arXiv:2301.02100v1 [math.PR] 5 Jan 2023

正矩阵独立同分布乘积的极限定理

C. Cuny*、J. Dedecker†和 F. Merlev`ede ‡

2023年1月6日

摘要

我们研究正矩阵独立同分布乘积所对应的范数余循环的随机性质。在矩为 $p > 2$ 阶的最优条件下，我们以 $o(n^{1/p})$ 的速率得到几乎处处不变原理（ASIP），并在三阶矩的最优条件下，以 $O(1/\sqrt{n})$ 的速率得到贝里–埃森定理。结果对矩阵范数同样成立。对于矩阵系数，我们也得到了 ASIP，但关于贝里–埃森定理仅获得了部分结果。证明用到了耦合系数；令人惊讶的是，它们以指数速度衰减至 0，而在可逆矩阵的情形下，衰减速度仅为多项式级别。事实上，所有结果对保持某个适当锥不变的矩阵的独立同分布乘积也成立。

AMS 2020学科分类：60F05、60B15、60G50。

关键词和短语：随机游走；余循环；贝里–埃森定理；几乎必然不变原理；Hilbert度量。

1 引言

在一系列论文 [10], [12], [13], [16] 和 [17] 中，我们研究了在最优或接近最优的矩条件下，GL_d（$\mathbb{R}$）上左随机游走所对应的范数余循环的随机性质。在中心极限定理（CLT）和具有某一收敛速率的 ASIP 情形下，矩条件是最优的；而在贝里–埃森定理情形下，矩条件则接近最优。我们还得到了关于矩阵范数、矩阵系数和谱半径的结果。

*Christophe Cuny，布雷斯特大学，UMR 6205 法国国家科学研究中心 6205，LMBA，6 avenue Victor Le Gorgeu，29238 布雷斯特

†J´érôme Dedecker，巴黎大学，法国国家科学研究中心，MAP5，UMR 8145，45 rue des Saints-P`ères，F-75006 巴黎，法国。

‡Florence Merlev`ède，LAMA，古斯塔夫·埃菲尔大学，巴黎东克雷泰伊大学，UMR 8050 法国国家科学研究中心，F-77454 Marne-La-Vall´ée，法国。

证明中的一个关键要素是使用了 [10], 中引入的一些耦合系数，定义见第3节。

事实证明，在具有非负矩阵元素的 $d \geq 2$ 阶矩阵半群上研究左随机游走时，也可以控制类似的系数（下文将这类矩阵称为正矩阵）。事实上，在满足多项式矩条件时，甚至可以证明这些系数指数收敛到 0，见命题 3.2。因此，在三阶矩这一最优条件下，我们得到收敛速率为 $O(1/\sqrt{n})$ 的 Berry–Esseen定理。对于阶数为 $p \in (2, 3)$ 的矩条件，我们也得到最优的中间速率。最后，我们还得到 ASIP 中的最优速率。

值得一提的是，正矩阵的独立同分布乘积研究得益于大量相关工作。我们列举其中一些：Hennion [23], Buraczewski等人 [7], Buraczewski和Mentmeier [8] 以及 Grama、Liu 和 Xiao [21]。

在更一般的相关正随机矩阵乘积情形下，Hennion 在混合条件下证明了强大数定律和中心极限定理，且只需满足最优矩条件。上述其他论文均假设存在指数矩，因此可以自然地使用基于算子扰动的 Guivarc'h-Nagev方法。

预印本 [22], 指出，Guivarc'h-Nagaev方法在多项式矩条件下适用。特别是，他们在满足三阶矩条件以及某些额外技术条件的情况下，得到了收敛速率为$O(1/\sqrt{n})$的贝里–埃森定理，参见他们的条件（A2）。

在第2节中，我们介绍一些记号和定义，并回顾正矩阵研究中的若干关键性质。

在第3节中，我们证明不变概率测度的存在唯一性，并估计耦合系数。

在第4节中，我们回顾 Hennion 的强大数定律，并给出一些补充结果。

在第5节中，我们回顾中心极限定理，并给出若干关于渐近方差s^2的刻画。此外，我们证明，在满足二阶矩条件的情况下，已知的非周期性条件（参见定义 5.1）足以保证 $s^2 > 0$。

在第 6 节中，我们在最优多项式矩条件下，证明了范数余循环、矩阵范数、谱半径和矩阵系数的 ASIP。我们还讨论了

指数矩的情形，但与独立同分布情形下已知的结果相比（在我们的设定中对应于 $d=1$），结果略有逊色。

在第 7 节中，我们针对上述所有量得到了贝里–埃森定理。对于范数余循环和矩阵范数，所得速率是最优的（就矩条件而言）；但对于谱半径和矩阵系数，所得速率则有所损失。

在第 8 节中，我们研究不变测度的正则性；在第 9 节中，我们给出关于范数余循环和矩阵系数的一些偏差不等式。

在第10节中，我们说明如何将结果推广到保持某个适当锥不变的矩阵（注意，大小为 d 的正矩阵可视为保持锥 $(\mathbb{R}^+)^d$ 不变的矩阵）。

最后，在第 11 节中，我们给出与上一节相关的技术性结果。

全文中，我们记 $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$。

2 范数余循环与矩阵范数

令 $d \geq 2$ 为一个整数。令 G 为由 d 维正允许矩阵构成的半群：这里“正”是指所有矩阵元素都大于或等于 0，“允许的”是指每一行和每一列都至少有一个严格正的元素。

我们在 $\mathbb{R}^d$ 上赋予 ℓ^1 范数，并在 G 上赋予相应的算子范数。我们用 $\|\cdot\|$ 表示这两种范数。回顾一下，$\|g\| = \sup_{\|x\|=1} \|gx\|$。

我们在 G 上赋予从该范数（及其对应距离）继承的拓扑。于是，G 成为一个局部紧空间。

令 G^+ 为 G 的子半群，其矩阵元素均严格为正。实际上，G^+ 是 G 的内部。

定义

$$S^+ := \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\| = 1 \text{ and } x_i \geq 0,\, \forall i \in \{1, \ldots, d\}\}\,, \tag{2.1}$$

$$S^{++} := \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\| = 1 \text{ and } x_i > 0,\, \forall i \in \{1, \ldots, d\}\}\,. \tag{2.2}$$

注意，对于 r $g \in G$，实际上我们有 $\|g\| = \sup_{x \in S^+} \|gx\|$，并且，如果 $g = (g_{ij})_{1 \leq i,\ j \leq d}$，

$$\|g\| = \max_{1 \leq j \leq d} \sum_{i=1}^{d} g_{ij}\,. \tag{2.3}$$

对于每个 $g \in G$，令 $v(g) = \inf_{x \in S^+} \|gx\|$。如果 $g = (g_{ij})_{1 \le i,\ j \le d}$，我们有

$$v(g) = \min_{1 \le j \le d} \sum_{i=1}^{d} g_{ij} \,. \tag{2.4}$$

根据 G, $v(g) > 0$ 的定义，对每个 $g \in G$ 都成立。

于是我们定义 $N(g) := \max(\|g\|, 1/v(g))$，以及 $L(g) = \frac{\|g\|}{v(g)}$。注意，对每个 $g \in G$，都有 $N(g)^2 \ge Lg$。

我们在 S^+ 上赋予如下度量（参见命题 10.1，其中证明了它确实是一个度量）。对于每个 $x, y \in S^+$,

$$d(x, y) = \varphi(m(x, y)m(y, x)) \,,$$

其中

$$\varphi(s) = \frac{1 - s}{1 + s} \qquad \forall s \in [0, 1] \,, \tag{2.5}$$

and

$$m(u, v) = \inf \left\{ \frac{u_i}{v_i} \,:\, i \in \{1, \dots, d\},\, v_i > 0 \,. \right\}$$

注意，S^+ 的直径为 1，并且 $d(x, y) = 1$ 当且仅当存在 $i_0 \in \{1, \dots, d\}$，使得 $x_{i_0} = 0$ 和 $y_{i_0} > 0$，或者 $x_{i_0} > 0$ 和 $y_{i_0} = 0$。

利用对于 $u, \quad v \in S^+$，$\max_{1 \le i \le d} u_i \le 1$ 和 $\max_{1 \le i \le d} v_i \ge 1/d$，我们看到 $m(u, v) \le d$。

半群 G按如下方式作用于 S^+。

$$g \cdot x = \frac{gx}{\|gx\|} \qquad \forall (g, x) \in G \times S^+ \,.$$

接着，我们令 $\sigma(g, x) = \log(\|gx\|)$，从而对每个 $(g, x) \in G \times S^+$定义一个余循环。余循环性质表述如下：

$$\sigma(gg', x) = \sigma(g, g' \cdot x) + \sigma(g', x) \,. \tag{2.6}$$

Following Henni 关于 [23, 引理 10.6], ，对每个 $g \in G$，我们定义 $c(g) := \sup_{x, y \in S^+} d(gx, gy)$.

让我们回顾一些可以在 Hennion [23], 中找到的性质，参见他的引理 5.2、5.3 和 10.6 以及命题 3.1。

命题 2.1. 对于每个 $(g, g', x, y) \in G^2 \times (S^+)^2$，我们有

(i) $|\sigma(g, x)| \le$对数 N
(g); (ii) $\|x - y\| \le 2d(x, y)$;

(*iii*) $|\sigma(g,x)-\sigma(g,y)|\le 2L(g)d(x,y)$; (*iv*) $|\sigma(g,x)-\sigma(g,y)|\le 2$ 自然对数 $\big(1/(1-d(x,y))\big)$; (*v*) $c(gg')\le c(g)c(g')$; (*vi*) $c(g)\le 1$ 和 $c(g)<1$ 当且仅当 $g\in G^+$; (*vii*) $d(g\cdot x,g\cdot y)\le c(g)d(x,y)$.

我们还要提及 [23] 的引理 10.7 中得到的 $c(g)$ 的一个闭式表达式。对于每个 $g=(g_{ij})_{1\le i,j\le d}$ 我们有

$$c(g)=\max_{1\le i,j,k,\ell\le d}\frac{|g_{ij}g_{k\ell}-g_{i\ell}g_{kj}|}{g_{ij}g_{k\ell}+g_{i\ell}g_{kj}}\,. \tag{2.7}$$

注意，$(g,x)\to gx$ 在 $G\times S^+$ 上连续（对于由算子范数在 G 上诱导的距离，以及由 $\|\cdot\|$ 在 S^+ 上诱导的距离），且不为零。因此，由第 (*ii*) 项可知，$(g,x)\to g\cdot x$ 在 $G\times S^+$ 上连续（对于由算子范数在 G 上诱导的距离，以及 S^+ 上的距离 d）。

我们再给出一些后续将用到的性质。令 $e=\{1/d,\dots,1/d\}\in S^+$。对于 $g\in G$，我们用 g^t 表示 g 的伴随矩阵。

引理 2.2。对于每个 $(g,x,y)\in G\times(S^+)^2$,

(*i*) $|\sigma(g,x)-\sigma(g,y)|\le$ 对数 $L(g)$; (*ii*) $\|ge\|\le\|g\|\le d\|ge\|$; (*iii*) $\|g\|\le d\|g^t\|$; (*iv*) $|\sigma(g,x)-\sigma(g,y)|\le 2(2+$ 对数 $L(g))d(x,y)$.

注。引理 2.2 的条目 (*iv*) 中的不等式远优于命题 2.1 的条目 (*iii*) 中的不等式。

证明。条目 (*i*) 和 (*ii*) 显然。条目 (*iii*) 是 (2.3) 的直接推论。下面证明条目 (*iv*)。设 x, $y\in S^+$。假设 $d(x,y)\le 1/2$。注意，对于每个 $t\in[0,1/2]$，$\ln(1/(1-t))\le 2t$。因此，利用命题 2.1 的条目 (*iv*)，可得 $|\sigma(g,x)-\sigma(g,y)|\le 4d(x,y)$。若 $2d(x,y)\ge 1$，则由引理 2.2 的条目 (*i*) 可得所需结论。□

命题 2.3。（S^+，d）是完备的，且 S^{++} 是闭的。

注。在 Bushell 的《[9], 希尔伯特度量》中，完备性的证明提示见定理 4.1 之后，该度量定义为 $d_H(x, y) = -\ln(m(x, y)\, m(y, x))$。更一般情形下的证明见命题 10.1。

下面陈述本文中使用的一些假设。

定义 2.1. 设 μ 是 G 和 $p \geq 1$ 上的一个博雷尔概率测度。若 μ 满足

$$\int_G (\log(N(g)))^p d\mu(g) < \infty .$$

若 μ 满足

$$\int_G (\log(L(g)))^p d\mu(g) < \infty .$$

注. 显然，由于若 L 满足矩条件，则 $g \leq N(g)^2$, ，所以它几乎满足矩条件；但反过来一般不成立，见第 6 节中的例子。现在假设 μ 几乎满足矩条件。于是， μ 满足矩条件当且仅当 p iff $\int_G |\log \|g\||^p d\mu(g) < \infty$ iff $\int_G |\log v(g)|^p d\mu(g) < \infty$。

类似地，若存在 $\delta > 0$ 使得 μ 满足或几乎满足指数矩条件，则称其满足或几乎满足阶为 $\gamma > 0$ 的指数矩条件；具体而言，分别有

$$\int_G \mathrm{e}^{\delta N(g)^\gamma} d\mu(g) < \infty ,$$

or

$$\int_G \mathrm{e}^{\delta L(g)^\gamma} d\mu(g) < \infty .$$

定义 2.2. 我们 称 μ 为严格收缩的，如果存在 $r \in \mathbb{N}$，使得 $\mu^{*r}(G^+) > 0.$

等价地，由 μ 的支持生成的闭半群 Γ_μ 与 G^+有非空交集。

3 不变测度与耦合系数

回顾一下，若一个关于 d 的 Borel 概率测度 ν 定义在 S^+ 上，且对每个定义在 S^+上的 Borel 非负函数 φ，都有 $\int_{G\times S^+} \varphi(g \cdot x) d\mu(g) d\nu(x) = \int_{S^+} \varphi(x) d\nu(x)$，则称其为 μ-不变的。众所周知且易于证明（回忆一下，$(g, x) \to g \cdot x$在 $G \times S^+$上是连续的）， μ-不变测度的支持是 Γ_μ-不变的，即满足 $\Gamma_\mu \cdot \operatorname{supp} \nu \subset \operatorname{supp} \nu$。

我们将看到，当 μ 严格收缩时，它在 S^+ 上存在唯一的 μ-不变概率测度。我们还需要一些额外的记号来确定其支持。

设 $g \in G^+$。根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理（参见 [29] 的定理 1.1.1），存在唯一的 $x \in S^{++}$，使得 $gx = \kappa(g)x$，其中 $\kappa(g)$ 是 g 的谱半径。我们将该向量记为 v_g。显然，我们有

$$\kappa(g) \geq v(g) \qquad \forall g \in G\,. \tag{3.1}$$

根据 [7]（参见其中的 (2.4)），我们定义

$$\Lambda_\mu = \overline{\{v_g \,:\, g \in \Gamma_\mu \cap G^+\}}\,,$$

whe其中闭包是相对于 d 取的。由命题 2.3，$\Lambda_\mu \subset S^{++}$。

由 [7] 的引理 4.2 可知，Λ_μ 是 Γ_μ-不变的（即 $\Gamma_\mu \cdot \Lambda_\mu \subset \Lambda_\mu$）.

下一个命题中的存在性和唯一性由 [24] 的定理 2.1 得出。我们给出一个略有不同的证明，并确定不变测度的支持。

命题 3.1。假设 μ 是严格收缩的。那么，在 S^+ 上存在唯一的 μ-不变概率 ν。此外 supp $\nu = \Lambda_\mu$。

证明。设 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是取值于 G、分布为 μ 的独立同分布随机变量。令 $r \in \mathbb{N}$ 如定义 2.2 所示。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $B_n := Y_1 \cdots Y_n$。令 $m := [n/r]$。注意，由命题 2.1 的第 (v) 项，$c(B_n) \leq \prod_{k=0}^{m-1} c(Y_{kr+1} \cdots Y_{(k+1)r})$。由强大数定律以及 μ 是严格收缩这一事实，利用命题 2.1 的第 (vi) 项，

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \log c(Y_{kr+1} \cdots Y_{(k+1)r}) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\log c(Y_1 \cdots Y_r)) < 0 \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

因此，对于某个 $0 < \delta < 1$，$c(B_n) = O(\delta^m)$ 几乎必然成立。特别地，当 n 足够大时，$c(B_n) < 1$，因此根据命题 2.1 的第（vi）项，$B_n \in G^+$ 以及对每个 $x \in S^+$ 都有 $B_n \cdot x \in S^{++}$。

设 $x \in S^+$。根据命题 2.1 的第（vii）项，存在一个与 x 独立的非负随机变量K，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，

$$d(B_n \cdot x, B_{n+1} \cdot x) \leq c(B_n) \leq K\delta^m\,.$$

因此，$(B_n \cdot x)_{n\in\mathbb{N}}$ 是柯西的；当 n 足够大时，其取值于 S^{++}，从而收敛于某个随机变量 Z，其分布关于 μ 不变。根据命题 2.1 的第（vii）项，$d(B_n \cdot x, B_n \cdot y) \leq c(B_n)$，由此可见，对于每个 $y \in S^+$，$(B_n \cdot y)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 Z。

设 ν 是 S^+ 上的 μ-不变概率测度。那么，对每个 $m \in \mathbb{N}$ 以及 S^+ 上每个连续有界的 φ，我们有

$$\int_{S^+} \varphi d\nu = \int_{S^+} \mathbb{E}\big(\varphi(B_m \cdot x)\big) d\nu(x) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(\varphi(Z))\,,$$

由此证明了唯一性。

这一事实 $\nu \supset \Lambda_\mu$ 可由 supp ν 是 Γ_μ-不变的这一事实以及 [7] 中的引理 4.2 得出。为证明反向包含，只需注意，由于 $\Gamma_\mu \cdot \Lambda_\mu \subset \Lambda_\mu$，对每个 $x \in \Lambda_\mu$，$B_n \cdot x \in \Lambda_\mu$ 几乎必然成立。因此 $Z \in \Lambda_\mu$ 几乎必然成立，且 $\nu(\Lambda_\mu) = 1$，这就得到了所需结论。□

设 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是取值于 G、分布为 μ 的独立同分布随机变量。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令$A_n := Y_n \cdots Y_1$。

对每个 $p \geq 1$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$\delta_{p,\infty}(n) := \sup_{x,y\in S^+} \mathbb{E}\big(|\sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot x) - \sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot y)|^p\big)\,.$$

这些系数在 [10], 中针对 $GL_d(\mathbb{R})$ 中的独立同分布矩阵乘积情形被引入，并被证明在 [13] 和 [16], 中非常有用，另见 [12]。

我们将看到，只要 μ （几乎）具有一阶矩，这些系数就会以指数速度趋于 0；而对于 $GL_d(\mathbb{R})$ 的情形，我们得到的收敛速度仅为多项式级。

实际上，我们将对更强的系数证明该结果

$$\tilde{\delta}_{p,\infty}(n) := \mathbb{E}\big(\sup_{x,y\in S^+} |\sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot x) - \sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot y)|^p\big)\,.$$

命题 3.2. 假设 μ 是严格收缩的，并且几乎具有 $p \geq 1$ 阶矩。那么，存在 $0 < a < 1$ 使得

$$\delta_{p,\infty}(n) \leq \tilde{\delta}_{p,\infty}(n) = O(a^n)\,, \tag{3.2}$$

and

$$\sup_{x,y\in S^+}\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma(A_n, x) - \sigma(A_n, y)| \in L^p\,. \tag{3.3}$$

特别地,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\log\|A_n\| - \log v(A_n)| \in L^p\,. \tag{3.4}$$

证明。令 $n \in \mathbb{N}$。由引理 2.2 的第 (iv) 条和命题 2.1 的第 (vii) 条可知，对于每个x, $y \in S^+$, 我们有

$|\sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot x) - \sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot y)| \leq (4+2\log L(Y_n))d(A_{n-1}\cdot x, A_{n-1}\cdot y) \leq (4+2\log L(Y_n))c(A_{n-1}$

令 $r \in \mathbb{N}$ 如定义 2.2 所述。于是，由命题 2.1 的第 (vi) 条，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\mu^{*r}(c(g) \le 1-\varepsilon) =: \gamma > 0\,. \tag{3.5}$$

因此，若 $m = [(n-1)/r]$,

$$\mathbb{E}\big[\big(c(A_{n-1})\big)^p\big] \le \prod_{k=1}^{m} \mathbb{E}\big[\big(c(Y_{kr}\cdots Y_{(k-1)r+1})\big)^p\big] \le \big(\gamma(1-\varepsilon)^p + 1 - \gamma\big)^m\,.$$

这证明了 $(\delta_{p,\,\infty}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 的指数收敛性。为完成证明，利用余循环性质以及 L^p 中的三角不等式，我们推得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\sup_{x,y\in S^+}\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sigma(A_n,x)-\sigma(A_n,y)|^p\big] &\le r\mathbb{E}\big[\big(2(2+\log L(Y_1))\big)^p\big]\Big(\sum_{m\ge 0}\big(\gamma(1-\varepsilon)^p+1-\gamma\big)^{m/p}\Big)^p \\ &= \frac{2^p r\mathbb{E}\big[\big(2+\log L(Y_1)\big)^p\big]}{\Big(1-\big(\gamma(1-\varepsilon)^p+1-\gamma\big)^{1/p}\Big)^p}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

□

4 大数定律

除 L^1-收敛之外，本节的结果基本都已包含在 Hennion 的论文 [23] 中（该文讨论了更一般的情形）；参见他的定理 2 及其证明。

我们先回顾与本文设定相关的 Kingman 次可加遍历定理版本（参见 [28, 定理 1 和 2]）。命题中 λ_μ 为常数这一事实可由 Kolmogorov 的 $0-1$ 分布推出。

命题 4.1（Kingman）。假设 $\int_G \big|\log \|g\|\big| d\mu(g) < \infty$。那么，$(\frac{1}{n}\log \|A_n\|)_{n\ge 1}$ 收敛于某个常数 $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$，且几乎处处收敛于 $\mathbb{P}$，并在 L^1 中收敛。

注。利用对于每个 $g \in G^+$ 都有 $\|g\| \ge v(g)$，我们得到 $\log^- \|g\| \le \log^- v(g)$，其中 $\log^-(x) = \max(-\log x, 0)$ 对每个 $x > 0$ 都成立。特别地，如果 μ 或 $\tilde{\mu}$ 存在一阶矩，那么，$\int_G \big|\log \|g\|\big| d\mu(g) < \infty$。

接下来，我们给出与 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 相关的各种量的强大数定律，并在更强的假设下确定其极限。

定理 4.2。假设 μ 是严格收缩的，且 μ 具有一阶矩。则对于每个 $x \in S^+$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sigma(A_n,x)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log v(A_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log \kappa(A_n)}{n} = \lambda_\mu \quad \text{$\mathbb{P}$-几乎必然,} \tag{4.1}$$

其中 $\lambda_\mu = \int_{G\times S^+} \sigma(g,x)d\mu(g)d\nu(x)$。此外，这些收敛性在 L^1 中也成立，甚至还有

$$\Big\| \sup_{x\in S^+} \Big|\frac{\sigma(A_n,x)}{n} - \lambda_\mu\Big| \Big\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \textit{and} \ \sup_{x\in S^+} \Big|\frac{\sigma(A_n,x)}{n} - \lambda_\mu\Big| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

注。当 $\int_G |\log\, v(g)|d\mu(g) < \infty$ 时（若 μ 有一阶矩，则此条件成立），将 Kingman 次可加遍历定理应用于 $(-\log\, v(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$，即可得到 $(\frac{1}{n}\log\, v(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathbb{P}$-几乎必然收敛和 L^1 收敛。λ_μ 的公式可由 [23] 第 1568 页中间的公式推导得出。

证明。由命题 4.1 及其后的注可知，$((\log\|A_n\|)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathbb{P}$-几乎必然收敛和 L^1 收敛至 λ_μ。

由 (3.4) 可推出 L^1 收敛于 $v(A_n)$。

定义 $Z := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\log\|A_n\| - \log\, v(A_n)|$。由 (3.4)，$Z \in L^1$，且对每个 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|\log\|A_n\| - \log v(A_n)| \geq \varepsilon n) \leq C\mathbb{E}(Z) < \infty\,.$$

由 $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathbb{P}$-几乎必然收敛以及 Borel–Cantelli 引理，可得 $(v(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 的 $\mathbb{P}$-几乎必然收敛。

$\kappa(A_n)$的收敛性由以下界推出：$v(A_n) \leq \kappa(A_n) \leq \|A_n\|$（第一个界见（3.1））。

最后，注意对每个 $n\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in S^+} |\sigma(A_n,x) - n\lambda_\mu| \leq \max(|\log\|A_n\| - n\lambda_\mu|, |\log v(A_n) - n\lambda_\mu|)\,,$$

这就证明了其余的收敛性。

因此，只需确定 λ_μ。由上可知，利用 ν的 μ不变性，我们推得

$$\begin{aligned}\int_{G\times S^+} \sigma(g,x)d\mu(g)d\nu(x) &= \frac{1}{n}\int_{S^+} \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n \sigma(Y_k, A_{k-1}\cdot x)\Big)d\nu(x)\\ &= \frac{1}{n}\int_{S^+} \mathbb{E}(\sigma(A_n,x))d\nu(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_\mu\,.\end{aligned}$$

□

现在我们来考虑矩阵系数的情形。证明将依赖下文的引理 4.3，该引理本质上是 [24] 的引理 2.1（关于 (4.3)，另见 [7] 的引理 6.3）。我们还需要引入一些进一步的记号。

对每个 $0 < \delta \leq 1$，令

$$G_\delta := \{g \in G : \langle x, gy\rangle \geq \delta \ \forall x, y \in S^+\},$$

并注意到 $G^+ = \cup_{\delta\in(0,1]} G_\delta$。

令 $r \in \mathbb{N}$，使得 $\mu^{*r}(G^+) > 0$。存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\mu^{*r}(G_{1/n_0}) > 0$。于是，我们定义

$$T_{n_0} := \inf\{m \in \mathbb{N} : Y_{mr} \dots Y_{(m-1)r+1} \in G_{1/n_0}\}. \tag{4.2}$$

由于 $(Y_{mr} \dots Y_{(m-1)r+1})_{m\in\mathbb{N}}$ 是服从分布 μ^{*r} 的独立同分布序列，且 $\mu^{*r}(G_{1/n_0}) > 0$，我们知道 $T_{n_0} < \infty \mathbb{P}$-几乎必然。

Le理 4.3。假设 μ 是严格收缩的。采用上述记号 s,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{x\in S^+} \frac{\|A_n x\|}{\|A_n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{v(A_n)}{\|A_n\|} \geq \frac{1}{n_0} \min_{1\leq n\leq rT_{n_0}} \frac{v(A_n)}{\|A_n\|} > 0 \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{4.3}$$

and

$$\inf_{n\geq rT_{n_0}} \inf_{x,\, y\in S^+} \frac{\langle y, A_n x\rangle}{\|Y_1^t \cdots Y_n^t\, y\|} > 0 \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{4.4}$$

证明。令 $x \in S^+$。令 $n \in \mathbb{N}$，使得 $n \geq rT_{n_0}$。根据 G 对 S^+ 的作用定义以及 G_{1/n_0} 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
\|A_n x\| &= \|Y_n \cdots Y_{rT_{n_0}+1}\big(Y_{rT_{n_0}} \cdots Y_{r(T_{n_0}-1)+1} \cdot (A_{r(T_{n_0}-1)}x)\big)\| \, \|A_{rT_{n_0}} x\| \\
&\geq d\|Y_n \cdots Y_{rT_{n_0}+1} e\|/n_0 \, \|A_{rT_{n_0}} x\| \\
&\geq \|Y_n \cdots Y_{rT_{n_0}+1}\| \, \|A_{rT_{n_0}} x\|/n_0 \geq \|A_n\| \frac{\|A_{rT_{n_0}} x\|}{n_0 \|A_{rT_{n_0}}\|},
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式用到了引理 2.2 的第 (ii) 项。

因此

$$\|A_n x\|/\|A_n\| \geq v(A_{rT_{n_0}})/(n_0\|A_{rT_{n_0}}\|)\mathbf{1}_{\{rT_{n_0}\leq n\}} + v(A_n)/\|A_n\|\mathbf{1}_{\{rT_{n_0}>n\}},$$

这就证明了 (4.3)。

下面证明 (4.4)。我们采用类似的方法。令 $x, y \in S^+$。令 $n \geq rT_{n_0}$。我们有

$$\begin{aligned}
\langle y, A_n x\rangle &= \langle y, Y_n \cdots Y_{rT_{n_0}+1}\big(Y_{rT_{n_0}} \cdots Y_{r(T_{n_0}-1)+1} \cdot (A_{r(T_{n_0}-1)}x)\big)\rangle \|A_{rT_{n_0}} x\| \\
&\geq \|Y_{rT_{n_0}+1}^t \cdots Y_n^t y\| \, \|A_{rT_{n_0}} x\|/n_0 \\
&\geq \frac{1}{n_0} \frac{\|Y_1^t \cdots Y_n^t y\| \, \|A_{rT_{n_0}} x\|}{\|Y_1^t \cdots Y_{rT_{n_0}}^y\|} = \frac{1}{n_0} \frac{\|Y_1^t \cdots Y_n^t y\| \, \|A_{rT_{n_0}} x\|}{\|A_{rT_{n_0}}\|},
\end{aligned}$$

由 (4.3) 可得 (4.4)。 □

我们用 $\tilde{\mu}$ 表示映射 $g \to g^t$ 对 μ 的推前像。

定理 4.4. 假设 μ 是严格收缩的，且 $\tilde{\mu}$ 存在一阶矩。那么，

$$\left(\sup_{x,\,y\in S^+}\left|\frac{\log\langle y, A_n x\rangle}{n}-\lambda_\mu\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\ \ \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

特别是，

$$\left(\left|\frac{\inf_{x,\,y\in S^+}\log\langle y, A_n x\rangle}{n}-\lambda_\mu\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\ \ \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

此外，$((\log\|A_n\|-n\lambda_\mu)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $((\log\ \kappa(A_n)\ -n\lambda_\mu)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎必然收敛于 $\mathbb{P}$，并在 L^1 中收敛于 0；而 $((\log v(A_n)\ -n\lambda_\mu)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎必然收敛于 $\mathbb{P}$，其极限为 0。

证明。首先注意到命题 4.1 适用，由此可知 $\log\|A_n\|$ 和 $\log\ \|A_n^t\|$ 几乎必然收敛且在 L^1 中收敛，这由引理 2.2 的第（iii）项得出。

根据引理 4.3，存在一个随机变量 $W\geq 0$，使得对每个 x、$y\in S^+$ 以及每个 $n\in\mathbb{N}$，在集合 $\{rT_{n_0}\leq n\}$ 上，

$$0\leq\log\|A_n\|-\log\langle y, A_n x\rangle\leq\log W+\log\|A_n\|-\log\|Y_1^t\cdots Y_n^t y\|\,. \tag{4.5}$$

设 $\varepsilon>0$。利用 $(Y_1,\ldots,Y_n)$ 和 $(Y_n,\ldots,Y_1)$ 具有相同的分布，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(\sup_{y\in S^+}\left|\log\|Y_1^t\cdots Y_n^t y\|-\log\|Y_1^t\cdots Y_n^t e\|\right|\geq\varepsilon n)\\ \leq&\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(\sup_{y\in S^+}\sup_{m\in\mathbb{N}}\left|\log\|Y_m^t\cdots Y_1^t y\|-\log\|Y_m^t\cdots Y_1^t e\|\right|\geq\varepsilon n)<\infty\,,\end{aligned}$$

其中我们对 $\tilde{\mu}$ 使用了命题 3.2。

根据博雷尔-坎特利引理，并使用引理 2.2 的第 (ii) 项，我们推得

$$\frac{\sup_{y\in S^+}\left|\log\|Y_1^t\cdots Y_n^t y\|-\log\|A_n^t\|\right|}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\mathbb{P}\text{-a.s.}$$

将此与 (4.5) 结合起来（注意，$\mathbb{P}(T_{n_0}<\infty)=1$ 且对每个 $g\in G$ 都有 $\|g\|\leq d\|g^t\|$），我们得到

$$\sup_{x,\,y\in S^+}\frac{\left|\log\|A_n\|-\log\langle y, A_n x\rangle\right|}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\mathbb{P}\text{-a.s.}$$

这就得到了系数所需的收敛性。$\kappa(A_n)$ 和 $v(A_n)$ 的 $\mathbb{P}$-几乎处处收敛性由以下不等式得到

$$\frac{\inf_{x,\,y\in S^+}\log\langle y, A_n x\rangle}{n}\leq\frac{\log v(A_n)}{n}\leq\frac{\log\kappa(A_n)}{n}\leq\frac{\log\|A_n\|}{n}\,.$$

$\kappa(A_n)$ 的 L^1 收敛性由定理 4.2 应用于 $\tilde{\mu}$ 得出，这里使用了引理 2.2 的条目（iii），并注意到（$Y_1, \dots, Y_n$）与（$Y_n, \dots, Y_1$）具有相同的分布。□

假设 μ （因此 $\tilde{\mu}$）严格收缩，且 μ 和 $\tilde{\mu}$ 都具有一阶矩。记 $\tilde{\nu}$ 为 S^+上的唯一 $\tilde{\mu}$-不变概率测度，并利用 A_n^t 和 $Y_n^t \dots Y_1^t$具有相同的分布，可得

$$\begin{aligned}\int_{G\times S^+} \sigma(g,x)d\mu(g)d\nu(x) = \lambda_\mu &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\log\|A_n\|]}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\log\|A_n^t\|]}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[\log\|Y_n^t\dots Y_1^t\|]}{n} \\ &= \lambda_{\tilde{\mu}} = \int_{G\times S^+} \sigma(g,x)d\tilde{\mu}(g)d\tilde{\nu}(x)\,.\end{aligned}$$

在我们的假设下，不能指望 L^1 在 $v(A_n)$时满足定理 4.4 中的收敛性。

例如，取 μ，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$，$\mu(\{g_n\}) = \frac{1}{\pi^2 n^2}$ 且 $\mu(\{h\}) = 5/6$，其中 $g_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{-n}\end{pmatrix}$ 且 $h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$。那么，对任意 $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, $v(g_{k_1}\cdots g_{k_r}) \le v(g_{k_r}) \le 2^{-k_r}$。

因此 $\mathbb{E}(\log v(A_n)) \le \frac{1}{6^{n-1}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{-k}{\pi^2 k^2} = -\infty$。

同样，即使 μ 和 $\tilde{\mu}$ 严格收缩且具有一阶矩，我们也未必能得到系数的 L^1 收敛。

例如，设 μ 满足 $\mu(\{Id\}) = 1/2$，其中 Id 是单位矩阵。那么，$\mu^{*n}(\{Id\}) \ge 2^{-n}$，并且设 $\{e_1, e_2\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的标准基，则 $\mu(\{g\in G : \langle e_1, ge_2\rangle = 0\}) > 0$，因此 $\mathbb{E}(\log\langle e_1, A_n e_2\rangle) = -\infty$。

5 中心极限定理与渐近方差

我们首先证明一个鞅-余边界分解。对于可逆矩阵，这种分解此前仅在 $p\ge 2$ 的情况下成立，而在这里，只要 $p\ge 1$，它就成立。

命题 5.1. 假设 μ 是严格收缩的，且具有 $p\ge 1$ 阶矩。存在一个定义在 X 上的连续有界函数 ψ，使得 $\big(\sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot x) - \lambda_\mu + \psi(A_n\cdot x) - \psi(A_{n-1}\cdot x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 L^p 中的鞅差序列。此外，若 W_0 是一个分布为 ν、且与 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 独立的随机变量，则 $\big(\sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot W_0) - \lambda_\mu + \psi(A_n\cdot W_0) - \psi(A_{n-1}\cdot W_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 L^p 中的平稳遍历鞅差序列。

注. 定理中的函数 ψ 定义为

$$\psi(x) := \sum_{n\geq 1} \Big(\int_{G\times G} \sigma(g, g'\cdot x) d\mu(g) d\mu^{*(n-1)}(g') - \lambda_\mu \Big) . \tag{5.1}$$

证明。令 ψ 由 (5.1) 给出。由命题 3.2 可知, ψ 定义良好且连续。

接着，注意到

$$\sigma(g,x) - \lambda_\mu = \sigma(g,x) - \int_G \sigma(g',x) d\mu(g') + \int_G \sigma(g',x) d\mu(g') - \lambda_\mu$$

并且，根据 ψ 的定义,

$$\int_G \sigma(g,x) d\mu(g) - \lambda_\mu + \int_G \psi(g\cdot x) d\mu(g) = \psi(x) .$$

现在, $\Big(\sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot x) - \int_G \sigma(g, A_{n-1}\cdot x) d\mu(g)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 L^p 中的一列鞅差（注意, $x \mapsto \int_G \sigma(g, x) d\mu(g)$ 有界）。此外,

$$\int_G \sigma(g, A_{n-1}\cdot x) d\mu(g) - \lambda_\mu + \psi(A_n\cdot x) - \psi(A_{n-1}\cdot x) = \psi(A_n\cdot x) - \int_G \psi(g A_{n-1}\cdot x)\, d\mu(g),$$

右端定义了一列有界鞅差。

最后一个结论由 $((Y_n, A_{n-1}\cdot W_0))_{n\in\mathbb{N}}$ 是平稳且（唯一）遍历的马尔可夫链这一事实得出。

□

定义 5.1. 如果概率测度 μ 在 G 上是非周期的，则称其为非周期的；其中，由$\{\log \kappa(g) : g \in \Gamma_\mu\}$ 生成的群在 $\mathbb{R}$中稠密。

现在我们陈述并证明各种中心极限定理。这些中心极限定理已由 Hennion [23] 采用略有不同的方法（同样基于鞅-余边界分解）证明。我们通过从多种角度刻画渐近方差 s^2，并刻画 $s^2 > 0$这一事实，补充了 Hennion 的结果。该刻画与 [7] 或 [22] 中的相同，但其证明不需要像这些文献中的证明那样假设指数矩。

命题 5.2. 假设 μ 是严格收缩的，并且具有二阶矩。则存在 $s^2 \geq 0$，使得当 W_0如命题 5.1 中所定义时， $\frac{1}{n}\mathbb{E}[(\sigma(A_n, W_0) - n\lambda_\mu)^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s^2$以及 $\frac{1}{\sqrt{n}}(\sigma(A_n, W_0) - n\lambda_\mu) \Rightarrow \mathcal{N}(0, s^2)$。如果不存在 $m \in \mathbb{N}$且在 S^+上连续的 ψ_m，使得

$$\sigma(g,x) - m\lambda_\mu = \psi_m(x) - \psi_m(g\cdot x) \qquad \textit{for } \mu^{\otimes m}\otimes\nu\textit{-almost every } (g,x) \in G\times S^+ , \tag{5.2}$$

那么 $s^2 > 0$。特别地，如果 μ 是非周期的，那么 $s^2 > 0$。

注。在命题的假设下，实际上我们有函数型中心极限定理。众所周知，方差由下式给出

$$\begin{aligned} s^2 &= \mathbb{E}(\sigma(A_1, W_0)^2) + 2\sum_{n\geq 2} \mathbb{E}(\sigma(A_1, W_0)\sigma(A_n, W_0)) \\ &= \int_{G\times S^+} \sigma^2(g,x) d\mu(g) d\nu(x) + 2\sum_{n\geq 2} \int_{G^2\times S^+} \sigma(g,x)\sigma(g'g,x) d\mu^{*(n-1)}(g') d\mu(g) d\nu(x)\,. \end{aligned}$$

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $D_n := \sigma(Y_n, A_{n-1}\cdot W_0) - \lambda_\mu + \psi(A_n \cdot W_0) - \psi(A_{n-1}\cdot W_0)$。根据命题 5.1，$(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 L^2 中的平稳遍历鞅差序列。特别地，$(D_1 + \ldots + D_n)/\sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{N}(0, s^2)$，其中 $s^2 = \mathbb{E}(D_1^2) = \mathbb{E}((D_1 + \ldots + D_n)^2)/n$。因此，中心极限定理及其方差的描述可由下述命题 5.1 的重新表述推出：

$$\sigma(A_n, W_0) - n\lambda_\mu = (D_1 + \ldots + D_n) + \psi(W_0) - \psi(A_n \cdot W_0)\,. \tag{5.3}$$

现在假设 $s^2 = 0$。那么

$$\int_G (\sigma(g,x) - \lambda_\mu - \psi(x) + \psi(g\cdot x))^2 \, d\mu(g) d\nu(x) = 0\,.$$

因此，(5.2) 对 $m = 1$ 和 $\psi_1 = \psi$ 成立。令 $m > 1$。注意，μ^{*m} 是严格收缩的，且具有 p 阶矩；并且唯一的 μ^{*m}-不变测度就是唯一的 μ-不变测度。另请注意，$\lambda_{\mu^{*m}} = m\lambda_\mu$。将上述论证应用于 μ^{*m}，可得存在一个连续的 ψ_m，满足 (5.2)。

利用 ψ_m 的连续性，我们看到（5.2）对每个 $g \in \operatorname{supp}\mu^{*m}$ 以及每个$x \in \operatorname{supp}\nu$都成立。

设 $g \in \operatorname{supp}\mu^{*m} \subset \Gamma_\mu$。那么，$v_g \in \Lambda_\mu \subset \operatorname{supp}\nu$。由于 $g\cdot v_g = v_g$ 以及 $\sigma(g, v_g) = \log\kappa(g)$，我们推得 $\psi_m(g\cdot v_g) = \psi_m(v_g)$，并且 $\log\kappa(g) = m\lambda_\mu$。

因此，$\log\kappa(\Gamma_\mu) \subset \lambda_\mu\mathbb{N}$，且 μ 不可能是非周期的。 □

命题 5.3. 假设 μ 是严格收缩的，且具有二阶矩。那么，令 s^2 如命题 5.2 中所述，

$$\begin{aligned} s^2 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in S^+} \mathbb{E}((\sigma(A_n, x) - n\lambda_\mu)^2) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}((\log\|A_n\| - n\lambda_\mu)^2) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}((\log v(A_n) - n\lambda_\mu)^2) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}((\log\kappa(A_n) - n\lambda_\mu)^2)\,, \end{aligned}$$

并且，将 $\sigma(A_n, W_0)$ 替换为 $\sigma(A_n, x)$、$\log \|A_n\|$、$\log \upsilon(A_n)$ 或 $\log \kappa(A_n)$ 时，中心极限定理仍然成立。此外

$$\sup_{x\in S^+}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}(\sigma(A_n,x)-n\lambda_\mu\le t\sqrt{n})-\phi(t/s^2)\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

证明。该结果由命题 5.2 和命题 3.2（使用 (3.1)）推出。 □

我们还有一个关于系数的（函数型）中心极限定理。正如上一节所指出的，一般而言，不能指望像命题 5.3 那样借助矩阵系数来识别 s^2。

命题 5.4。假设 $\tilde{\mu}$ 严格收缩且具有二阶矩。那么，

$$\sup_{x,\,y\in S^+}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}(\log\langle x,A_ny\rangle)-n\lambda_\mu\le t\sqrt{n})-\phi(t/s^2)\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\,,$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}(\inf_{x,\,y\in S^+}\log\langle x,A_ny\rangle)-n\lambda_\mu\le t\sqrt{n})-\phi(t/s^2)\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

证明。我们按照定理 4.4 的证明进行。将命题 3.2 应用于 $\tilde{\mu}$，得

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(\sup_{y\in S^+}\left|\log\|Y_1^t\cdots Y_n^t\|-\log\|Y_1^t\cdots Y_n^ty\|\right|\ge\varepsilon\sqrt{n})$$

$$\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(\sup_{y\in S^+}\sup_{m\in\mathbb{N}}\left|\log\|Y_m^t\cdots Y_1^t\|-\log\|Y_m^t\cdots Y_1^ty\|\right|\ge\varepsilon\sqrt{n})<\infty\,.$$

利用 (4.5)， 再结合 $\mathbb{P}(T_{n_0}<\infty)=1$ 这一事实，以及取 $\tilde{\mu}$ 时的命题 5.3，即得所需结果 . □

6 几乎必然不变性原理

定理 6.1. 设 $p\ge 2$。假设 μ 严格收缩，且具有 p 阶矩。设 s^2 如命题 5.2 中所述。则可以在另一个概率空间上重新定义过程 $(\sigma(A_n,W_0))_{n\in\mathbb{N}}$，使得该空间上存在一列独立同分布变量 $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其分布为 $\mathcal{N}(0,s^2)$，并且

$$|\sigma(A_n,W_0)-n\lambda_\mu-(N_1+\ldots+N_n)|=o(\sqrt{n\log\log n})\quad\mathbb{P}\text{-}a.s.\ \ if\ p=2$$
$$and\quad|\sigma(A_n,W_0)-n\lambda_\mu-(N_1+\ldots+N_n)|=o(n^{1/p})\quad\mathbb{P}\text{-}a.s.\ \ if\ p>2$$

注。这里不要求 $s^2>0$。

证明。当 $p>2$ 时，考虑到 (3.2)，结论由 [13] 的定理 1 得出。当 $p=2$ 时，结论由 (5.3) 以及 L^2 中关于具有平稳遍历增量的鞅的 ASIP 得出。□

仿照定理 4.2 的证明，可以证明，将上述定理中的 $(\sigma(A_n,W_0))_{n\in\mathbb{N}}$ 替换为以下任一序列，结论仍成立：$(\sigma(A_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$（给定 $x\in S^+$ 时）、$(\log\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$、$(\log\kappa(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 或 $(\log\upsilon(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$。

下面给出矩阵系数的 ASIP。

定理 6.2。设 $p \geq 2$。假设 μ 严格收缩，且 μ 和 $\tilde{\mu}$ 具有 p 阶矩。那么，对于每个 x、$y \in S^+$，都可以在另一个概率空间上重新定义过程 $(\log\langle y, A_n x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$，并且该空间上存在独立同分布变量 $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其分布为 $\mathcal{N}(0, s^2)$，使得

$$|\log\langle y, A_n x\rangle - n\lambda_\mu - (N_1 + \ldots + N_n)| = o(\sqrt{n\log\log n}) \quad \mathbb{P}\text{-}a.s. \ \text{if } p = 2$$
$$\text{and} \quad |\log\langle y, A_n x\rangle - n\lambda_\mu - (N_1 + \ldots + N_n)| = o(n^{1/p}) \quad \mathbb{P}\text{-}a.s. \ \text{if } p > 2$$

证明可参照定理 4.4 的证明进行。由于 $\tilde{\mu}$ 几乎具有 $p \geq 1$ 阶矩，

$$\frac{\sup_{y\in S^+}\left|\log\|Y_1^t\cdots Y_n^t\| - \log\|Y_1^t\cdots Y_n^t y\|\right|}{n^{1/p}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.},$$

再利用 (4.5) 以及 $\mathbb{P}(T_{n_0} < \infty) = 1$ 这一事实，根据定理 6.1 即可得出结论。

在具有指数矩的情况下，结合 [13] 和 [11], 中的思路，可以在 ASIP 中得到对数速率。不过，这些速率不如独立变量之和的情形好：对于独立同分布变量之和，在指数矩的阶为 $\gamma \in (0, 1]$ 的条件下，可以得到速率 $O((\log n)^{(1/_g amma)})$，而不是 $O((\log\ n)^{2+1/\gamma})$。下面陈述相关结果，证明将在后续工作 [15] 中给出。

定理 6.3. 假设 μ 是严格收缩的，且具有 $\gamma \in (0, 1]$ 阶指数矩。设 s^2 与命题 5.2 中的定义相同。那么，可以在另一个概率空间上重新定义过程 $(\sigma(A_n, W_0))_{n\in\mathbb{N}}$，并且该空间上存在分布为 $\mathcal{N}(0, s^2)$ 的独立同分布变量 $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$|\sigma(A_n, W_0) - n\lambda_\mu - (N_1 + \ldots + N_n)| = O((\log n)^{2+1/\gamma}) \quad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

同样，如果将 $(\sigma(A_n, W_0))_{n\in\mathbb{N}}$ 替换为以下任一序列，定理仍然成立：$(\sigma(A_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$、$(\log\ \|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$、$(\log\ \kappa(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 或 $(\log\ v(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$。

关于系数，我们也有一个结果。

定理 6.4. 假设 μ 是严格收缩的，且 μ 和 $\tilde{\mu}$ 存在阶数为 $\gamma \in (0, 1]$的指数矩。令 s^2 如命题 5.2 中所述。则对任意 x、$y \in S^+$，可以在另一个概率空间上重新定义过程 $(\log\langle y, A_n x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$，使得该空间上存在一列分布为 $\mathcal{N}(0, s^2)$ 的独立同分布正态变量 $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足

$$|\log\langle y, A_n x\rangle - n\lambda_\mu - (N_1 + \ldots + N_n)| = O((\log n)^{2+1/\gamma}) \quad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

证明. 令 $x, y \in S^+$。令 $n \in \mathbb{N}$。我们有

$$\log\langle y, A_n x\rangle - \log\|A_n x\| = \log\langle y, A_n \cdot x\rangle\,.$$

鉴于定理 6.3，只需证明存在 $c > 0$ 使得

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|\log\langle y, A_n \cdot x\rangle| \geq c(\log n)^{1/\gamma}) < \infty\,.$$

我们将使用以下简单观察，它由 $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的独立性推出。对于每个 x、$y \in S^+$，每个整数 $1 \leq m \leq n$ 以及每个 $t > 0$

$$\mathbb{P}(|\log\langle y, A_n \cdot x\rangle| \geq t) \leq \sup_{u,v\in S^+} \mathbb{P}(|\log\langle u, A_m \cdot v\rangle| \geq t)\,.$$

设 η、δ 如 (8.4) 中所述。对于 $n \geq [(\log n)^{c\gamma/\eta}]$（其中 $[\cdot]$ 为整数部分），利用 (8.4)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\log\langle y, A_n \cdot x\rangle| \geq c(\log n)^{1/\gamma}) &= \mathbb{P}(|\log\langle y, A_n \cdot x\rangle| \geq \eta(\log(n^{(c/\eta)^\gamma}))^{1/\gamma}) \\ &\leq \mathbb{P}\big(\sup_{u,v\in S^+} |\log\langle u, A_{[(\log(n^{(c/\eta)^\gamma}))^{1/\gamma}]} \cdot v\rangle| \geq \eta[(\log(n^{c\gamma/\eta}))^{1/\gamma}\big) \\ &= o(\exp(-\delta[(\log(n^{(c/\eta)^\gamma}))^{1/\gamma}]^\gamma) = o(n^{-\delta(c/\eta)^\gamma})\,,\end{aligned}$$

取 $c = \eta(2/\delta)^{1/\gamma}$ 即得结果。 □

7 Berry-Esseen 定理

7.1 范数余循环与矩阵范数的 Berry-Esseen 定理

定理 7.1. 设 $p \in (2, 3]$. 假设 μ 是严格收缩的，且具有 p阶矩。假设 $s^2 > 0$，其中 s^2 如命题 5.2 中所述。于是，令 $v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{p/2-1}$，我们有

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\big(\sigma(A_n, W_0) - n\lambda_\mu \leq t\sqrt{n}\big) - \Phi(t/s)\right| = O(v_n)\,, \tag{7.1}$$

$$\sup_{x\in S^+}\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\big(\sigma(A_n, x) - n\lambda_\mu \leq t\sqrt{n}\big) - \Phi(t/s)\right| = O(v_n)\,, \tag{7.2}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}\big(\log\|A_n\| - n\lambda_\mu \leq t\sqrt{n}\big) - \Phi(t/s)\right| = O(v_n)\,, \tag{7.3}$$

证明. 采用 (3.2 重做 [16] 的定理 2.1 的证明，其中 $T = n^{p/2-1}$). □

注。根据前面提到的一些论证，如果 $\tilde{\mu}$ 严格收缩且具有 $p \in$ 阶矩 $(2, 3]$，那么 (7.3) 也成立。注意，(7.1) 也可由定理 2.3

的 [27], 推出，因为由于命题 3.2 中系数 $\delta_{\infty,\ p}$ 的指数收敛，假设 2.1 得以满足。

最后要提到，Grama 等人 [22] 在其条件 $A.2$下，为 $p=3$ 证明了 (7.2) 和 (7.3)。该条件等价于下文定理 7.6 中所用的条件。

7.2 谱半径和矩阵系数的 Berry-Esseen 定理

命题 7.2。设 $p \in (2,3)$。假设 μ 是严格收缩的，具有 p 阶矩，并且几乎具有阶数为 $q \in [p,\max(p,(p-2)/(3-p))]$的矩。假设$s^2>0$。若 $p \in (2,1+\sqrt{3}]$，令 $v_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{p/2-1}$；若 $p \in (1+\sqrt{3},3]$，则令 $v_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{q/2(q+1)}$。于是，

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\big(\log v(A_n)-n\lambda_\mu \le t\sqrt{n}\big)-\Phi(t/s)\right|=O(v_n) \tag{7.4}$$

and

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\big(\log \kappa(A_n)-n\lambda_\mu \le t\sqrt{n}\big)-\Phi(t/s)\right|=O(v_n)\,. \tag{7.5}$$

注。当 $p \le 1+\sqrt{3}$ 时，关于 q 的条件为 $q=p$，因此满足条件。当 $p=3$ 时，关于 q 的条件为 $q \ge p$。若 $\tilde{\mu}$ 满足该命题的假设，则 (7.4) 和 (7.5) 也成立。

证明。应用命题 3.2（取 $p=q$）和定理 7.1，可知我们可以使用 [16] 的引理 2.1，其中 $T_n=\log\|A_n\|-n\lambda_\mu$，$R_n=\log v(A_n)-\log\|A_n\|$，$a_n=n^{(p-2)/2}$，$b_n=n^{q/2(q+1)}$ 和 $c_n=(\sqrt{n}/b_n)^q$，从而得到 (7.4)。接着，由于 $v(A_n)\le\kappa(A_n)\le\|A_n\|$，可得 (7.5)。□

命题 7.3。假设 μ 是严格收缩的，具有三阶矩，并且几乎具有 $\gamma \in$ 阶指数矩（$0,1$]。假设 $s^2>0$。令 $v_n=(\log\ n^{1/\gamma})$。那么，

$$n^{1/2}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\big(\log v(A_n)-n\lambda_\mu \le t\sqrt{n}\big)-\Phi(t/s)\right|=O(v_n)$$

and

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}\big(\log \kappa(A_n)-n\lambda_\mu \le t\sqrt{n}\big)-\Phi(t/s)\right|=0(v_n)\,. \tag{7.6}$$

注。若 $\tilde{\mu}$ 满足命题的假设，(7.6) 也成立。在 [22] 中，已在比指数矩强得多的假设下证明了 (7.6)。

证明。与之前一样，我们证明将 $\kappa(A_n)$ 换成 $v(A_n)$ 后的结论。设 $\varepsilon \in (0,1)$ 为满足以下条件的 (3.5)成立。令 x、$y \in S^+$。令 $n \in \mathbb{N}$。令 $\omega \in \Omega$。令 $1 \le m < [n/r]$ 使得

$c(Y_{mr}\cdots Y_{(m-1)r+1})(\omega) \le 1-\varepsilon$。利用余循环的上循环性质以及命题 2.1 的若干项（特别是第 (iv) 项），我们看到

$$\begin{aligned}|\sigma(A_n,x)-\sigma(A_n,y)| &\le |\sigma(Y_n\cdots Y_{mr+1},A_{mr}\cdot x)-\sigma(Y_n\cdots Y_{mr+1},A_{mr}\cdot y)| + |\sigma(A_{mr},x)-\sigma(A_{mr},y)| \\ &\le 2\ln\big(1/(1-d(A_{mr}\cdot x,A_{mr}\cdot y))\big) + \log\|A_{mr}\| - \log v(A_{mr}) \\ &\le 2\ln(1/\varepsilon) + \log\|A_{mr}\| - \log v(A_{mr})\,.\end{aligned}$$

定义

$$\Gamma_m := \{\exists k\in 1,\dots,m\,:\, c(Y_{kr}\cdots Y_{(k-1)r+1})\le 1-\varepsilon\}\,. \tag{7.7}$$

对 x 取上确界、对 y取下确界，可推得在 Γ_m 上，

$$\log\|A_n\| - \log v(A_n) \le 2\ln(1/\varepsilon) + \max_{1\le k\le m}\big(\log\|A_{kr}\| - \log v(A_{kr})\big)\,.$$

因此，对于 $\eta m \ge \ln(1/\varepsilon)$，利用下文的引理 7.4，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\log\|A_n\| - \log v(A_n)\ge 2\eta m) &\le \mathbb{P}(\Gamma_m^c) + \mathbb{P}\big(\max_{1\le k\le m}(\log\|A_{kr}\| - \log v(A_{kr}))\ge \eta m\big) \\ &\le (1-\gamma)^m + C_\eta \mathrm{e}^{-\delta_\eta n}\,.\end{aligned}$$

取 $m\sim C\log n$，其中 $C|\log(1-\gamma)|>1/2$，可推得右侧有上界 $D/\sqrt{n}$。利用 [16], 的引理 2.1 并应用定理 7.1，我们得出结论。□

引理 7.4. 假设 μ 是严格收缩的，并且几乎具有阶数为 $\gamma\in(0,1]$ 的某个指数矩。那么，存在 η、$\delta>0$，使得

$$\mathbb{P}(\max_{1\le k\le n}\big|\log v(A_k) - \log\|A_k\|\,\big|\ge \eta n) \le \mathrm{e}^{-\delta n^\gamma}\,.$$

证明. 对每个 $n\in\mathbb{N}$，利用 $\|\cdot\|$ 的次乘性以及 v 的超乘性可知，令 $\tau := \mathbb{E}(\log\|Y_1\|/v(Y_1))$，

$$\max_{1\le k\le n}\big|(\log(\|A_k\|) - \log(v(A_k))\,\big| \le \max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}\big[\log\big(\|Y_i\|/v(Y_i)\big)-\tau\big]\Big| + n\tau\,.$$

那么，所需结果便由 [19], 的定理 2.1 得出；参见他们的估计式 (2.7)。 □

命题 7.5. 设 $p\in(2,3]$. 假设 μ 或 $\tilde\mu$ 在 $p<3$ 时满足命题 7.2 的假设，并在 $p=3$ 时满足命题 7.3 的假设。那么，(7.5)（若 $p<3$）和 (7.6)（若 $p=3$）成立，其中以 $\inf_{x,\ y\in S^+}\langle y,\ A_nx\rangle$ 替代 $\kappa(A_n)$。

证明. 回忆一下，对于每个 $0 < \delta \le 1$，我们定义了

$$G_\delta := \{g \in G : \langle x, g \cdot y\rangle \ge \delta \quad \forall x, y \in S^+\}.$$

注意到， $g \in G_\delta$ 当且仅当对于每个 $y \in S^+$， $g \cdot y$ 的所有坐标都大于 δ，即 $g \cdot y - d\delta e \in (\mathbb{R}^+)^d$。

设 $x, y \in S^+$。设 $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$ 且 $n_0 \in \mathbb{N}$。设 $1 \le m < [n/r]$ 满足 $(Y_{mr} \cdots Y_{(m-1)r+1})(\omega) \in G_{1/n_0}$。我们有（省略 ω）

$$\langle y, A_n x\rangle \ge \langle Y_{mr+1}^t \cdots Y_n^t y, \frac{A_{mr}x}{\|A_{mr}x\|}\rangle \|A_{mr}x\| \ge (1/n_0)\|Y_{mr+1}^t \cdots Y_n^t y\| \, \frac{\|A_n x\|}{\|Y_n \cdots Y_{mr+1}\|}.$$

因此，在集合上

$$\Delta_{n,m} := \{\omega \in \Omega \,|\, \exists k \in [m, [n/r]-1] : (Y_{kr} \cdots Y_{(k-1)r+1})(\omega) \in G_{1/n_0}\},$$

$$\begin{aligned} &\inf_{x,\, y \in S^+} \left(\log\langle y, A_n x\rangle - \log\|A_n x\|\right) \\ &\ge -\log(n_0) + \min_{mr \le \ell \le n-1} \left(\log v(Y_{\ell+1}^t \cdots Y_n^t) - \log\|Y_{\ell+1}^t \cdots Y_n^t\|\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

注意到以上所有量均为非正数，并且 $\min_{mr \le \ell \le n} \left(\log\, v(Y_{\ell+1}^t \cdots Y_n^t) - \log\, \|Y_{\ell+1}^t \cdots Y_n^t\|\right)$ 与 $\min_{1 \le \ell \le n-mr} \left(\log\, v(Y_\ell^t \cdots Y_1^t) - \log\, \|Y_\ell^t \cdots Y_1^t\|\right)$具有相同的分布。

N还要注意，对于足够大的 n_0，存在某个 $0 \le \eta < 1$ 使得 $\mathbb{P}(\Delta_{n,m}^c) = \eta^{[n/r-m]}$.

然后，根据引理 2.1，并利用命题 3.2 和引理 7.4，取 $\tilde{\mu}$，并令 $m = [n/r] - C\log\, n$，其中 $C|\log\eta| > 1/2$（只要 $\eta = 0$，这总是成立）。□

现在，我们将在强得多的条件下，得到谱半径和系数的速率 $O(1/\sqrt{n})$。

定理 7.6. 设 $p \in (2, 3]$. 假设 μ 是严格收缩的，且存在 p 阶矩。假设 $s^2 > 0$。假设存在 $0 < \delta \le 1$，使得 $\mu^{*r}(G_\delta) = 1$。那么，定理 7.1 的结论成立，其中以 $\log\, (\inf_{x,y\in S^+}\langle x, A_n y\rangle$ 或 $\log\, \kappa(A_n)$ 代替 $\log\, \|A_n\|$。

证明。根据假设，对于每个 $n \ge r$和 $x \in S^+$，利用 $\frac{A_n x}{\|A_n x\|} = (Y_n \cdots Y_{n+1-r}) \cdot (A_{n-r}x)$，我们有，对于每个 $x, y \in S^+$

$$1 \ge \frac{\langle y, A_n x\rangle}{\|A_n x\|} \ge \delta \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

于是，由定理 7.1 以及 $\|A_n\| \ge \kappa(A_n) \ge \inf_{x,\ y\in S^+}\langle x, A_n y\rangle$. □ 可得结论。

现在我们给出一个与条件 $\mu^{*r}(G_\delta) > 0$ 等价的条件。针对正矩阵这一情形（因此在第10节讨论的一般情形中不成立），已有一个等价条件，见 [22], 他们的引理 2.1。

对于每个 $C > 0$ 和 $0 \le \gamma < 1$，令

$$G_{C,\gamma} := \{g \in G : c(g) \le \gamma \text{ and } \|g\| \le Cv(g^t)\}.$$

引理7.7. 对于每个 $0 < \delta \le 1$，存在 $0 \le \gamma < 1$ 和 $C > 0$ 使得$G_\delta \subset G_{C,\gamma}$。反过来，对于每个 $0 \le \gamma' < 1$ 以及每个 $C' > 0$，存在 $0 < \delta' \le 1$ 使得$G_{C',\gamma'} \subset G_{\delta'}$。因此，存在 $0 < \delta \le 1$ 使得 $\mu(G_\delta) > 0$ 当且仅当存在 $0 \le \gamma < 1$ 和$C > 0$ 使得 $\mu(G_{C,\gamma}) > 0$。

证明。证明依赖于以下观察：对于每个 $x \in S^+$、$\langle x$、$ge\rangle = \|g^t x\|$ 和$\|g^t x\|/\|g\| \ge \langle x$, $g \cdot e\rangle/d \ge \|g^t x\|/(d\|g\|)$。

令 $g \in G_\delta$，其中 $\delta > 0$。根据前面的计算，$\|g\| \le v(g^t)/\delta$。

设 x、$y \in S^+$。下面来估计 $d(g \cdot x, g \cdot y)$。对于每个 $u \in S^+$，我们有

$$\delta\langle u, g \cdot y\rangle \le \delta \le \langle u, g \cdot x\rangle .$$

这意味着 $m(g\cdot x, g\cdot y) \ge \delta$（注意，此时必有 $\delta \le 1$。类似地，$m(g\cdot y, g\cdot x) \ge\delta$ 且 $d(g \cdot x, g \cdot y) \le \frac{1-\delta^2}{1+\delta^2} =: \gamma < 1$。因此，$G_\delta \subset G_{1/\delta,\ \gamma}$。

设 $0 \le \gamma < 1$ 和 $C > 0$。令 $g \in G_{C,\ \gamma}$。设 x、$y \in S^+$。注意，$m(g \cdot x, g \cdot y) \le 1$。因此，$\gamma \ge d(g \cdot x, g \cdot y) \ge \frac{1-m_{(g,\ x)}}{1+m(y,\ x)}$ 且 $m(y, x) \ge \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$。我们推知 $g \cdot y - \frac{1-\gamma}{1+\gamma} g \cdot x$ 具有非负坐标。取 $x = e$，可知对于每个 $u \in S^+$，

$$\langle u, g \cdot y\rangle \ge \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\langle u, g \cdot e\rangle \ge \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\|g^t x\|/(d\|g\|) \ge \frac{1-\gamma}{Cd(1+\gamma)} .$$

□

8 不变测度的正则性

我们在此证明不变测度在各种矩条件下的正则性性质。

定理8.1. 假设 $\tilde{\mu}$ 是严格收缩的，且存在 $p \ge 1$阶矩。那么

$$\int_{S^+} \sup_{y \in S^+} |\log\langle y, x\rangle|^p \, d\nu(x) < \infty . \tag{8.1}$$

注. 对于可逆矩阵，Benoist 和 Quint [1]证明，在存在 $p \geq 1$阶矩的条件下，$\sup_{y\in X}\int_X |\log\langle y, x\rangle|^{p-1}\, d\nu(x) < \infty$.

证明。众所周知，只需证明对于某个 $c>0$，$\sum_{n\geq 1} n^{p-1}\nu(\sup_{y\in X}|\log\langle y,\cdot\rangle| \geq cn) < \infty$。利用 ν 是 μ-不变的，只需证明

$$\sum_{n\geq 1} n^{p-1}\mathbb{P}\big(\sup_{x,\,y\in S^+}\big|\log\langle y, A_n\cdot x\rangle\big| \geq cn\big) < \infty\,.$$

现在，在 $\Delta_{n,\,1}$ 上，由 (7.8) 可得，

$$\big|\log\langle y, A_n\cdot x\rangle\big| \leq \log n_0 + \max_{1\leq k\leq n}\big|\log v(Y_k^t\cdots Y_n^t) - \log\|Y_k^t\cdots Y_n^t\|\big|\,, \tag{8.2}$$

根据命题 3.2 中的事实，我们得到 $\mathbb{P}(\Delta_{n,\,1}^c) \leq \eta^{[n/r-1]}$。 □

定理 8.2。假设 $\tilde{\mu}$ 严格收缩，且具有阶为 $\gamma\in(0,1]$ 的指数矩。那么，存在 $\delta>0$ 使得

$$\int_{S^+}\sup_{y\in S^+} \mathrm{e}^{\delta\left(-\log|\langle y,x\rangle|\right)^\gamma}\, d\nu(x) < \infty\,. \tag{8.3}$$

证明。按上述方法，只要证明存在 δ、$\eta>0$ 使得，定理便得证。

$$\sum_{n\geq 1}\mathrm{e}^{\delta n^\gamma}\mathbb{P}\big(\sup_{x,y\in S^+}\big|\log\langle y, A_n\cdot x\rangle\big| \geq \eta n\big) < \infty\,. \tag{8.4}$$

根据 (8.2) 和引理 7.4，我们得到结论。 □

9 偏差不等式

现在我们给出偏差估计。

命题 9.1. 假设 μ 是严格收缩的，且具有 $p\geq 1$ 阶矩。设 $\alpha\in(1/2,1]$ 使得 $\alpha\geq 1/p$。对于任意 $\varepsilon>0$，我们有

$$\sum_{n\geq 1} n^{\alpha p-2}\sup_{x\in S^+}\mathbb{P}\big(\max_{1\leq k\leq n}|\sigma(Y_k, A_{k-1}\cdot x) - k\lambda_\mu| \geq n^\alpha\varepsilon\big) < \infty\,.$$

注。利用命题 3.2 以及以下事实：对于 $Z\in L^p, p\geq 1, \sum_{n\geq 1} n^{p\alpha-1}\mathbb{P}(Z\geq n^\alpha\varepsilon) <\infty$，任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $\alpha>0$，都可以证明关于 $\log\|A_n\|-n\lambda_\mu$、$\log\kappa(A_n)-n\lambda_\mu$、$\log v(A_n) - n\lambda_\mu$ 或 $\sup_{x\in S^+}|\log\|A_n x\| - n\lambda_\mu|$ 的类似结果。

命题 9.1 是定理 4.1 针对正矩阵的版本，而定理 4.1 的表述针对可逆矩阵。证明完全相同。下面提及其中的关键要素：该结果涉及一个余循环，当 $p \geq 2$ 时，(5.1) 中的函数 ψ 有定义且有界，并且 $\sup_{k\geq 1} \sup_{x\in S^+} \|\mathbb{E}((\sigma(Y_k, A_{k-1}\cdot x))^2|\mathcal{F}_{k-1})\|_\infty < \infty$；而当 $1 \leq p < 2$ 时，则可以控制系数 $\delta_{1,\infty}(n)$。

关于矩阵系数，有如下结果。

命题 9.2. 假设 μ 是严格收缩的，且 μ 和 $\tilde{\mu}$ 的 $p \geq 1$ 阶矩存在。对任意 $\varepsilon > 0$，则

$$\sum_{n\geq 1} n^{\alpha p-2}\mathbb{P}(\sup_{x,\,y\in S^+} |\log\langle y, A_n x\rangle - n\lambda_\mu| \geq n^\alpha \varepsilon) < \infty\,.$$

注. 不能指望在概率测度内部对 $1 \leq k \leq n$ 取最大值，因为对于某些 x、 $y \in S^+$，可能有 $\mathbb{P}(\log\langle y, A_1 x\rangle = -\infty) > 0$。
证明。 利用 (7.8) 和 $m = 1$，我们看到在 $\Delta_{n,1}$

$$\begin{aligned}&\sup_{x,\,y\in S^+} |\log\langle y, A_n x\rangle - n\lambda_\mu| \\ \leq &\sup_{x\in S^+} |\log\|A_n x\| - n\lambda_\mu| + \max_{1\leq k\leq n} \big|\log v(Y_k^t\cdots Y_n^t) - \log\|Y_k^t\cdots Y_n^t\|\big|.\end{aligned}$$

最后，我们应用命题 9.1 后的注，以及随机变量 $\max_{1\leq k\leq n}\big|\log v(Y_k^t\cdots Y_n^t) - \log\|Y_k^t\cdots Y_n^t\|\big|$ 和 $\max_{1\leq k\leq n}\big|\log v(Y_k^t\cdots Y_1^t) - \log\|Y_k^t\cdots Y_1^t\|\big|$ 具有相同分布这一事实，再结合应用于 $\tilde{\mu}$ 的命题 3.2。□

10 锥上的推广

本节将说明如何把前面的结果推广到一般的锥。在前几节中，我们研究了正矩阵的乘积，也就是保持锥 $(\mathbb{R}^+)^d$ 不变的矩阵的乘积。本节将考虑更一般的锥。这类推广也曾在 [7]中得到研究。

下面将讨论许多闭实锥的例子。例如，洛伦兹锥（或冰淇淋锥）： $\{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $z \geq 0, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq z^2\}$。保持洛伦兹锥不变的线性算子（矩阵）已由 Loewy 和 Schneider 进行了详细研究 [30]。

另一个例子是 K_S 阶数为 n 的半正定矩阵所构成的锥，它被视为阶数为 n的对称矩阵向量空间中的一个锥。保持不变的算子示例 K_S

为 $M \mapsto A^t M A$，其中 A是大小为 n的矩阵，或者是 $M \mapsto \mathrm{tr}(MR_0)S_0$，其中 R_0、 $S_0 \in K_S$以及它们的凸组合。

设 $d \geq 2$。我们赋予 $V = \mathbb{R}^d$ 通常的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 以及相应的范数$\| \cdot \|_2$。

设 K 是 $\mathbb{R}^d$的一个具有非空内部的闭真凸锥。回顾一下， $\mathbb{R}^d$ 的锥是一个在非负实数乘法下保持不变的 $\mathbb{R}^d$ 集合；若 $K \cap (-K) = \{0\}$，则称其为真锥。

我们将这类锥称为闭实锥。

通常，实锥一词仅指具有非空内部的锥，如 [29], 第 3 页所述。因此，我们还要求它具有凸性，并满足 $K \cap (-K) = \{0\}$。

W我们为 K 赋予其对偶锥 $K^* := \{x^* \in V^* : \langle x^*, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V\}$。

根据 [29]的引理 1.2.4， K^* 也是一个闭实锥。此外，对于每个 $x^* \in \mathrm{int}(K^*)$（ K^*的内部）， $\langle x^*, x \rangle > 0$ 对每个 $x \in K \backslash \{0\}$ 都成立，并且 $\Sigma_{x^*} := \{x \in K : \langle x^*, x \rangle = 1\}$ 是一个紧凸集。

我们在 V 上定义一个偏序：对每个 x、 $y \in V$、 $x \preceq_K y$，若 $y - x \in K$，则.....。

下文中我们需要在 K 上使用一个单调范数，即一个与 $\preceq_K$ 相容的范数，具体含义见下文的 (10.2)。

固定一个 $x_0^* \in \mathrm{int}(K^*)$。于是，对每个 $x \in V$，令

$$\|x\|_{x_0^*} = \sup_{x^* \in K^* : x^* \preceq_{K^*} x_0^*} \langle x^*, x \rangle \,. \tag{10.1}$$

由引理 11.4， $\| \cdot \|_{x_0^*}$ 是 V 上的一个范数；利用 K^* 的定义，

$$\|x\|_{x_0 *} \leq \|y\|_{x_0^*} \qquad \forall 0 \preceq_K x \preceq_K y \,. \tag{10.2}$$

还要注意，

$$\|x\|_{x_0^*} = \langle x_0^*, x \rangle \qquad \forall x \in K \,. \tag{10.3}$$

回忆 $(K^*)^* = K$。因此，固定一个 $x_0 \in \mathrm{int}(K)$，使得 $\langle x_0^*$、 $x_0 \rangle = 1$、，还可以通过令.....在 V^* 上定义一个单调范数

$$\|x^*\|_{x_0} := \sup_{x \preceq_K x_0} |\langle x^*, x \rangle| \qquad \forall x^* \in V^* \,.$$

那么，对每个 $x^* \in K^*$、 $\|x^*\|_{x_0} = \langle x^*$、 $x_0 \rangle$，都有此结论。

Set

$$S^+ := K \cap \{x \in V : \|x\|_{x_0^*} = 1\} = \{x \in K : \langle x_0^*, x\rangle = 1\}$$

and

$$S^{++} := \operatorname{int}(K) \cap \{x \in V : \|x\|_{x_0^*} = 1\} = \{x \in \operatorname{int}(K) : \langle x_0^*, x\rangle = 1\}.$$

注意，取 $x_0^* = (1, \ldots, 1)$ 时，这些定义与 (2.1) 和 (2.2) 一致。

现在我们将在 $(K\backslash\{0\})$ 上定义一个应用 d^2，使 (S^+, d) 成为一个度量空间。

我们先在 K 上定义一个等价关系 $\sim_K$：对每个 x, y, $x \sim_K y$，若存在 $0 < \alpha \le \beta$ 使得 $\alpha x \preceq_K y \preceq \beta x$，则成立。$\sim_K$ 的等价类称为 K 的部分。由引理 11.2，$\operatorname{int}(K)$ 是 K 的一个部分。

给定 $x, y \in K\backslash\{0\}$，令

$$m(x, y) = \sup\{\lambda \ge 0 : \lambda y \preceq_K x\}.$$

当 $K = (\mathbb{R}^+)^d$ 时，这个定义与第 1 节中定义的函数 m 一致。

注意，若存在某个 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda y \preceq_K x$，则 $x - \lambda y \in K$，因此 $x/\lambda - y \in K$。所以 $m(x, y) < +\infty$，因为 K 是闭集，且 $K \cap (-K) = \{0\}$。

特别地，再次利用 K 是闭的这一点，$m(y, x)m(x, y)y \preceq_K m(y, x)x \preceq_K y$，从而$m(y, x)m(x, y) \le 1$。

然后，我们对每个 $x, y \in K\backslash\{0\}$ 定义，

$$d(x, y) = \varphi(m(x, y)m(y, x)),$$

其中 φ 由 (2.5) 给出

根据 $\sim_K$ 的定义，$x \sim_K y$ 当且仅当 $m(x, y)m(y, x) = 0$，而这又当且仅当 $d(x, y) = 1$。

然后，$d(x, y) = \tanh\left((1/2)d_H(x, y)\right)$，其中 d_H 在 [29] 的第 26 页中引入。事实上，只有当 $x \sim_K y$ 时才定义 d_H，以避免出现 $d_H(x, y) = +\infty$ 的情况。

命题 10.1. (S^+, d) 是一个完备度量空间，且 S^{++} 是闭的。此外，存在$C_{x_0} > 0$ 使得

$$\|x - y\|_{x_0^*} \le C_{x_0^*} \frac{d(x, y)}{1 - d(x, y)} \qquad \forall (x, y) \in S^+. \tag{10.4}$$

注. 当 $x \sim_K y$ 时，(10.4) 的右侧有限。否则， $d(x,y) = 1$ ，且 (10.4) 的右侧必须解释为 $+\infty$。

证明。我们首先证明 (S^+, d) 是一个度量空间。设 $x, y, z \in S^+$ 满足 $x \sim_K y$ 和 $y \sim_K z$。由 [29] 的命题 2.1.1， $d_H(x,z) \leq d_H(x,y) + d_H(y,z)$。利用 $u \mapsto \tanh(u/2)$ 是次可加的这一事实，将 d_H 换成 d 后，不等式仍然成立。若 $x \sim_K y$ 和 $y \sim_K z$ 不成立，则 $m(x,y)m(y,x) = 0$ 或 $m(y,z)m(z,y) = 0$，因此 $d(x,y) = 1$ 或 $d(y,z) = 1$，从而三角不等式仍然成立。

d 是 S^+ 上的距离这一事实，随即由 [29] 的命题 2.1.1（其他结论）得出。(S^+, d) 完备这一事实由 [29] 的引理 2.5.4 得出。事实上，若 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^+$ 是关于 d 的柯西序列，则 $d(x_p, x_q) < 1$，例如对 $q, p \geq N$ 而言，因此 $(x_n)_{n\geq N}$ 包含在 K 的一个部分 P 中。然而，由 [29] 的引理 2.5.4， $S^+ \cap P$ 关于 d 是完备的。

我们来解释为什么 S^{++} 是闭的。运用与上述类似的论证可知，只需证明 $\mathrm{int}(K)$ 是 K 的一部分，而这由引理 11.2 得出。

(10.4) 由 [29], 第 47 页的 (2.21) 利用 d_H 与 d之间的关系可得 . □

现在我们将定义正矩阵的类似物。

Let

$$G := \{g \in M_d(\mathbb{R}) : g(K\backslash\{0\}) \subset K\backslash\{0\}, g(\mathrm{int}(K)) \subset \mathrm{int}(K)\}.$$

由引理 11.3 可得

$$G := \{g \in M_d(\mathbb{R}) : g^t(K^*\backslash\{0\}) \subset K^*\backslash\{0\}, g^t(\mathrm{int}(K^*)) \subset \mathrm{int}(K^*)\}.$$

特别地， $g \in G$ 按照 [7] 的含义是允许的（见第 1527 页的 a）。因此， [7]中的允许性条件是多余的。

我们在 $M_d(\mathbb{R})$ 上赋予范数： $\|g\|_{x_0^*} := \sup_{x\in K,\ \|x\|_{x_0^*}=1} \|gx\|_{x_0^*}$。这确实是一个范数，因为 K 具有非空内部（即 $K - K = V$）。注意，对于$g \in G$,

$$\|g\|_{x_0^*} = \sup_{x\in K, \langle x_0^*, x\rangle = 1} \langle x_0^*, gx\rangle .$$

另定义

$$G^+ := \{g \in G : g(K\backslash\{0\}) \subset \mathrm{int}(K)\}.$$

由引理 10.1,

$$G^+ := \{g \in G : g^t(K^*\backslash\{0\}) \subset \mathrm{int}(K^*)\}.$$

对每个 $g \in G$ 定义

$$v_{x_0^*}(g) = \inf_{x \in K,\, \|x\|_{x_0^*}=1} \|gx\|_{x_0^*}\,,$$

注意，对于 $g \in G$, $v(g) = \inf_{x \in K,\ \langle x_0^*,\ x\rangle = 1} \langle x_0^*, gx\rangle$。

接着定义 $N_{x_0^*}(g) := \max(\|g\|_{x_0^*}, 1/v_{x_0^*}(g))$，以及 $L_{x_0^*}(g) := \frac{\|g\|_{x_0^*}}{v_{x_0^*}\ g()}$。

半群 G按如下方式作用于 S^+。

$$g \cdot x = \frac{gx}{\|gx\|_{x_0^*}} = \frac{gx}{\langle x_0^*, gx\rangle} \qquad \forall (g,x) \in G \times S^+\,.$$

接着定义一个余循环：对每个 $(g,x) \in G \times S^+$，令 $\sigma(g,x) = \log(\|gx\|_{x_0^*})$。

对于每个 $g \in G$ 集合

$$c(g) := \sup_{x,\, y \in K \setminus \{0\}} d(gx, gy)\,.$$

命题 10.2。对于每个 $(g, g', x, y) \in G^2 \times (S^+)^2$，我们有

(i) $|\sigma(g,x)| \le$ 对数 $N(g)$; (ii) $|\sigma(g,x) - \sigma(g,y)| \le 2C_{x_0^*} L(g) d(x,y)$，如果 $d(x,y) \le 1/2$; (iii) $|\sigma(g,x) - \sigma(g,y)| \le 2$ 自然对数 $\big(1/(1-d(x,y))\big)$; (iv) $c(gg') \le c(g)c(g')$; (v) $c(g) \le 1$ 且 $c(g) < 1$ 当且仅当 $g \in G^+$; (vi) $d(g \cdot x, g \cdot y) \le c(g) d(x,y)$.

注。第 (ii) 项中出现的常数 $C > 0$ 与 (10.4) 中的相同。

证明。(i) 显然　　成立。(ii) 可完全按照 [23], 的引理 5.3 的第 (i) 项，利用 (10.4　　).

让我们证明（iii）。令 $x, y \in S^+$。假设 $x \sim_K y$，否则第（iii）项右侧等于 $+\infty$，不等式显然成立。我们有 $m(x,y)y \preceq_K x$，且 $m(y,x)x \preceq_K y$。由于 $g \in G$，$m(x,y)gy \preceq_K gx$，且 $m(y,x)gx \preceq_K gy$。利用 $\|\cdot\|_{x_0^*}$ 是单调的这一点，我们推得 $m(x,y)\|gy\|_{x_0^*} \le \|gx\|_{x_0^*}$，且 $m(y,x)\|gx\|_{x_0^*} \le \|y\|_{gx_0^*}$。因此

$$m(x,y) \le \frac{\|gx\|_{x_0^*}}{\|y\|_{x_0^*}} \le 1/m(y,x)\,.$$

于是，证明可以按照 [23] 中引理 5.3 的第（ii）项的证明完成。

（iv）的证明可以完全按照 [23] 中的方法进行。对于（v）的证明，我们需要检查其中的一些论证。

设 $g \in G^+$。那么， gS^+ 是 int(K) 的一个（关于 $\|\cdot\|_{x_0^*}$ 的）紧集。我们来证明它关于 d 也是紧的。设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S^+$。必要时取一个子列，我们可以假设存在 $y \in \text{int}(K)$，使得 $(gx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 当 $\|\cdot\|_{x_0}$ 时收敛到 y。由于 $y \in \text{int}(K)$，根据 [29], 的引理 2.5.5，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 当 d_H 时收敛到 y，因此对 d 也成立。

证明的其余部分与 [23] 中相同。

条目（vi）就是 Birkhoff 不等式，参见例如 [29] 第 31 页。 □

现在我们来考虑与引理 2.2 中所述类似的命题。只有条目（ii）需要证明。

引理 10.3。存在 $C > 0$，使得对每个 $g \in G$,

$$\|gx_0\|_{x_0^*} \le \|g\|_{x_0^*} \le C\|gx_0\|_{x_0^*}\,.$$

证明。由于 $\langle x_0^*, x_0\rangle = 1$, $\|gx_0\|_{x_0^*} \le \|g\|_{x_0^*}$。

令 $x \in K$ 满足 $\langle x_0^*, x\rangle = 1$。令 $g \in G$

利用引理 11.2 和锥 K^*，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $g^t x_0^* \preceq_{K^*} \frac{\|g^t x_0^*\|_{x_0}}{\varepsilon} x_0^*$。因此，利用 $gx \in K$ 和引理 11.1,

$$\begin{aligned}\|gx\|_{x_0^*} = \langle x_0^*, gx\rangle = \langle g^t x_0^*, x\rangle \le \frac{\|g^t x_0^*\|_{x_0}}{\varepsilon}\langle x_0^*, x\rangle \\ = \frac{\langle g^t x_0^*, x_0\rangle}{\varepsilon} = \frac{\langle x_0^*, gx_0\rangle}{\varepsilon} = \frac{\|gx_0\|_{x_0^*}}{\varepsilon}\,.\end{aligned}$$

□

前几节的所有结果对于满足命题 2.1 和引理 2.2 中所列全部性质的余循环仍然成立。

11 技术结果

下一个引理就是 [29] 中的引理 1.2.4。

引理 11.1. 设 K 是一个闭实锥。则

$$\text{int}(K^*) = \{x^* \in V^* : \langle x^*, x\rangle > 0\,, \forall x \in K\backslash\{0\}\}\,.$$

特别是,

下一个引理　　由 [29] 中引理 1.2.4 的证明可得。我们回顾一下这个简短的论证　　.

引理 11.2。设 $\|\cdot\|$ 是 $V=\mathbb{R}^d$ 上的一个范数。设 K 是一个闭实锥。那么，对于每个 $x\in \mathrm{int}(K)$，存在 $\varepsilon>0$，使得对于每个 $y\in K\cap B(0,1)$，其中 $B(0,1)$ 是单位球 $B(0,1)$ 的闭包，都有 $y\preceq \frac{1}{\varepsilon}x$。于是 $\|y\|\leq \frac{1}{\varepsilon}$。特别地，$\mathrm{int}(K)$ 是 K 的一个部分。

证明。设 $x\in \mathrm{int}(K)$。存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subset \mathrm{int}(K)$。令 $y\in B_{\|\cdot\|}(0,1)$。那么，$x-\varepsilon y\in K$，这恰好意味着 $y\preceq \frac{1}{\varepsilon}x$。特别地，如果 $x,\ y\in \mathrm{int}(K)$，则 $x\sim_K y$。

剩下要证明的是，对于每个 $(x,y),\ \in \mathrm{int}(K=\times K, x\sim_K y\Rightarrow y\in \mathrm{int}(K)$。

因此，令 $x\in \mathrm{int}(K)$。存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subset K$。

令 $y\in K$ 为 su ch，使得 $y\sim_K x$。存在 $\alpha>0$ 使得 $x\preceq_K \alpha y$。因此 $\alpha y-x\in K$ 一个 d

$$\alpha y=x+\alpha y-x\in \cup_{z\in K}(z+B(x,\varepsilon))\,,$$

它是 K 的开子集。 □

引理 11.3。令 $g\in M_d(\mathbb{R})$，并令 K 为 E 的一个闭实锥。

(*i*) $g(K\backslash\{0\})\subset K\backslash\{0\}$ 当且仅当 $g^t(\mathrm{int}(K^*))\subset \mathrm{int}(K^*)$;
(*ii*) $g(\mathrm{int}(K))\subset \mathrm{int}(K)$ 当且仅当 $g^t(K^*\backslash\{0\})\subset K^*\backslash\{0\}$。

证明。假设 $g(K\backslash\{0\})\subset K\backslash\{0\}$。令 $x^*\in \mathrm{int}(K^*)$ 且 $x\in K\backslash\{0\}$。我们有

$$\langle g^t x^*, x\rangle=\langle x^*, gx\rangle>0\,,$$

由引理 11.1 得。再次使用引理 11.1，我们看到 $g^t x^*\in \mathrm{int}(K^*)$。

假设 $g^t(\mathrm{int}(K^*))\subset \mathrm{int}(K^*)$。令 $x\in K\backslash\{0\}$ 且 $x^*\in \mathrm{int}(K^*)$。我们有

$$\langle x^*, gx\rangle=\langle g^t x^*, x\rangle>0\,.$$

因此 $gx\in K^{**}=K$ （见 [5] 的习题 2.31）且 $gx\neq 0$，这就证明了条目（i）。

条目（ii）只是针对 K^* 的条目（i），这是利用了 $K^{**}=K$。 □

引理 11.4. 对每个 $x_0^*\in \mathrm{int}(K^*)$，由 (10.1) 定义的 $\|\cdot\|_{x_0^*}$ 都是一个范数。

证明。根据 [29], 的引理 1.2.5，集合 $\{x^*\in K:\ x^*\preceq_{K^*} x_0^*\}$ 有界，因此 $\|\cdot\|_{x_0^*}$ 在 V 上有限。显然，$\|\cdot\|_{x_0^*}$ 满足三角不等式且是正齐次的。

假设 $x\in E$ 满足 $\|x\|_{x_0^*}=0$。将引理 11.2 应用于 K^* （其中 $x=x_0^*$），则对每个 $x^*\in K^*,\ \langle x^*,\ x\rangle=0$。由于 K^* 具有非空内部，$K^*-K^*=V^*$ 且 $x=0$。□

参考文献

[1] Benoist, Y. 和 Quint, J.-F.，线性群的中心极限定理，《概率年刊》（2016）44 卷第 2 期，1308–1340。[2] Benoist, Y. 和 Quint, J.-F.，约化群上的随机游走。数学及其应用成果丛书，第 3 辑。现代数学综述丛书 [数学成果及相关领域丛书，第 3 辑。现代数学综述丛书], 第 62 卷。Springer，查姆，2016 年。[3] Birkhoff, G.，Jentzsch 定理的推广。《美国数学会汇刊》85（1957），219-227。[4] Bougerol, P. 和 Lacroix, J.，随机矩阵乘积及其在 Schr¨odinger 算子中的应用。概率与统计进展丛书，第 8 卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，1985 年。[5] Boyd, S. 和 Vandenberghe, L.，凸优化。剑桥大学出版社，英国剑桥，2004 年。[6] Brofferio, S.、Peign´e, M. 和 Pham, T.，临界情形下 $\mathbb{R}_+^d$ 上的仿射递推。《ALEA 拉丁美洲概率与数学统计杂志》18（2021），第 1 期，1007-1028。[7] Buraczewski, D.、Damek, E.、Guivarc'h, Y. 和 Mentemeier, S.，多维 Mandelbrot 级联。《差分方程及其应用杂志》20（2014），第 11 期，1523-1567。[8] Buraczewski, D. 和 Mentemeier, S.，随机矩阵乘积的精确大偏差结果。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》52（2016），第 3 期，1474-1513。[9] Bushell, P.，巴拿赫空间中的希尔伯特度量与正压缩映射。《理性力学与分析文档》52（1973），330-338。[10] Cuny, C.；Dedecker, J. 和 Jan, C.（2017）。$GL_d(\mathbb{R})$ 上的左随机游走的极限定理。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》53，第 4 期，1839–1865。[11] Cuny, C.；Dedecker, J.、Korepanov, A. 和 Merlev`ede, F.，快速混合动力系统的几乎处处不变原理的收敛速率。《随机动力学》20（2020），第 1 期，2050002，28 页。[12] Cuny, C.；Dedecker, J. 和 Merlev`ede, Florence，GLd(R) 上左随机游走的大偏差与中等偏差。《ALEA 拉丁美洲概率与数学统计杂志》14（2017），第 1 期，503-527。

[13] Cuny, C.; Dedecker, J. 和 Merlev`ede, F.（2018）。关于若干类随机迭代的 Koml´os、Major 和 Tusn´ady 强逼近。《随机过程及其应用》128（第4期），1347–1385。[14] Cuny, C.; Dedecker, J. 和 Merlev`ede, F. 通过鞅方法研究线性群上随机游走不变性原理的收敛速率。《美国数学会汇刊》374（2021），第1期，137-174。[15] Cuny, C.; Dedecker, J. 和 Merlev`ede, F，进行中的工作。[16] Cuny, C.; Dedecker, J.; Merlev`ede, F. 和 Peligrad M.，在多项式矩条件下，关于 $Gl_d(\mathbb{R})$ 上左随机游走的 Berry-Esseen 型界，已被《概率年刊》接收。[17] Cuny, C.; Dedecker, J.; Merlev`ede, F. 和 Peligrad M.，关于 $GL_d(\mathbb{R})$ 上左随机游走的矩阵系数与谱半径的 Berry-Esseen 型界，《巴黎科学院数学报告》360（2022），475–482。[18] Diaconis, P. 和 Freedman, D.，迭代随机函数。《SIAM 评论》41（1999），第1期，45-76。[19] Fan, X.; Grama, Ion 和 Liu, Q.，鞅的偏差不等式及其应用。《数学分析及其应用杂志》448（2017），第1期，538-566。[20] Furstenberg, H. 和 Kesten, H.（1960）。随机矩阵乘积。《数学统计年刊》31，第2期，457–469。[21] Grama, I.; Liu Q. 和 Xiao, H.，正随机矩阵乘积的范数、矩阵元素与谱半径的 Berry-Esseen 界和中等偏差，arXiv:2010.00557[22] Grama, I.; Liu, Q. 和 Xiao, H.，正随机矩阵乘积系数的 Edgeworth 展开与大偏差，arXiv:2209.03158[23] Hennion, H. 正随机矩阵乘积的极限定理。《概率年刊》25（1997），第4期，1545-1587。[24] Hennion, H. 和 Herv´e, L. 正随机矩阵乘积与稳定律。《理论概率杂志》21（2008），第4期，966-981。[25] Hoeffding, W.（1963）。有界随机变量之和的概率不等式。《美国统计学会杂志》58，13–30。

[26] Jan, C.（2001）。与动力系统或随机矩阵乘积相关的过程的中心极限定理收敛速度，雷恩第一大学博士论文（2001），论文编号 01REN10073。[27]Jirak, M.（2020）。具有（几乎）尖锐依赖条件的 Berry-Esseen 界。arXiv :1606.01617，已被 Bernoulli 接收。[28] Kingman, J. F. C.，次可加遍历理论，《概率年刊》1（1973），883-909。[29] Lemmens, B. 和 Nussbaum, R，《非线性 Perron–Frobenius 理论》。剑桥数学丛书，第189卷。剑桥大学出版社，剑桥，2012。xii+323 页。[30] Loewy, R. 和 Schneider, H.，n维冰淇淋锥上的正算子，《数学分析及其应用杂志》49（1975），375-392。[31] Le Page, E.; Peign´e, M. 和 Pham, D.，随机环境中的临界多类型分枝过程的中心极限定理。《突尼斯数学杂志》3（2021），第4期，801-842。