arXiv:2301.02104v1 [math.PR] 5 Jan 2023

冰模型图上的简单随机游走的转移

Serge Cohen * Xavier Bressaud *

2023年1月6日

摘要

六顶点模型是数学和物理学许多领域中的一个经典模型。六顶点模型的构型集合可以描述为多重图中的路径集合。本文计算了多重图上简单随机游走的转移概率。结果中出人意料之处在于，使用连分数来计算转移概率。

关键词：随机游走，马尔可夫链 美国数学学会数学分类（2000年版）：05C81，60F05。

1 引言

在本文中，我们关注定义在特定（多重）图 Y G_K 上的简单随机游走，这些图由整数 K. 索引。 G_K 的顶点集为 $V_K \stackrel{def}{=} \{-1,1\}^K$ ，边集 E_K 的定义使得长度为 n 的路径集合与所谓六顶点模型在矩形 $K \times n$ 上的构型集合同构，特别是冰模型的情形 [6]。请注意，在六顶点模型中，通常考虑均匀分布，并在矩形晶格 n $K \to \infty$ 上采用各种可容许的边界条件。本文为构型集合赋予分布 Y_0，.....， Y_n；与长度为 n. 的路径集合上的均匀分布相比，这种分布实际上更容易研究。在六顶点模型中，高度函数 h 是从矩形 $K \times n$ 到整数集 $\mathbb{Z}$ 的映射，具有物理意义；更具体地说，

*图卢兹数学研究所；UMR 5219，图卢兹大学；法国国家科学研究中心，UT3 F-31062 图卢兹 Cedex 9，法国。First-Name.Name@math.univ-toulouse.fr

矩形上两个相距较远的点之间高度函数差值的方差衰减具有特殊的重要性。这个问题也与随机图同态 [1] 有关。参见 [3]，其中证明了在矩形上采用周期边界条件时，方差按对数阶衰减。对于马尔可夫链 Y，高度函数与 Y 的一个加性泛函 Z 有关；该泛函收集了定义在 G_K. 的边上的一个特定向量场。在先前的一篇文章 [2] 中证明，高度函数的方差按 ^{2} $^{(2+K)\ n}\cdot$ 的规律衰减。对于有限的 K，在 [4] 中计算了变量取值介于 1 和 K 之间时周期边界条件下的方差；而在 ~~[5] 中~~则计算了其他约束条件下的方差。

描述 G_K 上处于平稳状态的简单随机游走，最简便的方法是指出，数对 $(Y_K(0)\ Y_K(1))$ 在边集 E_K. 上服从均匀分布。本文的一个目标是给出从给定顶点出发的简单随机游走的转移概率公式。令人惊讶的是，定理 3.1 中的公式用到了与给定顶点数字的常值块长度相关联的连分数。作者认为这一结果有两个有用的推论。首先，简单随机游走的转移概率将大大简化并加快该游走的模拟。关于以往模拟方法的综述，参见 [7]；这些方法既耗费内存，也耗费计算资源，因为对于较大的 K，很难轻易描述 G_K 中给定顶点的邻居。定理 3.1 的另一个有趣推论是，它可以推广到情形 $K=\infty$. 。这进而使我们能够理解 G_∞. 中高度函数方差的衰减。定义和模型见第 2 节。第 3 节陈述主要定理，并在后续各节中予以证明。

2 模型

令 $\left(Z_t^{(1)},\ldots,Z_t^{(K+1)}\right)_{t\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}^{K+1}$ 表示 $K+1$ 简单随机游走在 $\mathbb{Z}$上的高度，并以满足以下条件为条件

$$\forall t\in\mathbb{N},\forall i\in[1,K],\left|Z_t^{(i+1)}-Z_t^{(i)}\right|=1. \tag{1}$$

更准确地说，该随机游走是状态空间为K步游走的马尔可夫链，其中 $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{S}_K=\{(z^{(1)},\ldots,z^{(K+1)})\in\mathbb{Z}^{K+1},\quad \forall i\in[1,K],|z^{(i+1)}-z^{(i)}|=1\} \tag{2}$$

从 $z_0 \in \mathcal{S}_K$ 出发的下一步在属于 $\mathcal{S}_K$ 且满足 $\forall i \in [1, K+1]$, $z_1^{(i)} - z_0^{(i)} \in \{-1, 1\}$. 的 z_1s 中均匀选取。换言之，我们考虑格点 $\mathbb{Z}$ 上的 $K+1$ 简单随机游走，并使其满足形状条件。对于长度为 n $(Z_t^{(i)})_{0 \le t \le n-1}$ 的路径，可通过 $h(t,i) = Z_t^{(i)}$ 在矩形 $((t,i))_{0 \le t \le n-1,\ 1 \le i \le K+1}$ 上关联一个高度函数 h，由此建立起它与六顶点模型的高度函数之间的联系。

在 [2] 中，等价的描述是将其视为多重图上的简单随机游走。

定义 2.1. 令 $V_K \overset{def}{=} \{-1, 1\}^K$、$E_K^+$分别为 V_K. 上正边、负边的集合。

一对 $(a, b) \in V_K \times V_K$，满足：当向量 $(b-a) \in \{-2, 0, 2\}^K$ 的非零坐标符号以负号开头且交替变化时，$a \neq b$ 属于 E_K^+。对于每个顶点 $a \in V_K$，都有一条从 a 到 a 的边 E_K^+，记作 $(a, a)^+$。

类似地，存在一对 $(a, b) \in V_K \times V_K$，满足：当向量 $(b-a)$ $\in \{-2, 0, 2\}^K$ 的非零坐标符号以正号开头且交替变化时，$a \neq b$ 属于 E_K^-。对于每个顶点 $a \in V_K$，都有一条从 a 到 a E_K^- 的边，记作 $(a, a)^-$。

对于每个 $K \in \mathbb{N}$，图 $G_K \overset{def}{=} (V_K, E_K)$，其中 $E_K \overset{def}{=} E_K^+ \cup E_K^-$。

对 $(Z_t^{(1)}, ..., Z_t^{(K+1)})$ 的研究可以分为对第一个坐标 $Z_t^{(1)}$ 以及增量的研究

$$Y_K(t) \overset{def}{=} \left(Z_t^{(2)} - Z_t^{(1)}, \ldots, Z_t^{(K+1)} - Z_t^{(K)}\right),$$

它始终是 V_K 的一个元素（由 (1) 可知）。

值得指出的是，当马尔可夫过程 Y_K平稳时，边集 E_K 上的均匀分布与 $(Y_K(0)\ Y_K(1))$ 的分布相同。下面的引理给出了这一分布的另一个有用刻画。

引理2.1. 设 ϵ 是一个随机变量，使得 $\mathbb{P}(\epsilon = -1) = \mathbb{P}(\epsilon = 1) = \frac{1}{2}$)；设 $(\alpha_k)_{k \ge 1}$ 是一个参数为$_{1\ 3}$ 的伯努利随机变量独立同分布序列，并设 $(\beta_k)_{k \ge 1}$ 是一个随机变量独立同分布序列，使得 $\mathbb{P}(\beta_k = -1) = \mathbb{P}(\beta_k = 1) = \frac{1}{2}$。上述随机变量彼此独立。定义 $\forall k \ge 2$：

$$\gamma_k \overset{def}{=} \epsilon(-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i},$$

约定 $\gamma_1 = \epsilon$。

我们还定义 $k \geq 1$：

$$A_k = (1-\alpha_k)\beta_k + \alpha_k\gamma_k \tag{3}$$
$$B_k = (1-\alpha_k)\beta_k - \alpha_k\gamma_k. \tag{4}$$

数对 $((A_k)_{1\leq k\leq K}, (B_k)_{1\leq k\leq K})$ 的分布是 E_K 上的均匀分布。若将由以下条件定义的边记为 $(A,B)_K$：

$$(A,B)_K \stackrel{def}{=} \begin{cases} ((A_k)_{1\leq k\leq K}, (B_k)_{1\leq k\leq K}) & if\ (A_k)_{1\leq k\leq K} \neq (B_k)_{1\leq k\leq K} \\ ((A_k)_{1\leq k\leq K}, (B_k)_{1\leq k\leq K})^{\epsilon} & if\ (A_k)_{1\leq k\leq K} = (B_k)_{1\leq k\leq K} \end{cases}$$

那么 $(A,B)_K \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_K(0)\ Y_K(1))$，如果 $Y_K(0) \neq Y_K(1)$，并且

$$(A,A)^{\epsilon}_K \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_K(0), Y_K(0))^{Z_1^{(1)} - Z_0^{(1)}} \quad if \quad Y_K(0) = Y_K(1).$$

此外，$(A_k)_{1\leq k\leq K} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_K(0)$ 且 $(B_k)_{1\leq k\leq K} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_K(0)$。

证明。证明采用归纳法，详见 [7]。我们首先证明 $(A,B)_K \in E_K.$。注意到 $B_k - A_k = -2\alpha_k\gamma_k$，那么当 $\alpha_k = 0$ 时它为零；并且交替规则的符号条件成立，因为每当 $\alpha_k = 1$ 时，γ_k 的符号都与 γ_{k-1}. 不同。令 D_K 表示 E_K. 的基数。简单计算可得 $D_1 = 6$，由归纳法得 $D_K = 2 \times 3^K.$。显然也可验证，对于 E_1. 中的每条边，均有 $\mathbb{P}((A,B)_1 = e) = \frac{1}{6}$。假设对于 E_K 中的每条边，$\mathbb{P}((A,B)_K = e) = \frac{1}{D_K}$ 均成立。考虑 $u', v' \in V_K$，并令 $u' \pm 1$ 表示 V_{K+1} 中通过将 ± 1 拼接到 u'. 右侧得到的顶点。那么

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A,B)_{K+1} = (u'1, v'1)) &= \mathbb{P}((A,B)_K = (u',v') \cap \alpha_{K+1} = 0 \cap \beta_{K+1} = 1) \\ &= \frac{1}{D_K}\frac{2}{3}\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{D_{K+1}}. \end{aligned}$$

$(u'-1, v'-1)$也同样成立。如果拼接到 u' 上的数位与拼接到 v' 和 $u' \neq v'$ 上的数位不同，那么只有一种可能的选择会使概率非零，这取决于 u' 和 v'. 之间最后一个不同的数位。对于这一选择

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((A,B)_{K+1} = (u' \pm 1, v' \mp 1)) &= \mathbb{P}((A,B)_K = (u',v') \cap \alpha_{K+1} = 1) \\ &= \frac{1}{D_K}\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{D_{K+1}}. \end{aligned}$$

考虑情形 $u' = v'$ 后，证明即告完成；在这种情形下，得益于 ϵ.的分布，我们还得到 $\mathbb{P}((A,B)_{K+1} = (u' \pm 1, v' \mp 1)) = \frac{1}{D_{K+1}}$

□

注2.1. 前述结果的一个重要推论是，图 G_K 是为 $K = \infty$. 定义的。更准确地说，当 $K = \infty$、 $V_\infty \stackrel{def}{=} \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ 和 E_∞^+ E_∞^- 按照与有限 K. 相同的交替规则定义时，若 K 是无限的，引理2.1仍然成立。

3 结果

本文旨在计算与 G_K 上的简单随机游走相关联的平稳马尔可夫链的转移概率，其中 $K \in \mathbb{N} \cup \infty$. 。因此，在给定序列 $(A_k)_{k \le K}$ 的条件下，我们将计算 $(B_k)_{k \le K}$ 在 V_K 中取某一特定值的条件概率。

请注意，当 $K = \infty$ 时，大数定律表明，对于两个序列 $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 和 $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ，当 k 足够大时，它们几乎必然不是常数。

假设序列 $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ 以 $a_1 = 1$. 开始。固定 a 为常值的连续时刻，并记为 $i_m = (-1)^{m+1}$. （若 $a_1 = -1$，则 $i_m = (-1)^m$）。按照约定，令 $S_0 = 0$；对于 $m \ge 1$，假设 a 的第 m 个常值块以 $S_{m-1} + 1$ 开始，并以 S_m. 结束。

对于 $m \ge 1$，记事件

$$A^{(m)} = \{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \text{ such that } a_{S_{m-1}+1} = i_m, \ldots, a_{S_m} = i_m\} \tag{5}$$

为在 a 的第 m 个常值块上等于 a 的序列所构成的集合。

注3.1. 下文中，我们将 B 的分布相对于形如 $\{A = a\}$ 的事件进行条件化，其中 a 是一个确定性序列。给定 a 后，序列 S 也随之确定，因此相对于 $A^{(m)}$ 进行条件化实际上是指相对于事件 $\{A_{S_{m-1}+1} = i_m, \ldots, A_{S_n} = i_m\}$. 进行条件化。下文中我们将记号滥用为 $\mathbb{P}(.|a)$ $\mathbb{P}(.|A^{(m)})$。

因此 $\{a\} = \{(a_k)_{k \le K}\} = \cap_{m=1}^N A^{(m)}$ ，其中 N 是 a. 的常值块数。根据定义， M_m 中第 m个常值块的长度为

$$M_m = S_m - S_{m-1}. \tag{6}$$

令 $1 \le m \le n \le N$

$$x_m^n \overset{def}{=} \frac{1}{M_m + \frac{1}{M_{m+1} + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{M_n + 1}}}} = [M_m, M_{m+1}, \ldots, M_n, 1], \tag{7}$$

如果 $n < m$ 我们按照约定设定 $x_m^n \overset{def}{=} 1$ 。

当 $K = \infty$ （7）中的连分数收敛于 $n \to \infty$一个无理数时，由于注 2.1，将其记为x_m^∞.

请注意，如果 $Y_K(0) = a$且 $Y_K(1) = b$，那么在 a的任一常值块 $A^{(m)}$ 中， b 最多只有一个数位 b_k与 a_k 不同，这是交替符号规则所致。设 $(\epsilon_m)_{1 \le m \le N}$ 为伯努利随机变量，满足：当且仅当 m号常值块 $A^{(m)}$. 中 a 与b 之间有一个数字变化时， $\epsilon_m = 1$ 。设 $(E_m)_{1 \le k \le N}$ 为一列在 $\{1, \ldots, M_m\}$ 上均匀分布的独立随机变量，用以编码 $A^{(m)}$. 中发生变化的数位。交替符号规则还带来一项约束：当 $\epsilon_m = 1$时，在事件$\epsilon_{m+1} = 0$发生的条件下， $\epsilon_{m+2k} = 0$ ， ....., $\epsilon_{m+(2k-1)} = 0.$。换言之， a的两个相邻常值块中，不能在索引相差为偶数时发生数字变化，因为这些块上的 a_k 相同。因此，条件概率 $\mathbb{P}(Y_K(1) = b | Y_K(0) = a)$由以下定理描述，该定理给出了 $(\epsilon_m)_{1 \le m \le N}$.的分布。

定理 3.1。$(\epsilon_m)_{1 \le m \le N}$ 的分布为：

- 初始化阶段

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1 | a) = \frac{M_1}{M_1 + 1 + x_2^N} \tag{8}$$

其中， N 是 a.的常值块数量

- 此前没有发生变化时的后续阶段

$$\mathbb{P}(\epsilon_m = 1 | \epsilon_{m-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0,\ a) = \frac{M_m}{M_m + 1 + x_{m+1}^N} \tag{9}$$

其中， N 是 a.的常值块数量

- 此前至少发生过一次变化时的后续阶段

$$\mathbb{P}(\epsilon_m = 1 | \epsilon_{m-1} = 0, \ldots, \epsilon_{m-(2k-1)} = 1,\ a) = M_m x_m^N,$$

其中 N 是 a. 的常值块数

• 在 G_K. 中的自环：若 $\epsilon_m = 0$，则对于 $1 \le m \le N$，这等价于 $b = a$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((Y_K(0), Y_K(1)) &= (a,a)^+ | Y_K(0) = a) \\ &= \mathbb{P}((Y_K(0), Y_K(1)) = (a,a)^- | Y_K(0) = a) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\epsilon_m = 0,\ for\ 1 \le m \le N | a). \end{aligned} \tag{10}$$

$\forall m \ge 1$ E_m 的分布在 $\{1, \ldots, M_m\}$ 上是均匀的，条件是事件 $\epsilon_m = 1.$ 发生

注3.2。请记住，分布 $\mathbb{P}(.|a)$ 是 E_K 中 a 的邻居上的均匀分布；这一点从前面的定理中并不明显。事实上，如果 E_K 中给定的 a 有 N 个常值块，例如它会导出

$$\begin{aligned}\frac{1}{deg_K(a)} &= \frac{\mathbb{P}((\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N) = (1, \ldots, 1) | a)}{\prod_{k=1}^N M_k} \\ &= \frac{1}{M_1 + 1 + x_2^N} \prod_{k=2}^N x_k^N. \end{aligned} \tag{11}$$

现在假设对于给定的 $2 \le k_0 \le k_0 + 1 < N$， $\epsilon_{k_0} = 0$，这意味着 $\epsilon_{k_0+1} = 0$，而另一个 $\epsilon_k = 1.$。该方程

$$\frac{1}{deg_K(a)} = \frac{\mathbb{P}((\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N) = (1, \ldots, 1, 0, 0, 1, \ldots, 1) | a)}{\prod_{k=1}^N M_k} \tag{12}$$

当这些 0, 0 对于这个 k_0. 时仍然成立。在方程（11）中，我们只需更改 k_0 和 $k_0 + 1$ 的因子，因此 $x_{k_0}^N$ 变为 $x_{k_0+1}^N x_{k_0}^N$，而因子 $x_{k_0+1}^N$ 变为 1。接着我们验证

$$\frac{\mathbb{P}((\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N) = (1, \ldots, 0, 0, \ldots, 1) | a)}{\prod_{k=1}^N M_k} = \frac{1}{deg_K(a)}.$$

经过繁琐的计算可以证明，实际上跳转到 a 的每个邻居的概率都相同。

当 $K = \infty$ 时，如果我们认为 a 的常值块数目是无限的，并将连分数定义为极限，前面的定理仍然成立。

定理3.2。$(\epsilon_m)_{1 \le m}$ 的分布为：

- 初始化阶段

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1|a) = \frac{M_1}{M_1 + 1 + x_2^\infty}. \tag{13}$$

- 此前没有变化时的后续阶段

$$\mathbb{P}(\epsilon_m = 1|\epsilon_{m-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0,\ a) = \frac{M_m}{M_m + 1 + x_{m+1}^\infty}. \tag{14}$$

- 此前至少发生过一次变化时的后续阶段

$$\mathbb{P}(\epsilon_m = 1|\epsilon_{m-1} = 0, \ldots, \epsilon_{m-(2k-1)} = 1,\ a) = M_m x_m^\infty.$$

$\forall m \geq 1$ E_m 的分布在 $\{1, \ldots, M_m\}$ 上是均匀的，条件是事件 $\epsilon_m = 1$. 发生

注3.3。请注意， G_∞ 中出现自环的概率趋于零。因此，最后一个定理中不存在自环情形。

4 结果的证明

现在介绍关于 γ_k 的条件独立性，这是我们进行计算的重要工具。记 $\sigma_l^m \overset{def}{=} \sigma(a_k,\ b_k,\ l \leq k \leq m)$，其中 $2 \leq l \leq m.$ 。按照约定， $\sigma_1^m \overset{def}{=} \sigma(a_k,\ b_k,\ 1 \leq k \leq m, \epsilon)$。

引理 4.1. 对每个 $1 \leq l \leq m \leq n$ σ_l^m， $1 \leq l \leq m \leq n$ σ_l^m独立于 σ_{m+1}^n ，条件是 γ_{m+1}.

该引理的证明来自引理2.1的定义。
对于每个 $m \leq n$，我们定义

$$u_m^n \overset{def}{=} \mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} \cap \ldots \cap A^{(n)})$$

and

$$v_m^n \overset{def}{=} \mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = -i_k \cap A^{(m)} \cap \ldots \cap A^{(n)}).$$

借助引理 4.1，我们可以通过归纳法从 u_n^n、 v_n^n 开始计算 u_m^n、 v_m^n，并得到以下结果。

引理 4.2。对于每个 $m < n$,

$$\begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{M_m}} \begin{pmatrix} M_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{m+1}^n \\ v_{m+1}^n \end{pmatrix}$$

证明。通过条件化和引理 4.1，我们可以写出

$$\begin{aligned} u_m^n = \mathbb{P}(&\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m,\ A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = i_m) \\ &\times \mathbb{P}(\gamma_{S_m+1} = -i_{m+1},\ A^{(m+1)} \cap \ldots \cap A^{(n)}) \\ &+ \mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m,\ A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = -i_m) \\ &\times \mathbb{P}(\gamma_{S_m+1} = i_{m+1},\ A^{(m+1)} \cap \ldots \cap A^{(n)}). \end{aligned}$$

由此方程可得

$$\begin{aligned} u_m^n = &\mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = i_m) v_{m+1}^n \\ &+ \mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = -i_m) u_{m+1}^n. \end{aligned} \tag{15}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\{\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} \cap \gamma_{S_m+1} = i_m\} = \\ &\qquad \{\alpha_l = 0,\ \beta_l = i_m \text{ for } S_{m-1} + 1 \le l \le S_m\} \cap \{\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m\}. \end{aligned} \tag{16}$$

右侧的两个事件相互独立，第一个事件的概率为 $\frac{1}{3^{M_m}}$. 因此

$$\mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = i_m) = \frac{\mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} \cap \gamma_{S_m+1} = i_m)}{\mathbb{P}(\gamma_{S_m+1} = i_m)}.$$

因此

$$\mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = i_m) = \frac{1}{3^{M_m}}. \tag{17}$$

通过类似的论证，我们得到

$$\mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = i_m \cap A^{(m)} \cap \gamma_{S_m+1} = -i_m) = \frac{M_m}{3^{M_m}}. \tag{18}$$

此外

$$\begin{aligned} v_m^n = \mathbb{P}(&\gamma_{S_{m-1}+1} = -i_m \cap A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = -i_m) \\ &\times \mathbb{P}(\gamma_{S_m+1} = i_{m+1} \cap A^{(m+1)} \cap \ldots \cap A^{(n)}) \\ &+ \mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = -i_m \cap A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = i_m) \\ &\times \mathbb{P}(\gamma_{S_m+1} = -i_{m+1} \cap A^{(m+1)} \cap \ldots \cap A^{(n)}). \end{aligned}$$

注意， $\mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = -i_m \cap A^{(m)} \cap \gamma_{S_m+1} = i_m) = 0$，因为在这一事件中，$\gamma_{S_{m-1}+1}$ 的值 $-i_m$ 与 $A^{(m)}.$ 上 a_l 的值不匹配。因此，所有的 $\alpha_l = 0$ 和 $\gamma_{S_m+1} = \gamma_{S_{m-1}+1}.$。由此可得

$$v_m^n = \mathbb{P}(\gamma_{S_{m-1}+1} = -i_m \cap A^{(m)} | \gamma_{S_m+1} = -i_m) u_{m+1}^n. \tag{19}$$

引理 4.2 是由方程 (15)、(19)、(17)、(18) 得出的。 □

回顾 (7)， $x_m^n \overset{def}{=} \frac{v_m^n}{u_m^n}.$ 引理 4.2 对于 $m+1 \le n$ 得出，

$$x_m^n = \frac{1}{M_m + x_{m+1}^n}. \tag{20}$$

此外

$$\begin{aligned} u_n^n &= \mathbb{P}(\gamma_{S_{n-1}+1} = i_n,\ a_j = i_n,\ S_{n-1}+1 \le j \le S_n) \qquad (21)\\ &= \mathbb{P}(\gamma_{S_{n-1}+1} = i_n, \beta_j = i_n,\ \alpha_j = 0,\ S_{n-1}+1 \le j \le S_n) \\ &+ \sum_{j=S_{n-1}+1}^{S_n} \mathbb{P}(\gamma_{S_{n-1}+1} = i_n,\ \forall j \ne j_0 \beta_j = i_n,\ \alpha_j = 0, \text{ and } \alpha_{j_0} = 1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{3^{M_n}} + \frac{1}{2}\frac{M_n}{3^{M_n}}. \qquad (22) \end{aligned}$$

此外， $v_n^n = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{M_n}}$ 且 $x_n^n = \frac{1}{M_n+1}.$ 因此，对于 $k \le n$

$$x_m^n = \frac{1}{M_m + \frac{1}{M_{m+1} + \frac{1}{\ldots + \frac{1}{M_n+1}}}} = [M_m, M_{m+1}, \ldots, M_n, 1]. \tag{23}$$

注 4.1。请注意，即使 $K = \infty.$，我们也可以使用引理 4.2 的归纳法。此外，当 $n \to \infty$ x_m^n 收敛到无理数时，我们将该无理数记为 x_m^∞

5 初始化阶段

在这一部分中，我们将计算给定 a 时， a 的第一个常值块中出现数位 $b_j \ne a_j$ 的条件概率，即 $A^{(1)}.$。因此，当 K 有限时，若 a 有 N 个常值块，我们要计算 $\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1 | \cap_{m=1}^N A^{(m)})$。当 K 为无限时，我们希望计算前述概率的极限

当 $N \to \infty$. 时，对于 $N \geq n \geq 2$，我们先计算

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1,\ \cap_{m=2}^{n} A^{(m)}) \\
&\quad = \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \cap_{m=2}^{n} A^{(m)} |\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1)\mathbb{P}(\gamma_{S_1+1} = \pm 1) \\
&\quad = \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)} | \gamma_{S_1+1} = \pm 1) \\
&\qquad\qquad \times \mathbb{P}(\cap_{m=2}^{n} A^{(m)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1 | \gamma_{S_1+1} = \pm 1)\mathbb{P}(\gamma_{S_1+1} = \pm 1) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1)\mathbb{P}(\cap_{m=2}^{n} A^{(m)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1)}{\mathbb{P}(\gamma_{S_1+1} = \pm 1)}.
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{P}(\gamma_{S_1+1} = \pm 1) = \frac{1}{2}$ 且

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1) = \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \epsilon = \pm 1));$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1) = \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}(\forall k = 1 \text{ to } M_1,\ \alpha_k = 0\ S_1\beta_k = a_1,\ \epsilon = \pm 1),
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1) = \frac{1}{3^{M_1}}\frac{1}{2},$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1,\ \cap_{m=2}^{n} A^{(m)})) = \\
&\qquad\qquad \frac{1}{3^{M_n}}\mathbb{P}(\cap_{m=2}^{n} A^{(m)},\ \gamma_{S_1+1} = \pm 1),
\end{aligned}$$

可写为

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 0,\ \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) = \frac{1}{3^{M_1}}(u_2^n + v_2^n).$$

类似地

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = i_2,\ \cap_{m=2}^{n} A^{(m)}) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1,\ A^{(1)},\ \gamma_{S_1+1} = i_2)\mathbb{P}(\cap_{m=2}^{n} A^{(m)},\ \gamma_{S_1+1} = i_2)}{\mathbb{P}(\gamma_{S_1+1} = i_2)} \\
&\quad = \frac{M_1}{3^{M_1}} u_2^n.
\end{aligned}$$

由于 $\mathbb{P}(\gamma_{S_1+1} = -i_2,\ \epsilon_1 = 1,\ A^{(1)}) = 0$，将前述概率相加后可得。

$$\mathbb{P}(\cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) = \frac{1}{3^{M_1}}((M_1 + 1)u_2^n + v_2^n)$$

and

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1| \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) = \frac{M_1}{M_1 + 1 + x_2^n}. \tag{24}$$

方程（24）给出方程（8），并可化为

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1|a) = \frac{M_1}{M_1 + 1 + x_2^\infty}. \tag{25}$$

当 K 为无限时，令 $n \to \infty$. 。当 $N = 1$时， x_2^N未定义，但我们可以如下计算 $\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1|A^{(1)})$。若 $N = 1$，这意味着顶点 a 只有一个常值块。因此 $A^{(1)} = \{a\}$，且顶点 a在图中有 M_1 个不同于 a 的邻居，并且有两条边从 a 出发，到达 a. 。因此，当 $N = 1$时，方程（24）变为

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1|A^{(1)}) = \frac{M_1}{M_1 + 2}, \tag{26}$$

这与约定 $x_2^1 = 1$.一致

6 后续阶段

6.1 $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{N} A^{(m)})$

这里我们考虑 $N > n \geq 2$. 。条件概率的分子为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1,\ \cap_{m=1}^{N} A^{(m)}) \\
&= \mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1,\ \cap_{m=1}^{N} A^{(m)},\ \gamma_{S_n+1} = i_{n+1}) \\
&= 2\mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1,\ \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(\gamma_{S_n+1} = i_{n+1},\ \cap_{m=n+1}^{N} A^{(m)}) \\
&= 4\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1,\ \cap_{m=1}^{n-1} A^{(m)},\ \gamma_{S_{n-1}+1} = i_n) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ A^{(n)}) u_{n+1}^N,
\end{aligned}$$

其中，最后两个等式源于在方便的指标处取值的 γ 所具有的条件独立性。对于本节标题中条件概率的分母，经过同样的处理可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1,\ \cap_{m=1}^{N} A^{(m)}) = \\
&2\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1,\ \cap_{m=1}^{n-1} A^{(m)}) \mathbb{P}(\gamma_{S_{n-1}+1} = i_n,\ \cap_{m=n}^{N} A^{(m)}) \\
&\qquad = 2\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1,\ \cap_{m=1}^{n-1} A^{(m)}) u_n^N.
\end{aligned}$$

Then

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{N} A^{(m)}) = 2\mathbb{P}(\epsilon_n = 1, \ A^{(n)})\frac{u_{n+1}^N}{u_n^N},$$

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{N} A^{(m)}) = \frac{M_n}{3^{M_n}} \frac{u_{n+1}^N}{\frac{1}{3^{M_n}}(M_n u_{n+1}^N + v_{n+1}^N)},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{N} A^{(m)}) &= M_n \frac{1}{M_n + x_{n+1}^N} \\ &= M_n x_n^N. \end{aligned} \tag{27}$$

当 K 为无穷大时，我们可以令 $N \to \infty$，从而得到

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{\infty} A^{(m)}) = M_n x_n^{\infty}. \tag{28}$$

当 $N = n$ 时，我们必须改变分子的计算方法。实际上，在这种情形下

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\epsilon_n = 1, \ \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) = \\ &\qquad 2\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{n-1} A^{(m)})\mathbb{P}(\epsilon_n = 1, \ A^{(n)}).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) = \\ &= 2\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1 \cap_{m=1}^{n-1} A^{(m)})\mathbb{P}(\gamma_{S_{n-1}+1} = i_n, \cap A^{(n)}) \\ &= 2\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{n-1} A^{(m)})u_n^n,\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) &= 2\frac{\mathbb{P}(\epsilon_n = 1, \ A^{(n)})}{u_n^n} \\ &= \frac{M_n}{3^{M_n}} \frac{1}{u_n^n}.\end{aligned}$$

由 (22) 可知

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_{n-(2k-1)} = 1, \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) = \frac{M_n}{M_n + 1}. \tag{29}$$

因此，方程（27）始终成立。

6.2 $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^N A^{(m)})$

我们先从分母开始，并在另行通知前假设$N > n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^N A^{(m)}) = \sum_{\nu=-1}^{+1} \mathbb{P}(\gamma_1 = \nu, \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^N A^{(m)}).$$

Then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\gamma_1 = \nu, \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^N A^{(m)}) = \\
&2\mathbb{P}(\gamma_1 = \nu, \epsilon_1 = 0, A^{(1)})\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_2 = 0, \gamma_{S_1+1} = \nu, \cap_{m=2}^N A^{(m)}) \\
&\quad = \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0, A^{(1)})\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_2 = 0, \gamma_{S_1+1} = \nu, \cap_{m=2}^N A^{(m)}) \\
&\quad = \prod_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(\epsilon_m = 0, A^{(m)})\mathbb{P}(\gamma_{S_{n-1}+1} = \nu, \cap_{m=n}^N A^{(m)}).
\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^N A^{(m)}) = \prod_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(\epsilon_m = 0, A^{(m)})(u_n^N + v_n^N). \quad (30)$$

前一个公式对于 $N = n.$ 也成立。此外

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\epsilon_n = 1, \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^N A^{(m)}) \\
&\quad = \mathbb{P}(\epsilon_1 = 0, \ \gamma_1 = i_n, \epsilon_2 = 0, \ \gamma_{S_1+1} = i_n, \ \ldots, \epsilon_{n-1} = 0, \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots, \gamma_{S_{n-1}+1} = i_n \ \epsilon_n = 1, \ \gamma_{S_n+1} = i_{n+1} \ \cap_{m=1}^N A^{(m)}) \\
&\quad = \prod_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(\epsilon_m = 0, A^{(m)})\mathbb{P}(\epsilon_n = 1, \gamma_{S_n+1} = i_{n+1} \ \cap_{m=n}^N A^{(m)})) \\
&\qquad\qquad = 2\prod_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(\epsilon_m = 0, A^{(m)})\mathbb{P}(\epsilon_n = 1, A^{(n)})u_{n+1}^N,
\end{aligned}$$

对于 $N > n.$, 因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^N A^{(m)}) &= \mathbb{P}(\epsilon_n = 1, A^{(n)})\frac{2u_{n+1}^N}{u_n^N + v_n^N} \\
&= \frac{1}{2}\frac{M_n}{3^{M_n}}\frac{2 \times 3^{M_n} u_{n+1}^N}{(M_n+1)u_{n+1}^N + v_{n+1}^N} \\
&= \frac{M_n}{M_n + 1 + x_{n+1}^N} \qquad (31)
\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ A^{(n)}) = \frac{1}{2}\frac{M_n}{3^{M_n}}$$

以及前面计算中用到的引理 4.2。当 $K = \infty$ 我们令 $N \to \infty$代入（31）后，得到

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0,\ \cap_{m=1}^{\infty} A^{(m)}) = \frac{M_n}{M_n + 1 + x_{n+1}^{\infty}}. \tag{32}$$

当 $N = n$,

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ \epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0, \cap_{m=1}^{N} A^{(m)}) \\ = \prod_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}(\epsilon_m = 0,\ A^{(m)}) \mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ A^{(n)}).$$

$$\mathbb{P}(\epsilon_n = 1|\epsilon_{n-1} = 0, \ldots, \epsilon_1 = 0,\ \cap_{m=1}^{n} A^{(m)}) = \frac{\mathbb{P}(\epsilon_n = 1,\ A^{(n)})}{u_n^n + v_n^n} \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{M_n}{3^{M_n}}\frac{1}{u_n^n + v_n^n} \tag{34}$$

$$= \frac{M_n}{M_n + 2}. \tag{35}$$

根据约定 $x_{n+1}^n = 1.$，方程（31）和（35）推出（9）。方程（10）是由 $\epsilon_m.$ 的定义得出的

为完成证明，我们来证明：在事件 $\epsilon_m = 1.$ 条件下，$\forall m \geq 1$ E_m 的分布在 $\{1, \ldots, M_m\}$ 上是均匀的。取满足 $2 \leq m_0 \leq N.$ 的 m_0。我们需要证明 $\forall j_0 \in \{1, \ldots, M_{m_0}\}$

$$\mathbb{P}(E_{m_0} = j_0 | a,\ \epsilon_{m_0})$$

不依赖于 $j_0.$ 我们有

$$\mathbb{P}(E_{m_0} = j_0,\ \cap_{m=1}^{N} A^{(m)},\ \epsilon_{m_0} = 1) = \\ \mathbb{P}(E_{m_0} = j_0,\ \epsilon_{m_0} = 1,\ \gamma_{S_{m_0-1}+1} = i_{m_0},\ \gamma_{S_{m_0}+1} = i_{m_0+1},\ \cap_{m=1}^{N} A^{(m)})$$

$$= 2\mathbb{P}(\cap_{m=1}^{m_0-1} A^{(m)},\ \gamma_{S_{m_0-1}+1} = i_{m_0}) \\ \times \mathbb{P}(E_{m_0} = j_0, \epsilon_{m_0} = 1, \gamma_{S_{m_0-1}+1} = i_{m_0}, \gamma_{S_{m_0}+1} = i_{m_0+1}, \cap_{m=m_0+1}^{N} A^{(m)})$$

$$= 4\mathbb{P}(\cap_{m=1}^{m_0-1} A^{(m)},\ \gamma_{S_{m_0-1}+1} = i_{m_0})$$
$$\times\, \mathbb{P}(E_{m_0} = j_0,\ \epsilon_{m_0} = 1,\ A^{(m_0)})\mathbb{P}(\gamma_{S_{m_0-1}+1} = i_{m_0+1},\ \cap_{m=m_0+1}^{N} A^{(m)})$$

这要归功于给定 γ 时的条件独立性。此外

$$\mathbb{P}(E_{m_0} = j_0,\ A^{(m_0)},\ \epsilon_{m_0} = 1) = \mathbb{P}(\alpha_{j_0} = 1,\ \forall i \neq j_0,\ \alpha_i = 0,\ A^{(m_0)})$$

它不依赖于 j_0，因此 $\mathbb{P}(E_{m_0} = j_0,\ A^{(m_0)}\ \epsilon_{m_0} = 1)$不依赖于 j_0.。对于 $\mathbb{P}(E_{m_0} = j_0,\ \cap_{m=1}^{N} A^{(m)},\ \epsilon_{m_0} = 1|a,\ \epsilon_{m_0} = 1)$也是如此，因为 $\mathbb{P}(\cap_{m=1}^{N} A^{(m)},\ \epsilon_{m_0} = 1)$不依赖于 j_0.。当 $m_0 = 1$.时，证明更简单。

致谢

作者谨此感谢 James Norris 就本文先前版本展开的富有成效的讨论。

参考文献

[1] Itai Benjamini、Ariel Yadin 和 Amir Yehudayoff。随机图同态与对数度。《Electron. J. Probab.》，12：第 32 期，926–950，2007 年。[2] Emmanuel Boissard、Serge Cohen、Thibault Espinasse 和 James Norris。随机游走上的随机游走的扩散率。《Random Structures Algorithms》，47(2)：267–283，2015 年。[3] Duminil-Copin、Karrila、Manolescu 和 Oulamara。六顶点模型高度函数的去局域化。发表于 arXiv:2012.13750v1[math.PR], 2021。[4] T. Espinasse、N. Guillotin-Plantard 和 P. Nadeau。受约束随机游走者模型的组合方法。《Combin. Probab. Comput.》，25(2)：222–235，2016 年。[5]P. Lammers。超环面裂缝上随机游走的扩散率。arXiv:1706.05690v2 [math.PR], 2022。[6] E. H. Lieb。方冰的剩余熵。《Physical Review》，162(1)：162–172，1967 年。[7] Fabien Montegut。受约束随机游走的尺度极限。博士论文，图卢兹大学 MITT 博士生院，2020 年。