$ 和 $W_{\mathrm{sloc}\ c,\ V}(E(V))$ 仍保持不变。

$$\pi_{\mathrm{pos}}\left[W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V)) \cup W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V))\right],$$

其中 π_{pos} 是向位置坐标的投影:

$$\pi_{\mathrm{pos}} : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{d}, \quad (u, v) \mapsto u\,. \tag{2.10}$$

2.3 速度 c 等于0时的局部稳定与不稳定流形

如表 2.1 所示，平衡点 E 是双曲的，除非 c 为零且 $m(e)$ 为正。在这种情况下，除了E的稳定流形与不稳定流形之外，还存在一个维数为 $2m(e)$ 的中心流形（对应于线性系统（2.2）在 E处的谱的中心部分）。然而，正如下一个引理所示，系统（ $\xi \mapsto U(\xi)$ （1.7）的解无法通过这样的中心流形渐近趋近于 E 。下文命题 2.4 的陈述以及第 1.2 命题的证明（见第 3.1 小节）都依赖于此引理。

引理 2.3（通过稳定/不稳定流形趋近临界点）。 假设 c 等于 0。对于每个临界点 e ，它属于 V 且莫尔斯指标 $m(e)$ 为正；对于微分系统 （1.7）的每个（极大）解 $\xi \mapsto U(\xi)$ ，若 E 表示点 $(e, 0)$，则有如下结论：

1. 如果 $U(\xi)$ 在 ξ趋于 $+\infty$时趋于 E，则 $\xi \mapsto U(\xi)$ 的轨道收敛到 E，并且与稳定子空间 $E_V^{\mathrm{s}}(E)$ 相切。*2.* 如果 $U(\xi)$ 在 ξ趋于 $-\infty$时趋于 E，则 $\xi \mapsto U(\xi)$ 的轨道收敛到 E，并且与不稳定子空间 $E_V^{\mathrm{u}}(E)$ 相切，

证明。令 $\xi \mapsto U(\xi) = (u, v)(\xi)$ 表示速度 c 等于 0 时微分系统 (1.7) 的一个解，并假设 $U(\xi)$ 在 ξ 趋于 $+\infty$时趋于 E 。由哈密顿函数 H_V （定义于 (1.4) 中）沿 $U(\cdot)$ 保持不变可知，$H_V(U(\xi)) = H_V(E)$ ，换言之，

$$\frac{1}{2}|v(\xi)|^2 - V(u(\xi)) = -V(e)\,. \tag{2.11}$$

反证法假设该解不属于 E 的稳定流形。采用第 2.1 小节的记号可知，当 ξ 趋于 $+\infty$时， $U(\xi) - E$ 在中心子空间 $\mathrm{E}_V^{\mathrm{c}}(E)$ 上的分量相较于其在双曲子空间 $\mathrm{E}_V^{\mathrm{s}}(E) + \mathrm{E}_V^{\mathrm{u}}(E)$ 上的分量占主导地位；用符号表示，若 π_{cent} 表示沿 $\mathrm{E}_V^{\mathrm{s}}(E) + \mathrm{E}_V^{\mathrm{u}}(E)$ 投影到 $\mathbb{R}^{2d}$ 中 $\mathrm{E}_V^{\mathrm{c}}(E)$ 上的投影，

$$U(\xi) - E = \pi_{\mathrm{cent}}(U(\xi) - E) + o_{\xi\to+\infty}\Big(\pi_{\mathrm{cent}}(U(\xi) - E)\Big)\,. \tag{2.12}$$

由DF_0、$V(E)$的特征值和特征向量的表达式（2.3）和（2.4）可得

$$\mathcal{E}_V^{\mathrm{c}}(E) = \mathrm{span}\{U_{1,+}, U_{1,-}, \ldots, U_{m(e),+}, U_{m(e),-}\}\,.$$

因此，将投影 π_{pos} （位置坐标上的投影，定义见（2.10））应用于等式（2.12），可知，若记$\pi_{m(e)}$ 为 $\mathrm{span}\{u_1, \ldots\ldots, u_{m(e)}\}$ 在 $\mathbb{R}^d$中的正交投影，

$$u(\xi) - e = \pi_{m(e)}(u(\xi) - e) + o_{\xi\to+\infty}\Big(\pi_{m(e)}(u(\xi) - e)\Big)\,.$$

由于 $D^2V(e)$ 在 $\pi_{m(e)}$ 的像上的限制是负定的，因此当 ξ 充分大时， $V(u(\xi))$ 小于 $V(e)$，从而 $-V(u(\xi))$ 大于 $-V(e)$，这与等式（2.11）矛盾。引理 2.3得证。 □

至于命题 2.2 在情形 $c>0$下，接下来的命题 2.4 旨在（在情形 $c=0$下）对微分系统（1.2）的平衡点的局部稳定与不稳定流形及相关记号作出精确陈述。在此情形 $c=0$下，引理 2.3 的结论表明，中心流形与同宿解和异宿解无关；因此，命题 2.4中不考虑这些中心流形。关于局部稳定与不稳定流形的构造及其性质，与命题 2.2中讨论的正速度情形并无区别，另见 [22, 29, 49]。值得注意的是，与教科书中的陈述不同，这些局部稳定与不稳定流形的刻画并不要求解指数收敛至 E，这同样是由于引理 2.3的结论（见命题 2a与 2b 之间的等价关系，以及断言 2c与2d 之间的等价关系，见下文命题 2.4）。

记号。 在本文余下部分中，当速度 c 为零时，将在记号中省略。因此，对于前文引入的记号，

	F_V	S_V	$\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_V$	$\mathcal{E}^{\mathrm{c}}_V$	$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_V$	W^{s}_V	W^{u}_V
表示:	$F_{0,V}$	$S_{0,V}$	$\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{0,V}$	$\mathcal{E}^{\mathrm{c}}_{0,V}$	$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{0,V}$	$W^{\mathrm{s}}_{0,V}$	$W^{\mathrm{u}}_{0,V}$.

取 $V_0\in \mathrm{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$，并令 e_0 表示 V_0 的一个非退化临界点，且令$E_0=(e_0,0)$（不一定是双曲的）。令 β^{u} 和 β^{s} 与 (2.6) 中相同。如同 $c>0$的情形，存在定义在不稳定子空间 $\mathrm{E}^{\mathrm{u}}_{V_0}(E_0)$上的范数 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathrm{u}}$ 以及定义在稳定子空间 $\mathrm{E}^{\mathrm{s}}_{V_0}(E_0)$上的范数 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathrm{s}}$，使得对每个非负量$\xi$，不等式 (2.7) 均成立。令 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathrm{c}}$ 表示中心子空间 $\mathrm{E}^{\mathrm{c}}_{V_0}(E_0)$上的任意范数（例如欧几里得范数）。对于每个正量 r，令

$$\begin{aligned}
\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)&=\{U^{\mathrm{u}}\in\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{V_0}(E_0):\|U^{\mathrm{u}}\|_{\mathrm{u}}\le r\},\\
\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)&=\{U^{\mathrm{s}}\in\mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{V_0}(E_0):\|U^{\mathrm{s}}\|_{\mathrm{s}}\le r\},\\
\overline{B}^{\mathrm{c}}_{E_0}(r)&=\{U^{\mathrm{c}}\in\mathcal{E}^{\mathrm{c}}_{V_0}(E_0):\|U^{\mathrm{c}}\|_{\mathrm{c}}\le r\},
\end{aligned}$$

以及 $\overline{B}_{E_0}(r)=\{U_{\mathrm{u}}+U^{\mathrm{s}}+U_{\mathrm{c}}:\ U_{\mathrm{u}}\in\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)$ 和 $U_{\mathrm{s}}\in\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)$ 以及 $U_{\mathrm{c}}\in\overline{B}^{\mathrm{c}}_{E_0}(r)\}$.

命题 2.4 (局部稳定与不稳定流形)。 存在 ν的一个邻域 V_0，位于 $C^{k+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 中，并且存在一个正量 r，使得对于每个 V 属于 ν，以下陈述成立。

1. 存在唯一的临界点 $e(V)$，其属于 V，并且 $E(V)=(e(V),0)$ 属于 $E_0+B_{E_0}(r)$。此外，$e(V)$与 e_0 具有相同的莫尔斯指标，且映射 $\nu\to\mathbb{R}^d$, $V\mapsto e(V)$ 属于 C^k类。

2. 存在 C^k-函数

$$w^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}:\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)\to\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)+\overline{B}^{\mathrm{c}}_{E_0}(r)\quad and\quad w^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}:\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)\to\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)+\overline{B}^{\mathrm{c}}_{E_0}(r)$$

使得，如果我们考虑集合

$$\begin{aligned}
W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(E(V))&=\left\{E(V)+U^{\mathrm{u}}+w^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(U^{\mathrm{u}}):U^{\mathrm{u}}\in\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)\right\}\\
and\quad W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}(E(V))&=\left\{E(V)+U^{\mathrm{s}}+w^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}(U^{\mathrm{s}}):U^{\mathrm{s}}\in\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)\right\},
\end{aligned}$$

那么，对每个 U 属于 $\overline{B_{E_0}(r)}$ 的元素，以下两个断言等价：*a)* U属于 $W^{u}_{loc,V}(E(V))$；*b)* 当 ξ属于 $(-\infty,0]$ 时， $S_V(\xi,U)-E(V)$ 始终属于 $B_{E_0}(r)$，且当 $\xi\to-\infty$ 时， $S_V(\xi,U)\to E(V)$;—并且，对每个 U 属于 $B_{E_0}(r)$ 的元素，以下两个断言等价：*c)* $U\in W^{s}_{loc,V}(E(V))$；*d)* 当 ξ属于 $[0,+\infty)$ 时， $S_V(\xi,U)-E(V)$ 始终属于 $B_{E_0}(r)$，且当 $\xi\to+\infty$ 时， $S_V(\xi,U)\to E(V)$。

—

3. 两个微分 $Dw^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V_0}(0)$ 和 $Dw^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V_0}(0)$ 均为零，且两个映射

$$\begin{aligned}&\nu\times\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)\to\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r),\quad (V,U^{\mathrm{u}})\mapsto W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(U^{\mathrm{u}})\\ \textit{and}\quad&\nu\times\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)\to\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r),\quad (V,U^{\mathrm{s}})\mapsto W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}(U^{\mathrm{s}})\end{aligned}$$

均属于 C^k 类。

采用命题 2.4所提供的记号，对每个 V 属于 ν 的情形，引入映射

$$\begin{aligned}&\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}:\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)\to\mathbb{R}^{2d},\quad U^{\mathrm{u}}\mapsto E(V)+U^{\mathrm{u}}+w^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(U^{\mathrm{u}})\,,\\ \text{and}\quad&\hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}:\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)\to\mathbb{R}^{2d},\quad U^{\mathrm{s}}\mapsto E(V)+U^{\mathrm{s}}+w^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}(U^{\mathrm{s}})\,.\end{aligned}$$

$E(V)$ 的局部不稳定流形和稳定流形可定义为

$$\begin{aligned}&W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(E(V))=\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r))\,,\\ \text{and}\quad&W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}(E(V))=\hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},V}(\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r))\,.\end{aligned}\tag{2.13}$$

这些流形光滑地依赖于 V。与第2.2小节一样， $E(V)$ 的全局不稳定流形/稳定流形，记作 $W^{u}_{V}(E(V))$ 和 $W^{s}_{V}(E(V))$，可用这些局部流形和流 S_V 表示。上一小节末尾注中提到的两点在当前速度为零且可能存在中心流形的情形下仍然成立。

3 行波前、静止前沿和脉冲的预备性质

在本节中，我们取定一个势函数 V 属于 $C^{k+1}(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R})$。

3.1 命题证明1.2

设 e_- 和 e_+ 是 V的两个（可以相同的）非退化临界点，设 c 表示一个非负量（速度），设 $\xi\mapsto u(\xi)$表示一个前沿或脉冲的剖面，该前沿或脉冲连接 e_- 和 e_+，并以速度 c 传播（若 c 等于零，则为静止状态），其势函数为 V。

引理 3.1。 导数 $\dot{u}(\xi)$ 在 ξ 趋于 $\pm\infty$时趋于0 。

证明。 若速度 c 为正，则 $\xi \mapsto u(\xi)$ 是一个行波前的剖面。对（1.5）积分可得

$$\lim_{\xi\to+\infty} H_V(u(\xi)) - \lim_{\xi\to-\infty} H_V(u(\xi)) = -c\int_{\mathbb{R}} |\dot{u}(\xi)|^2\, d\xi \tag{3.1}$$

因此， $\dot{u}(\cdot)$ 属于 $L^2(\mathbb{R})$。由此，哈密顿函数 $\xi \mapsto H_V(U(\xi))$ 的动能部分在 ξ 趋于 $\pm\infty$ 时以 0 为一个聚点，这意味着 $V(e_\pm)$ 是 $H_V(U(\xi))$ 的聚点。根据（1.5），最后这个函数随 ξ 递减，因此可知，当 ξ 趋于 $\pm\infty$ 时， $H_V(U(\xi))$ 趋于 $V(e_\pm)$，所需结论由此得出。

若速度 c等于 0，由微分系统（1.2）以及 $u(\cdot)$ 收敛到临界点可知， $\ddot{u}(\xi)$ 趋于 0 当 ξ 趋于 $\pm\infty$时。因此 $\dot{u}(\cdot)$ 一致连续，而 u 的收敛性得出所需结论。 □

命题 *1.2* 的证明。沿用命题 1.2中的记号。若 c 非零，或者 c 等于 0 且两个莫尔斯指标 $m(e_-)$ 和 $m(e_+)$ 均为 e_- 和 e_+ 的莫尔斯指标，且它们都为零，则 E_-和 E_+ 是微分系统（1.7）的双曲平衡点，命题 1.2 的结论可由引理 3.1得出。

若 c 等于 0，且莫尔斯指标 $m(e_-)$ 和 $m(e_+)$ 任意，则平衡点 E_-和 E_+ 不一定是双曲的；但在这种情况下，根据引理 3.1， $U(\xi)$ 在 $\xi \to \pm\infty$ 时趋于 $E_\pm$ ；根据引理 2.3，$\xi \mapsto U(\xi)$ 的取值属于 E_- 的不稳定流形和 E_+的稳定流形。 □

3.2 对称驻波脉冲的等价定义

设 e 为 V 的一个非退化临界点，并设 $\xi \mapsto u(\xi)$ 为连接 e 自身的一个驻定脉冲的剖面。在定义 1.5中，这类脉冲的对称性是通过存在一个使 $\dot{u}$ 消失的“转向时刻”来定义的。以下标准结果（例如参见 [17]）完善了这一定义。

引理 3.2 （对称驻波脉冲的等价定义）。 对于每个实数量 ξ_{turn}，以下性质等价：

1. ξ_{turn} 是定义 *1.5*意义下的转向时刻，即 $\dot{u}(\xi_{\text{turn}}) = 0$;
2. 对于每个 ξ 属于 $\mathbb{R}$,

$$u(\xi_{\text{turn}} - \xi) = u(\xi_{\text{turn}} + \xi)\,; \tag{3.2}$$

3. 存在 ξ 属于 $\mathbb{R}$ 使得

$$u(\xi_{\text{turn}} - \xi) = u(\xi_{\text{turn}} + \xi) \quad \textit{and} \quad \dot{u}(\xi_{\text{turn}} - \xi) = -\dot{u}(\xi_{\text{turn}} + \xi)\,. \tag{3.3}$$

此外，这些陈述对于至多一个实数量 ξ_{turn} 成立。

证明。对等式（3.2）关于 ξ 求导，可得对于所有 ξ均成立的等式（3.3），因此性质2 意味着性质 3；而当 ξ 等于 0 时，性质 3等价于性质 1，因此性质 2意味着性质 1，且性质 1意味着性质 3。

还需证明性质3蕴含性质2。假设性质3 成立，并对每个实数量 ξ，记

$$u_1(\xi) = u(\xi_{\text{turn}} + \xi) \quad \text{and} \quad u_2(\xi) = u(\xi_{\text{turn}} - \xi)\,.$$

由于 $\xi \mapsto u(\xi)$ 是二阶微分系统 (1.2) 的一个解，且 c 等于零，因此 $\xi \mapsto U_1(\xi)$ 和 $\xi \mapsto U_2(\xi)$ 都是一阶微分系统 (1.7) 的解（同样有 c 等于零）。根据性质 3，存在 ξ 使得 $U_1(\xi)$ 等于 $U_2(\xi)$。因此，对于每个实时间 ξ，$U_1(\xi)$ 必须等于 $U_2(\xi)$，性质 2 得证。由此，引理 3.2 的三个性质等价。

此外，若性质 2 对两个不同的转向时刻 ξ_{turn} 和 ξ'_{turn}成立，则$\xi \mapsto u(\xi)$ 是周期的，周期等于 $2(\xi'_{\text{turn}} - \xi_{\text{turn}})$，这与 u 是连接自身的驻定脉冲这一假设矛盾。引理 3.2 得证。□

3.3 行波前沿／驻定脉冲剖面仅到达一次的值

下文 5至 7 各节中的证明依赖于构造适当的势函数扰动 V。尽管微分系统（1.7）解的唯一性确保由此类解定义的函数 $\xi \mapsto (u(\xi)\ \dot{u}(\xi))$ 是一一对应的，但函数 $\xi \mapsto u(\xi)$ 不一定如此（如图 3.1所示）。因此，势函数扰动 V 可能会在不同时刻影响该解。以下命题旨在避免这一不便：对于所考虑的每种情形，都给出一个时间区间，使得 $u(\xi)$ 仅到达一次。

命题 3.3。

1. 对于每个以正速度 c 传播并连接两个非退化临界点的前沿剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$，存在一个时刻 ξ_{once}，使得对于区间 $(-\infty, \xi_{\text{once}}]$ 内的所有时刻ξ^* 以及 $\mathbb{R}$ 中的 ξ，

$$u(\xi) = u(\xi^*) \implies \xi = \xi^*\,. \tag{3.4}$$

2. 对于每一个非对称驻定脉冲的剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$ 以及每一个非空开区间 I （属于 $\mathbb{R}$），都存在一个非空开区间 I_{once}，包含于 I，使得对于所有属于 I_{once} 的时刻 ξ^* 和 ξ 属于 $\mathbb{R}$的时刻，蕴含关系(3.4) 成立。

3. 对于对称驻波脉冲的每个剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$，如果 ξ_{turn} 表示该脉冲的转向时刻（见引理 *3.2*），那么，对于每个非空开区间I 包含于 $(-\infty, \xi_{\text{turn}}]$中，都存在一个非空开区间 I_{once}，包含于I，使得对于其中的所有时刻 ξ^* 以及 I_{once} 中的所有 ξ，$(-\infty, \xi_{\text{turn}}]$所示的蕴含关系成立 (3.4)。

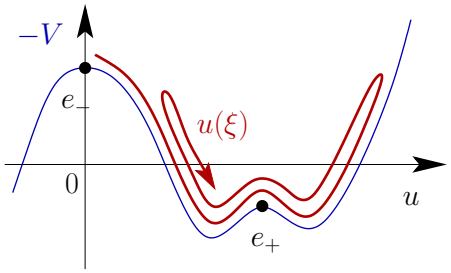

图3.1：本图的一维示例表明，命题1 的3.3 所述性质在临界点 e_-的一个小邻域之外可能不成立。

命题 3.3 的陈述 1 的证明。设 $\xi \mapsto u(\xi)$ 表示以正速度 c 传播、对应势函数 V 的前沿剖面，设 e_- 表示一个非退化临界点，且当 ξ 趋于 $-\infty$ 时，$u(\xi)$ 趋近于该点。由于 $DF_{c,V}(E_-)|_{\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{c,V}(E_-)}$ 的所有特征值均为实数且为正（见第 2.1 小节），系统 (1.7) 的相应解 $U(\xi)$ 必须在 ξ 趋于 $-\infty$ 时，沿着 $DF_{c,V}(E_-)$ 的某个（实的不稳定）特征向量 U_{eig} 趋近 E_-。若 λ 表示相应的（正）特征值，则 U_{eig} 的形式为 $(u_{\mathrm{eig}}, \lambda u_{\mathrm{eig}})$，其中 u_{eig} 是 $D^2V(e_-)$ 的特征向量，见表达式 (2.4)。因此，必定存在一个非零标量函数 $\xi \mapsto \alpha(\xi)$，使得当 ξ 趋于 $-\infty$ 时，

$$U(\xi) = E_- + \alpha(\xi)U_{\mathrm{eig}} + o(\alpha(\xi))\,, \quad \text{that is} \quad \begin{cases} u(\xi) = e_- + \alpha(\xi)u_{\mathrm{eig}} + o(\alpha(\xi))\,, \\ \dot{u}(\xi) = \alpha(\xi)\lambda u_{\mathrm{eig}} + o(\alpha(\xi))\,. \end{cases}$$

I由此可知，存在一个足够大的负时间 ξ_0，使得对于每个属于 $(-\infty, \xi_0$ 的 ξ],

$$\frac{d}{d\xi}|u(\xi) - e_-|^2 \;=\; 2(u(\xi) - e_-)\cdot \dot{u}(\xi) \;>\; 0\,.$$

特别地，函数

$$(-\infty, \xi_0] \to \mathbb{R}^d, \quad \xi \mapsto u(\xi) \tag{3.5}$$

是一个$\mathcal{C}^1$-微分同胚，且其像为自身的值域。根据哈密顿量的递减性质（1.5），量 $H_V(U(\xi_0))$ 小于 $-V(e_-)$。因此，存在一个时刻ξ_{once}，属于$(-\infty, \xi_0)$，使得对于每个 ξ^*，属于$(-\infty, \xi_{\mathrm{once}}]$,

$$H_V\big(U(\xi_0)\big) < -V\big(u(\xi^*)\big)\,. \tag{3.6}$$

取一个时刻 ξ^*，属于$(-\infty, \xi_{\mathrm{once}}]$，再取一个时刻 ξ，属于 $\mathbb{R}$，并假设 $u(\xi)$ 等于 $u(\xi^*)$。如果 ξ 大于 ξ_0，那么由哈密顿量的表达式（1.4）、其递减性质（1.5）和不等式（3.6）可得

$$-V\big(u(\xi)\big) \le H_V\big(U(\xi)\big) \le H_V\big(U(\xi_0)\big) < -V\big(u(\xi^*)\big)\,,$$

与 $u(\xi)$ 和 $u(\xi^*)$相等这一点矛盾。因此，ξ 不大于 ξ_0，由函数（3.5）的单射性可知，ξ 必定等于 ξ^*。命题3.3的陈述1得证。

□

命题 3.3 陈述 2 的证明。设 $\xi \mapsto u(\xi)$ 是势函数 V 对应的一个非对称驻定脉冲的剖面，设 e 是 $u(\xi)$ 在 ξ 趋于 $\pm\infty$ 时所趋近的临界点，并设 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个非空开区间。鉴于预期结论（陈述 2），我们可以假设 I 有界。根据哈密顿量 H_V 的不变性（1.5），对于 $\mathbb{R}$ 中每个 ξ，差值 $V(u(\xi)) - V(e)$ 等于 $|\dot{u}(\xi)|^2/2$，因此不为零；所以函数 $\xi \mapsto u(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上永远不会达到临界点 e。因此，存在一个（较小的）正量 r，使得对于 I 中所有 ξ，$|u(\xi) - e|$ 大于 r；又因为当 ξ 趋于 $\pm\infty$ 时，$u(\xi)$ 趋近于 e，所以存在一个（较大的）正量 M，使得在 $[-M, M]$ 之外，$|u(\xi) - e|$ 小于 r。

假设存在两个不同的时刻 ξ 和 ξ' 属于 $\mathbb{R}$，使得 $u(\xi)$ 等于 $u(\xi')$。那么，根据哈密顿量 H_V的不变性 (1.5)，时间导数$\dot{u}(\xi)$ 和 $\dot{u}(\xi')$ 必须具有相同的范数。此外，这两个向量既不可能相等（否则剖面 u 将是周期的），也不可能互为相反数（否则根据引理 3.2，该脉冲将是对称的），因此它们不成比例。由此，在 $\mathbb{R}^2$中，满足 $u(\xi)$ 等于 $u(\xi')$ 的数对 (ξ, ξ') 是孤立的。此外，若 (ξ, ξ') 是这样一对数，且 ξ 属于 I，那么 ξ' 必属于 $[-M, M]$。由紧性可知，在 $I \times \mathbb{R}$ 中满足 $u(\xi)$ 等于 $u(\xi')$ 的数对 (ξ, ξ') 只有有限个。命题 3.3 的陈述 2 得证。

□

命题 3.3 的陈述 3 的证明。论证与上文陈述 2 的证明相同。设 $\xi \mapsto u(\xi)$ 是势函数 V 的一个对称脉冲剖面，其转向时刻为ξ_{turn}；设 I 是 $(-\infty, \xi_{\text{turn}}]$ 的一个非空开区间，并假定它有界。若存在 $(-\infty, \xi_{\text{turn}}]$ 中两个不同的时刻 ξ 和 ξ'，使得 $u(\xi)$ 等于$u(\xi')$，那么时间导数 $\dot{u}(\xi)$ 和 $\dot{u}(\xi')$ 的范数仍然相同。这两个向量既不可能相等（否则剖面 u 就会是周期的），也不可能互为相反数（否则，根据引理 3.2 的陈述 3，$(\xi + \xi')/2$ 就会是 u 的第二个转向时刻，且小于ξ_{turn}，这与引理 3.2 的结论矛盾）。因此，$\dot{u}(\xi)$ 和$\dot{u}(\xi')$ 仍不可能成比例；与上文陈述 2 的证明相同的论证表明，在 $I \times (-\infty, \xi_{\text{turn}}]$ 中满足 $u(\xi) = u(\xi')$ 的数对 (ξ, ξ') 只有有限个。

□

4 泛性工具

4.1 Sard–Smale 横截定理的一个实例

要证明某个给定性质具有一般性，一种标准方法是将该性质表述为一个横截性问题，并使用被称为 Sard–Smale 定理（或 Thom 定理，或横截性定理）的一系列定理中的一个实例，参见 [1,7, 24, 36]。本文将使用以下实例（见下文定理 4.2 ）。考虑一个函数

$$\Phi : \mathcal{M} \times \Lambda \to \mathcal{N},$$

其中 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个有限维流形，且 Λ （“参数空间”）是一个巴拿赫流形，并配有子流形 $\mathcal{W}$，它属于 $\mathcal{N}$ （见图4.1）。假设

这四个流形和函数 Φ 均属于 C^k 类（如本文全文所示，k 表示一个不小于 1 的整数）。最后，令 $\operatorname{codim}(\mathcal{W})$ 表示$\mathcal{W}$ 在$\mathcal{N}$中的余维。

定义 4.1。 根据上述记号，如果对于每个满足 $\Phi(m,\lambda)$ 属于 $\mathcal{W}$ 的 $(m,\lambda)\in\mathcal{M}\times\Lambda$，下列等式成立，则称 Φ 的像与 横截于 $\mathcal{W}$:

$$D\Phi(T_m\mathcal{M}\times T_\lambda\Lambda)+T_{\Phi(m,\lambda)}\mathcal{W}=T_{\Phi(m,\lambda)}\mathcal{N}$$

（此处 $D\Phi$ 表示 Φ 在 (m,λ) 处的微分）。相应地，对于每个 $\lambda\in\Lambda$，若 Φ_λ 表示函数:

$$\mathcal{M}\to\mathcal{N},\quad m\mapsto\Phi(m,\lambda)\,,$$

则称 Φ_λ 的像与 横截于 $\mathcal{W}$，如果对于每个满足 $\Phi(m,\lambda)$ 属于 $\mathcal{W}$ 的 $m\in\mathcal{M}$，记 $D\Phi_\lambda$ 为 Φ_λ 在 m 处的微分，

$$D\Phi_\lambda(T_m\mathcal{M})+T_{\Phi(m,\lambda)}\mathcal{W}=T_{\Phi(m,\lambda)}\mathcal{N}\,.$$

定理 4.2 （Sard–Smale 横截定理）。 根据上述记号，若

1. $k>\dim(\mathcal{M})$ –余维$(\mathcal{W})$,
2. 且 Φ 的像与 W 横截,

那么存在 Λ_{gen} *of* Λ 的一个泛型子集，使得对于 Λ_{gen} 中的每个 λ，Φ_λ 的像都与 W 横截。

该结果的证明可见 [1] 或 [24]。关键假设（往往难以验证）是横截性假设2。请注意，结论比该假设更强，因为它指出，对于固定的泛型参数 λ，横截性仍然成立；而假设 2 则利用了移动 λ的自由度。

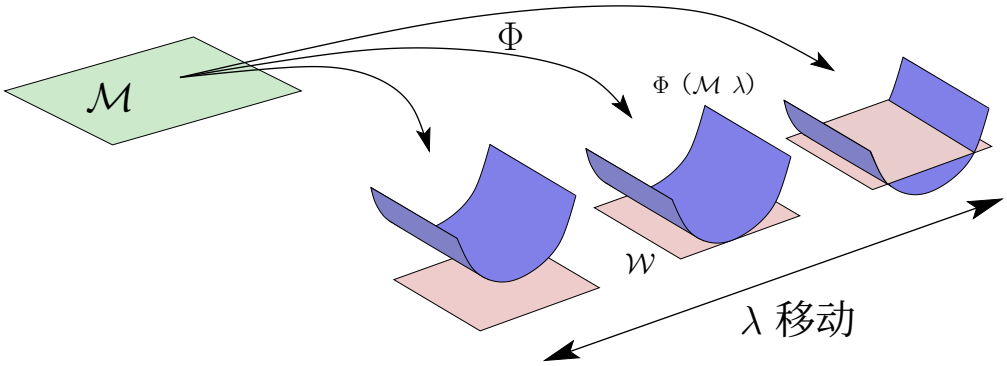

图 4.1：定理的几何解释4.2。假设对于给定参数λ_0， $D\Phi_{\lambda_0}(T\mathcal{M})+T\mathcal{W}$并非整个切空间 $T\mathcal{N}$，但Φ 对 λ 的依赖提供了缺失的方向。那么对于几乎所有接近 λ 的 λ_0，像$\Phi(\mathcal{M}\ \lambda)$ 都与 $\mathcal{W}$ 横截相交。

4.2 将局部泛型性推广为全局泛型性

定理 4.2 （无论采用上述形式还是其他形式）是证明某个性质泛型成立的标准工具。然而，实践中往往很难像上文那样用单个函数 Φ 来表达某个性质；因此，人们通常需要将该定理给出的多个结论拼接起来。下面的引理提供了一种进行这一拼接过程的方法。该引理与 [35],第 3 章的引理 3.3 完全相同，证明可见其中。

引理 4.3 （可分贝尔空间中局部泛型性蕴含全局泛型性）。 设 V 是可分贝尔空间，且 V_{dense} 是 V 的稠密子集。对于 V 的任意子集 V_{gen} ，以下两个断言等价：

1. 子集 V_{gen} 在 V 中是泛型的；
2. 对 V_{dense} 中的每个 V_0 ，都存在 V 中的一个邻域 ν ，使得 $V_{\mathrm{gen}} \cap \nu$ 在 ν 中是泛型的。

4.3 在给定半径之外为二次型的势函数

整个势函数空间 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 由于种种原因而颇难处理：它甚至在局部也不可分，而且对于该空间中的某些势函数，系统（1.7）的流并非全局良定义 V。为克服这些困难，接下来各节 5 和 6 的证明将在一个限制更严格的势函数类 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 上进行，之后将在最后一节 9 中将结果推广到完整集合 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中。设

$$\mathcal{V}_{\mathrm{full}} = \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \tag{4.1}$$

并且，对于正量 R，令

$$\mathcal{V}_{\text{quad-}R} = \left\{ V \in \mathcal{V}_{\mathrm{full}} : \text{for all } u \text{ in } \mathbb{R}^d,\ |u| \geq R \implies V(u) = \frac{|u|^2}{2} \right\}. \tag{4.2}$$

与 $\mathcal{V}_{\mathrm{full}}$ 相比，仿射子空间 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 的 $\mathcal{V}_{\mathrm{full}}$ 是可分的，因此为应用引理 4.3 提供了一个框架。下一个引理给出了系统（1.7）的流的一些（良好）性质，其中势函数 V 属于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$。随后是另一个引理（下文的推论 4.6），它提供了继续进行上述延拓所需的恰当工具；该延拓将在第 9 节中完成。

记号。 对于每个非负量 r，令 $B_{\mathbb{R}^d}(0, r)$ 和 $B_{\mathbb{R}^d}(0, r)$ 分别表示以原点为中心、半径为 r 的开球和闭球，它们位于 $\mathbb{R}^d$ 中。

引理 4.4。 对于每个正量 R 和每个属于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 的势函数 V，以下结论成立。

1. 对于每一个速度 c，由微分系统(1.7) 所定义的流都是全局的。

2. 对于该势函数，行波前、静止前沿或驻定脉冲的每个剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$ 都满足以下界限：

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |u(\xi)| < R\,. \tag{4.3}$$

证明。 设 V 属于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$，且 c 是一个实数量。根据 4.2 中 quad-R 的定义，存在一个正量 K，使得对每个 u 属于 $\mathbb{R}^d$ 的

$$|\nabla V(u)| \le K \ + |u|\ .$$

因此，由 1.6 中 F_c 的表达式可知，V 对每个解$U = (u,\ v)$，若其是 1.7 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的解，

$$\left|\dot U(\xi)\right| = |F_{c,V}(u,v)| = |(v, \nabla V(u) - cv)| = \mathcal{O}_{|U|\to\infty}(\,|U(\xi)|\,)\,.$$

这个界阻止解在有限时间内爆炸，从而证明结论1。

现在令 $\xi \mapsto u(\xi)$ 表示方程 1.2 的一个解，它在 V 的两端都趋近于临界点。令 $\mathbb{R}$。记 $q = |u|^2/2$，则

$$\dot q = u\cdot\dot u \quad \text{and} \quad \ddot q = -c\dot q + \dot u^2 + u\cdot\nabla V(u)\,, \tag{4.4}$$

并且由于 V 属于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$，对每个实数量 ξ,

$$|u(\xi)| \ge R \implies \frac{d}{d\xi}_{|\xi}\ (e^{c\xi}\dot q(\xi)) = e^{c\xi}(\dot u^2(\xi)\ \ + u^2(\xi)) > 0\,.$$

由于 V 在球 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$之外是二次的，其临界点必定属于 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$的内部；当 $|\xi|$ 足够大时，对于 $u(\xi)$也必然如此。现在，若 $|u(\cdot)|$在某个（有限）时刻 ξ_0达到值 R，那么（若 ξ_0 是首次发生这种情况的时刻） $\dot q(\xi_0)$将是非负的；上述推论表明，从这一时刻起，量 $e^{c\xi}\dot q(\xi)$（因而量 $\dot q(\xi)$也）将始终为正；于是$q(\xi)$和 $|u(\xi)|$ 将随着 ξ持续增大，这与当 ξ 足够大时 $u(\xi)$必须回到 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$内部这一事实相矛盾。结论 2 得证。

□

4.4 限制映射的拓扑性质

令 R 表示一个正量，并考虑集合

$$\mathcal{V}_{\text{res-}R} = \mathcal{C}^{k+1}(\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0,R),\mathbb{R})\,. \tag{4.5}$$

接下来的引理4.5 将在第9节中用于实现本小节开头提到的延拓。为便于表述，采用$\mathcal{V}_{\text{quad-}\infty}$ 作为空间$\mathcal{V}_{\text{full}}$的另一种记号。令 R' 表示一个大于 R 或∞的量，并考虑限制算子：

$$\text{res}_{R,R'} : \mathcal{V}_{\text{quad-}R'} \to \mathcal{V}_{\text{res-}R}\,,\quad V \mapsto V_{|\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0,R)}\,. \tag{4.6}$$

引理 4.5。 限制映射 $\mathrm{res}_{R,\,R'}$ 是连续的、满射的且是开映射。

证明。如果$\mathcal{V}_{\text{quad-}R'}$ 中的两个势函数是$\mathcal{C}^k$-接近的，那么它们在闭球$B_{\mathbb{R}^d}(0,\ R)$上的限制在此球上仍然是$\mathcal{C}^k$-接近的，因此映射 $\mathrm{res}_{R,\,R'}$ 是连续的。

要证明映射 $\mathrm{res}_{R,\,R'}$ 是满射且为开映射，只需为该映射构造一个连续右逆。为此，我们可以考虑 Seeley 延拓

$$\mathrm{ext}_{\infty,R} : \mathcal{V}_{\text{res-}R} \to \mathcal{V}_{\text{full}}\,,$$

它是 $\mathrm{res}_{R,\,\infty}$ 的右逆（即 $\mathrm{res}_{R,\,\infty}\circ\mathrm{ext}_{\infty,\,R}$ 是 $\mathcal{V}_{\text{res-}R}$上的恒等映射）。Seeley 在原始论文中定义的映射 [47] 将最初定义在半空间上的函数延拓到整个空间 $\mathbb{R}^d$；但使用球坐标，同一定义会得到这个延拓 $\mathrm{ext}_{\infty,\,R}$。对于定义域集合$\mathcal{V}_{\text{res-}R}$ 上的通常拓扑，以及陪域$\mathcal{V}_{\text{full}}$上在 $\mathbb{R}^d$ 的紧子集上至 k 阶导数一致收敛的拓扑，该映射 $\mathrm{ext}_{\infty,\,R}$ 是线性且连续的。现在，若 $\chi:\ [0,+\infty) \to \mathbb{R}$表示一个满足以下条件的光滑截断函数

$$\chi \equiv 1 \ \text{ on } [0,R] \quad \text{and} \quad \chi \equiv 0 \ \text{ on } \big[\min(R+1,R'),+\infty\big)\,,$$

那么，对每个属于 $\mathcal{V}_{\text{res-}R}$的 V，由下式定义的映射 $\mathrm{ext}_{R',\,R}:\mathcal{V}_{\text{res-}R} \to \mathcal{V}_{\text{quad-}R}$

$$\mathrm{ext}_{R',R}(V)(u) = \chi(|u|)\,\mathrm{ext}_{\infty,R}(V)(u) + \big(1-\chi(|u|)\big)\frac{|u|^2}{2}\,,$$

是$\mathrm{res}_{R\text{的右逆},\,R'}$ 且连续（对于定义域集和到达集上导数直至 k 阶的一致收敛拓扑）。引理 4.5得证。 □

推论 4.6。 对于 $V_{\text{res-}R}$ 的任意一对子集(A,B)，令 $A' = \mathrm{res}_{R}^{-1}{}_{,R'}(A)$ 和$B' = \mathrm{res}_{R}^{-1}{}_{,R'}(B)$ 分别表示 $V_{\text{quad-}R'}$ 中势函数的集合，这些势函数在 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$上的限制分别属于 A 和 B。则以下等价关系成立：

$$A \text{ is open in } \mathcal{V}_{\text{res-}R} \iff A' \text{ is open in } \mathcal{V}_{\text{quad-}R'}\,, \tag{4.7}$$

$$A \text{ is dense in } B \iff A' \text{ is dense in } B'\,, \tag{4.8}$$

$$A \text{ is dense in } \mathcal{V}_{\text{res-}R} \iff A' \text{ is dense in } \mathcal{V}_{\text{quad-}R'}\,. \tag{4.9}$$

证明。 等价关系（4.7）由连续性以及 $\mathrm{res}_{R,R'}$ 的开性得到。

根据 $\mathrm{res}_{R,R'}$ 的满射性，集合 $\mathrm{res}_{R,R'}(A')$ 等于 A，而集合$\mathrm{res}_{R,R'}(B')$ 等于 B。由于连续映射下稠密集的像在该映射的像中稠密，若 A' 在 B' 中稠密，A 则在 B中稠密。蕴含“$\Longleftarrow$”（4.8）得证。

另一方面，如果 A 在 B 中稠密，那么对于 B' 的每个开子集 Ω'，根据引理 4.5，它的像 $\Omega := \mathrm{res}_{R,R'}(\Omega')$ 在 B 中是开集，因此交集 $A\cap\Omega$ 非空。根据 $\mathrm{res}_{R,R'}$ 的满射性，集合 $\mathrm{res}_{R}^{-1}{}_{,R'}(A\cap\Omega)$ 也非空；按构造，它包含于 $A'\cap\Omega'$, 中，后者自然也非空。这证明了 A' 在 B' 中稠密，并完成了等价关系 (4.8) 的证明。

最后，通过令 B' 等于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R'}$ 且 B 等于 $\mathcal{V}_{\text{res-}R}$，由（4.9）可得等价关系（4.8）。推论 4.6 得证。 □

5 行波前沿的一般横截性

5.1 记号与陈述

记号。 回顾一下记号 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 和 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$，它们分别在（4.1）和（4.2）中引入。对于每个属于 V的势函数 $\mathcal{V}_{\text{full}}$，令 $\Sigma_{\text{crit}}(V)$ 和 $\Sigma_{\text{min}}(V)$ 分别表示 V的非退化临界点集和非退化极小点集，并考虑集合

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_V = \{&(c,u) \in (0,+\infty) \times \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) : \xi \mapsto u(\xi) \text{ is a global solution of the} \\ &\text{system } \ddot{u} = -c\dot{u} + \nabla V(u) \text{ and there exists } (e_-,e_+) \text{ in} \\ &\Sigma_{\text{crit}}(V) \times \Sigma_{\text{min}}(V) \text{ such that } \lim_{\xi\to-\infty} u(\xi) = e_- \text{ and } \lim_{\xi\to+\infty} u(\xi) = e_+\}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

换言之，$(c,\ u)$ 属于 $\mathcal{F}_V$，当且仅当 c 是一个正量，且 $\xi \mapsto u(\xi)$ 是一个前沿的剖面：该前沿以速度 c 行进，并在势函数 V 下连接一个非退化临界点（位于左端）和一个非退化极小点（位于右端）。

取定一个正量 R。本节的目标是证明下面的命题 5.1，它是定理 1 中陈述 1.7 的一个较弱版本，因为所考虑的势函数属于子空间$\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$，而非整个空间$\mathcal{V}_{\text{full}}$。关于为何先在这一受限设定下证明预期的一般性结果，原因已在小节 4.3 开头解释；从 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 到 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 的延拓将在最后一节 9 中完成。提醒一下，行波前的横截性定义于定义1.3中。

命题 5.1。 对于每个正量 R，都存在 $V_{\text{quad-}R}$的一个泛型子集，使得对于该子集中的每个势函数 V，$\mathcal{F}_V$ 中的每个行波前 (c,u) 都是横截的。

5.2 化归为局部陈述

设 V_0 表示 $V_{\text{quad-}R}$中的一个势函数，设 $e_-,0$ 和 $e_+,0$ 分别表示 V_0的一个非退化临界点和一个非退化极小点。根据命题 2.2（或者直接根据隐函数定理），存在 $V_{\text{quad-}R}$ 中的一个小邻域 $\nu_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$，以及两个 $\mathcal{C}^{k+1}$ 函数 $e_-(\cdot)$ 和$e_+(\cdot)$，它们定义在 $\nu_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$ 上，取值于 $\mathbb{R}^d$，且 $e_-(V_0)$ 等于$e_-,0$，$e_+(V_0)$ 等于 $e_+,0$；对于 $\nu_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$ 中的每个 V，$e_-(V)$ 和$e_+(V)$ 都是 V 中接近 $e_+,0$ 的临界点。下面的局部一般横截性结论用到了这一记号，并由此推出命题 5.1（如下所示）。

命题 *5.2.* 对于每个正速度 c_0，存在 V_0 在 $V_{\text{quad-}R}$ 中的一个邻域 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$，包含于 $\nu_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)(V_0,e_-,0,e_+,0,c_0)$，以及 c_0 在 $(0,+\infty)$ 中的一个邻域 $C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$，还有 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 的一个泛型子集 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,\text{gen}}$，使得对于每个属于 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,\text{gen}}$ 的 V，每个以速度 c 属于 $C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 传播并连接$e_-(V)$ 与 $e_+(V)$、对应势函数 V 的前沿，都是横截的。

证明命题 5.2 推出命题 5.1。我们记 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$ $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 由莫尔斯性质定义的稠密开子集（见 [24]）：

$$\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}} = \{V \in \mathcal{V}_{\text{quad-}R} : \text{all critical points of } V \text{ are non-degenerate}\} . \tag{5.2}$$

令 V_0 表示$\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$中的一个势函数。它的临界点均非退化，因而是孤立的；又因为 V_0 属于$\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$，所以它们属于开球 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$，因此这些临界点只有有限个。假设命题5.2 成立。采用该命题中的记号，考虑以下三个交集；在每个时刻，对所有满足以下条件的二元组 $(e_{-,0},e_{+,0})$取交集：$e_{-,0}$ 是非退化临界点，且 $e_{+,0}$是 V_0的非退化极小点：

$$\begin{aligned} \nu_{V_0,c_0} &= \nu_{\text{robust}}(V_0) \cap \left(\bigcap \nu_{V_0,e_{-,0},e_{+,0},c_0} \right) , \\ \mathcal{C}_{V_0,c_0} &= \bigcap \mathcal{C}_{V_0,e_{-,0},e_{+,0},c_0} \\ \text{and} \quad \nu_{V_0,c_0,\text{gen}} &= \nu_{\text{robust}}(V_0) \cap \left(\bigcap \nu_{V_0,e_{-,0},e_{+,0},c_0,\text{gen}} \right) . \end{aligned} \tag{5.3}$$

这些交集都是有限的，因此 ν_{V_0,c_0} 仍是 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 中 V_0 的一个邻域，$\mathcal{C}_{V_0,c_0}$仍是 $(0,+\infty)$ 中 c_0 的一个邻域，而集合 $\nu_{V_0,c_0,\text{gen}}$ 仍是 ν_{V_0,c_0} 的一个泛型子集。令 I 表示 $(0,+\infty)$ 的一个紧子区间；对于 I 中的每个 c_0，都可以类似地构造上文在 (5.3) 中定义的三个集合。由于 I 是紧致的，它可以被一组有限个集合 $\mathcal{C}_{V_0,c_0,i}$ 覆盖，这些集合对应于有限个速度 $\{c_0,1,\dots,c_{0,p}\}$。同样，这些交集

$$\nu_{V_0,I} = \bigcap_{1\le i\le p} \nu_{V_0,c_{0,i}} \quad \text{and} \quad \nu_{V_0,I,\text{gen}} = \bigcap_{1\le i\le p} \nu_{V_0,c_{0,i},\text{gen}} .$$

是有限的，因此 $\nu_{V_0,\ I,\ \text{gen}}$仍是 $\nu_{V_0,\ I}$ 的泛型子集，而 I 是 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$ 中 V_0 的一个邻域。根据构造，对于每个属于 $\nu_{V_0,\ I,\ \text{gen}}$ 的势函数 V，所有速度属于 I、且连接 V 的临界点与 V 的极小点的前沿都是横截的。换言之，该集合

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-⫛-}\mathcal{F}\text{-}I} = \{V \in \mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}} :\ & \text{for every travelling front } (c,u) \text{ in } \mathcal{F}_V, \\ & \text{if } c \text{ is in } I \text{ then } (c,u) \text{ is transverse}\} , \end{aligned}$$

在局部意义下是泛型的，即 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-⫛-}\mathcal{F}\text{-}I} \cap \nu_{V_0,\ I}$ 在 $\nu_{V_0,\ I}$ 中是泛型的。由于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 是可分的，应用引理 4.3，令 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{quad-}R}$、$\mathcal{V}_{\text{dense}} = \mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$、$\mathcal{V}_{\text{gen}} = \mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-⫛-}\mathcal{F}\text{-}I}$ 以及 $\nu = \nu_{V_0,\ I}$，可知集合 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-⫛-}\mathcal{F}\text{-}I}$ 在整个集合 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 中是泛型的。因此，该集合

$$\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} \mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-⫛-}\mathcal{F}\text{-}[-1/q,q]}$$

在 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 中仍然是泛型的。对于该集合中的每个势函数 V，所有属于 $\mathcal{F}_V$ 的行波前沿都是横截的，因此该集合满足命题 5.1 的结论。 □

本节剩余部分5 将用于证明命题5.2。

5.3 局部陈述的证明（命题 5.2）

5.3.1 设定

在本节剩余部分中，固定一个势函数 V_0 in $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$、一个非退化临界点 $e_{-,\,0}$ 属于 V_0，以及一个非退化极小点$e_{+,\,0}$ 属于 V_0，且不同于$e_{-,\,0}$。根据命题 2.2，存在 V_0在$\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$中的一个邻域 ν，该邻域包含于 $\nu_{\text{robust}}(V_0,\ e_{-,\,0},\ e_{+,\,0})$中；还存在 c_0 在$(0,\ +\infty)$中的一个邻域$\mathcal{C}$，以及一个正量 r，使得对每个 $(c,\ V)$ 属于$\mathcal{C}\times\nu$，都存在 C^{k+1}-函数

$$\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}:\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_{-,0}}(r)\to\mathbb{R}^{2d}\quad\text{and}\quad\hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}:\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_{+,0}}(r)\to\mathbb{R}^{2d}$$

使得这些集合

$$W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_-(V))=\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_{-,0}}(r))\quad\text{and}\quad W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_+(V))=\hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_{+,0}}(r))$$

定义了一个局部不稳定流形 $E_-(V)$ 以及一个局部稳定流形 $E_+(V)$，分别（参见命题 2.2 的结论及等式（2.9））。

下面给出将应用 Sard–Smale 定理（定理 4.2）的设定（参见图5.1）。令

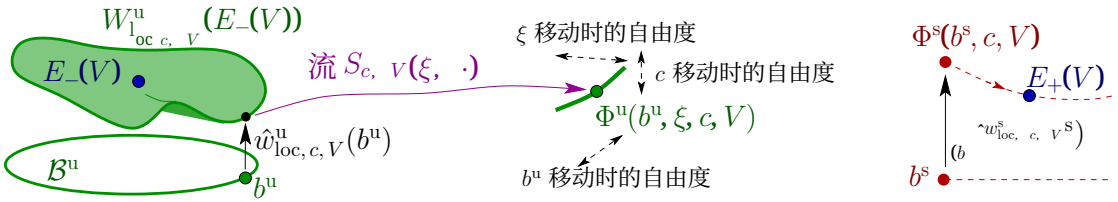

图 5.1：函数 $\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(\cdot)$ 将 B^{u} 映射到局部不稳定流形 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_-(V))$ 的边界。该边界上的点 $\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(b^{\mathrm{u}})$ 经流 $S_{c,V}(\xi,\cdot)$ 推进时间 ξ 后，得到像 $\Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}})$，它仍属于 $E_-(V)$ 的全局不稳定流形。另一方面，Φ^{s} 将 B^{s} 映射到局部稳定流形 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_+)$ 的边界。Φ^{u} 对时间 ξ 和点 b^{u} 的依赖提供了与不稳定流形维数相等的自由度，而速度 c 则额外提供一个自由度。这种额外的依赖使行波前的横截性（如定义 1.3 所定义）与稳定流形与不稳定流形的经典横截性有所不同。

$$\begin{aligned}&\mathcal{B}^{\mathrm{u}}=\partial\overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_{-,0}}(r)\,,\qquad&&\mathcal{B}^{\mathrm{s}}=\partial\overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_{+,0}}(r)\,,\qquad&&\mathcal{M}=\mathcal{B}^{\mathrm{u}}\times\mathcal{B}^{\mathrm{s}}\times\mathbb{R}\times\mathcal{C}\,,\\&\Lambda=\nu\,,\qquad&&\mathcal{N}=(\mathbb{R}^{2d})^2\,,\qquad&&\text{and}\quad\mathcal{W}=\{(A,B)\in\mathcal{N}:A=B\}\,.\end{aligned}$$

注意，$\mathcal{W}$ 是$\mathcal{N}$的对角线。考虑函数

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathrm{u}}:\ \mathcal{B}^{\mathrm{u}}\times\mathbb{R}\times\mathcal{C}\times\Lambda\ &\to\mathbb{R}^{2d}\,,\quad(b^{\mathrm{u}},\xi,c,V)\ &&\longmapsto S_{c,V}(\xi,\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(b^{\mathrm{u}}))\\\text{and}\quad\Phi^{\mathrm{s}}:\ \mathcal{B}^{\mathrm{s}}\times\mathcal{C}\times\Lambda\ &\to\mathbb{R}^{2d}\,,\quad(b^{\mathrm{s}},c,V)\ &&\longmapsto\hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(b^{\mathrm{s}})\,.\end{aligned}$$

对于每个 V属于 Λ且 c属于$\mathcal{C}$的情形， $\Phi^{\mathrm{u}}(\cdot,\cdot\ c,V)$ 的像是全局不稳定流形$W^{\mathrm{u}}_{c,V}(E_-(V))$（但不包括点 $E_-(V)$ 本身），而 $\Phi^{\mathrm{s}}(\cdot\ c,V)$ 的像是局部稳定流形 $W_{\mathrm{sloc}\ c,V}(E_+(V))$ 的边界。最后，设

$$\Phi : \mathcal{M}\times\Lambda\to\mathcal{N}\,,\quad (m,V)=((b^{\mathrm{u}},b^{\mathrm{s}},\xi,c),V)\mapsto(\Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}},\xi,c,V),\Phi^{\mathrm{s}}(b^{\mathrm{s}},c,V))\,. \tag{5.4}$$

5.3.2 关于 ν 和 r 的附加条件

命题 5.2 证明中的关键步骤是构造一个合适的扰动W 的 V(见下文第 5.3.5 小节）。这一构造要求对上述设定施加更精确的条件。

首先，由于 $e_{-,\,0}$ 与 $e_{+,\,0}$ 不同，我们可以假设 ν、$\mathcal{C}$ 和 r 足够小，使得对每个 $V\in\nu$,

$$\pi_{\mathrm{pos}}\Big(W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_-(V))\Big)\cap\pi_{\mathrm{pos}}\Big(W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_+(V))\Big)=\emptyset\,, \tag{5.5}$$

其中 π_{pos} 是由（2.10）中定义的第一分量上的投影。

接下来，以下引理是命题 3.3的断言1的一个更一致的版本，关键区别在于 r 可以取得足够小，从而使 I_{once} 包含正时间。

引理 *5.3.* 将 ν 替换为 $V_{\text{quad-}R}$ 中 V_0 的一个较小邻域，将 C 替换为 $(0,+\infty)$ 中 c_0 的一个较小邻域，并将 r 替换为一个较小半径后，我们可以假设以下结论成立。对于每个 $V\in\nu$、每个 $c\in C$，以及系统 (1.7) 的每个解 $\xi\mapsto U(\xi)=(u(\xi)\ \dot{u}(\xi))$，若 $U(0)$ 属于$W_{\mathrm{uloc}\ c}(E_-(V))$（换言之，存在 $b^{\mathrm{u}}\in B^{\mathrm{u}}$，使得 $U(0)$ 等于 $\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(b^{\mathrm{u}})$），则存在一个内部非空且包含于 $(0,+\infty)$ 的紧区间 I_{once}，使得：

1. 函数 $\xi\mapsto|u(\xi)-e_-(V)|$ 在 I_{once} 上递增（因此 $u_{|I_{\mathrm{once}}}$ 是映到其像上的微分同胚），

2. 并且对于所有 ξ^* 属于 I_{once} 且 ξ 属于 $\mathbb{R}$的情况， $u(\xi)=u(\xi^*)$ 蕴含 $\xi=\xi^*$,

3. 且条件 (5.5) 成立，此外，

$$u(I_{\mathrm{once}})\cap\pi_{\mathrm{pos}}\Big[W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_-(V))\cup W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E_+(V))\Big]=\emptyset\,.$$

证明。 暂且设 ν 和 $\mathcal{C}$ 以及 r 与上一小节中的相同，并且对于某个 b^{u} 属于 $\mathcal{B}^{\mathrm{u}}$，考虑系统（1.7）的解 $\xi\mapsto U(\xi)=(u(\xi)\ \dot{u}(\xi))$，定义如下：

$$U(\xi)=S_{c_0,V_0}(\xi,\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c_0,\,V_0}(b^{\mathrm{u}}))\quad(\text{so that}\quad U(0)=\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c_0,\,V_0}(b^{\mathrm{u}})).$$

与命题 1 的证明 3.3 中的论证相同，可得以下结论。首先，存在一个（较大的负）时间 $\xi_0(b^{\mathrm{u}})$ 使得函数 $\xi\mapsto$

$|u(\xi) - e_{-,\,0}|$ 在 $(-\infty,\ \xi_0(b^{\mathrm{u}})]$上递增。于是，存在 $\xi_{\mathrm{once}}(b^{\mathrm{u}})$，位于 $(-\infty,\ \xi_0(b^{\mathrm{u}}))$，使得对于每个属于 $(-\infty,\ \xi_{\mathrm{once}}(b^{\mathrm{u}})]$的 ξ^*，

$$H_V\Big(U(\xi_0(b^{\mathrm{u}}))\Big) < -V(u(\xi^*))$$

（这不过是不等式（3.6））。接着，由命题 3.3的第1 条可知，对于区间 I_{once} 等于 $[\xi_{\mathrm{once}}(b^{\mathrm{u}}) - 2,\ \xi_{\mathrm{once}}(b^{\mathrm{u}}) - 1]$，引理5.3中的结论1 和 2对解 U 成立（若将 $\xi_{\mathrm{once}}(b^{\mathrm{u}})$ 替换为更小的量，结论仍然成立）。

现在注意到，由于映射 $(-\infty,\ 0] \to \mathbb{R}^{2d},\ \xi \mapsto S_{c,\,V}(\xi, \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(b^{\mathrm{u}}))$ 对 V、c 和 b^{u} 的光滑依赖性，这一构造可对开子集 $\Omega \subset \mathcal{B}^{\mathrm{u}}$ 中的 b^{u}、ν 所包含的 V_0 的一个（较小）邻域中的 V，以及 $\mathcal{C}_\Omega$（包含于 $\mathcal{C}$）中 c_0 的一个（较小）邻域中的 c 统一进行。换言之，存在一个（充分大的负）量 $\xi_{\mathrm{once}}(\Omega)$，使得上述结论对所有这样的 V、c 和 b^{u} 均成立。由于 $\mathcal{B}^{\mathrm{u}}$ 是紧致的，因此可用有限多个这样的开子集 $\Omega_1 \ldots \Omega_n$ 覆盖它。因此，将

$$\nu \text{ by } \bigcap_{i=1}^{n} \nu_{\Omega_i} \quad \text{and} \quad \mathcal{C} \text{ by } \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{\Omega_i},$$

并选择

$$\xi_{\mathrm{once}} = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} \xi_{\mathrm{once}}(\Omega_i) \quad \text{and} \quad I_{\mathrm{once}} = [\xi_{\mathrm{once}} - 2, \xi_{\mathrm{once}} - 1],$$

结论 1 和 2 的引理 5.3成立。将 r 替换为较小的正量后，我们还可以假设 I_{once} 属于 $(0,\ +\infty)$。最后，再次将r 替换为较小的正量后，我们可以假设结论 3 也成立。 □

5.3.3 横截性的等价刻画

考虑集合

$$\mathcal{F}_{\Lambda,\mathcal{C}} = \{(V, c, u) :\ V \in \Lambda \text{ and } c \in \mathcal{C} \text{ and } u \text{ is the profile of a front travelling at speed } c \text{ and connecting } e_-(V) \text{ to } e_+(V), \text{ for the potential } V\},$$

~并将 $\mathrm{F}_{\Lambda,\mathcal{C}}$记为 $\mathrm{F}_{\Lambda,\mathsf{C}}$ 关于如下等价关系的等价类集合：若且唯若 $V = V\dagger$ 且 $c = c^\dagger$，并且相差一个时间平移，则 $(V, c, u) \sim (V\dagger\, c^\dagger, u^\dagger)$。本小节旨在证明下文的命题 5.5，该命题将交集 $\Phi(\mathsf{M} \times \Lambda) \cap \mathsf{W}$ 的横截性与属于 $\mathrm{F}_{\Lambda,\mathcal{C}}$ 的行波前沿的横截性联系起来。首先，接下来的命题 5.4 将形式化地说明 Φ 的像与对角线 W 的交集同这类行波前的剖面之间的对应关系。

命题 5.4。映射

$$\Phi^{-1}(\mathcal{W}) \to \mathcal{F}_{\Lambda,\mathcal{C}},\quad (b^{\mathrm{u}}, b^{\mathrm{s}}, \xi, c, V) \mapsto \Big(V, c, \xi' \mapsto \pi_{\mathrm{pos}}\Big(S_{c,V}(\xi', \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(b^{\mathrm{u}}))\Big)\Big) \tag{5.6}$$

在 $\Phi^{-1}(W)$ 与商集 $\tilde{F}_{\Lambda,\mathcal{C}}$ 之间定义了一一对应。

证明。点 $(b^{\mathrm{u}}, b^{\mathrm{s}}, \xi, c, V)$ 在 M 中经 Φ 映射后的像属于 N 的对角线 W，当且仅当 $\Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}}, \xi, c, V) = \Phi^{\mathrm{s}}(b^{\mathrm{s}}, c, V)$。若最后这个等式成立，则函数$u\colon \xi' \mapsto \Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}}, \xi', c, V)$ 是一个解，属于不稳定流形 $W^{\mathrm{u}}_{c,V}(E_-(V))$，并且满足 $u(\xi) = \Phi^{\mathrm{s}}(b^{\mathrm{s}}, c, V)$ 属于 $E_+(V)$ 的局部稳定流形。因此，u 定义了一个前沿的剖面，该前沿以速度 c 传播，并连接 $e_-(V)$ 与 $e_+(V)$。因此映射 (5.6) 定义良好。

现在，若 $\xi \mapsto u(\xi)$ 是以速度 c 在势函数 V 下传播、连接 $e_-(V)$ 与 $e_+(V)$ 的前沿剖面，那么根据命题 1.2，$\xi \mapsto (u(\xi)\ \dot{u}(\xi))$ 的像属于交集 $W^{\mathrm{u}}_{c,V}(E_-(V)) \cap W^{\mathrm{s}}_{c,V}(E_+(V))$。因此，该像必定在某个时刻 ξ_- 穿过 $W\mathrm{uloc}_{c,V}(E_-(V))$ 的边界，并在某个时刻 ξ_+ 穿过 $W\mathrm{sloc}_{c,V}(E_+(V))$ 的边界：存在 $b^{\mathrm{u}} \in \mathrm{B}^{\mathrm{u}}$ 和 $b^{\mathrm{s}} \in \mathrm{B}^{\mathrm{s}}$，使得 $(u(\xi_-)\ \dot{u}(\xi_-)) = \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},c,V}(b^{\mathrm{u}})$，且 $(u(\xi_+)\ \dot{u}(\xi_+)) = \hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},c,V}(b^{\mathrm{s}})$。根据构造，$\Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}}, \xi_+ - \xi_-, c, V) = \Phi^{\mathrm{s}}(b^{\mathrm{s}}, c, V)$，因此 $\Phi(b^{\mathrm{u}}, b^{\mathrm{s}}, \xi_+ - \xi_-, c, V))$ 属于 W。此外，根据第 2.2 小节末尾的注，对于给定的剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$，这些交集发生的时刻 ξ_- 和 ξ_+ 是唯一的，因此点 $b^{\mathrm{u}} \in \mathrm{B}^{\mathrm{u}}$、$b^{\mathrm{s}} \in \mathrm{B}^{\mathrm{s}}$ 以及时间差 $\xi_+ - \xi_-$ 也都是唯一的。这就完成了这一一对应的证明。

□

这两种对应的横截性概念之间的关系如下。

命题 5.5. 对于 V *in* Λ 中的每个势函数，以下两个陈述等价。

1. 函数 $M \to N$, $m \mapsto \Phi(m, V)$ 的像与 W 横截。
2. 对于势函数 V，每个以速度 c *in* C 行进、连接 $e_-(V)$ 与 $e_+(V)$ 的前沿，其剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$ 都是横截的。

证明。取 $(m_1, V_1) \in \mathcal{M} \times \Lambda$，使得 $\Phi(m_1, V_1) \in \mathcal{W}$；设 $(b^{\mathrm{u}}_1, b^{\mathrm{s}}_1, \xi_1, c_1)$ 表示点 m_1，并设 $\xi \mapsto u_1(\xi)$ 表示相应行波前的剖面。换言之，

$$\text{for all } \xi \text{ in } \mathbb{R}\,, \quad U_1(\xi) = \Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}}_1, \xi, c_1, V_1)\,, \quad \text{where} \quad U_1(\xi) = \big(u_1(\xi), \dot{u}_1(\xi)\big)\,.$$

考虑映射

$$\begin{aligned} \Gamma\Phi : (\mathcal{B}^{\mathrm{u}} \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}) \times (\mathcal{B}^{\mathrm{s}} \times \mathcal{C}) &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \\ \big((b^{\mathrm{u}}, \xi, c^{\mathrm{u}}), (b^{\mathrm{s}}, c^{\mathrm{s}})\big) &\mapsto \big(c^{\mathrm{u}}, \Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}}, \xi, c^{\mathrm{u}}, V_1)\big) + \big(c^{\mathrm{s}}, \Phi^{\mathrm{s}}(b^{\mathrm{s}}, c^{\mathrm{s}}, V_1)\big)\,, \end{aligned}$$

and

$$\Delta\Phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{2d}\,, \quad (b^{\mathrm{u}}, b^{\mathrm{s}}, \xi, c) \mapsto \Phi^{\mathrm{u}}(b^{\mathrm{u}}, \xi, c, V_1) - \Phi^{\mathrm{s}}(b^{\mathrm{s}}, c, V_1)\,.$$

并且仅在本证明中，记 $D\Phi$ 为 $D_{T_{m_1}\mathcal{M}}\Phi$，类似地，记 $D\Phi^{\mathrm{u}}$ 和 $D\Phi^{\mathrm{s}}$ 以及$D(\Gamma\Phi)$ 和 $D(\Delta\Phi)$，分别表示 Φ^{u} 和 Φ^{s} 和 $\Gamma\Phi$ 和 $\Delta\Phi$ 在 (m_1, V_1) 处以及关于除 V以外所有变量的微分。

引理 5.6。以下三个陈述等价。

(A) $D\Phi$ 的像包含[2]的对角线 W 的一个补子空间($\mathbb{R}^{2d}$)。

(B) 映射 $D(\Gamma\Phi)$ 是满射。

(C) 映射 $D(\Delta\Phi)$ 是满射。

引理的证明 *5.6.* 若陈述 (A) 成立，则对每个 (α,β) 属于 $(\mathbb{R}^{2d})^2$, ，存在γ 属于 $\mathbb{R}^{2d}$ 以及 δm 属于 $T_{m_1}\mathcal{M}$ 使得

$$(\gamma,\gamma)+D\Phi\cdot\delta m=(\alpha,\beta)\,, \tag{5.7}$$

从而

$$D(\Delta\Phi)\cdot\delta m=\alpha-\beta\,, \tag{5.8}$$

且陈述 (C) 成立。反过来，若陈述 (C) 成立，则对每个 (α,β) 属于 $(\mathbb{R}^{2d})^2$, ，存在 δm 属于 $T_{m_1}\mathrm{M}$ 使得 (5.8) 成立。因此，若 $(\delta b^{\mathrm{u}},\delta b^{\mathrm{s}},\delta\xi,\delta c)$ 表示 δm 的分量，则向量 $\alpha-D\Phi^{\mathrm{u}}(\delta b^{\mathrm{u}},\delta\xi,\delta c)$ 等于 $\beta-D\Phi^{\mathrm{s}}(\delta b^{\mathrm{s}},\delta c)$。若将该向量记为 γ，则等式 (5.7) 成立，这表明陈述 (A) 成立。因此，陈述 (A) 和 (C) 等价。

现在，如果陈述 (B) 成立，那么对于每个 $(\delta c,\ \delta U)$ 属于 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2d}$的情形，都存在 $(\delta b^{\mathrm{u}},\ \delta\xi,\ \delta c^{\mathrm{u}})$属于 $T_{b_1^{\mathrm{u}}}\mathcal{B}^{\mathrm{u}}\times\mathbb{R}^2$ 以及 $(\delta b^{\mathrm{s}},\ \delta c^{\mathrm{s}})$ 属于 $T_{b_1^{\mathrm{s}}}\mathcal{B}^{\mathrm{s}}\times\mathbb{R}$，使得

$$(\delta c,\delta U)=\left(\delta c^{\mathrm{u}},D\Phi^{\mathrm{u}}\cdot(\delta b^{\mathrm{u}},\delta\xi,\delta c^{\mathrm{u}})\right)+\left(\delta c^{\mathrm{s}},D\Phi^{\mathrm{s}}\cdot(\delta b^{\mathrm{s}},\delta c^{\mathrm{s}})\right), \tag{5.9}$$

使得 δc 等于 $\delta c^{\mathrm{u}}+\delta c^{\mathrm{s}}$，并且使得

$$\begin{aligned}\delta U&=D\Phi^{\mathrm{u}}\cdot(\delta b^{\mathrm{u}},\delta\xi,\delta c^{\mathrm{u}})+D\Phi^{\mathrm{s}}\cdot(\delta b^{\mathrm{s}},\delta c-\delta c^{\mathrm{u}})\\&=D\Phi^{\mathrm{u}}\cdot(\delta b^{\mathrm{u}},\delta\xi,\delta c^{\mathrm{u}})+D\Phi^{\mathrm{s}}\cdot(0,\delta c)-D\Phi^{\mathrm{s}}\cdot(-\delta b^{\mathrm{s}},\delta c^{\mathrm{u}})\,,\end{aligned}$$

因此，最后，如果将 $(\delta b^{\mathrm{u}},\ -\delta b^{\mathrm{s}},\ \delta\xi,\ \delta c^{\mathrm{u}})$ 记为 δm，那么

$$\delta U=D(\Delta\Phi)\cdot\delta m+D\Phi^{\mathrm{s}}\cdot(0,\delta c)\,. \tag{5.10}$$

令 δc 等于 0 可知，每个属于 $\mathbb{R}^{2d}$ 的 δU 都属于 $D(\Delta\Phi)$的像，这就是陈述 (C)。反过来，如果陈述 (C) 成立，那么对于每个属于$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2d}$的 $(\delta c,\delta U)$，都存在属于 $T_{m_1}\mathrm{M}$ 的 δm，使得 (5.10) 成立；若 δc^{u} 表示 δm 的最后一个分量，且 δc^{s} 是差 $\delta c-\delta c^{\mathrm{u}}$，那么等式 (5.9) 成立，这表明陈述 (B) 成立。因此，陈述 (B) 和 (C) 等价。 □

命题 *5.5* 的证明续。 最后，我们来看看如何用引理 5.6 的要素来表述横截性陈述 1 和 2。一方面，根据定义 1.3，剖面为 $u_1(\cdot)$ 、速度为 c_1 的行波前是横截的，当且仅当交集

$$\left(\bigcup_{c^{\mathrm{u}}>0}\{c^{\mathrm{u}}\}\times W^{\mathrm{u}}_{c^{\mathrm{u}},V}(E_-(V))\right)\cap\left(\bigcup_{c^{\mathrm{s}}>0}\{c^{\mathrm{s}}\}\times W^{\mathrm{s}}_{c^{\mathrm{s}},V}(E_+(V))\right) \tag{5.11}$$

在 $\mathbb{R}^{2d+1}$ 中沿集合 $\{c_1\} \times U_1(\mathbb{R})$ 横截。无论选取轨道 $U_0(\mathbb{R})$上的哪个点，都可以考察这种横截性，因此特别可以在点$\Phi^{\mathrm{u}}(b_1^{\mathrm{u}}, \xi_1, c_1, V_1)$处考察；该点等于 $\Phi^{\mathrm{s}}(b_1^{\mathrm{s}}, c_1, V_1)$。根据定义，式 (5.11) 中相交的流形所对应的切空间之和是 $D(\Gamma\Phi)$ 的像，因此，陈述 2 中所述的横截性等价于映射$D(\Gamma\Phi)$的满射性（引理 5.6 中的陈述 (B)）。

另一方面，函数 $\mathsf{M} \to (\mathbb{R}^{2d})^2, m \mapsto \Phi(m, V_1)$ 的像在 $\Phi(m_1, V_1)$ 处与 $(\mathbb{R}^{2d})^2$ 的对角线 W 横截，如 1 中所述，当且仅当 $D\Phi$ 的像包含对角线的一个补子空间（引理 5.6 中的陈述 (A)）。因此，命题 5.5 由引理 5.6 得出。 □

根据命题 5.5，命题 5.2 由定理 4.2应用于函数 Φ (见第 5.3.6 节)的结论得出。接下来的两个小节将检验此函数 Φ 是否满足该定理的假设 1 和2 。

5.3.4 检验定理 1 的假设 4.2

由于定义流 (2.1) 的向量场 (1.6属于 C^k 类，因此函数 Φ也属于该类。由第2.1 节可知

$$\dim(\mathcal{B}^{\mathrm{u}}) = d - m(e_{-,0}) - 1 \text{ and } \dim(\mathcal{B}^{\mathrm{s}}) = d - 1\,, \text{ thus } \dim(\mathcal{M}) = 2d - m(e_{-,0})\,,$$

并且，由于$\mathcal{W}$ 在$\mathcal{N}$ 中的余维等于 $2d$,

$$\dim(\mathcal{M}) - \operatorname{codim}(\mathcal{W}) = -m(e_{-,0}) \leq 0\,, \quad \text{thus} \quad k > \dim(\mathcal{M}) - \operatorname{codim}(\mathcal{W})\,;$$

换言之，定理4.2 的假设 1成立。

5.3.5 检验定理 4.2 的假设 2

取集合 $\Phi^{-1}(\mathcal{W})$中的(m_1, V_1)。令$(b_1^{\mathrm{u}}, b_1^{\mathrm{s}}, \xi_1, c_1)$表示 m_1的分量，并且对每个实数量 ξ，记

$$U_1(\xi) = (u_1(\xi), v_1(\xi)) = S_{c_1, V_1}(\xi, \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}, c_1, V_1}(b_1^{\mathrm{u}}))\,.$$

函数 $\xi \mapsto u_1(\xi)$ 是一个以速度 c_1 传播、连接$e_-(V_1)$ 与 $e_+(V_1)$ 的前沿剖面，对应的势函数为 V_1；根据空包含关系（5.5），量 ξ_1 是正的。记

$$D\Phi\,, \quad D\Phi^{\mathrm{u}} \quad \text{and} \quad D\Phi^{\mathrm{s}}$$

分别对三个函数 Φ 、 Φ^{u} 和 Φ^{s} 在点 $(b_1^{\mathrm{u}}$、b_1^{s}、ξ_1、c_1、$V_1)$、$(b_1^{\mathrm{u}}$、ξ_1、c_1、$V_1)$ 以及 $(b_1^{\mathrm{s}}$、c_1、$V_1)$ 处关于参数 $m \in \mathsf{M}$ 和 $V \in \Lambda$ 的全微分。验证定理 4.2 的假设 2 等价于证明

$$\operatorname{im}(D\Phi) + T\mathcal{W} = T\mathcal{N}\,. \tag{5.12}$$

为此，由于 $\{0_{\mathbb{R}^{2d}}\}$ 这一 $\mathbb{R}^{2d}\times$子空间横截于 $\mathcal{W}$ 的对角线，而 $\mathcal{N}$ 是其所在空间，因此只需证明，对于每个 $\gamma\in\mathbb{R}^{2d}$，向量 $(\gamma,0_{\mathbb{R}^{2d}})$ 可以由 $D\Phi$ 到达。因此，只需证明，对于每个 $\gamma\in\mathbb{R}^{2d}$，存在一个实数量 ζ 和一个函数 $W\in\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$，其紧支集 $\mathrm{supp}(W)$ 满足

$$\mathrm{supp}(W)\subset B_{\mathbb{R}^d}(0,R)\,, \tag{5.13}$$

使得

$$D\Phi^{\mathrm{u}}\cdot(0,\zeta,0,W)=\gamma\,, \tag{5.14}$$

$$\text{and}\quad D\Phi^{\mathrm{s}}\cdot(0,0,W)=0_{\mathbb{R}^{2d}}\,. \tag{5.15}$$

为满足等式（5.15），只需假设 W 满足以下附加条件：

$$\mathrm{supp}(W)\cap\pi_{\mathrm{pos}}\Big[W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}\big(E_+(V_1)\big)\Big]=\emptyset\,, \tag{5.16}$$

其中 $\pi_{\mathrm{pos}}:\mathbb{R}^{2d}\to\mathbb{R}^d$ 是（2.10）中定义的第一分量上的投影（此条件确保对 $E_+(V_1)$ 沿 V_1 方向进行扰动不会改变其局部稳定流形， W参见小节 2.2末尾的第二条注）。为方便起见，我们还将确保对$E_-(V_1)$的局部不稳定流形也同样如此，即：

$$\mathrm{supp}(W)\cap\pi_{\mathrm{pos}}\Big[W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}\big(E_-(V_1)\big)\Big]=\emptyset\,. \tag{5.17}$$

满足等式（5.14）意味着要证明：可通过 $\mathbb{R}^{2d}\cdot D\Phi^{\mathrm{u}}\cdot(0,\zeta,0,W)$ 到达的 $\mathbb{R}^{2d}$ 方向所张成子空间的正交补是平凡的，即仅由 $\{0_{\mathbb{R}^{2d}}\}$构成。注意到

$$D\Phi^{\mathrm{u}}\cdot(0,\zeta,0,0)=\zeta\,\dot U_1(\xi_1)\,.$$

因此，横截性结论（5.12）是以下引理的推论 .

引理 5.7（通过扰动势函数达到给定方向）。对于任意非零向量 (ϕ_1,ψ_1) 属于 $\mathbb{R}^{2d}$ 且正交于 $\dot U_1(\xi_1)$，存在 W 属于 $\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$，满足条件 (5.13)、(5.16) 和 (5.17)，且满足不等式

$$\langle D\Phi^{\mathrm{u}}\cdot(0,0,0,W)\,|\,(\phi_1,\psi_1)\rangle\neq 0\,. \tag{5.18}$$

引理 5.7 的证明。设 (ϕ_1,ψ_1) 表示在 $\mathbb{R}^{2d}$ 中与 $U_1(\xi_1)$ 正交的非零向量，并设 W 是 $\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 中满足条件 (5.13)、(5.16) 和 (5.17) 的函数。考虑势函数 V_1 和速度 c_1 对解 $\xi\mapsto U_1(\xi)$ 附近的微分系统 (1.7) 的线性化：

$$\frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix}\delta u(\xi)\\ \delta v(\xi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{id}\\ D^2V_1(u_1(\xi)) & -c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta u(\xi)\\ \delta v(\xi)\end{pmatrix}\,, \tag{5.19}$$

并令 $T(\xi,\ \xi')$ 表示通过在时刻 ξ 和 ξ'之间积分此线性化微分系统而得到的演化算子族。由条件（5.17）可知

W 仅影响 Φ^{u} 中与流相对应的部分（而不影响函数 $\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\ c_1,\ V_1}$），常数变易公式给出

$$D\Phi^{\mathrm{u}} \cdot (0,0,0,W) = \int_0^{\xi_1} T(\xi,\xi_1)\Big(0, \nabla W\big(u_1(\xi)\big)\Big)\, d\xi\,. \tag{5.20}$$

对于每个时间 ξ，令 $T^*(\xi,\ \xi_1)$ 表示 $T(\xi,\ \xi_1)$ 的伴随算子，并令

$$\big(\phi(\xi), \psi(\xi)\big) = T^*(\xi,\xi_1) \cdot (\phi_1,\psi_1)\,. \tag{5.21}$$

根据表达式（5.20），不等式（5.18）可写为

$$\int_0^{\xi_1} \Big\langle \Big(0, \nabla W\big(u_1(\xi)\big)\Big) \;\Big|\; T^*(\xi,\xi_1)\cdot(\phi_1,\psi_1)\Big\rangle\, d\xi \neq 0\,,$$

或者等价地

$$\int_0^{\xi_1} \nabla W\big(u_1(\xi)\big)\cdot\psi(\xi)\, d\xi \neq 0\,. \tag{5.22}$$

注意，由于线性化微分系统（5.19）的表达式，（ϕ，ψ）是伴随线性化系统的一个解

$$\begin{pmatrix}\dot\phi(\xi)\\ \dot\psi(\xi)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & D^2V_1\big(u_1(\xi)\big)\\ \mathrm{id} & -c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi(\xi)\\ \psi(\xi)\end{pmatrix}\,. \tag{5.23}$$

因此，我们的任务是构造一个函数 W 属于 $\mathcal{C}^{k+1}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R})$，满足（5.13）、（5.16）、（5.17）和（5.22）。需要克服两个困难。

1. 首先，如图 3.1所示，函数 $\xi \mapsto u_1(\xi)$ 可能在参数 ξ取不同值时达到相同的数值，因此难以处理扰动 $W\big(u_1(\xi)\big)$ 在 ξ的这些不同取值处对积分（5.22）中各贡献之间相互作用的影响。

2. 其次，积分（5.22）取决于扰动 ∇W 的梯度 W，而非其本身；并且该梯度不能是任意函数。

这些困难已在若干情境中得到处理，参见 [37, 38, 45]（常微分方程）以及 [8–10, 26, 27]（偏微分方程）。每次都必须针对所研究系统的特点和约束，找到一些具体论证。

在当前情形下，以下技巧可以解决问题。根据引理 5.3，存在一个内部非空的闭区间 I_{once}，且包含于（0，$+\infty$），使得

$$u_1(I_{\mathrm{once}}) \cap \pi_{\mathrm{pos}}\Big[W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}\big(E_-(V_1)\big) \cup W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}\big(E_+(V_1)\big)\Big] = \emptyset\,, \tag{5.24}$$

使得 $\dot u$ 在 I_{once}上不为零，并且使得

$$\text{for all } \xi^* \text{ in } I_{\mathrm{once}} \text{ and } \xi \text{ in } \mathbb{R}\,,\quad u_1(\xi) = u_1(\xi^*) \implies \xi = \xi^*\,. \tag{5.25}$$

根据空交集 (5.24)，并且由于 $u_1(\xi)$ 属于 $W_{\mathrm{sloc}\ c,\ V}(E_+(V_1))$ 当 ξ大于 ξ_1时，区间 I_{once} 实际上包含于 $(0,\xi_1)$。鉴于 (5.25)，该区间的像$u_1(I_{\mathrm{once}})$ 提供了一个合适的位置，可在此扰动轨道，而不会带来上述不便1 。需要考虑两种情况（另有第三种情况，最终会发现其为空）。

情形 1. 存在一个时刻 ξ^*，属于 I_{once}，使得 $\psi(\xi^*)$ 与 $\dot{u}_1(\xi^*)$不 共线。在这种情况下，经过对 $\mathbb{R}^d$ 作仿射保角坐标系变换后，我们可以假设

$$u_1(\xi^*) = 0 \quad \text{and} \quad \dot{u}_1(\xi^*) = \epsilon_1 \quad \text{and} \quad \epsilon_2 \cdot \psi(\xi^*) \neq 0\,, \tag{5.26}$$

其中 $\epsilon_1 = (1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ 和 $\epsilon_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 标准基的前两个向量。令 ρ 表示一个偶函数，属于 $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R},\ [0,1])$，且满足

$$\rho(0) = 1 \quad \text{and } \rho \text{ vanishes on } \mathbb{R} \setminus (-1,1).$$

令 ε 表示一个稍后选定的小正量，并考虑鼓包函数

$$\rho_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to [0,1], \quad u \mapsto \rho\left(\frac{|u|}{\varepsilon}\right).$$

根据这个定义可得

$$\rho_\varepsilon(0_{\mathbb{R}^d}) = 1 \quad \text{and} \quad \mathrm{supp}(\rho_\varepsilon) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon) \quad \text{and} \quad \|\nabla\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})^d} \in \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^{-1})\,. \tag{5.27}$$

我们如下定义扰动 W：对于每个 u 属于 $\mathbb{R}^d$，

$$W(u) = \rho_\varepsilon(u)(\epsilon_2 \cdot u)\,,$$

参见图 5.2，因此

$$\nabla W(u) = \rho_\varepsilon(u)\epsilon_2 + (\epsilon_2 \cdot u)\nabla\rho_\varepsilon(u)\,. \tag{5.28}$$

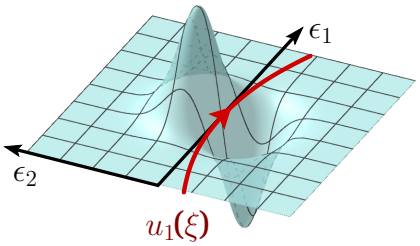

图 5.2：W 的图像。

由此定义可知，如果 ε 足够小，那么，一方面，条件 (5.13)（根据引理 4.4的不等式 (4.3)），以及 (5.16) 和 (5.17)（根据空交集 (5.24)）均成立；另一方面，根据 (5.25)，且由于 $\dot{u}_1(\xi^*)$ 非零，存在一个开区间 I^*_ε，其属于 $\mathbb{R}$ 并满足

$$\xi^* \in I^*_\varepsilon \quad \text{and, for every } \xi \text{ in } \mathbb{R}, \quad u_1(\xi) \in B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon) \iff \xi \in I^*_\varepsilon\,. \tag{5.29}$$

假设 ε 就是这样选取的。由式（5.29）可知，式（5.22）中的积分化简为：

$$\int_{I^*_\varepsilon} \nabla W(u_1(\xi)) \cdot \psi(\xi)\, d\xi\,. \tag{5.30}$$

因此，若 $u_1(\xi)$ 沿着 ϵ_1 的方向在$B_{\mathbb{R}^d}(0,\ \varepsilon)$球内沿直线前进，则对每个 ξ，若其属于 I_ε^*，

$$\nabla W(u_1(\xi)) = \rho_\varepsilon(u_1(\xi))\epsilon_2\,,$$

使得积分（5.30）化简为

$$\int_{I_\varepsilon^*} \rho_\varepsilon(u_1(\xi))\epsilon_2 \cdot \psi(\xi)\,d\xi\,,$$

并且根据（5.26）的最后一个性质，若 ε 足够小，则该积分不为零，从而满足不等式（5.22）——因此（5.18）也成立。

在一般情形下，$u_1(\xi)$ 未必沿着 ϵ_1 在球 $B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon)$内的方向沿直线变化，此时，量 $\epsilon_2 \cdot u_1(\xi)$ 当 ξ 属于I_ε^*时属于$\mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon^2)$，因此由（5.28）以及（5.27）的最后一个性质可得，对于仍属于 ξ 的 I_ε^*，

$$\nabla W(u_1(\xi)) = \rho_\varepsilon(u_1(\xi))\epsilon_2 + \mathcal{O}_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon)\,,$$

由于 $\rho_\varepsilon(0_{\mathbb{R}^d})$ 等于 1，根据（5.26）的最后一个性质可知，若 ε 足够小，则不等式（5.22）再次成立——因此不等式（5.18）也成立。

若情形 1不 发生，则对每个 ξ 属于 I_{once}，$\psi(\xi)$与 $\dot{u}_1(\xi)$共线；又由于$\dot{u}_1(\cdot)$在 I_{once}上不为零，因此存在一个$\mathcal{C}^1$函数 $\alpha : I_{\text{once}} \to \mathbb{R}$，使得对每个 ξ 属于 I_{once}，

$$\psi(\xi) = \alpha(\xi)\dot{u}_1(\xi)\,. \tag{5.31}$$

Th接下来的情形 2 和情形 3，取决于函数 $\alpha(\cdot)$是否为常数 .

情形 2。对每个 ξ 属于 I_{once}，等式（5.31）对某个 非恒定 函数 $\alpha(\cdot)$成立。对于势函数的每个扰动 W，如果 W 的支集充分局部地集中在 $u(I_{\text{once}})$ 附近的某个点（使得只要 $\nabla W(u(\xi))$不为零，等式（5.31）就成立），那么通过分部积分可得，不等式（5.22）中的积分变为

$$\int \nabla W(u_1(\xi)) \cdot \psi(\xi)\,d\xi = \int \alpha(\xi)\nabla W(u_1(\xi)) \cdot \dot{u}_1(\xi)\,d\xi = -\int \dot{\alpha}(\xi) W(u_1(\xi))\,d\xi \tag{5.32}$$

（这些积分的积分域均为 $[0,\xi_1]$ 。）

最后这个积分的表达式说明了为什么（在当前情形 2 中作出的）假设 $\alpha(\cdot)$ 非常数很重要。根据这一假设，存在 ξ^*属于 I_{once}，使得 $\dot{\alpha}(\xi^*)$ 非零。不妨假设（对 $\mathbb{R}^{2d}$ 作仿射变量代换后） $u_1(\xi^*)$ 等于 $0_{\mathbb{R}^d}$。如上文情形 1 所示，定义 $B_{\mathbb{R}^d}(0,\varepsilon)$、$\rho_\varepsilon$ 和 I_ε^*，并将扰动 W 简单地定义为

$$W = \rho_\varepsilon\,.$$

与情形 1 一样，当 ε 充分小时，条件（5.13）、（5.16）和（5.17）均成立，不等式（5.22）中的积分化简为表达式（5.30）。由（5.32），（5.22）因此变为

$$\int_{I_\varepsilon^*} \dot{\alpha}(\xi) W(u_1(\xi))\, d\xi \neq 0\,, \tag{5.33}$$

当 ε 足够小时成立。因此，不等式（5.22）成立，不等式（5.18）也成立。

情形 3。对于每个 ξ 属于 I_{once}, $\psi(\xi) = \alpha\dot{u}(\xi)$，其中某个实（常）量为 α。

在这种情形下，表达式（5.32）表明，如果 W 的支集局部化在 $u(I_{\text{once}})$的某个点附近，则不等式（5.22）不可能成立。幸运的是，第三种情形会导致矛盾（因此实际上不会发生）。回想一下，$(\phi,\ \psi)$ 是伴随线性化系统（5.23）的一个解。因此，对于每个 ξ 属于 I_{once}，根据情形 3 中的假设可得

$$\phi(\xi) = c\psi(\xi) - \dot{\psi}(\xi) = c\alpha\dot{u}_1(\xi) - \alpha\ddot{u}_1(\xi)\,. \tag{5.34}$$

此外，回想一下，(ϕ_1, ψ_1) 与 $\dot{U}_1(\xi_1) = T(\xi, \xi_1)\ \dot{U}_1(\xi)$ 正交。因此，$(\phi(\xi)\ \psi(\xi)) = T^*(\xi, \xi_1)$ (ϕ_1, ψ_1) 与 $U_1(\xi)$ 正交。根据 ψ 的表达式以及表达式（5.34），这一性质可写为

$$c\alpha|\dot{u}_1|^2(\xi) - \alpha\ddot{u}_1(\xi)\cdot\dot{u}_1(\xi) + \alpha\dot{u}_1(\xi)\cdot\ddot{u}_1(\xi) = 0\,, \quad \text{which yields} \quad c\alpha|\dot{u}_1|^2(\xi) = 0\,. \tag{5.35}$$

由于 $\dot{u}_1$ 在$(-\infty, \xi_{\text{once}})$上不为零，因此量 α 必为零。这就得到$\phi \equiv \psi \equiv 0$，与引理5.7的假设矛盾。

简言之，情形 3 不可能发生；而在情况 1 和情况 2 中，适当的构造给出了一个函数 W 属于$\mathcal{C}_{\text{b}}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$，满足条件（5.13）以及（5.16）至（5.18）。引理5.7 得证。 □

5.3.6 结论

命题 5.2 的证明。正如第 5.3.4 小节所示，定理 4.2 的假设 1 对于在（5.4）中定义的函数 Φ 成立。由于引理 5.7 的结论给出了等式（5.12），该定理的假设 2 也成立。该定理的结论保证存在 Λ 的一个泛型子集 Λ_{gen}，使得对于 Λ_{gen} 中的每个 V，函数 $\Phi(\cdot\ V)$ 都与 N 的对角线 W 横截。根据命题 5.5 可知，对于 Λ_{gen} 中的每个 V，势函数 V 下每个以速度 $c \in$ C 传播、连接 $e_-(V)$ 与 $e_+(V)$ 的前沿剖面 $\xi \mapsto u(\xi)$ 都是横截的。换言之，命题 5.2 的结论对于 $\text{C}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0} = \text{C}$、$\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0} = \nu = \Lambda$ 以及 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,\ \text{gen}} = \Lambda_{\text{gen}}$ 成立。 □

如第5.2小节所示，命题5.1 可由命题5.2推出。

6 对称驻定脉冲的一般位置初等性

本节与上一节5有许多相似之处。因此，本节的阐述着重强调主要差异；对于与第5节中已有内容相同的细节或评论，则予以省略。

6.1 记号与陈述

记号。 对于每个势函数 V 属于 $\mathcal{V}_{\text{full}}$，回顾一下（第5.1小节）$\Sigma_{\text{crit}}(V)$ 表示 V的非退化临界点集合，并考虑集合（6.1）

$$\mathcal{P}_V = \{u \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d):\ \xi \mapsto u(\xi) \text{ 是该系统 } \ddot{u} = \nabla V(u), \\ \text{并且存在 } e \text{ 属于 } \Sigma_{\text{crit}}(V), \text{ 使得 } u(\xi) \to e \text{ 当 } \xi \to \pm\infty\}.$$

换言之， u 属于$\mathcal{P}_V$，当且仅当 $\xi \mapsto u(\xi)$ 是一个驻定脉冲的剖面，该脉冲对于势函数 V 连接一个非退化临界点 e 与其自身。

取定一个正量 R。回顾一下，对称驻波脉冲的初等性已在定义 1.6中定义。本节的目标是证明以下命题。

命题 6.1。 存在 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 的一个泛型子集，使得对于该子集中的每个势函数V，$\mathcal{P}_V$ 中的每个对称驻波脉冲都是初等的。

令 V_0 表示 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中的一个势函数，并令 e_0 表示 V_0 的一个非退化临界点。根据命题 2.4（或直接根据隐函数定理），存在 V_0 在 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中的一个小邻域 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$，以及一个定义在 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$ 上、取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 C^{k+1} 函数 $e(\cdot)$，使得 $e(V_0)$ 等于 e_0，并且对于 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$ 中的每个 V， $e(V)$ 都是 V_0 的一个临近 e_0 的临界点。

与第 5.2 小节中的论证完全相同，可得命题 6.1 是以下局部陈述的推论。

命题 6.2。 存在一个邻域 ν_{V_0, e_0}，它包含于 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中的 V_0 的邻域，且包含于 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$ 中；还存在 ν_{V_0, e_0} 的一个泛型子集 $\nu_{V_0, e_0, \text{gen}}$，使得对于每个属于 $\nu_{V_0, e_0, \text{gen}}$ 的 V，每个将 $e(V)$ 连接到其自身的对称静止前沿都是初等的。

因此，第 6 节余下的部分将用于证明命题 6.2。沿用上文引入的记号 V_0 和 e_0 以及 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$。根据命题 2.4，存在一个邻域 ν，它包含 V_0，且位于 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中，并包含于 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$；此外还存在一个正量 r，使得对于每个属于 ν 的 V，存在 C^k-函数

$$\hat{w}^{\text{u}}_{\text{loc}, V} : \overline{B}^{\text{u}}_{E_0}(r) \to \mathbb{R}^{2d} \quad \text{and} \quad \hat{w}^{\text{s}}_{\text{loc}, V} : \overline{B}^{\text{s}}_{E_0}(r) \to \mathbb{R}^{2d}$$

使得这些集合

$$W^{\text{u}}_{\text{loc}, V}(E(V)) = \hat{w}^{\text{u}}_{\text{loc}, V}(\overline{B}^{\text{u}}_{E_0}(r)) \quad \text{and} \quad W^{\text{s}}_{\text{loc}, V}(E(V)) = \hat{w}^{\text{s}}_{\text{loc}, V}(\overline{B}^{\text{s}}_{E_0}(r))$$

分别定义 $E(V)$ 的局部不稳定流形和局部稳定流形（参见命题 2.4 的结论及等式（2.13））。注意，$\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}$ 的出发集 $B^{\mathrm{u}}_{E_0}(r)$ 以及 $\hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,V}$ 的出发集 $B^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)$ 均不依赖于 V。令

$$\mathcal{B}^{\mathrm{u}} = \partial \overline{B}^{\mathrm{u}}_{E_0}(r) \quad \text{and} \quad \mathcal{B}^{\mathrm{s}} = \partial \overline{B}^{\mathrm{s}}_{E_0}(r)\,.$$

根据线性系统（2.4）的特征向量表达式（2.2），

$$\mathcal{E}^{\mathrm{u}}_{V_0}(E_0) \cap \mathcal{S}_{\mathrm{sym}} = \{0_{\mathbb{R}^{2d}}\} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^{\mathrm{s}}_{V_0}(E_0) \cap \mathcal{S}_{\mathrm{sym}} = \{0_{\mathbb{R}^{2d}}\}\,.$$

因此，将 ν 替换为 V_0 在 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 中的一个更小邻域，并将 r 替换为一个更小的正量后，对于每个 V，若 ν，

$$W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}(E(V)) \cap \mathcal{S}_{\mathrm{sym}} = \{E(V)\} \quad \text{and} \quad W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,V}(E(V)) \cap \mathcal{S}_{\mathrm{sym}} = \{E(V)\}\,. \tag{6.2}$$

6.2 命题6.2 的证明

6.2.1 定理 4.2 的应用

将应用定理 4.2的设定如下。令

$$\mathcal{M} = \mathcal{B}^{\mathrm{u}} \times \mathbb{R}\,, \quad \Lambda = \nu\,, \quad \mathcal{N} = \mathbb{R}^{2d} \quad \text{and} \quad \mathcal{W} = \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}\,,$$

并考虑函数

$$\Phi : \mathcal{M} \times \Lambda \to \mathcal{N}, \quad (b^{\mathrm{u}}, \xi, V) \mapsto S_V\big(\xi, \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}(b^{\mathrm{u}})\big)\,. \tag{6.3}$$

如果定理4.2 的结论在此设定下成立，那么存在一个泛型子集 Λ_{gen} 属于 Λ，使得对于每个 V 属于 Λ_{gen}的$\mathcal{M} \to \mathcal{N}$,$m \mapsto \Phi(m, V)$ 的像都与$\mathcal{W}$横截。

对于给定的势函数 V，$m \mapsto \Phi(m, V)$ 的像恰好是不稳定流形 $E(V)$（去除 E），参见命题 5.4 的证明。根据引理 3.2 中给出的对称驻定脉冲的刻画，$\Phi(\mathcal{M}\ V)$ 与 $\mathcal{W} = \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}$ 的交集实际上对应于对称驻定脉冲的集合。此外，根据定义（参见定义 1.6），V 的对称驻定脉冲的初等性等价于 $\Phi(\mathcal{M}\ V)$ 与$\mathcal{W} = \mathcal{S}_{\mathrm{sym}}$ 交集的横截性。因此，定理 4.2 的结论直接推出命题 6.2，其中$\nu_{V_0,\ e_0} = \nu = \Lambda$和 $\nu_{V_0,\ e_0,\ \mathrm{gen}} = \Lambda_{\mathrm{gen}}$。

接下来需要证明，在上述设定下，定理 4.2 的假设均成立。

6.2.2 检验定理 4.2 的假设 1

由小节 2.1 可知 $\dim(\mathcal{B}^{\mathrm{u}}) = d - m(e_0) - 1$。因此，

$$\dim(\mathcal{M}) - \operatorname{codim}(\mathcal{W}) = \big(d - m(e_0)\big) - d = -m(e_0)\,,$$

它小于正整数 k（Φ 的正则性）。因此满足定理 4.2 的假设 1。

6.2.3 检验定理 4.2 的假设 2

取集合 $\Phi^{-1}(\mathsf{W})$ 中的 $(m_1,\ V_1)$。令 $(b_1^{\mathrm{u}},\ \xi_{\mathrm{turn}})$ 表示 m_1 的分量，并且对于每个实数量 ξ，记作

$$U_1(\xi) = \big(u_1(\xi), v_1(\xi)\big) = S_{V_1}\big(\xi, \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V_1}(b_1^{\mathrm{u}})\big)\,.$$

函数 $\xi \mapsto u_1(\xi)$ 是一个对称驻定脉冲的剖面，在势函数 V_1 下连接 $e(V_1)$ 与其自身，而量 ξ_{turn} 是该驻定脉冲的转向时刻（见定义 1.5）。注意，根据 (6.2) 的第一个等式，该转向时刻 ξ_{turn} 必为正。令 $D\Phi$ 表示 Φ 在点 $\big((b_1^{\mathrm{u}}, \xi_{\mathrm{turn}})\ V_1\big)$ 处关于m 和 V的全微分。定理 4.2 的假设 2 可由下一个引理 6.3 得出。

引理 6.3 (沿给定方向进行势函数扰动)。 对于每个 $\mathbb{R}^d$中的非零向量 ψ_1，存在 W 属于 $C_{\mathrm{b}}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$，使得

$$\langle D\Phi \cdot (0, W)\,|\,(0, \psi_1)\rangle \neq 0\,, \tag{6.4}$$

and

$$\mathrm{supp}(W) \subset B_{\mathbb{R}^d}(0, R)\,. \tag{6.5}$$

证明。 证明与引理 5.7的证明类似。令 ψ_1 为 $\mathbb{R}^d$中的一个非零向量。并令 W 表示一个函数，属于 $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 且其支集满足条件

$$\mathrm{supp}(W) \cap \pi_{\mathrm{pos}}\Big(W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}\big(E(V_1)\big)\Big) = \emptyset\,. \tag{6.6}$$

我们再次用记号 $T(\xi,\ \xi')$ 表示通过对线性化微分系统（5.19）（当 c_1 等于 0时）在时刻 ξ 和 ξ'之间积分所得的演化算子族。由空交集（6.6）可知

$$D\Phi \cdot (0, W) = \int_0^{\xi_{\mathrm{turn}}} T(\xi, \xi_{\mathrm{turn}})\Big(0, \nabla W\big(u_1(\xi)\big)\Big)\, d\xi\,. \tag{6.7}$$

对每个时刻 ξ，令 $T^*(\xi,\ \xi_{\mathrm{turn}})$ 表示 $T(\xi,\ \xi_{\mathrm{turn}})$ 的伴随算子，并令

$$\big(\phi(\xi), \psi(\xi)\big) = T^*(\xi, \xi_{\mathrm{turn}}) \cdot (0, \psi_1)\,.$$

根据（6.7），条件（6.4）可写为

$$\int_0^{\xi_{\mathrm{turn}}} \Big\langle \Big(0, \nabla W\big(u_1(\xi)\big)\Big) \;\Big|\; T^*(\xi, \xi_{\mathrm{turn}}) \cdot (0, \psi_1)\Big\rangle\, d\xi \neq 0\,,$$

或者等价地

$$\int_0^{\xi_{\mathrm{turn}}} \nabla W\big(u_1(\xi)\big) \cdot \psi(\xi)\, d\xi \neq 0\,. \tag{6.8}$$

根据（6.2）的第一个等式，并由哈密顿不变性（1.5）可知，对于属于 $W^{\mathrm{uloc}}{}_{V_1}(E(V_1))$、且不同于 $E(V_1)$ 的每个 (u,v)，量 $V_1(u)$ 大于$V_1(e(V_1))$。另一方面，由于 $\dot{u}_1(\xi_{\mathrm{turn}})$ 为零，量 $V_1(u_1(\xi_{\mathrm{turn}}))$ 等于 $V_1(e(V_1))$，因此 $u_1(\xi_{\mathrm{turn}})$ 不属于（闭）集 $\pi_{\mathrm{pos}}\Big(W^{\mathrm{uloc}}{}_{V_1}(E(V_1))\Big)$。因此，存在一个小于（且充分接近） ξ_{turn} 的时刻 ξ_-，使得

$$u_1([\xi_-,\xi_{\mathrm{turn}}])\cap\pi_{\mathrm{pos}}\Big(W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V_1}(E(V_1))\Big)=\emptyset\,. \tag{6.9}$$

注意，根据引理 3.2，函数 $\xi\mapsto\dot{u}_1(\xi)$ 在$(-\infty,\xi_{\mathrm{turn}})$上不为零。与小节 5.3.5中一样，构造扰动 W时需考虑三种情形。

情形 1。存在一个时刻 $\xi^\dagger$ 属于 $(\xi_-,\xi_{\mathrm{turn}})$，使得 $\psi(\xi^\dagger)$ 与 $\dot{u}_1(\xi^\dagger)$ 不共线。在这种情形下，命题 3 的结论 3.3 给出一个开区间 I_{once}，它包含于$(\xi_-,\xi_{\mathrm{turn}})$ 且足够小，从而对每个属于 ξ^* 的 I_{once},

- 向量 $\psi(\xi^*)$ 与 $\dot{u}_1(\xi^*)$ 不共线,
- 并且对每个 ξ 属于 $(-\infty,\xi$的$)$，若 $u_1(\xi)$ 等于 $u_1(\xi^*)$，则 ξ 等于 ξ^*。

随后可以按照引理 5.7 证明中情形 1 的相同构造进行。由此得到一个扰动 W，使得 $\mathrm{supp}(W)$ 局部化在 $u(I_{\mathrm{once}})$中的某一点附近（因此，根据不等式 (4.3)，包含关系 (6.5) 成立；根据空交集 (6.9)，空交集 (6.6) 也成立），并且使不等式 (6.8) 成立——因此不等式 (6.4) 也成立。

情形 2。对于每个 $\xi\in(\xi_-,\xi_{\mathrm{turn}})$，$\psi(\xi)=\alpha(\xi)\,\dot{u}_1(\xi)$，其中 $\alpha(\cdot)$ 非常数。

同样，命题 33.3 的结论 给出了一个开区间 I_{once}，包含于$(\xi_-,\xi_{\mathrm{turn}})$中，且足够小，以至于对每个 ξ^* 属于 I_{once},

- $\psi(\xi^*)=\alpha(\xi^*)\dot{u}_1(\xi^*)$,
- 且 $\dot{\alpha}(\xi^*)\neq 0$,
- 并且对每个 $\xi\in(-\infty,\ \xi_{\text{转}})$，若 $u_1(\xi)$ 等于 $u_1(\xi^*)$，则 ξ 等于 ξ^*。

随后可以采用与引理5.7证明中情形 2 相同的构造。

情形 3。对每个 $\xi\in(\xi_-,\xi_{\mathrm{turn}})$，$\psi(\xi)=\alpha\dot{u}_1(\xi)$，其中某个实（常）量为 α。在引理 5.7 的证明的情形 3 中，c 非零是利用（5.35）的必要条件。因此，现在需要一种新的特设论证来排除当前情形 3 的可能性。论证如下：由于 $\dot{u}_1(\xi_{\mathrm{turn}})=0$，由本情形的假设可知，当 ξ 趋于 ξ_{turn}时，$\psi(\xi)$趋于 0，因此 ψ_1 为零，这与引理 5.7 的假设矛盾。

简而言之，情形 3 不可能发生，而在另外两种情形中，可以按照引理 W 5.7 的证明中所介绍的构造，构造出势函数的一个适当扰动5.7。引理6.3 得以证明。

□

7 非对称驻定脉冲的一般横截性

与上一节一样，本节的证明与已经详细阐述的证明具有很强的相似性，因此本文只强调其中的主要差异。

7.1 记号与陈述

我们将在本节 6 中沿用上一节的记号 7。取并固定一个正量 R。本节的目标是证明以下命题（驻定脉冲的横截性定义见定义 1.4）。

命题 7.1。 存在 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 的一个泛型子集，使得对于该子集中的每个势函数V，$\mathcal{P}_V$ 中的每个非对称驻定脉冲都是横截的。

令 V_0 表示 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中的一个势函数，并令 e_0 表示 V_0 的一个非退化临界点。正如第 6.1 小节中所述，存在 V_0 在 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中的一个小邻域$\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$，以及一个定义在 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$ 上、取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 C^{k+1} 函数 $e(\cdot)$，使得 $e(V_0)$ 等于 e_0，并且对于每个属于 $\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$ 的 V， $e(V)$ 都是 V_0 中靠近 e_0 的一个临界点。

与第 5.2 小节中完全相同的论证表明，命题 7.1 是以下局部陈述的推论。

命题 7.2。 存在 ν_{V_0,e_0}，它是 V_0 在 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中的一个邻域，且包含于$\nu_{\text{robust}}(V_0, e_0)$，并存在 $\nu_{V_0,e_0,\text{gen}}$ 的一个泛型子集 ν_{V_0,e_0}，使得对于每个属于 $\nu_{V_0,e_0,\text{gen}}$的 V，每个连接 $e(V)$ 与其自身的非对称驻定前沿都是横截的。

因此，第 7 节余下部分将用于证明命题7.2。考虑与第 6.1 小节相同的设定，即针对 $E(V)$ 的局部稳定与不稳定流形，其中 V 位于 V_0 的一个充分小邻域 ν 内。特别地，假设局部稳定与不稳定流形足够小，从而等式（6.2）成立。此外，根据线性系统（2.2）的特征向量表达式（2.4），

$$\mathcal{E}^{\text{u}}_{V_0}(E_0) \cap (\{0_{\mathbb{R}^d}\} \times \mathbb{R}^d\}) = \{0_{\mathbb{R}^{2d}}\} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^{\text{s}}_{V_0}(E_0) \cap (\{0_{\mathbb{R}^d}\} \times \mathbb{R}^d\}) = \{0_{\mathbb{R}^{2d}}\}\,.$$

由此可知，存在一个正量 r_{exit}，使得对于每个与 E_0 不同的 $U \in W^{\text{u}}_{V_0}(E_0)$,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\pi_{\text{pos}}(S_{V_0}(\xi, U)) - e_0\right| > r_{\text{exit}}\,;$$

换言之，如果解 $\xi \mapsto U(\xi) = (u(\xi)\ \dot{u}(\xi))$（对应势函数 V_0）与 E_0 同宿，那么 $u(\xi)$ 必须离开球 $B_{\mathbb{R}^d}(e_0,\ r_{\text{exit}})$，之后最终再返回其中。将 ν 换成 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 中 V_0 的一个更小邻域，并将 r_{exit} 换成一个更小的正量后，我们可以假设，对于每个 ν 中的 V，以及每个与 $E(V)$ 不同的 $W^{\text{u}}_V(E(V))$，

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\pi_{\text{pos}}(S_V(\xi, U)) - e(V)\right| > r_{\text{exit}}\,. \tag{7.1}$$

最后，将 ν 换成 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 中 V_0 的一个更小邻域，并将 r 换成一个更小的正量后，我们可以假设，对于每个 ν 中的 V，

$$\pi_{\text{pos}}\Big(W^{\text{u}}_{\text{loc},V}(E(V)) \cup W^{\text{s}}_{\text{loc},V}(E(V))\Big) \subset B_{\mathbb{R}^d}\big(e(V), r_{\text{exit}}/4\big)\,. \tag{7.2}$$

7.2 有界长度且远离$\mathcal{S}_{\text{sym}}$的非对称驻定脉冲

与第 6 节所讨论的对称驻定脉冲相比，处理非对称驻定脉冲由于以下原因而不那么直接。

1. 对于某些势函数，连接给定临界点与其自身的对称和非对称驻定脉冲可能共存；虽然将证明对称驻定脉冲一般是 初等的 （定义 1.6），但将证明只有非对称驻定脉冲一般是横截的，见第 7.5 小节）。因此，应用定理 4.2来证明非对称驻定脉冲的一般横截性，需要以某种方式排除对称驻定脉冲。

2. 定义 1.4 中所述驻定脉冲的横截性，是在对应于哈密顿量能量 $-V(e)$ 水平集的子流形内部的横截性。该子流形依赖于 V，而不能直接应用定理 4.2 ，因为其中的横截性是在固定流形$\mathcal{N}$内部表述的。跳过这一依赖关系的一种简单方法是将 V 固定在接近 e_0的位置，但其后果是，所考虑的势函数集合 V 将不是开集，因此在这一框架下应用定理 4.2 只能得到势函数的局部稠密性，而不能得到其中非对称脉冲具有横截性的势函数的局部泛型性。局部泛型性实际上将通过开且稠密集合的可数交获得，并分别证明这些集合的开性和稠密性。

对于每个 V 属于 ν 的值以及每个非负量 ξ，考虑集合

$$\begin{aligned} W^{\text{u}}_V(E(V),\bar\xi) = S_V\Big(\bar\xi, W^{\text{u}}_{\text{loc},V}(E(V))\Big) &= \bigcup_{U\in W^{\text{u}}_{\text{loc},V}(E(V))} S_V(\bar\xi, U) \\ &= \{E(V)\} \cup \bigcup_{b^{\text{u}}\in\mathcal{B}^{\text{u}},\,\xi\in(-\infty,\bar\xi]} S_V\big(\xi, \hat w^{\text{u}}_{\text{loc},V}(b^{\text{u}})\big)\,. \end{aligned} \tag{7.3}$$

按照这一记号，集合 $W^{\text{u}}_V(E(V),0)$ 缩减为 $W^{\text{u}}_{\text{loc},V}(E(V))$，而集合 $W^{\text{u}}_V(E(V),\xi)$ 随着 ξ 的增大而增大（按包含关系），并且（在某种意义上）表示平衡点 $E(V)$ 的不稳定流形“截至时间 ξ”。对于所有正量 ξ 和 ε，考虑集合

$$\begin{aligned} \nu_{\pitchfork\,\text{asym stand pulses}}(\bar\xi,\varepsilon) = \Big\{ V\in\nu :\ &\text{if } U_0 \in W^{\text{u}}_V(E(V),\bar\xi) \cap \partial W^{\text{s}}_{\text{loc},V}(E(V)) \text{ and if} \\ &\operatorname{dist}\Big(S_V(\mathbb{R},U_0)\setminus\Big[W^{\text{u}}_{\text{loc},V}(E(V)) \cup W^{\text{s}}_{\text{loc},V}(E(V))\Big], \mathcal{S}_{\text{sym}}\Big) \ge \varepsilon\,, \text{ then the} \\ &\text{对应的驻定脉冲：}\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^d,\ \xi\mapsto\pi_{\text{pos}}\big(S_V(\xi,\ U_0)\big) \text{是横截的}\Big\}\,. \end{aligned} \tag{7.4}$$

换言之，属于 ν 的势函数 V 若每个驻定脉冲在不大于 ξ 的时间内将 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(E(V))$ 连接到 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(E(V))$，同时与 S^{sym} 的距离不小于 ε，则称其属于 $\nu_{\pitchfork}$ asymstandpulses(ξ,ε)。这是横截的。注意，根据等式（6.2），这样的驻定脉冲必然是非对称的。命题 7.2 由下一个命题推出。

命题 7.3。对于所有正数 ξ 和 ε，集合 $\nu_{\pitchfork}$ 非对称驻定脉冲(ξ,ε) 在 ν 中开且稠密。

由命题 *7.3* 推出命题 *7.2*。由命题 7.3 可知，集合

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \nu_{\pitchfork\,\mathrm{asym\,stand\,pulses}}(N,1/N) \tag{7.5}$$

是 ν 的一个泛型子集。并且，根据 $\nu_{\pitchfork}$ 非对称驻定脉冲$(\cdot,\cdot)$ 的定义，对于此集合中的每个势函数 V，任何将 $e(V)$ 与自身相连的非对称驻定脉冲都是横截的。

□

本节余下部分将用于证明命题7.3。

7.3 $\nu_{\pitchfork}$ asym 驻定脉冲$(\xi,\ \varepsilon)$的开性

对于 ν 中的每个势函数 V 以及所有正数 ξ 和 ε，流形 $W\mathrm{u}_V(E(V)\ \xi)$ 和 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(E(V))$ 都是紧致的，并且这些流形关于 V 光滑变化。设 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为属于 $\nu\setminus\nu_{\pitchfork}$ 非对称驻定脉冲(ξ,ε) 的势函数序列，并收敛到 ν 中的某个势函数 V_∞；下面证明在这种情况下，V_∞ 仍不属于 $\nu_{\pitchfork}$ 的 $\nu_{\pitchfork}$ 非对称驻定脉冲(ξ,ε)（这将证明 $\nu_{\pitchfork}$ 非对称驻定脉冲(ξ,ε) 在 ν 中是开集）。对于每个整数 n，都存在一个非横截驻定脉冲，在不短于 ε 的距离处始终远离 S^{sym}，并在不超过 ξ 的时间内将 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(E(V_n))$ 连接到 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(E(V_n))$。如式 (7.3) 所强调的，该脉冲由 B^{u} 中的一个（唯一）b^{u}_n 刻画：其在 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的轨道于点 $\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V_n}(b^{\mathrm{u}}_n)$ 处穿过 $W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc}}(E(V_n))$ 的边界；此外，还存在区间 $[0,\xi]$ 内的一个（唯一）时刻 ξ_n，使得该轨道在点 $S_{V_n}(\xi_n,\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V_n}(b^{\mathrm{u}}_n))$ 处穿过 $W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc}}(E(V_n))$ 的边界。接下来，

(i) 由紧性可知（考虑 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列），我们可以假设 (b^{u}_n,ξ_n) 收敛到某个数对 $(b^{\mathrm{u}}_\infty,\xi_\infty)$，它属于 $\mathcal{B}^{\mathrm{u}}\times[0,\xi]$，进而刻画了 V_∞ 的一个驻定脉冲。这里需要注意，将同宿轨道限制为有界“长度”非常重要，否则极限轨道未必会与 $E(V_\infty)$ 同宿。(ii) 此外，(7.4) 中的两个条件都是闭条件，因此极限驻波也满足它们。(iii) 由于相对于对称子空间 ε 的“余量” $\mathcal{S}^{\mathrm{sym}}$，极限驻波必然是非对称的。

(iv) 最后，由于非横截这一性质是闭的，极限驻波也是非横截的。

因此，极限势函数 V_∞ 不属于 $\nu_{\pitchfork\,\mathrm{asym}}$ 稳态脉冲$(\xi,\ \varepsilon)$，这就完成了证明，即 $\nu_{\pitchfork}$ 渐近稳态脉冲$(\xi,\ \varepsilon)$ 在 ν 中是开集。

7.4 $\nu_{\pitchfork\,\mathrm{asym}}$ 稳态脉冲$(\xi,\ \varepsilon)$的稠密性

7.4.1 定理 4.2的应用

命题7.3中稠密性断言的证明，同样将通过将定理4.2 应用于以下适当的设定来完成。

取正数 ξ 和 ε，并取一个属于 ν 的势函数 V_1 。我们的目标是证明，存在任意接近 V_1 的势函数，且它们属于 $\nu_{\pitchfork}$ 渐近稳态脉冲$(\xi,\ \varepsilon)$。令

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \Big\{ &(b^{\mathrm{u}},\xi) \in \mathcal{B}^{\mathrm{u}} \times (0,\bar{\xi}+1) : \mathrm{dist}\Big(S_{V_1}\big([0,\xi],\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V_1}(b^{\mathrm{u}})\big),\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}\Big) > \varepsilon/2 \\ &\text{and}\quad \pi_{\mathrm{pos}}\Big(S_{V_1}\big(\xi,\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V_1}(b^{\mathrm{u}})\big)\Big) \in B_{\mathbb{R}^d}\big(e(V_1),r_{\mathrm{exit}}/2\big)\Big\}\,.\end{aligned} \tag{7.6}$$

并令 Λ_1 表示集合中 V_1 的一个邻域

$$\Big\{V \in \nu : V \equiv V_1 \text{ on the closed ball } \overline{B}_{\mathbb{R}^d}\big(e(V_1),r_{\mathrm{exit}}\big)\Big\}\,. \tag{7.7}$$

我们可以假设该邻域 Λ_1 足够小，使得对于每个 V 属于 Λ_1 且 $(b^{\mathrm{u}},\ \xi)$ 属于 $\mathcal{B}^{\mathrm{u}} \times (0,\ \xi+1)$，以下两个结论成立：

1. 如果 $(b^{\mathrm{u}},\ \xi)$ 不 属于 $\mathcal{M}$，则

$$\begin{aligned}\text{either}\quad &\mathrm{dist}\Big(S_V\big([0,\xi],\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}(b^{\mathrm{u}})\big),\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}\Big) < \varepsilon \\ \text{or}\quad &\pi_{\mathrm{pos}}\Big(S_V\big(\xi,\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}(b^{\mathrm{u}})\big)\Big) \notin B_{\mathbb{R}^d}\big(e(V_1),r_{\mathrm{exit}}/4\big)\,;\end{aligned} \tag{7.8}$$

2. 如果 $(b^{\mathrm{u}},\ \xi)$ 属于 $\mathcal{M}$，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}\Big(S_V\big([0,\xi],\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}(b^{\mathrm{u}})\big),\mathcal{S}_{\mathrm{sym}}\Big) > 0\,, \\ \text{and}\quad &\pi_{\mathrm{pos}}\Big(S_V\big(\xi,\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},\,V}(b^{\mathrm{u}})\big)\Big) \in B_{\mathbb{R}^d}\big(e(V_1),r_{\mathrm{exit}}\big)\,.\end{aligned} \tag{7.9}$$

对于 V 属于 Λ_1，令

$$\begin{aligned}&\mathcal{N} = H_V^{-1}\Big(H_V\big(E(V)\big)\Big) \cap \big(B_{\mathbb{R}^d}\big(e(V),r_{\mathrm{exit}}\big) \times \mathbb{R}^d\big) \setminus \{E(V)\} \\ \text{and}\quad &\mathcal{W} = \partial W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,V}(E(V)) = \hat{w}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},\,V}(\mathcal{B}^{\mathrm{s}})\,.\end{aligned} \tag{7.10}$$

注意，$\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$和$\mathcal{W}$ 都是 $\mathbb{R}^{2d}$ 的子流形，并且由于 Λ_1 包含于 ν中，根据包含关系（7.2）可知，$\mathcal{W}$ 包含于$\mathcal{N}$。此外，根据 V 上的条件（7.2）以及包含关系（7.2），M、N 和 W 实际上都不依赖于势函数 V 中的 Λ_1。正如开头第二个注中已经解释的那样

小节7.2中，这对于提供一个使定理4.2 适用的设定是必要的。因此，根据（7.9），我们可以考虑函数

$$\Phi : \mathcal{M} \times \Lambda_1 \to \mathcal{N}, \quad (b^{\mathrm{u}}, \xi, V) \mapsto S_V\big(\xi, \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(b^{\mathrm{u}})\big), \tag{7.11}$$

这是定义良好的。注意，即使 M 只包含满足以下条件的配对 (b^{u}, ξ)：对于 $V \in \Lambda_1$，相应解的位置 $u(\xi) = \pi_{\mathrm{pos}}\big(S_V(\xi, \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(b^{\mathrm{u}}))$ 位于 $B_{\mathbb{R}^d}(e(V_1), r_{\mathrm{exit}})$ 内部（(7.9) 的第二个条件），由定义 r_{exit} 的性质 (7.1) 可知，该位置 $u(\cdot)$ 在其他时刻会离开 $B_{\mathbb{R}^d}(e(V_1), r_{\mathrm{exit}}/2)$，从而提供一个适合扰动势函数的位置。换言之，即使 Φ 的到达集及其像都被限制在这个球内，仍可通过在 $B_{\mathbb{R}^d}(e(V_1), r_{\mathrm{exit}})$ 之外扰动 V，来修改 $\Phi(b^{\mathrm{u}}, \xi, V)$。

命题 7.4. 对于每个势函数 V 属于 Λ_1，如果函数 $M \to N$，$V \mapsto \Phi(m, V)$ 的像与 W 横截，那么 V 属于集合 $\nu_{\pitchfork}\mathrm{asymstandpulses}(\xi, \varepsilon)$。

证明。考虑满足不等式 (7.4) 的 V 属于 Λ_1 以及 U_0 属于 $W^{\mathrm{u}}_V(E(V), \xi) \cap \partial W$ sloc $_V(E(V))$。根据 $W^{\mathrm{u}}_V(E(V), \xi)$ 的定义 (7.3)，点 U_0 的形式为 $(u, \dot{u})(\xi)$，其中 u 是一个静止脉冲，满足 $(u, \dot{u})(0) = \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V}(b^{\mathrm{u}})$，且 ξ 属于 $[0, \xi]$。根据局部流形满足的包含关系 (7.2) 以及 $\nu_{\pitchfork}$asym standpulses(ξ, ε) 的定义，蕴含关系 (7.8) 表明 (b^{u}, ξ) 属于 M。因此，像 $\Phi((b^{\mathrm{u}}, \xi), V)$ 定义良好；只需注意到，Φ 与 W 的横截性恰好对应于定义 1.4 中静止脉冲横截性的定义。由此，根据集合 $\nu_{\pitchfork}$asymstandpulses(ξ, ε) 的定义，V 属于该集合。

□

证明的其余部分与第 5 节和第 6 节中的论证完全相同，只是排除“情形 3”时需要稍作不同的特设论证。

7.4.2 检验定理 4.2 的假设 1

与前几节不同，此处环境空间 N 是一个维数为$2d-1$ 的水平集（而非 $\mathbb{R}^{2d}$）；不过计算过程类似。事实上，由第 2.1 小节可知，一方面，dim(M) $=$ dim$(\partial B^{\mathrm{u}}_{E_0}(r))+1 = d - m(e_0)$；另一方面，dim(W) $= d - m(e_0) - 1$，因此 codim(W) $= d + m(e_0)$。由此，定理 4.2 的假设 1 得以满足。

7.4.3 检验定理 4.2 的假设 2

取集合 $\Phi^{-1}(\mathcal{W})$ 中的 (m_2, V_2)。令 $(b^{\mathrm{u}}_2, \xi_2)$ 表示 m_2 的分量，并对每个实数量 ξ，记作

$$U_2(\xi) = (u_2(\xi), v_2(\xi)) = S_{V_2}(\xi, \hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},V_2}(b^{\mathrm{u}}_2)).$$

函数 $\xi \mapsto u_2(\xi)$ 是一个驻定脉冲的剖面，它将 $e(V_2)$ 连接到自身，对应的势函数为 V_2；根据 (6.2) 和 (7.9)，该驻定脉冲是非对称。在

此外，根据 (7.1) 和 (7.2)，量 ξ_2 是正的。令 $D\Phi$ 表示关于 m 和 V 的 Φ 在点 (m_2, V_2)处的全微分 。定理 4.2 的假设 2 可由下面的引理 7.5得到。

引理 7.5 （使势函数扰动达到给定方向）。 对于每个属于 $T_{U_2(\xi_2)}N$ 的非零向量$(\phi_0, \psi_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$，存在 $W \in C_{\mathrm{b}}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 使得

$$\langle D\Phi \cdot (0, W) \,|\, (\phi_0, \psi_0) \rangle \neq 0\,, \tag{7.12}$$

并且使得 W 满足条件

$$\mathrm{supp}(W) \cap \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(e(V_2), r_{\mathrm{exit}}) = \emptyset\,. \tag{7.13}$$

证明。证明与引理 5.7 和 6.3 的证明类似。设 (ϕ_2, ψ_2) 是 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 中属于 $T_{U_2(\xi_2)}$N 的一个非零向量。设 W 是 $C_{\mathrm{b}}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中的一个函数，并假设条件 (7.13) 成立。我们再次用记号 $T(\xi, \xi')$ 表示通过对势函数 V_2（速度为 0）对应的线性化微分系统 (5.19) 在时刻 ξ 与 ξ' 之间积分得到的演化算子族。对于每个时刻 ξ，令 $T^*(\xi, \xi_2)$ 表示 $T(\xi, \xi_2)$ 的伴随算子，并令

$$(\phi(\xi), \psi(\xi)) = T^*(\xi, \xi_2) \cdot (\phi_2, \psi_2)\,.$$

使用与引理 5.7 和 6.3中的相同计算，由包含关系 (7.2) 和空交集 (7.13) 可得，不等式 (7.12) 为

$$\int_0^{\xi_2} \nabla W(u_2(\xi)) \cdot \psi(\xi)\, d\xi \neq 0\,. \tag{7.14}$$

注意，根据不等式 (7.1)，存在一个（非空）开区间 I，它包含于 $(0, \xi_2)$，并且对于每个 ξ，当 ξ 属于 I 时，$u_2(\xi) \notin B_{\mathbb{R}^d}(e(V_2)\ r_{\mathrm{exit}})$。根据引理 3.2，函数 $\xi \mapsto \dot{u}_2(\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不为零，因此更不用说在 I 上也不为零。与第 5.3.5 节和第 6.2.3 节中一样，构造扰动 W 时必须考虑三种情形。

情形 1。 存在一个时刻 $\xi^\dagger$，属于 I，使得 $\psi(\xi^\dagger)$ 与 $\dot{u}_2(\xi^\dagger)$ 不共线。

随后可以采用与引理证明的第一种情形中相同的构造 5.7 （或引理证明的第一种情形中的构造6.3）。

情形 2。 对于每个 $\xi \in I$，$\psi(\xi) = \alpha(\xi)\dot{u}_2(\xi)$，其中 $\alpha(\cdot)$ 非常数。

同样，随后可以采用与引理证明的第二种情形中相同的构造5.7 （或引理证明的第一种情形中的构造 6.3）。

情形 3。 对于每个 $\xi \in (\xi_-, \xi_{\mathrm{turn}})$，存在某个实（常数）量 α，使得 $\psi(\xi) = \alpha\dot{u}_2(\xi)$。

与小节5.3.5 和 6.2.3中一样，必须通过特定论证排除第三种情形。由 ϕ 和 ψ （其中c_0 等于零）满足的伴随线性化系统（5.23）可知，对于每个 ξ 属于 I的，

$$\phi(\xi) = -\dot{\psi}(\xi) = -\alpha\ddot{u}_2(\xi) = -\alpha\nabla V_2(u_2(\xi))\,. \tag{7.15}$$

此外，由于假设 $(\phi_2,\ \psi_2)$ 属于 $T_{U_2\,(\xi_2)}\,\mathcal{N}$，因此对于所有属于 $\mathbb{R}$ 的 ξ，$(\phi(\xi)\ \psi(\xi))$ 都属于 $T_{U_2\,(\xi)}\ H_{V_2}^{-1}\Big(H_{V_2}\big(E(V_2)\big)\Big)$（能量的水平集在流作用下保持不变）。水平集$\mathcal{N}$ 的切空间的正交空间是一条由哈密顿量的梯度 $\nabla H_{V_2}(U_2) = (-\nabla V_2(u_2(\xi))\ \dot{u}_2(\xi))$ 张成的直线。因此，条件 $(\phi_2,\ \psi_2) \in T_{U_2\,(\xi_2)}\,\mathcal{N}$ 可写为

$$(\phi_2, \psi_2) \perp (-\nabla V_2(u_2(\xi)), \dot{u}_2(\xi))\,, \quad \text{that is} \quad \alpha(\nabla V_2(u_2)^2 + \dot{u}_2^2) = 0\,.$$

这意味着 $\alpha = 0$ 因此$(\phi,\ \psi) \equiv (0,\ 0)$，这与引理7.5的假设矛盾。

总之，第三种情形不可能发生；在另外两种情形中，可以进行与引理5.7 和6.3的证明中相同的构造，从而得到一个扰动W，满足空交集条件（7.13）和不等式（7.14）（因此也满足不等式（7.12））。

□

7.4.4 结论

命题 7.3 的证明。要完成命题 7.3 的证明，只需证明¯集合 $\nu_{\pitchfork}$asym stand pulses(ξ, ε) 在 ν 中稠密。由引理 7.5 可知，对于式（7.11）中定义的函数 Φ，定理 4.2 的假设 1 和 2 均成立。该定理的结论保证存在 Λ_1 的一个泛型子集 Λ_{gen}，使得对于 Λ_{gen} 中的每个 V，函数 $\Phi(\cdot\ V)$ 与 W 横截。根据命题 7.4，$\nu_{\pitchfork}$asym stand pulses(ξ, ε) 是 Λ_{gen} 的超集；特别地，存在 $\nu_{\pitchfork\,\text{asym}}$stand pulses$(\xi, \varepsilon)$ 中的势函数¯，使其与 V_1 任意接近。由于 V_1 是 ν 中任意一个势函数，这就证明了所需的稠密性。命题 7.3 得证。

□

如第7.2小节末尾所示，命题7.3 蕴含命题7.2，而命题7.2又蕴含命题 7.1。

7.5 对称驻定脉冲的横截性?

如上所述，上文给出的非对称驻定脉冲一般横截性的证明并不直接适用于对称驻定脉冲。事实上，对于一个对称驻波脉冲$\xi \mapsto u(\xi)$，假设其转向时刻为0，与（5.22）或（7.14）相对应的条件为

$$\int_{-\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \nabla W\big(u(\xi)\big) \cdot \psi(\xi)\, d\xi \neq 0 \quad \text{or equivalently} \quad \int_{-\bar{\xi}}^{0} \nabla W\big(u(\xi)\big) \cdot \big(\psi(\xi) + \psi(-\xi)\big)\, d\xi \neq 0\,,$$

¯其中，ξ 是一个足够大的正量。如果函数 $\xi \mapsto \psi(\xi)$ 是奇函数，那么该条件无法满足；并且，由于伴随线性方程的对称性

$$\ddot{\psi}(\xi) = D^2 V\big(u(\xi)\big) \cdot \psi(\xi)\,,$$

当且仅当 $\psi(0)$ 消失时，这种情况才会发生。因此，这种对应于关于势的微扰的一阶导数退化的情形不能被

排除。或许可以研究二阶导数，但相关计算超出了本文的范围。因此，本文并未确立对称驻定脉冲的一般横截性；据我们所知，这仍是一个开放问题。

8 一般位置不存在静止前沿

取定一个正量 R。由于哈密顿不变性，排除静止前沿的存在是很简单的。

命题8.1。 存在 $V_{\text{quad-}R}$ 的一个稠密开子集，使得对于该子集中的每个势函数 V，都不存在对应于该势函数的静止前沿。

证明。 考虑稠密开子集 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$，它是 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 的子集，包含满足莫尔斯性质的 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 中的函数（该记号已在（5.2）中引入），并令 V 表示 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$ 中的一个势函数。此类势函数的临界点数量是有限的；对 V 在每个临界点附近施加任意小的局部化扰动后，可以假设每个临界点都属于 V 的某个水平集，且该水平集中不含其他临界点。这一性质在 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$ 中是开且稠密的，因而在 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 中也是如此；并且，由于哈密顿量 H_V 在（1.4）中定义，沿着静止前沿的剖面保持不变，因此它阻止了静止前沿的存在。命题 8.1得证。

□

9 主要结果的证明

命题 5.1、6.1、7.1 和8.1 表明，定理 1.7中所考虑性质的一般性仅在空间 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 内成立，即势函数在某个半径 R之外为二次函数的势函数空间。在这个空间中工作较为容易，因为它是一个第二可数的巴拿赫空间，且其势函数所对应的流都是整体的。本节将调整论证，以便在所有势函数构成的空间 $\mathcal{V}_{\text{full}} = \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 中证明相同性质的一般性；该空间赋有扩展拓扑（见第 1.4 小节）。

9.1 定理 1 的结论1.7 的证明

回顾在（*5.1*）中引入的记号 F_V，对于每个正量 R，考虑集合

$$\mathcal{F}_{V,R} = \left\{ (c,u) \in \mathcal{F}_V : \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |u(\xi)| \le R \right\} \tag{9.1}$$

行波前沿的$\mathcal{F}_V$（侵入 V）且剖面包含于 $B_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{0}, R)$。如下文所示，以下命题得出定理1 的结论1.7。

命题 9.1. 对于每个正量 R，存在 $V_{\text{full-⫛-}\mathcal{F}\text{-}R}$ 的泛型子集 V_{full}，使得对于该子集中的每个势函数 V，V 都是莫尔斯函数，且 $\boldsymbol{F}_{V,\,R}$ 中的每个行波前沿 $(c,\ u)$ 都是横截的。

命题 *9.1* 推出定理 *1* 的结论 *1.7*的证明。集合

$$\bigcap_{R\in\mathbb{N}^*} \mathcal{V}_{\text{full-⫛-}\mathcal{F}\text{-}R}\,,$$

是 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 中泛型子集的可数交，因此仍是 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 中的泛型子集。对于该集合中的每个势函数 V，V都是莫尔斯函数，并且只要 $\mathcal{F}_V$ 中的每个行波前沿都属于 $\mathcal{F}_{V,\,R}$ 足够大，便根据命题 $\mathcal{V}_{\text{full-⫛-}\mathcal{F}\text{-}R}$ 所述的集合性质 9.1，横截。定理 1的结论 1.7得证。

□

因此，第 9.1 小节的目的是证明命题 9.1。在此之前，先作几点准备说明。令 R 为一个正量。命题 5.1 表明，存在 $\mathrm{V}^{\text{quad-}R\text{-⫛-}\mathcal{F}}$ 的一个泛型子集 $\mathrm{V}^{\text{quad-}R}$，使得对于该子集中的每个势函数 V_{quad}，$\mathrm{F}^{V_{\text{quad}}}$ 中的所有行波前沿都是横截的。然而，由于 $|u|=R$处的约束，这些势函数在 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ 中所有截断的 $\mathbb{R}^d$ 延拓是无处稠密的。我们的思路是留出一些余量：考虑 $\mathrm{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 的泛型子集 $\mathrm{V}^{\text{quad-}(R+1)\text{-⫛-}}\mathrm{F}$，并使用定义 (4.6) 中引入的记号，考虑集合

$$\operatorname{res}_{R,\infty}^{-1}\circ\operatorname{res}_{R,(R+1)}(\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)\text{-⫛-}\mathcal{F}})\,. \tag{9.2}$$

对于此集合中的每个势函数 V_{full}，$\mathcal{F}_{V_{\text{full}},R}$ 中的所有行波前沿都是横截的；事实上，这一性质仅取决于 V_{full} 在球 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ 内的取值，其中 V_{full}必须恒等于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)\text{-⫛-}\mathcal{F}}$ 中的某个势函数 V_{quad}。人们很容易想要将推论4.6 推广到泛型子集，从而得到集合（9.2）的一般性。遗憾的是，该推论明确适用于开稠密子集，而非泛型子集。沿着这一思路进一步考察，注意到由于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)\text{-⫛-}\mathcal{F}}$是 $\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$的一个泛型子集，因此存在一个可数族 $(\mathcal{O}_N)_{N\in\mathbb{N}}$，其成员均为$\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 的稠密开子集，使得

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_N \subset \mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)\text{-⫛-}\mathcal{F}}\,, \tag{9.3}$$

从而得到

$$\operatorname{res}_{R,\infty}^{-1}\circ\operatorname{res}_{R,(R+1)}\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_N\Big) \subset \operatorname{res}_{R,\infty}^{-1}\circ\operatorname{res}_{R,(R+1)}(\mathcal{V}_{\text{quad-}R+1\text{-⫛-}\mathcal{F}})\,.$$

根据函数的一般性质，有如下包含关系成立：

$$\operatorname{res}_{R,(R+1)}\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_N\Big) \subset \bigcap_{N\in\mathbb{N}}\operatorname{res}_{R,(R+1)}(\mathcal{O}_N)\,. \tag{9.4}$$

如果该包含关系是等式，那么根据函数的一般性质，下面的等式也将成立：

$$\mathrm{res}_{R,\infty}^{-1}\circ\mathrm{res}_{R,(R+1)}\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_N\Big)=\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\mathrm{res}_{R,\infty}^{-1}\circ\mathrm{res}_{R,(R+1)}(\mathcal{O}_N)\,,$$

并且，由于根据推论4.6 该等式右侧是 $\mathcal{V}_{\mathrm{full}}$ 的稠密开子集的可数交，预期的结论——集合（9.2）在 $\mathcal{V}_{\mathrm{full}}$ 中是泛型的——便可得出。遗憾的是，命题 5.1 并未说明集合 $\mathcal{O}_N$ 的情况，因此无法排除（9.4）中的严格包含。不过，我们来作出以下关键观察，它将阐明证明的后续部分：若性质“给定的势函数 V 属于 $\mathcal{O}_N$”仅取决于 V 在球$B_{\mathbb{R}^d}(0,\ R)$内的取值，则包含关系（9.4）实际上是等式。

因此，证明中的主要步骤是构造 $\mathcal{O}_N$，使其成为 $\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 的稠密子集，并满足：

1. 对于每个属于 $\bigcap_n \mathcal{O}_N$的势函数 V_{quad}，$\mathcal{F}_V$ 中的每个行波前R 都是横截的

2. 并且，性质“给定的势函数 V 属于 $\mathcal{O}_N$”仅取决于 V 在球 $B_{\mathbb{R}^d}(0,\ R)$ 内的取值。

命题 9.1 的证明。与上文一样，令 R 表示一个正量。令 V_0 表示 $\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 中的一个势函数，令 $e_-,0$ 和 $e_+,0$ 分别表示 V_0 的一个非退化临界点和一个非退化极小点，并令 c_0 表示一个正速度。对于这些对象，考虑命题 5.2 所给出的 V_0 在 $\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 中的邻域 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$，以及 c_0 在 $(0,+\infty)$ 中的邻域 $C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$。回想一下，这些邻域正是第 5.3 小节中定义函数 $\hat{w}^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},c,V}$、集合 M 和 W，以及函数 Φ^{u}、Φ^{s} 和 Φ 时所使用的邻域；对于每个 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 中的 V，以及每个 $C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 中的 c，这些定义均适用。将邻域 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 替换为其内部后，我们可以假设它在 $\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 中是开集。同样，我们可以假设 $C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是紧致的。令 N 表示一个非负整数，并考虑集合

$$\mathcal{M}_N=\mathcal{B}^{\mathrm{u}}\times\mathcal{B}^{\mathrm{s}}\times(-\infty,N]\times\mathcal{C}_{V_0,e_{-,0},e_{+,0},c_0}=\big\{(b^{\mathrm{u}},b^{\mathrm{s}},\xi,c)\in\mathcal{M}:\xi\le N\big\}\,. \tag{9.5}$$

与第 5.3 小节中一样，定义 $\mathcal{N}$ 为 $(\mathbb{R}^{2d})^2$，并考虑集合 (9.6
)

$$\mathcal{O}_{V_0,e_{-,0},e_{+,0},c_0,N}=\Big\{V\in\nu_{V_0,e_{-,0},e_{+,0},c_0}:\Phi(\mathcal{M}_N,V)\text{ is transverse to }\mathcal{W}\text{ in }\mathcal{N}\Big\}\,.$$

如命题 5.5 所示，集合 $O_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,N}$ 由势函数V 构成，其中 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 满足：对于该势函数，任何以速度c 在 $C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 中传播、连接 $e_-(V)$ 与 $e_+(V)$ 的前沿剖面 $\xi\mapsto u(\xi)$，若在不超过 N 的时间内连接$\partial W^{\mathrm{u}}_{\mathrm{loc},c,V}(E_-(V))$ 与 $\partial W^{\mathrm{s}}_{\mathrm{loc},c,V}(E_+(V))$，则都是横截的。

引理 9.2。 集合 $O_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,N}$ 是 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 的稠密开子集。

引理的证明 *9.2*。 稠密性直接源于命题 5.2，该命题指出，相对于 V in $\nu_{V_0,\ e_-,\ 0,\ e_+,\ 0,\ c_0}$，映射

$m \mapsto \Phi(m, V)$ 与 W 横截。为了证明开性，我们采用第7.3小节中的论证。考虑一个势函数序列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中各势函数属于 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$，且收敛到一个势函数$V_\infty$，该势函数属于 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$；并且对于每个 n in $\mathbb{N}$，都存在 $m_n = (b_n^{\mathrm{u}}, b_n^{\mathrm{s}}, \xi_n, c_n)$ in M_N，使得集合 $\Phi(\mathsf{M}_N, V_n)$ 在 $\Phi(m_n, V_n)$ 处不与 W 横截。注意，根据空交集 (5.5)，ξ_n 必须为正。因此，由 $\mathsf{B}^{\mathrm{u}} \times \mathsf{B}^{\mathrm{s}} \times [0, N] \times \mathsf{C}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 的紧性，我们可以假设，当n趋于 $+\infty$时，m_n收敛到 M_N 中的一个点 m_∞。于是，根据连续性，像 $\Phi(\mathsf{M}_N, V_\infty)$ 在 $\Phi(m_\infty, V_\infty)$ 处不与 W 横截。这证明 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0} \setminus\setminus \mathsf{O}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,N}$ 在 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 中是闭集，从而得到所需结论。

□

命题 9.1 证明的续篇。我们再作出一项假设：势函数 V_0 是莫尔斯函数。于是，V_0 的临界点集合有限，并且在 V_0的邻域 $\nu_{\mathrm{robust}}(V_0)$ 内随 V 光滑变化。将上文所有可能的配对 $(e_-, 0, e_+, 0)$ 中的集合 $\nu_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$和 $\mathsf{C}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$，以及 $\mathsf{O}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,N}$分别取交集，可得到 V_0的一个开邻域 ν_{V_0,c_0}、c_0 的一个紧邻域 C_{V_0,c_0}，以及 ν_{V_0,c_0} 的一个开稠密子集 $\mathsf{O}_{V_0,c_0,N}$；使得对所有 $V \in \mathsf{O}_{V_0,c_0,N}$，任何以速度 $c \in \mathsf{C}_{V_0,c_0}$传播、并在“时间”$N$内连接 $\Sigma_{\mathrm{crit}}(V) \times \Sigma_{\min}(V)$ 中两点 (e_-, e_+) 的局部（非）稳定流形的前沿，都是横截的。

将集合 $\mathrm{int}(A)$ 的内部记作 A 并采用定义（4.6）中的记号，下面引入集合

$$\tilde{\nu}_{V_0,c_0} = \mathrm{res}_{R,\infty}^{-1} \circ \mathrm{res}_{R,(R+1)}(\nu_{V_0,c_0}), \tag{9.7}$$

$$\text{and} \quad \tilde{\mathcal{O}}_{V_0,c_0,N} = \mathrm{res}_{R,\infty}^{-1} \circ \mathrm{res}_{R,(R+1)}(\mathcal{O}_{V_0,c_0,N}), \tag{9.8}$$

$$\text{and} \quad \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{ext}}_{V_0,c_0,N} = \tilde{\mathcal{O}}_{V_0,c_0,N} \sqcup \mathrm{int}\big(\mathcal{V}_{\mathrm{full}} \setminus \tilde{\nu}_{V_0,c_0}\big). \tag{9.9}$$

˜ ˜换言之，$\mathsf{V}_{\mathrm{full}}$的势函数 V属于 $\tilde{\nu}_{V_0,c_0}$（属于 $\mathsf{O}_{V_0,c_0,N}$）当且仅当它在球 $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ 内与一个在 $R+1$之外为二次型且属于 ν_{V_0,c_0}（属于 $\mathsf{O}_{V_0,c_0,N}$）的势函数 V_{quad} 相同。最后一个集合 ˜$\mathsf{O}^{\mathrm{ext}}_{V_0,c_0,N}$是开稠密子集 ˜$\mathsf{O}_{V_0,c_0,N}$在$\tilde{\nu}_{V_0,c_0}$中的延拓，它是通过添加所有位于 $\tilde{\nu}_{V_0,c_0}$（其闭包）之外的势函数得到的。

引理 9.3。 集合 ˜$\mathcal{O}^{\mathrm{ext}}_{V_0,c_0,N}$ 是 $\mathcal{V}_{\mathrm{full}}$的稠密开子集。

引理 *9.3* 的证明。 根据推论 4.6，集合 $\tilde{\nu}_{V_0,c_0}$ 是$\mathcal{V}_{\mathrm{full}}$˜的开子集，而集合 $\mathcal{O}_{V_0,c_0,N}$ 是 $\tilde{\nu}_{V_0,c_0}$ 的稠密开子集。因此，根据其定义（9.9），集合 ˜$\mathcal{O}^{\mathrm{ext}}_{V_0,c_0,N}$ 是$\mathcal{V}_{\mathrm{full}}$的稠密开子集。

□

命题*9.1*的证明续篇。 由于$\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)}$ 是一个可分空间，因此它是第二可数的。因此，$\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)\text{-Morse}} \times (0, +\infty)$也是第二可数的，并且可以用可数个乘积 $\nu_{V_0,c_0} \times \mathcal{C}_{V_0,c_0}$覆盖。用符号表示，存在一个由$\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)\text{-Morse}} \times (0, +\infty)$中的元素组成的可数族 $(V_{0,i}, c_{0,i})_{i\in\mathbb{N}}$，使得

$$\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)\text{-Morse}} \times (0, +\infty) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \nu_{V_{0,i},c_{0,i}} \times \mathcal{C}_{V_{0,i},c_{0,i}}. \tag{9.10}$$

这里要注意，先处理$\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$十分重要，因为它是第二可数的；而整个空间$\mathcal{V}_{\text{full}}$不是第二可数的。我们来考虑集合

$$\mathcal{V}_{\text{full-}\pitchfork\text{-}\mathcal{F}\text{-}R} = \mathcal{V}_{\text{full-Morse}} \cap \left(\bigcap_{(i,N)\in\mathbb{N}^2} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{ext}}_{V_{0,i},\, c_{0,i},\, N} \right), \tag{9.11}$$

其中 $\mathcal{V}_{\text{full-Morse}}$ 是$\mathcal{V}_{\text{full}}$ 中由莫尔斯函数构成的势函数集合。

引理 9.4. 对于集合 $\mathcal{V}_{\text{full-}\pitchfork\text{-}\mathcal{F}\text{-}R}$中的每个势函数 V，$F_{\tilde{V},R}$ 中的每个行波前(u, c) 都是横截的。

引理 9.4 的证明。设 V 是集合 $\mathcal{V}_{\text{full-}\pitchfork\text{-}\mathcal{F}\text{-}R}$ 中的一个势函数，且 (c, u) 是 $F_{\tilde{V},R}$中的一个行波前。根据引理 4.5，映射 $\text{res}_{R,(R+1)}$ 是满射，因此存在一个势函数 $V \in \mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$，使得 V 属于 $\text{res}_R^{-1},_{(R+1)} \circ \text{res}_{R,\infty}(\tilde{V})$（换言之，$V$在 $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ 上与 $\tilde{V}$ 重合）。由于 $\tilde{V}$是莫尔斯函数，V 在 $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ 中的临界点是退化的；对 V施加一个位于 $B_{\mathbb{R}^d}(0, R+1) \setminus B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ 内的小扰动后，我们可以假设它在该集合中的临界点也都是非退化的，因此 V 实际上也是一个莫尔斯函数。由于 V 与 V 在 $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ 内重合，且行波前 u 包含在这个球内，它也是 V 的一个行波前；因此，只需证明 (u, c) 是 V的一个横截行波前。

根据等式（9.10），存在一个整数 i，使得 V 属于 $\nu_{V_{0,i},c_{0,i}}$，且 c 属于 $C_{V_{0,i},c_{0,i}}$。于是，由于 V和 V在 $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ 上重合，V属于$\tilde{\nu}_{V_{0,i},c_{0,i}}$（定义（9.7））。此外，由定义（9.11）可知，对每个整数N，$\tilde{V}$属于 $\tilde{O}^{\text{ext}}_{V_{0,i},c_{0,i},N}$；又由于 V也属于$\tilde{\nu}_{V_{0,i},c_{0,i}}$，由定义（9.9）可知，$V$实际上属于 $O_{V_{0,i},c_{0,i},N}$。

我们用 e_- 和 e_+ 表示 V（以及 V）的临界点；当ξ 趋于 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时，$u(\xi)$ 分别趋近于这些临界点。根据$V_{0,i}$的邻域$\nu_{V_{0,i},c_{0,i}}$ 的定义，存在一个（唯一的）临界点 $e_-,_{0,i}$ 以及 $V_{0,i}$的一个（唯一的）极小点 $e_+,_{0,i}$，使得若 $W \mapsto e_-,_i(W)$ 和 $W \mapsto e_+,_i(W)$ 表示当 W 属于 $\nu_{\text{robust}}(V_{0,i})$ 时分别“跟随”这些临界点的函数，那么 e_- 等于 $e_-,_i(V)$，且 e_+等于 $e_+,_i(V)$。沿用记号 M 和 Φ，表示按照第 5.3 小节中所定义的、分别对应于 $V_{0,i}$ 的邻域 $\nu_{V_{0,i},e_-,0,i},e_+,0,i,c_{0,i}$ 以及对应于$c_{0,i}$的邻域 $C_{V_{0,i},e_-,0,i},e_+,0,i,c_{0,i}$ 的对象。因此，行波前(c, u)对应于 $\Phi(M\ V)$ 与 W 的一个交集，该交集发生在 M 中的某个点 m，也即对应于某个（正的）时间 ξ；这段时间是该行波前的剖面从 e_- 的局部不稳定流形边界到 e_+的局部稳定流形边界所需的时间。

令 N 表示一个不小于 ξ 的整数。由于 V 属于 $O_{V_{0,i},c_{0,i},N}$，根据定义 (9.8)，必定存在一个势函数 V_N，属于 $\nu_{V_{0,i},c_{0,i}}$，在球 $B_{\mathbb{R}^d}(0, R)$ 上恒等于 V（以及 V），并且属于 $O_{V_{0,i},c_{0,i},N}$。同样，(c, u) 是 V_N 的一个行波前，而此前该前沿与 $\Phi(M\ V_N)$ 和 W 的交集之间建立的对应关系仍然成立。由于 V_N 属于 $O_{V_{0,i},c_{0,i},N}$，上述交集必为横截的，因此 V_N 的前沿 (u, c) 具有横截性。

˜同样，此处考虑的三个势函数 V、 V 和 V_N 在行波前 $(u,\ c)$ 的剖面上取值相同˜。因此，该前沿对于 V 也具有横截性。 □

命题 *9.1* 的证明结束。 集合 $\mathcal{V}_{\text{full-⋔-}\mathcal{F}\text{-}R}$ 在 (9.11) 中定义，是 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 的可数个稠密开子集的交，因此是 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 的一个泛型子集。根据引理9.4，命题 9.1 得证。 □

9.2 定理 1.7 的结论 2 和 3 的证明

定理 1.7 的结论 2 和 3 的证明与上一小节给出的结论1 的证明类似。因此，这里只重述核心论证。回顾在 ($\mathcal{P}_V$ 6.1) 中引入的记号，对于每个正量 R，考虑集合

$$\mathcal{P}_{V,R} = \left\{ u \in \mathcal{P}_V : \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |u(\xi)| \le R \right\}.$$

如上一小节对命题 9.1和定理 1的结论 1.7 所示，以下命题给出了定理1.7 的结论 2和 3。

命题 9.5。 对于任意正量 R，存在 $V_{\text{full-⋔-}\mathcal{P}\text{-}R}$ 的一个泛型子集 $V_{\text{full-⋔-}\mathcal{P}\text{-}R}$，包含于 $V_{\text{full-Morse}}$ 中，使得对于 $V_{\text{full-⋔-}\mathcal{P}\text{-}R}$ 中的每个势函数 V，每个属于 $P_{V,\ R}$ 的驻定脉冲 u，若该驻定脉冲对称，则为初等的；若该驻定脉冲非对称，则为横截的。

证明。 令 R 表示一个正量，令 V_0 表示 $\forall\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 中的一个莫尔斯势函数。令 e_0 表示 V_0 的一个非退化临界点，并考虑$\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 中包含于命题6.2 和7.2所给出的两个邻域交集中的 V_0 的一个开邻域 $\nu_{V_0,\ e_0}$。对于 $\mathbb{N}^*$ 中的每个 N 以及 $\nu_{V_0,\ e_0}$ 中的每个 V，考虑 $\nu_{V_0,\ e_0}$ 的子集 $\mathcal{O}_{V_0,\ e_0,\ N}$，该子集定义为满足以下两个条件的势函数 V 中属于 $\nu_{V_0,\ e_0}$ 的集合：

1. V的每个对称驻波脉冲，若在不超过 N的时间内将 $\partial W_{\text{uloc }V}(E(V))$ 连接到对称子空间$\mathcal{S}^{\text{sym}}$，则都是初等的；2. V的每个非对称驻定脉冲，若在不超过 N的时间内将 $\partial W_{\text{uloc }V}(E(V))$ 连接到$\partial W_{\text{sloc }V}(E(V))$，且始终与$\mathcal{S}^{\text{sym}}$保持不小于 $1/N$ 的距离，则都是横截的。

与引理9.2 证明中的论证相同，可得集合$\mathcal{O}_{V_0,\ e_0,\ N}$ 是$\nu_{V_0,\ e_0}$的稠密开子集：其稠密性由命题6.2 和7.2 推出；至于开性，关键的新要素是这一条件：每个非对称驻定脉冲与 $1/N$ 的$\mathcal{S}^{\text{sym}}$距离至少为$\mathcal{S}^{\text{sym}}$。事实上，（一般而言）证明中考虑的非对称驻定脉冲序列可能趋近于一个对称驻波脉冲，而即使该脉冲是初等的，也可能是非横截的。远离^{sym} 即可排除这种可能性。

如第54页所述，考虑前述集合在 V_0的所有临界点上的交集：

$$\nu_{V_0} = \bigcap_{e_0 \in \Sigma_{\mathrm{crit}}(V_0)} \nu_{V_0,e_0} \quad \text{and} \quad \mathcal{O}_{V_0,N} = \bigcap_{e_0 \in \Sigma_{\mathrm{crit}}(V_0)} \mathcal{O}_{V_0,e_0,N} \,.$$

集合 ν_{V_0} 仍然是$\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)}$ 中的集合$\mathcal{O}_{V_0,N}$ 仍然是ν_{V_0}。 与定义（9.7）至（9.9）中一样，这些集合可以按如下方式扩展：

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{V_0} &= \mathrm{res}_{R,\infty}^{-1} \circ \mathrm{res}_{R,(R+1)}(\nu_{V_0}) \,, \\ \tilde{\mathcal{O}}_{V_0,N} &= \mathrm{res}_{R,\infty}^{-1} \circ \mathrm{res}_{R,(R+1)}(\mathcal{O}_{V_0,N}) \,, \\ \text{and} \quad \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{ext}}_{V_0,N} &= \tilde{\mathcal{O}}_{V_0,N} \sqcup \mathrm{int}\big(\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)} \setminus \tilde{\nu}_{V_0}\big) \,. \end{aligned}$$

证明的最后部分沿用小节9.1中的相同论证。集合$\mathcal{V}^{\text{quad-}(R+1)\text{-Morse}}$ 可由可数个子集 $\tilde{\nu}_{V_0,i}$ 覆盖，而集合

$$\mathcal{V}_{\text{full-}\pitchfork\text{-}\mathcal{P}\text{-}R} = \mathcal{V}_{\text{full-Morse}} \cap \left(\bigcap_{(i,N)\in\mathbb{N}^2} \tilde{\mathcal{O}}^{\mathrm{ext}}_{V_{0,i},N} \right)$$

是命题9.5中所述存在性的泛型子集。 □

9.3 定理1.7的结论4的证明

考虑势函数集合$\mathcal{O}_R$ ，其中的势函数 V 属于$\mathcal{V}_{\text{full}}$ ，并满足V 在 $B_{\mathbb{R}^d}(0,R)$ 中的所有临界点均非退化且取值互不相同。命题 8.1 中的相同论证表明，集合 $\mathcal{O}_R$ 是$\mathcal{V}_{\text{full}}$的开稠密子集，因此交集 $\cap_{R\in\mathbb{N}^*}\mathcal{O}_R$ 在$\mathcal{V}_{\text{full}}$中是泛型的。由于由静止前沿连接的临界点必须属于势函数的同一水平集，因此对于该交集中的势函数，不存在静止前沿。

9.4 结论1至4 的证明（推论1.1）

设 V 是定理1.7所给出的泛型子集中的一个势函数，设（c， u）是$\mathcal{F}_V$中的一个行波前，并设 e_- 和 e_+ 分别表示由该行波前连接的 V 的临界点和极小点。根据表2.1，

$$\begin{aligned} &\dim\left(\bigcup_{c'>0} \{c'\} \times W^{\mathrm{u}}_{c',V}(E_-) \right) = d - m(e_-) + 1 \,, \\ \text{and} \quad &\dim\left(\bigcup_{c'>0} \{c'\} \times W^{\mathrm{s}}_{c',V}(E_+) \right) = d + 1 \,. \end{aligned}$$

这两个流形的交集至少包含曲线 $\{c\} \times U(\mathbb{R})$，该曲线对应于行波前。因此，这两个流形的切空间之和的维数不大于以下量

$$(d - m(e_-) + 1) + (d+1) - 1 = 2d + 1 \ - m(e_-) \,.$$

由于根据定义 1.3 和定理 1.7，这两个流形在 $\mathbb{R}^{2d+1}$ 中沿集合 $\{c\} \times U(\mathbb{R})$ 的交集是横截的，因此该量不小于 $2d+1$，所以莫尔斯指标 $m(e_-)$ 必须为零。这证明了推论 1 的结论 1.1。

现在假设 u 是一个静止脉冲的剖面，并令 e 表示 V 的临界点，使得该脉冲从 e 连接回自身。根据表2.1，

$$\dim\left(W_V^{\mathrm{u}}(E)\right) = d - m(e) \quad \text{and} \quad \dim\left(W_V^{\mathrm{s}}(E)\right) = d - m(e)\,.$$

根据定义 1.6 和定理 1.7，若 u 对称，则 $W_V^{\mathrm{u}}(E)$与 d–维流形 $\mathsf{S}^{\mathrm{sym}}$ 的交集在 $\mathbb{R}^{2d}$处的点 $U(\xi_{\mathrm{turn}})$是横截的，且这只有在 $m(e) = 0$时才可能发生。若 u 非对称，则 $W\mathsf{u}_V(E)$与 $W\mathsf{s}_V(E)$在 $H_V^{-1}(V(E))$处沿轨道 $U(\mathbb{R})$横截相交。 $W_V^{\mathrm{u}}(E)$与 $W_V^{\mathrm{s}}(E)$的交集至少是一维的，而$H_V^{-1}(V(E))$ 的维数等于 $2d-1$。同样，只有在 $m(e) = 0$时才可能发生横截性。这证明了推论1.1的结论2。

在上述所有情形中，对维数的计数以及横截性表明，稳定流形与不稳定流形的交集缩减为可能的最小集合，即：由轨道 U 所描绘的一维曲线（对应行波前或非对称脉冲），以及由对称脉冲的转向点定义的单点 $\{U(\xi_{\mathrm{turn}})\}$。根据不稳定流形的局部紧性，这意味着给定类别的轨道彼此孤立（即使一族非对称驻定脉冲可能聚集到一个非退化的——在这种情况下是非横截的——对称脉冲上）。特别地，这类轨道只有可数个。推论3 的结论 1.1 得证。

最后，关于行波前和驻定脉冲稳健性的结论 4 （即它们在势函数的小扰动下仍然存在）由其横截性推出（也就是说，由上述交集的横截性推出）。

10 双稳态行波前沿及无穷远处稳定的驻定脉冲剖面的普遍渐近行为

本节的目标是证明定理1.8 (并因此也证明推论5 中的结论1.1)。

10.1 剖面的渐近行为

令 V_0 表示 $\mathsf{V}_{\mathrm{full}}$ 中的一个势函数，令 e_0 表示 V 的一个非退化极小点，并令 c 表示一个非负量（速度）。如第 2.1 小节所述，令 $(u_1, \ldots, u_d)$ 表示由 $D^2V(e_0)$ 的特征向量构成的 $\mathbb{R}^d$ 的标准正交基，并令 $\mu_1, \ldots, \mu_d$ 表示相应的（正）特征值，其中 $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_d$。定理 1.8 的结论 1 中“ $D^2V(e_0)$ 的最小特征值是单重的”这一说法，只意味着 μ_1 小于 μ_2 （因而也小于 $D^2V(e_0)$ 的所有其他特征值）。令

我们作出这一假设。采用第 2.1 小节的记号可知，对于每个 j属于 $\{2,\dots,d\}$，

$$\lambda_{j,-} < \lambda_{1,-} < 0 < \lambda_{1,+} < \lambda_{j,+}\,;$$

换言之，在 $DF_{c,V}(E_0)$ 的所有特征值（均为实数）中，$\lambda_{1,-}$ 和 $\lambda_{1,+}$ 是最接近 0 的两个（这里，$E_0 = (e_0, 0_{\mathbb{R}^d})$ 是流 $S_{c,V}$ 中与 e_0 对应的平衡点）。如果微分系统 (1.7) 的一个解 $\xi \mapsto u(\xi)$ 在 ξ 趋于 $-\infty$ $(+\infty)$ 时趋于 e_0，则以下两种可能情况之一会发生（更精确的表述见下文命题 10.1）：

1. 存在一个实数量 K，使得

$$u(\xi) - e_0 = Ke^{\lambda_{1,+}\xi}u_1 + o_{\xi\to-\infty}(e^{\lambda_{1,+}\xi})$$
$$(\text{and } u(\xi) - e_0 = Ke^{\lambda_{1,-}\xi}u_1 + o_{\xi\to+\infty}(e^{\lambda_{1,-}\xi})\,,\ \text{respectively});$$

2. $u(\xi) - e_0 = o_{\xi\to-\infty}(e^{\lambda_{1,+}\xi})$ (and $u(\xi) - e_0 = o_{\xi\to+\infty}(e^{\lambda_{1,-}\xi})$, respectively).

“u（ξ）以切向方式趋于其极限（当 $\pm\infty$ 时），且切向于该点 D^2V 的最小特征值所对应的特征子空间”这些词语，在结论 5 （推论 1.1的结论 2 和定理 1.8）中，意指上述情况 1。如图 10.1 所示（另见图 10.2），平衡点以“尽可能慢的速率”趋近（上述情况 1 ），是微分系统解的一项一般性特征。因此，本节的主要目标是正式证明，对于抛物型系统（1.1），双稳态行波前和无穷远处稳定的驻定脉冲而言，这一特征确实是一般性的（相对于势函数 V）。

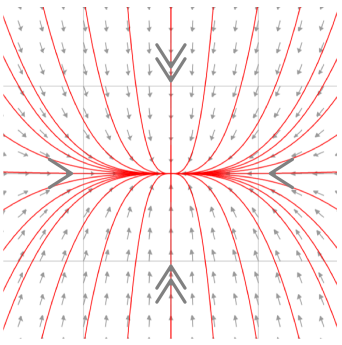

图 10.1：二维向量场的吸引结点。用第10.2小节的术语来说，竖直轴是该平衡点的“强稳定子空间”。

10.2 当速度 c 为正时的局部强稳定流形与不稳定流形

沿用上一小节的记号与假设，并假设 c 为正。本小节旨在给出命题 2.2 的一个变体

，专门讨论“强”局部稳定与不稳定流形，它们以“快速”收敛为特征（上述情形 2 ）。关于参考文献，适用与小节2.2 中相同的说明。

沿用第 2.1 小节的记号，令

$$\mathcal{E}^{\mathrm{su}}(E_0) = \mathrm{span}\big(\{U_{2,+}, \dots, U_{d,+}\}\big) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^{\mathrm{ss}}(E_0) = \mathrm{span}\big(\{U_{2,-}, \dots, U_{d,-}\}\big)\,,$$
$$\text{and} \quad \mathcal{E}^{\mathrm{m}}(E_0) = \mathrm{span}\big(\{U_{1,-}, U_{1,+}\}\big)$$

（上标“su”、“ss”和“m”分别表示“强不稳定”、“强稳定”和“温和”），并且

$$\beta^{\mathrm{su}} = \lambda_{2,+} \quad \text{and} \quad \beta^{\mathrm{ss}} = \lambda_{2,-}\,.$$

与第 2.2 小节一样，存在范数 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_{\mathrm{su}}$ 定义在 $\mathrm{E}^{\mathrm{su}}(E_0)$ 上，以及范数 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_{\mathrm{ss}}$ 定义在 $\mathrm{E}^{\mathrm{ss}}(E_0)$ 上，使得不等式 (2.7)（将所有“u”替换为“su”，并将所有“s”替换为“ss”后）成立。对于任意正量 r，定义球 $B^{\mathrm{su}}_{E_0}(r)$ 和 $B^{\mathrm{ss}}_{E_0}(r)$，其定义与 (2.8) 中相同（作相同替换：“u”←“su”，“s”←“ss”）；令 $B^{\mathrm{m}}_{E_0}(r)$ 表示子空间 $\mathrm{E}^{\mathrm{m}}(E_0)$ 中以 E_0 为中心、半径为 r的闭球，其中采用该子空间上的通常欧几里得范数；并令

$$\overline{B}_{E_0}(r) = \{U^{\mathrm{su}} + U^{\mathrm{ss}} + U^{\mathrm{m}} : U^{\mathrm{su}} \in \overline{B}^{\mathrm{su}}_{E_0}(r) \text{ and } U^{\mathrm{ss}} \in \overline{B}^{\mathrm{ss}}_{E_0}(r) \text{ and } U^{\mathrm{m}} \in \overline{B}^{\mathrm{m}}_{E_0}(r)\}\,.$$

令 $\lambda_{3/2,-}$ 和 $\lambda_{3/2,+}$ 表示满足以下条件的实数量

$$\lambda_{2,-} < \lambda_{3/2,-} < \lambda_{1,-} \quad \text{and} \quad \lambda_{1,+} < \lambda_{3/2,+} < \lambda_{2,+}\,.$$

命题 10.1 （局部强稳定与不稳定流形）。 存在 ν 在 V_{full} 中 V_0 的一个邻域、存在 C 在 $(0, +\infty)$ 中 c_0 的一个邻域，以及一个正量 r，使得对于 $C \times \nu$ 中的每个 (c, V)，除命题 *2.2* 的结论外，以下陈述也成立。

存在 C^k-函数

$$w^{\mathrm{su}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V} : \overline{B}^{\mathrm{su}}_{E_0}(r) \to \overline{B}^{\mathrm{m}}_{E_0}(r) + \overline{B}^{\mathrm{ss}}_{E_0}(r) \quad \textit{and} \quad w^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V} : \overline{B}^{\mathrm{ss}}_{E_0}(r) \to \overline{B}^{\mathrm{m}}_{E_0}(r) + \overline{B}^{\mathrm{su}}_{E_0}(r)$$

使得如果我们考虑集合

$$W^{\mathrm{su}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V)) = \Big\{E(V) + U^{\mathrm{su}} + w^{\mathrm{su}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{su}}) : U^{\mathrm{su}} \in \overline{B}^{\mathrm{su}}_{E_0}(r)\Big\}$$
$$\textit{and} \quad W^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V)) = \Big\{E(V) + U^{\mathrm{ss}} + w^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{ss}}) : U^{\mathrm{ss}} \in \overline{B}^{\mathrm{ss}}_{E_0}(r)\Big\}\,,$$

那么，对于 $B_{E_0}(r)^{-}$中的每个 U，以下两个断言等价：

1. U 属于 $W^{\mathrm{su}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(E(V))$;

2. $S_{c,\,V}(\xi, U) - E(V)$ 对所有 ξ，S_c都属于 $B_{E_0}(r)$，其中 $(-\infty, 0]$ 且

$$|S_{c,V}(\xi, U) - E(V)| = o_{\xi \to -\infty}(e^{\lambda_{3/2,+}\xi})\,;$$

并且对每个属于 $B_{E_0}^{-}(r)$ 的 U，以下两个断言等价：

1. $U \in W\text{ssloc}_{c,\ V}(E(V))$;

2. $S_{c,\ V}(\xi, U) - E(V)$ 对所有 ξ，当 $[0,\overline{+}\infty)$ 时，仍处于 $B_{E_0}(r)$ 中，并且

$$|S_{c,V}(\xi, U) - E(V)| = o_{\xi\to+\infty}(e^{\lambda_{3/2,-}\xi}).$$

两个微分 $Dw^{\mathrm{su}}_{\mathrm{loc},\ c_0,\ V_0}(0)$ 和 $Dw^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{loc},\ c_0,\ V_0}(0)$ 均为零，且两个映射

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}\times\nu\times\overline{B}^{\mathrm{su}}_{E_0}(r)\to\overline{B}^{\mathrm{m}}_{E_0}(r)+\overline{B}^{\mathrm{ss}}_{E_0}(r), \quad (c,V,U^{\mathrm{su}})\mapsto w^{\mathrm{su}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{su}}) \\ \textit{and}\quad &\mathcal{C}\times\nu\times\overline{B}^{\mathrm{ss}}_{E_0}(r)\to\overline{B}^{\mathrm{m}}_{E_0}(r)+\overline{B}^{\mathrm{su}}_{E_0}(r), \quad (c,V,U^{\mathrm{ss}})\mapsto w^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{loc},\,c,\,V}(U^{\mathrm{ss}}) \end{aligned}$$

属于 $\mathcal{C}^k$ 类。

10.3 定理 1.8 结论 2 的证明思路

本小节旨在粗略介绍定理 1.8 的证明思路，更准确地说，是该定理主要结论（即结论 2）的证明思路（结论 1 的证明将在下一小节中进行，且十分直接）。

结论的证明 2 实际上与定理 1.7的证明几乎完全相同。请注意，与定理 1.7的证明相比，只有双稳态行波前和无穷远处稳定的驻定脉冲 需要加以考虑。对于每种情形（双稳态行波前、无穷远处稳定的对称和非对称驻定脉冲），证明都依赖于将 Sard–Smale 定理 4.2 应用于定理 1.7证明中的相同设定，无论是势函数在某个半径之外为二次函数的情形，还是延拓到一般势函数的情形，唯一的变化如下：

1. 左端平衡点 $E_{-}(V)$ 的不稳定流形由其强不稳定流形取代；2. 或者，右端平衡点 $E_{+}(V)$ 的稳定流形由其强稳定流形取代。

更准确地说，对于行波前和非对称驻定脉冲，两种替换都必须分别考虑；而对于对称驻定脉冲，只有第一种替换相关。

我们来看看，为何对设定作这样的变更（替换）不会影响定理4.2中两个假设的有效性，以及该定理的结论应如何解读。关于定理1的假设4.2，这种替换会带来以下结果：

1. 记作$\mathcal{M}$ 的流形维数降低了1 （行波前沿的情形便是如此，无论采用替换1 还是2；对称驻波脉冲采用替换1，非对称驻定脉冲采用替换1）；

2. 或者，记为 $\mathcal{W}$ 的流形维数减少了 1 （这正是将 2替换后，非对称驻定脉冲所出现的情况）。

在上述每种情况下，到达流形 $\mathcal{N}$ 的维数均保持不变，因此，差值 $\dim(\mathcal{M}) - \operatorname{codim}(\mathcal{W})$ 恰好减少了 1。更确切地说，由于这里只考虑双稳态行波前和无穷远处稳定的驻定脉冲，该差值实际上恰好等于 -1。因此，定理 1 4.2的假设仍然成立。

关于定理 4.2 的假设 2，在上述每种情形下该假设也都成立，原因是以下关键观察：在证明三个引理（引理 5.7、6.3 和 7.5）时，用以证明该假设成立的过程中，并未用到变量b^{u} 和 b^{s} 所提供的自由度——只用到了时间变量 ξ 和势函数 V 所提供的自由度。因此，将 $E_-(V)$ 的不稳定流形替换为其强不稳定流形，并不会影响引理结论的有效性；将 $E_+(V)$ 的稳定流形替换为其强稳定流形，也不会影响其有效性。换言之，定理 4.2 的关键假设 2 仍然成立。

因此，在每种情形下，对两种替换中的任一种，定理 4.2 的结论仍然成立，并保证相对于 V局部一般而言，行波前或（非）对称静止脉冲的剖面在局部对应于 $m \mapsto \Phi(m, V)$在N中的像与W之间的横截交。然而，现在dim(M) −codim(W)等于 -1 这一事实，实际上排除了此类横截交的存在。换言之，相对于 V局部一般而言，经由其强稳定流形趋近于 $-\infty$ 处极限的、无穷远处稳定的双稳态行波前或（非）对称脉冲剖面，或者经由其强稳定流形趋近于 $+\infty$ 处极限的此类剖面，局部确实不存在，这正是所要得到的结论。图 10.2 展示了由dim(M) −codim(W)之差的取值 -1 导致此类横截交为空集的情形。

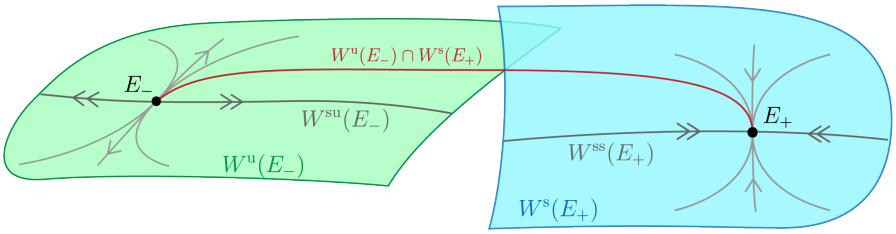

图 10.2：尽管 $W^{\mathrm{u}}(E_-)$ 与 $W^{\mathrm{s}}(E_+)$ 的维数之和对于这两个流形之间存在非空横截交集而言取最小值，但对于$W_{\mathrm{su}}(E_-)$ 和 $W_{\mathrm{s}}(E_+)$（或对于 $W_{\mathrm{u}}(E_-)$ 和 $W^{\mathrm{ss}}(E_+)$），该和更小，因此这类流形之间的横截交集必为空。该图实际上描绘的是定义非对称双稳态驻定前沿的交集，但同样的原理也适用于双稳态行波前、以及在无穷远处稳定的初等对称（或横截非对称）驻定脉冲。

其余论证保持不变：先将势函数在某个半径之外为二次型时的结论延拓至全局（第 5.2、6.1 和 7.1 节），然后再将结论延拓至一般势函数（第 9.1 和 9.2 节）。

为完成这些论证，下面第 10.5 节将详细介绍行波前沿证明中的几个关键步骤。

10.4 结论 1的证明：定理 1.8

令 R 表示一个正量，回顾记号 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$，它在（4.2）中引入；以及 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$，它在（5.2）中引入，并考虑集合

$$\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}} = \{V \in \mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}} : \text{ at every minimum point of } V, \\ \text{the smallest eigenvalue of } D^2V \text{ is simple}\}$$

（下标“ss-eig”表示“最小特征值为单特征值”。）

命题10.2. 集合 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}}$ 是 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$的稠密开子集（因此也是$\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$的稠密开子集）。

证明。 开性源于多项式的根（在极小点处的特征值）关于其系数的连续性。为证明稠密性，取 V 属于$\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse}}$，并假设存在一个极小点 e，使得 V的最小特征值 μ_1（ $D^2V(e)$）并非 单重。令 δ 表示一个正量，且足够小，使闭球 $B_{\mathbb{R}^d}(e,\delta)$中除了 e之外不含 V的临界点。令 ρ 表示一个满足以下条件的光滑函数 $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\rho(r) = 1 \quad \text{for} \quad r \text{ in } [0,1/2] \quad \text{and} \quad \rho(r) = 0 \quad \text{for} \quad r \text{ in } [1,+\infty)\,,$$

并令 ε 表示一个将在下文选取的较小正量。令 u_1 表示与 μ_1对应的 $D^2V(e)$ 的单位特征向量，并考虑如下定义的扰动势函数 V_{pert}:

$$V_{\text{pert}}(u) = V(u) - \frac{\varepsilon}{2}\big((u-e)\cdot u_1\big)^2 \rho\big(|u-e|/\delta\big)\,.$$

于是， e 仍是 V_{pert} 的临界点，并且对于每个 $v \in \mathbb{R}^d$,

$$D^2V_{\text{pert}}(e)(v,v) = D^2V(e)(v,v) - \varepsilon(v\cdot u_1)^2\,.$$

因此， u_1 仍是 $D^2V_{\text{pert}}(e)$ 的特征向量，对应的特征值 $\mu_1-\varepsilon$ 是单重的，而 $D^2V_{\text{pert}}(e)$ 的其他特征值与 $D^2V(e)$ 的相同（差值 $D^2V_{\text{pert}}(e) - D^2V(e)$ 在 u_1 在 $\mathbb{R}^d$ 中的正交子空间上为零），故这些其他特征值都大于 $\mu_1-\varepsilon$。此外，若 ε 足够小，则 $\mu_1-\varepsilon$ 为正（因此 e 仍是 V_{pert} 的极小点），且闭球 $B_{\mathbb{R}^d}(e,\ \delta)$ 内除 e 外不含 V_{pert} 的临界点。对 V 的每个满足其在该极小点处的 D^2V 的最小特征值不是单重的极小点，重复同样的步骤，即可得到一个任意小扰动 V，它属于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}}$，从而证明所需的稠密性。

□

令 $\mathcal{V}_{\text{Morse-ss-eig}}$ 表示 $\mathcal{V}_{\text{full}}$ 的一个子集，其中包含的莫尔斯势函数 V 满足：在 V的每个极小点处，海森矩阵的最小特征值 D^2V 在该极小点处是单重的。按照第 9.3小节的做法，以上第 10.2 号命题证明中的相同论证表明，该集合$\mathcal{V}_{\text{Morse-ss-eig}}$ 是 $\mathcal{V}_{\text{full}}$的一个泛型子集，从而证明了定理 1的结论 1.8。

10.5 双稳态行波前沿结论2的证明：定理1.8 关于双稳态行波前

本小节旨在通过列出这一证明的几个关键步骤，补充第 2个结论的证明思路，该结论属于定理 1.8 ，证明见第 10.3小节；这里仅讨论行进前沿的情形。

与定理1 的结论1.7一样，首先要证明：对于那些在某个（正）半径 R之外为二次函数的势函数，所预期的结论成立。以下命题对此作出陈述，它是命题5.1的延拓。这里用到了在（*5.1*$_V$）中引入的记号F。

命题 10.3。存在一个包含于 $V^{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}}$中的 $V^{\text{quad-}R}$的泛型子集，使得对于该子集中的每个势函数 V，F_V 中的每个行波前沿（c,u）都是横截的、双稳态的，并且其剖面 u 在点 $+\infty$ $(-\infty)$处趋近其极限时，与该点处对应于 D^2V 最小特征值的特征子空间相切。

10.5.1 化归为局部陈述

设 V_0 表示 $\mathrm{V}^{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}}$中的一个势函数，$e_-$,0 和 e_+,0 表示 V_0的非退化极小点。考虑第 5.2 小节中引入的 V_0 的邻域 $\nu_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$，并将交集 $\nu_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)\cap \mathrm{V}^{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}}$记为 $\tilde{\nu}_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$。以下命题是命题 5.2 的一个变体（针对双稳态行波前的情形作了延拓）。记号与之前类似，只是在各种集合的符号上加了“波浪号”，以便与命题 5.2 中引入的相应集合加以区分。

命题 *10.4.* 对于每个正速度 c_0，存在 V_0 在 $V^{\text{quad-}R}$ 中的一个邻域 $\tilde{\nu}_{V_0,e_-,0,e_+,0,\tilde{c_0}}$，包含于 $\tilde{\nu}_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$；存在 c_0 在 $(0,+\infty)$ 中的一个邻域 $C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$；以及 $\tilde{\nu}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 的一个泛型子集 $\tilde{\nu}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,gen}$，使得对于每个 $\tilde{V}\in\tilde{\nu}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,gen}$，每个以速度 $c\in C_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0}$ 传播、并连接 $e_-(V)$ 与 $e_+(V)$ 的前沿（势函数为 V）都是横截的，且其剖面 u 趋近于点 $+\infty(-\infty)$ 处的极限时，与该点处 D^2V 的最小特征值所对应的特征子空间相切。

命题 *10.4* 推出命题 *10.3*的证明。 命题 5.1 已保证存在一个泛型子集 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R\text{-}\pitchfork\text{-}\mathcal{F}}$，它是 $\mathcal{V}^{\text{quad-}R}$ 的子集，并且对于该子集中的每个势函数V，每个行波前 (c,u) 都属于 $\mathcal{F}_V$，且均为横截的。根据第 9.4 小节中的论证，这种前沿必定是双稳态的。因此，尚待证明的只有命题 10.4 中关于剖面渐近行为的结论。

为此，论证与第 5.2 小节中的相同。我们可以引入集合$\tilde{\nu}_{V_0,c_0}$和 C_{V_0,c_0}以及 $\nu_{V_0,c_0,\text{gen}}$，其定义与式 (5.3) 中相应的集合（不带波浪号）完全相同（将 $\nu_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$ 替换为 $\tilde{\nu}_{\text{robust}}(V_0,e_-,0,e_+,0)$），其余论证也相同（将 $\mathrm{V}^{\text{quad-}R\text{-Morse}}$ 替换为 $\mathrm{V}^{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}}$），由此可知存在 $\mathrm{V}^{\text{quad-}R}$中的一个泛型子集，该子集包含于 $\mathrm{V}^{\text{quad-}R\text{-Morse-ss-eig}}$，且对于该子集中的每个势函数$V$，$\mathrm{F}_V$ 中的每个双稳态行波前（c,u）都是横截的，其剖面 u在 $\mathbb{R}$ 两端均按预期结论所述趋近其极限。取交集

将此泛型子集与命题 5.1所提供的泛型子集相交，可得到$\mathcal{V}_{\text{quad-}R}$ 的一个泛型子集，使得命题 10.3 的所有结论均成立。 □

10.5.2 局部陈述的证明

命题10.4 的证明可由命题5.2的证明推导而来，只需做少许改动，并借助一些关键论证；这些论证均已在上文第10.3小节中阐述。

10.5.3 对所有势函数的延拓

对所有势函数的延拓可通过采用第9.1小节中的相同策略得到。回顾一下记号 $\mathcal{F}_{V,\,R}$，它们在（9.1）中引入。与第9.1 小节中相同的论证表明，所要证明的延拓是命题9.1的以下延拓的推论。

命题 10.5。对于任意正量 R，存在 $V_{\text{full-pitchfork-}\mathcal{F}\text{-min-rate-}R}$ 的一个泛型子集 V_{full}，包含于 $V_{\text{Morse-ss-eig}}$中，使得对于该子集中的每个势函数 V，每个属于 $\mathcal{F}_{V,\,R}$ 的行波前 (c,u) 都是横截的、双稳态的，并且在点 $+\infty(-\infty)$ 处趋于其极限时，与该点处对应于D^2V 最小特征值的特征子空间相切。

证明。 命题 9.1 已经给出了一个泛型子集 $\mathcal{V}_{\text{full-pitchfork-}\mathcal{F}\text{-}R}$ 属于 $\mathcal{V}_{\text{full}}$，使得对于该子集中的每个势函数 V，每个行波前 (c,u) 属于 $\mathcal{F}_{V,R}$，都是横截的，因此也是双稳态的（第9.4小节）。因此，只需证明关于剖面渐近行为的结论。

这一结论的证明是命题 9.1 证明的一种变体，并遵循第 10.3 小节阐述的思路：对于某个势函数 V_0 属于 $\mathcal{V}_{\text{quad-}(R+1)}$，某些非退化极小点 $e_-,0$ 和 $e_+,0$（它们是 V 的极小点），以及每个非负整数 N，可以引入集合 $\mathbf{M}_N$（定义见 (9.5)）的两种变体（以及开子集 $\mathbf{O}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,N}$（定义见 (9.6)）的相应变体）：一种将 $\mathbf{B}^{\mathrm{u}}$ 替换为 $\mathbf{B}^{\mathrm{su}}$，另一种将 $\mathbf{B}^{\mathrm{s}}$ 替换为 $\mathbf{B}^{\mathrm{ss}}$。在这两种情形下，由于每种变体的改变都导致维数缺失，条件 “$\Phi(\mathbf{M}_N, V)$ 与 W 在 N 中横截”可理解为“ $\Phi(\mathbf{M}_N, V)$ 与 W 的交集为空”。接着，将开子集 $\mathbf{O}_{V_0,e_-,0,e_+,0,c_0,N}$ 替换为这两个变体的交集，其余论证完全相同。由此证明命题 10.5（并因此也完成了定理 1.8 中关于双稳态行波前沿的结论 2 的证明）。

□

参考文献

[1] R. Abraham 和 J. W. Robbin。 横截映射与流。纽约—阿姆斯特丹：W. A. Benjamin，1967年（引文见第 10、22、23页）。[2] N. Aronszajn。“巴拿赫空间之间利普希茨映射的可微性”。载于： 《数学研究》 57.2（1976年），第147–190页。DOI： 10.4064/sm-57-2-147-190（引文见第 8页）。

[3] P. Bernard 和 V. Mandorino。“关于 Thom 横截性定理的若干评述”。载于：高等师范学院科学年刊（第一类）（2015年），第361–386页。doi：10.2422/2036-2145.201205_007（引文见第8页）。[4] M. Bessa、C. Ferreira、J. Rocha 和 P. Varandas。“一般哈密顿动力学”。载于：动力系统与微分方程杂志 29.1（2017年），第203–218页。doi：10.1007/s10884-015-9441-2。arXiv：1203.3849（引文见第10页）。[5] F. Bethuel、G. Orlandi 和 D. Smets。“具有等深多阱势的梯度系统的慢运动”。载于：微分方程杂志 250.1（2011年），第53–94页。doi：10.1016/j.jde.2010.07.027。arXiv：0909.5315（引文见第11页）。[6] F. Bethuel 和 D. Smets。“具有等深多阱势的标量反应扩散方程前沿的运动定律”。载于：中国数学年刊B辑 38.1（2017年），第83–148页。doi：10.1007/s11401-016-1064-3。arXiv：arXiv:1312.4980v1（引文见第11页）。[7] H. W. Broer、B. Hasselblatt 和 F. Takens 编。动力系统手册，第3卷。阿姆斯特丹：爱思唯尔，2010年（引文见第22页）。[8] P. Brunovsky 和 P. Poláčik。“高空间维数下一般反应扩散方程的莫尔斯–斯梅尔结构”。载于：微分方程杂志 135.1（1997年），第129–181页。doi：10.1006/jdeq.1996.3234（引文见第36页）。[9] P. Brunovsky 和 G. Raugel。“阻尼波方程的莫尔斯–斯梅尔性质的一般性”。载于：动力系统与微分方程杂志 15.2/3（2003年），第571–658页。doi：10.1023/B:JODY.0000009749.10737.9d（引文见第36页）。[10] P. Brunovský、R. Joly 和 G. Raugel。“标量抛物方程异宿轨道与同宿轨道的一般横截性”。载于：动力系统与微分方程杂志（2019年）。doi：10.1007/s10884-019-09813-7（引文见第36页）。[11] J. Carr 和 R. L. Pego。“$u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$ 的解中的亚稳态模式”。载于：纯粹与应用数学通讯 42.5（1989年），第523–576页。doi：10.1002/cpa.3160420502（引文见第11页）。[12] A. Champneys。“可逆系统中的同宿轨道及其在力学、流体和光学中的应用”。载于：非线性现象物理学D辑 112.1-2（1998年），第158–186页。doi：10.1016/S0167-2789(97)00209-1（引文见第10页）。[13] G. Contreras-Barandiarán 和 G. P. Paternain。“二维球面上具有正拓扑熵的测地流的一般性”。载于：微分几何杂志 61.1（2002年），第1–19页。doi：10.4310/jdg/1090351319（引文见第10页）。[14] P. Coullet 和 C. Elphick。“拓扑缺陷动力学与梅尔尼科夫理论”。载于：物理快报A辑 12.5（1987年），第233–236页（引文见第11页）。[15] R. Devaney。“可逆系统与哈密顿系统中的蓝天灾变”。载于：印第安纳大学数学杂志 26.2（1977年），第247页。doi：10.1512/iumj.1977.26.26018（引文见第10页）。[16] R. L. Devaney。“哈密顿系统中的同宿轨道”。载于：微分方程杂志 21.2（1976年），第431–438页。doi：10.1016/0022-0396(76)90130-3（引文见第10页）。

[17] R. L. Devaney. “可逆微分同胚与流”。载于：Trans. Am. Math. Soc. 218.1970 (1976), p. 89. doi: 10.2307/1997429 (引文见第 7、19 页)。[18] S.-I. Ei. “反应扩散系统中弱相互作用脉冲的运动”。载于：动力系统与微分方程杂志 14.1 (2002), pp. 85–137. doi: 10.1023/A:1012980128575 (引文见第 11 页)。[19] P. C. Fife and J. B. McLeod. “非线性扩散方程解趋近于行波前解”。载于：Arch. Ration. Mech. Anal. 65.4 (1977), pp. 335–361. doi: 10.1007/BF00250432 (引文见第 11 页)。[20] P. C. Fife and J. B. McLeod. “关于非线性扩散中收敛至行波前的相平面讨论”。载于：Arch. Ration. Mech. Anal. 75.4 (1981), pp. 281–314. doi: 10.1007/BF00256381 (引文见第 11 页)。[21] P. Fife. “双稳态非线性扩散方程解的长期行为”。载于：Arch. Ration. Mech. Anal. 70.1 (1979), pp. 31–36. doi: 10.1007/BF00276380(引文见第 11 页)。[22] J. Guckenheimer and P. Holmes.《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》。第 42 卷。应用数学科学。纽约，NY：Springer New York，1983。doi: 10.1007/978-1-4612-1140-2 (引文见第 13、17 页)。[23] J. Härterich. “趋向鞍焦点平衡点的可逆同宿轨道级联”。载于：Phys. D Nonlinear Phenom. 112.1-2 (1998), pp. 187–200. doi: 10.1016/S0167-2789(97)00210-8 (引文见第 7、10 页)。[24] M. W. Hirsch.《微分拓扑》。第 33 卷。研究生数学丛书。纽约，NY：Springer New York，1976。doi: 10.1007/978-1-4684-9449-5(引文见第 8、22、23、28 页)。[25] R. Joly. “将泛型偏微分方程结果推广至普遍性的概念”。载于：动力系统与微分方程杂志 19.4 (2007), pp. 967–983. doi: 10.1007/s10884-007-9097-7 (引文见第 8 页)。[26] R. Joly and G. Raugel. “圆上的抛物型方程之平衡点和周期轨道的泛型双曲性”。载于：Trans. Am. Math. Soc. 362.10 (2010), pp. 5189–5211. doi: 10.1090/S0002-9947-2010-04890-1(引文见第 36 页)。[27] R. Joly and G. Raugel. “圆上的抛物型方程的泛型莫尔斯–斯梅尔性质”。载于：亨利·庞加莱研究所年刊。Ann. Anal. Non Lin- eaire/Nonlinear Anal. 27.6 (2010), pp. 1397–1440. doi: 10.1016/j.anihpc.2010.09.001. arXiv: 1005.3186 (引文见第 36 页)。[28] K. Kawasakiand T. Ohta. “一维非线性系统中的扭结动力学”。载于：Physica A 116 (1982), pp. 573–593. doi: 10.1016/0378-4371(82)90178-9(引文见第 11 页)。[29] A. Kelley. “稳定、中心稳定、中心、中心不稳定和不稳定流形”。载于：微分方程杂志 3.4 (1967), pp. 546–570. doi: 10.1016/0022-0396(67)90016-2(引文见第 13、17 页)。

[30] J. Knobloch. “可逆保守系统中退化同宿轨道的分岔”。载于：动力系统与微分方程杂志 9.3 (1997), pp. 427–444. doi:10.1007/BF02227489 (引文见第 10 页)。[31] I. Kupka. “对泛型向量场理论的贡献”。载于：Contrib. to Differ. Equations 2 (1963), pp. 457–484 (引文见第 10 页)。[32] D. Motreanu and V. V. Motreanu. “非退化同宿解的泛型存在性”。载于：罗巴切夫斯基数学杂志 38.2 (2017), pp. 322–329. doi: 10.1134/S1995080217020159 (引文见第 10 页)。[33] E. R. Oliveira. “曲面上拉格朗日量的泛型性质：Kupka–Smale 定理”。载于：离散与连续动力系统 21.2 (2008), pp. 551–569. doi:10.3934/dcds.2008.21.551. arXiv: 0612444 [math] (引文见第 10 页)。[34] W. Ott and J. A. Yorke. “普遍性”。载于：美国数学会通报 42.3 (2005), pp. 263–290. doi: 10.1090/S0273-0979-05-01060-8(引文见第 8 页)。[35] J. Palis and W. de Melo.《动力系统几何理论》。纽约，NY：Springer US，1982。doi: 10.1007/978-1-4612-5703-5(引文见第 24 页)。[36] M. M. Peixoto. “关于 Kupka 和 Smale 的一个逼近定理”。载于：微分方程杂志 3.2 (1967), pp. 214–227. doi: 10.1016/0022-0396(67)90026-5(引文见第 10、22 页)。[37] L. Rifford. “在 C^1 拓扑中闭合测地线”。载于：微分几何杂志 91.3 (2012), pp. 361–381. doi: 10.4310/jdg/1349292669 (引文见第 10、36 页)。[38] L. Rifford and R. O. Ruggiero. “从 Mañé 观点看哈密顿流闭轨的泛型性质”。载于：国际数学研究通知 2012.22 (2012), pp. 5246–5265. doi: 10.1093/imrn/rnr231 (引文见第 10、36 页)。[39] E. Risler. “具有梯度结构的非线性抛物型系统中向行波前的全局收敛”。载于：亨利·庞加莱研究所年刊。Ann. Anal. Non Lineaire/Nonlinear Anal. 25.2 (2008), pp. 381–424. doi: 10.1016/j.anihpc.2006.12.005 (引文见第 10、11 页)。[40] E. Risler. “一维无界空间维度中梯度系统双稳态解的全局行为”。载于：arXiv (2022), pp. 1–91. arXiv: 1604.02002 (引文见第 10、11 页)。[41] E. Risler. “一维无界空间维度中双曲梯度系统双稳态解的全局行为”。载于：arXiv (2022), pp. 1–75. arXiv: 1703.01221 (引文见第 11 页)。[42] E. Risler. “梯度系统中无穷远处稳定的径向对称解的全局行为”。载于：arXiv (2022), pp. 1–52. arXiv: 1703.02134 (引文见第 11 页)。[43] E. Risler. “一维无界空间维度中梯度系统双稳态解的全局弛豫”。载于：arXiv (2022), pp. 1–69. arXiv: 1604.00804 (引文见第 10、11 页)。[44] E. Risler. “抛物型梯度系统中无穷远处稳定的径向对称稳态解的一般横截性”。载于：(2023), pp. 1–26 (引文见第 11 页)。

[45] J. W. Robbin.《代数 Kupka-Smale 理论》。载于：数学讲义，第 898 卷。1981 年，第 286–301 页。doi：10.1007/BFb0091920（引自第 10、36 页）。[46] R. C. Robinson.《保守系统的泛性质》。载于：《美国数学杂志》92.3（1970），第 562 页。doi：10.2307/2373361（引自第 10 页）。[47] R. T. Seeley.《半空间上定义的 C^∞ 函数的延拓》。载于：《美国数学会会刊》15.4（1964），第 625–626 页。doi：10.1090/S0002-9939-1964-0165392-8（引自第 26 页）。[48] S. Smale.《微分方程与微分同胚的稳定流形》。载于：《拓扑与微分》（2011），第 93–126 页。doi：10.1007/978-3-642-10988-1_4（引自第 10 页）。[49] G. Teschl.《常微分方程与动力系统》。第 140 卷。数学研究生教材。美国数学会，2012 年（引自第 13、17 页）。[50] A. Vanderbauwhede.《退化同宿轨道的分岔》。载于：《数学进展》21.1（1992），第 211–223 页。doi：10.1007/BF03323080（引自第 10 页）。[51] A. Vanderbauwhede 和 B. Fiedler.《可逆与保守系统中的同宿周期爆炸》。载于：《应用数学与物理学杂志》43.2（1992），第 292–318 页。doi：10.1007/BF00946632（引自第 7、10 页）。[52] S. Zelik 和 A. Mielke.《耗散系统中的多脉冲演化与时空混沌》。载于：《美国数学会回忆录》198.925（2009）。doi：10.1090/memo/0925（引自第 11 页）。

Romain Joly格勒诺布尔-阿尔卑斯大学，法国国家科学研究中心 UMR 5582，傅里叶研究所，法国格勒诺布尔 38000。
romain.joly@univ-grenoble-alpes.fr

Emmanuel Risler里昂大学，里昂国立应用科学学院，法国国家科学研究中心 UMR 5208，卡米耶·若尔当研究所，法国维勒班 69621。
emmanuel.risler@insa-lyon.fr