arXiv:2301.02108v1 [physics.optics] 5 Jan 2023

具有色差像散的超短激光脉冲

SPENCER W. JOLLY

OPERA-Photonique 服务，布鲁塞尔自由大学（*ULB*），比利时布鲁塞尔
spencer.jolly@ulb.be

摘要：本文描述了具有色差像散的超短激光脉冲，其中像散相位随相对于中心频率的偏移呈线性变化。这种时空耦合不仅会产生有趣的空间-频率和时空效应，还会破坏圆柱对称性。我们定量分析了这种耦合对准直光束中及其通过焦点传播过程中的时空脉冲结构所产生的影响，研究对象包括基模高斯光束和拉盖尔-高斯光束。色差像散是一种新型时空耦合，可用于构造复杂度任意高但描述仍然简单的光束，并可应用于成像、计量学或超快光与物质相互作用。

本研究已投稿至 Optica Publishing Group 旗下的 Optics Express

1. 引言

在超短电磁脉冲光束的语境下，色差也可等效地视为时空耦合（STCs）[1]。通常认为，这些耦合会对激光-物质相互作用实验产生不利影响，因为它们会延长聚焦脉冲持续时间，从而降低强度 [2]。然而，尤其是近年来，人们也开始将时空耦合视为一种可用于调控的途径。例如，在激光驱动加速领域，有多种方案预测，尽管时空整形光束的峰值强度较低，却能产生更高的净加速度 [3–7]。

时空光谱像差与时空像差之间的联系十分重要，因为许多光学元件和系统的特性，最好通过其光谱特性（色散等）来描述。棱镜具有角度色散，这与超短脉冲中的脉冲前沿倾斜有关 [8],；单片透镜的焦距随频率变化，从而导致脉冲前沿曲率 [9,10]。众所周知，衍射光学透镜也具有固有的强色差聚焦效应，这可能会导致超短脉冲在其焦点附近发生显著重塑 [11]。事实上，对于衍射光学元件和超构光学而言，这种色差通常被视为一种缺点和设计挑战，但仍存在利用它进行调控的机会。

在本研究中，我们将描述并建模具有色差像散的超短脉冲。这种像差表现为随频率变化的空间相位（波前）像差，不再具有棱镜或简单透镜情形下那种简单的对称性——也就是说，它不沿任何一个笛卡尔坐标轴或圆柱坐标方向。我们将讨论近场（准直）和远场（聚焦）空间中的情形，涵盖基模高斯光束和拉盖尔-高斯光束，并考虑零附加谱相位或二次附加谱相位。我们还将经常把这种新的时空耦合与已知的圆柱对称脉冲前沿曲率情形进行比较，从而揭示这两种情形的关键特征。

2. 色差像散的概念描述

超短激光脉冲光束最简单的描述方式，是将其视为具有可分离空间振幅 $p(\vec{r})$ 和时间包络 $g(t)$ 的电磁光束，使得标量光束的电场为 $E(\vec{r},t) = p(\vec{r})g(t)e^{i(\omega t-kz)}$。然而，时空耦合可能使这种描述不再充分。

近场中的色差曲率等效于脉冲前沿曲率（PFC）。这可以

通过一个脉冲看出：其时间包络的到达时间随半径呈二次变化，半径为 r as $g(t-\alpha|r|^2)$；可以证明，这等效于曲率半径 R 具有如下频率依赖性：$1/R(\omega) = 2c\alpha\delta\omega/\omega$ [12]（见图 1），其中 $\delta\omega = \omega - \omega_0$ 和 $\tau_p = \alpha w_i^2$，且 w_i 为近场（准直）光束腰（$1/e^2$ 强度半径）。这个新的时间包络同时依赖于空间和时间，因此电场不再是时空可分离的。

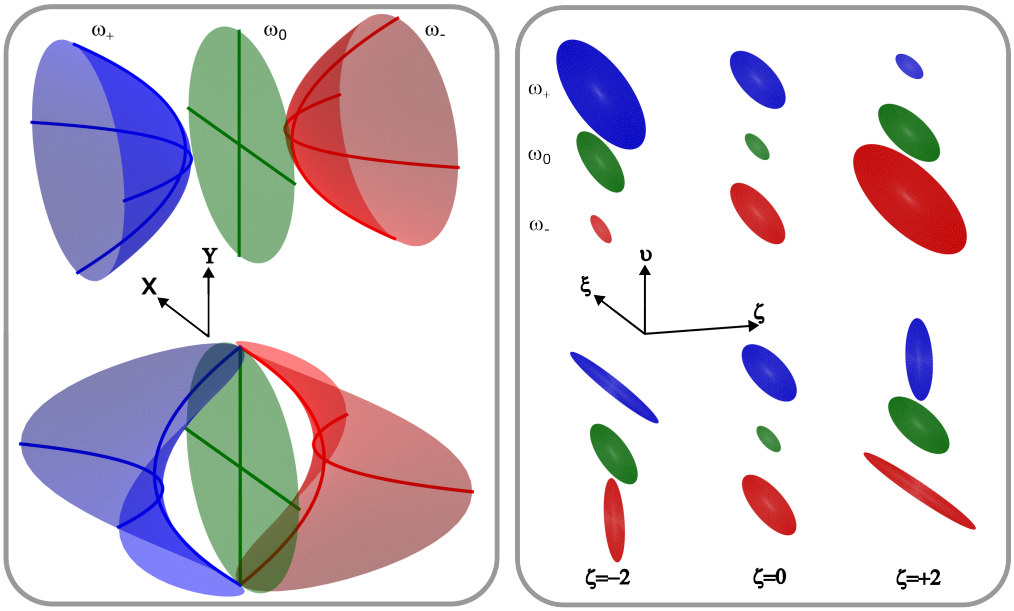


图 1. 色差像散的概念。对比了纯色差曲率（上）和纯色差像散（下）。近场（左）展示了三个频率 $\omega_- < \omega_0 < \omega_+$（红、绿、蓝）对应的波前。聚焦到远场（右）后，展示了沿传播方向三个平面上这三个频率对应的光束尺寸。$\{\xi,\ \upsilon,\ \zeta\}$ 是焦点处坐标 $\{x,\ y,\ z\}$ 的归一化形式。注意，中心频率 ω_0 在各处的表现都相同。

上述关于色散变化曲率或脉冲前沿曲率的分析，也可以理解为频率变化与 $\tau_p\delta\omega$ 成正比的离焦泽尼克多项式。本文的主题——色差像散，是对像散泽尼克多项式的扩展；就复杂度而言，像散泽尼克多项式本质上是离焦之后的下一类像差。垂直像散是指空间相位与 $x^2 - y^2$ 成正比的情况，这与离焦项与 $x^2 + y^2 = r^2$ 成正比不同，因此我们仅考虑这种情况（见图 1）。为保持一般性，我们可以引入另一组特征参数 $\{\alpha_a,\ \tau_a\}$（$\tau_a = \alpha_a w_i^2$）来描述色差像散，使垂直像散泽尼克项与 $\tau_a\delta\omega$ 成正比；当同时存在脉冲前沿曲率和色差像散时，时间包络具有脉冲前沿，其到达时间发生畸变g（$t - [$（$\alpha + \alpha_a$）$x^2 +$（$\alpha - \alpha_a$）$y^2]$）。笛卡尔坐标 x 和 y 之间的不对称性，也可以用 $\alpha_x = \alpha + \alpha_a$ 和 $\alpha_y = \alpha - \alpha_a$（以及 $\tau_x = \tau_p + \tau_a$ 和 $\tau_y = \tau_p - \tau_a$）来概括。

如图 1 所示，准直光束中的时空耦合与焦点处的时空耦合之间存在重要联系。例如，准直光束中的色散变化曲率或脉冲前沿曲率会在焦点处产生纵向色差（LC），使不同波长聚焦在不同的纵向位置。采用前几段中的记号，每个频率对应的束腰位置 z_0 满足关系：$z_0(\omega) = z_R\tau_p\delta\omega$——频率较高的光

会聚焦得更靠后（z更大），对应正的τ_p。对色差像散也可以作同样的直观理解，不过，考察 xz 平面或 xy 平面中的尺寸时，束腰位置并不相同。因此有 $z_{0x}(\omega) = z_R\tau_x\delta\omega$和$z_{0y}(\omega) = z_R\tau_y\delta\omega$。当不存在色散变化曲率（$\tau_p = 0$），且只有色差像散（$\tau_a \neq 0$）时，$z_{0x}$和$z_{0y}$大小相等、符号相反；图 1 所示的就是这种情况，也是本文后续部分主要讨论的情况之一。下一节将对本节的解释作定量分析。

3. 基模高斯光束分析

我们首先关注具有高斯空间和时间分布的脉冲光束（基模高斯光束），分别考察其近场和远场。

3.1. 准直光束上的色差像散

利用时间与频率的对偶性，可以相对直接地表示准直（近场）高斯光束上的色差像散。假设光束宽度为w_i，脉冲持续时间为 $\tau_0 = 2/\Delta\omega$，对于单个纵向平面$E = Ae^{i\omega_0 t}$上的复电场，且 $\tilde{E} = \mathrm{F}\{E\}$，有

$$\tilde{E}(x, y, \omega) = e^{-(X^2+Y^2)}e^{-i\tau_a\delta\omega(X^2-Y^2)}e^{-\delta\omega^2/\Delta\omega^2} \tag{1}$$

$$A(x, y, t) = e^{-(X^2+Y^2)}e^{-(t-\tau_a(X^2-Y^2))^2/\tau_0^2}, \tag{2}$$

其中 $X = x/w_i$ 且 $Y = y/w_i$。不难发现，电场的频域表示和时域表示中都包含时间/频率与空间不可分离的项。在频域描述中，这种耦合仅体现在相位上；而在时域描述中，则体现在到达时间上。

根据式1，在图2(a–c)所示的频域中，空间振幅在所有频率下仍保持恒定。然而，空间相位会随频率变化。事实上，这是观察色差像散最直接的方式——中心频率没有空间相位（图2(b2)），而高于和低于中心频率的频率则具有大小相等、符号相反的像散（图2(a2)和(c2)）。

虽然这一概念可能很简单，但时域中的结果未必直观。时间积分空间振幅与不存在任何时空耦合的基模高斯光束相同。不过，脉冲在时域中具有结构。在不同时间下，如图2(d1–d5)所示，空间振幅并非平凡。从另一个角度来看，这或许更容易理解：Yt 平面上不同 X 值处的切片（图2(e1–e3)）以及 Xt 平面上不同 Y 值处的切片（图2(f1–f2)），显示了移动的局部脉冲前沿曲率，其方向会随切片平面而改变。这些切片清楚地表明，在色差像散的作用下，脉冲前沿呈现马鞍形；检查式2(d–f)即可看到这一点。图2(d–f)从不同角度展示了脉冲前沿的鞍形到达时间。

另一个重要的考虑因素是方程的对称性。在频域和时间域中，当 x 和 y 互换并分别伴随频域或时间域中的某种额外操作时，光束始终保持对称。在频域中，该对称性表现为关于 ω_0的反射；在时间域中，则表现为关于原点的反射。更具体地说：$\tilde{E}(x', y', \omega') = \tilde{E}(y', x', 2\omega_0 - \omega')$，以及 $A(x', y', t') = A(y', x', -t')$。这些对称性可在图2中得到验证：当交换{a2,c2}中的 X 和 Y 时，图板{a2,c2}相同；{d1,d5}和{d2,d4}也同样如此。当关于 $t = 0$反射时，图板{e1,f2}和{e3,f1}相同。因此，图2中的图板b2和d3在交换 X 和 Y 后具有对称性（这是一个平凡结果），因为它们分别处于频域和时间域中的对称点。

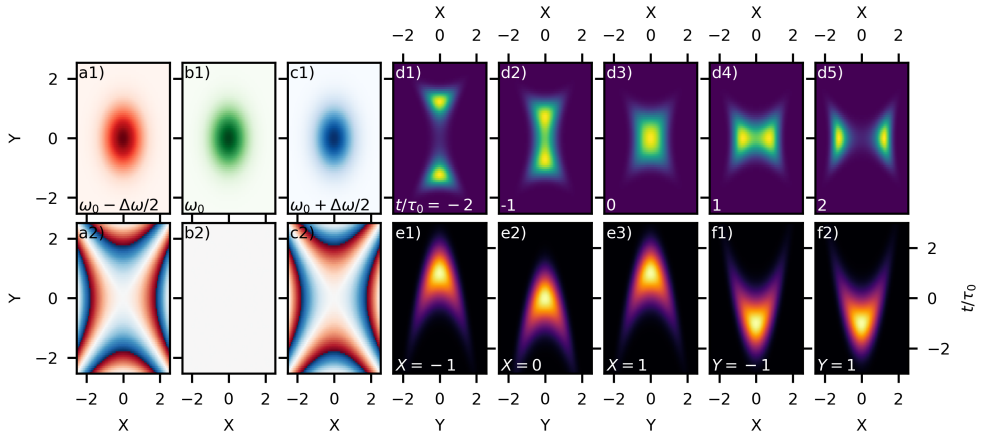


图2. 近场中具有色差像散的超短激光脉冲（$\tau_a = \tau_0$）在频域和时域中的表现。不同的频率分量（a–c）具有相同的振幅（a1–c1），但空间相位各不相同。由 τ_a 参数化并由式1–2描述的色差像散，会使高于和低于 ω_0 的频率呈现符号相反的像散相位（a2–c2）。时域脉冲的特征是呈鞍形的到达时间，可通过时变振幅分布（d）观察，也可通过沿 X（e）或 Y（f）的切片观察空间变化的时间分布。

3.2. 聚焦光束上的色差像散

传播光束的电场可在频域中写为 $\tilde{E} = \psi e^{-\delta\omega^2/\Delta\omega^2} e^{-ikz}$，其中 ψ 本质上描述了不断变化的振幅和相位。焦点处的基模高斯光束可用最简洁的方式表示为 ψ_0，即

$$\psi_0 = f e^{-f\rho^2\omega/\omega_0}, \tag{3}$$

其中 $\rho = r/w_{00}$ 和 $f = i/(i+\zeta)$，且 $\zeta = z/z_R$。注意指数项中的 ω/ω_0，它对于准确描述脉冲在衍射并在焦点外获得显著曲率时产生的时间延迟是必要的。这里明确假设 z_R 与频率无关（Porras因子 $g_0 = 0$ [13]），这要求 w_{00} 是中心频率（$w_{00} \equiv w_0(\omega_0)$）处的聚焦光束腰。事实上，这不仅能正确描述由曲率导致的时间延迟，还会产生频率相关的光束腰 $w_0 \propto 1/\sqrt{\omega}$。不过，只有当脉冲变为少周期脉冲时，这才会产生显著的额外影响。本文不讨论频率相关光束腰以及其他 Porras 因子取值的具体影响。

展开为振幅和相位分量后，这种简洁的描述便得到了古伊相位、相位曲率、光束腰演化等常见关系。对于不存在时空耦合（STC）的 ψ_0，可以通过傅里叶变换计算时域电场。当存在纵向色差（$\tau_p \neq 0$）时，$f = i/(i+\zeta-\tau_p\delta\omega)$ 和时域电场便无法再轻易计算，只能使用数值积分。

基模高斯光束的色差像散聚焦场可以通过对上述内容进行相对简单的扩展来构造，得到 ψ_a 如下

$$\psi_a = \sqrt{f_x f_y}\, e^{-(f_x \xi^2 + f_y \upsilon^2)\omega/\omega_0} \tag{4}$$

$$f_x = \frac{i}{i + \zeta - \tau_x \delta\omega} \tag{5}$$

$$f_y = \frac{i}{i + \zeta - \tau_y \delta\omega}, \tag{6}$$

其中 $\xi = x/w_{00}$ 和 $\upsilon = y/w_{00}$，并且我们注意到 $\tau_x = \tau_p + \tau_a$ 和$\tau_y = \tau_p - \tau_a$。

频域中的情况再次相对简单，因为每个频率都可以与其他频率分开考虑。对于 $\tau_p = 0$ 和 $\tau_a = \tau_0$，图 3 从不同视角展示了 ω_0 和 $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ 的结果。根据公式 1，近场中的波前曲率符号相反，因此直接导致不同颜色的光在焦点附近的相位和振幅呈现不对称。

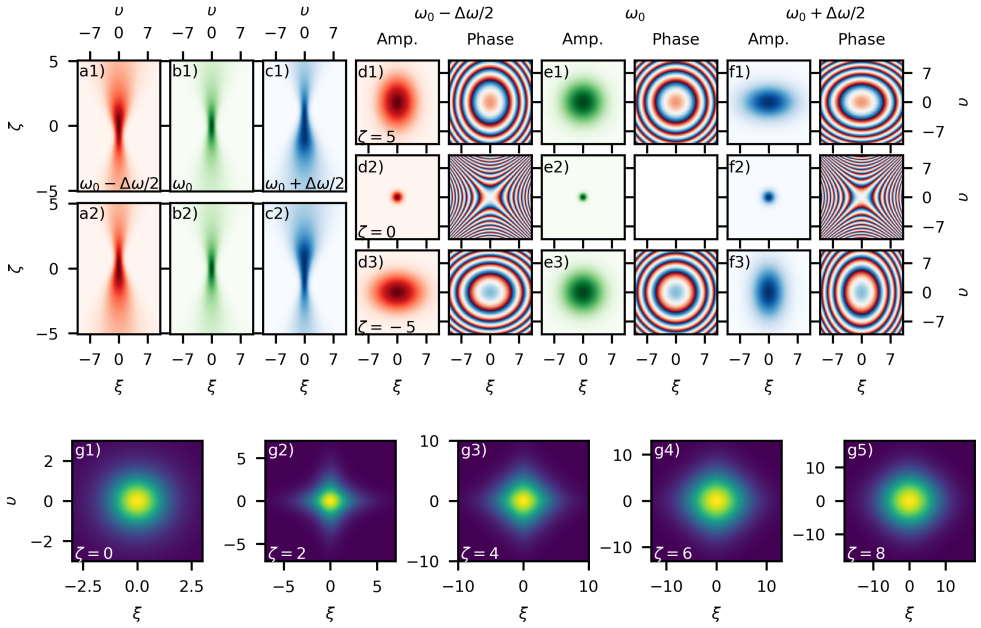


图 3. 频域中焦点附近具有色差像散的超短激光脉冲（$\tau_a = \tau_0$）。图中展示了三个不同频率（a–c）在 $\xi = 0$ 和 $\upsilon = 0$处的 $\upsilon - \zeta$ 和 $\xi - \zeta$ 平面振幅切片。对于相同的三个频率，图中还展示了 $\xi - \upsilon$ 平面上 ζ 三个不同取值处的振幅和相位切片（d–f）。图中还展示了积分振幅分布 $\int |\tilde{E}|$（g）；随着 ζ 增大，可以看到中间取值处缺乏圆柱对称性。

我们可以看到，束腰位置随频率变化；对于位于 ω_0 两侧的频率，以及分别沿 ξ 或 υ 考察光束腰时，束腰位置处于相反的 ζ。在 ω_0 处，由于完全不存在像差，所有 ζ 处的光束都是圆形的。 ω_0 以外的频率在$\zeta = 0$处呈圆形，但具有非零且不对称的空间相位。远离 $\zeta = 0$ 时，除ω_0 外，所有频率在振幅和相位上都不对称。图 3(g) 所示的积分轮廓在 $\zeta = 0$ 时呈圆形；随着 $|\zeta|$ 变大，也会呈圆形，但在中间值时明显缺乏圆柱对称性（不过交换 ξ 和 υ时仍保持对称）。

由公式 4 得到并在图 3 中展示的频率相关场，可以通过数值傅里叶变换来计算时域中的场。图 4(a) 和 (b) 分别展示了在 $\omega_0(\zeta = 0)$的最佳焦点位置处，7 个不同时刻的空间振幅和实场；图 4(h–j) 则展示了不同空间切片的时空振幅。

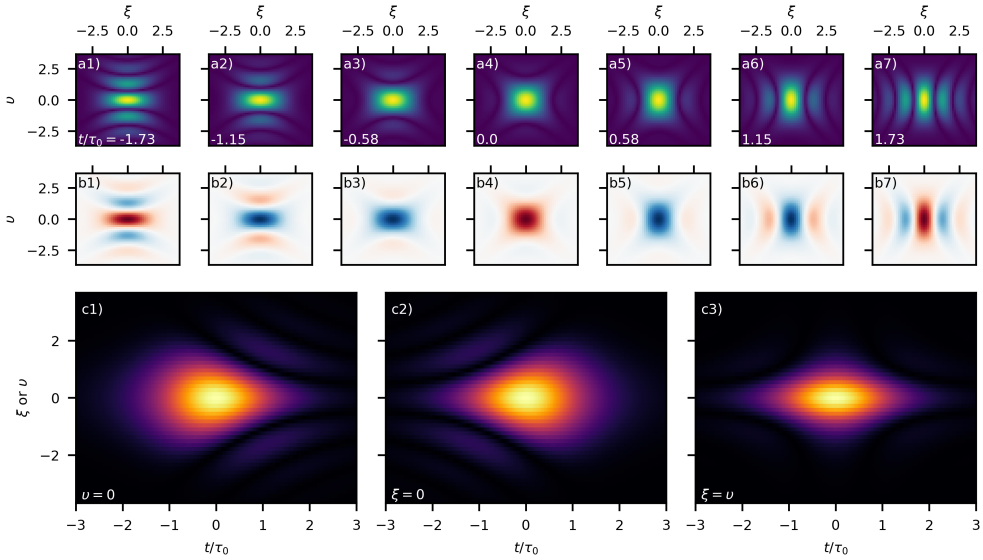


图 4. 焦点处具有色差像散（$\tau_a = \tau_0$）的超短激光脉冲（$\zeta = 0$）随时间的变化。图中展示了 $\xi - \upsilon$ 中围绕 $t = 0$的 7 个不同时刻的振幅（a）和电场实部（b）。三个不同横向切片的时空振幅（c）显示出空间中预期的对称性。

在图 4(a) 和 (b) 的时间切片中，再次观察到了这些对称性：t' 处的光束与交换 x 和 y 后 $-t'$ 处的光束相同。在 $t = 0$ 处，光束轮廓本身关于交换 x 和 y呈对称，但明显不具有圆柱对称性。随着 $|t|$ 增大，振幅在一个横向坐标方向上显示出空间干涉，形成更小的中心光斑和外围条纹；而在另一个横向坐标方向上则没有这种干涉，且光斑略微变大。我们在图 3 中看到，所有频率在 $\zeta = 0$ 处的振幅都呈对称分布，且仅比 ω_0处更大，因此这些干涉和不对称性完全源于随色彩变化且不对称的空间相位。从式 4 展开，当 $\zeta = 0$ 时，我们可以求得该脉冲的谱相位 $\exp(-i\phi(\omega,\ \xi,\ \upsilon))$

$$\phi(\omega,\xi,\upsilon) = \frac{-1}{2}\left[\arctan(-\tau_x\delta\omega) + \arctan\left(-\tau_y\delta\omega\right)\right] - \frac{\xi^2\tau_x\omega\delta\omega/\omega_0}{1+(\tau_x\delta\omega)^2} - \frac{\upsilon^2\tau_y\omega\delta\omega/\omega_0}{1+(\tau_y\delta\omega)^2} \tag{7}$$

$$= \left[\tau_p(1-(\xi^2+\upsilon^2)) - \tau_a(\xi^2-\upsilon^2)\right]\delta\omega + \left[6\xi^2(\tau_p+\tau_a)^3 + 6\upsilon^2(\tau_p-\tau_a)^3 - (2\tau_p^3/3 + 6\tau_p\tau_a^2)\right]\frac{\delta\omega^3}{6} + O(\delta\omega^4), \tag{8}$$

其中，我们忽略了一个二阶项；当脉冲长于少周期（$\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$）时，该项很小。在图 4 所示的情形中，$\tau_p = 0$，由正比于$\delta\omega$ 的一次项导致的总体时间延迟是不对称的（$\propto \xi^2 - \upsilon^2$），三阶相位（正比于 $\delta\omega^3$的项）也是如此。将其与 $\tau_a = 0$的情形进行比较很有启发性，后者具有圆柱对称性。我们将

不考察 τ_a 和τ_p 均非零的情形，但将在后文详细说明轴上的谱相位及其对 ζ 的依赖关系。

每次干涉都会产生一个 π 相位偏移，这当然意味着场的实部变为负值。图 4(c1) 和 (c2) 中沿 $\xi = 0$ 或 $\upsilon = 0$ 的切片，体现了具有纵向色差的光束的时空振幅，只是时间方向翻转了；图 4(c3) 中沿 $\xi = \upsilon$ 的切片则从另一个角度清楚地显示出其缺乏圆柱对称性。

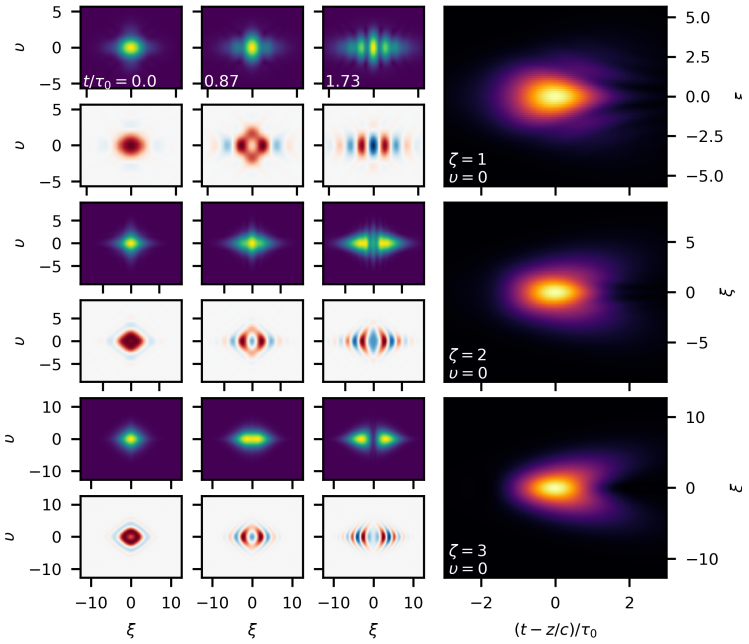


图 5. 具有色差像散（$\tau_a = \tau_0$）的超短激光脉冲在焦点附近随时间的传播。图中显示了三个不同时刻（由于已知的对称性，此处仅显示正值）下的振幅和电场实部，以及 $\upsilon = 0$时的时空振幅；对应 $\zeta = 1$、2 和 3。

由于传播本身会影响超短场的时空分布，因此远离 $\zeta = 0$处的时空行为也很值得关注。图 5 显示了在 $\upsilon = 0$处、三个不同时刻（由于已知的对称性，此处仅显示正值）下，空间中的振幅和实场，以及时空振幅；对应 ζ =1、2 和 3。此时光束已远离图 5 中的 $\zeta = 0$，不对称性变得更加显著。这是因为如图 3 所示，当 ζ 不为零时，振幅和相位都与频率相关且不对称。

关于焦点周围的对称性，还有一个重要问题。当 $\zeta = 0$ 如图 4 所示，以及图 5 中 ζ 取较小值时，关于 $t = 0$ 反射并交换 x和 y 后，对称性仍然保持。然而，当 ζ 变大时，曲率及由此产生的时间延迟也会变大。由于曲率始终与 $x^2 + y^2$ 成正比（即不具备与色差像散相同的鞍形对称性），因此时间上的相同对称性不再存在。

4. 添加谱相位后的分析

当向超短脉冲加入二阶谱相位 ϕ_2（群延迟色散，GDD）时，脉冲持续时间通常会增加。当 GDD 相对于傅里叶变换极限脉冲持续时间（$\phi_2 \gg \tau_0$）足够大时，可以近似认为不同频率的到达时间按照 $\phi_2\delta\omega$线性变化。已有研究表明，将超短脉冲焦点处的纵向色差（不同频率聚焦到不同的纵向位置）与 GDD（不同频率在不同时间到达）相结合，焦点周围区域内的脉冲强度可以以远不同于光速 [12, 14, 15]的速度传播。这种“飞行焦点”已通过衍射光学元件和折射光学元件 [15, 16], 得到实验证实，并用于产生速度可调的电离波 [17]。此外，预计它还会影响许多其他实验场景 [18, 19]。

群延迟色散（GDD）会产生关于频率的二次谱相位，其形式为一个附加项 $\exp\left(-i(\phi_2/2)\delta\omega^2\right)$。当除显著的群延迟色散外还存在纵向聚焦位置色差（LF/PFC）（$\tau_p \neq 0$）时，飞行焦点强度峰值的速度为

$$v_{\mathrm{ff}} = \frac{c}{1 + \frac{c\,\phi_2}{z_R\,\tau_p}}. \tag{9}$$

存在一个群延迟色散值 $\phi_2^{\mathrm{Inf}} = -z_R\tau_p/c$，此时速度的定义变得不明确，实际上焦点在空间中并无演变。对于正（负）τ_p，高于 ϕ_2^{Inf} v_{ff} 时为正（负），低于它时 v_{ff} 为负（正）。当 ϕ_2/τ_p 为正时，则 $v_{\mathrm{ff}} < c$；而当 $0 > \phi_2/\tau_p > -z_R/c$ 时则相反；最后，当 $\phi_2/\tau_p < -z_R/c$ v_{ff} 时，其为负且低于光速。

由于色差像散是纵向色差/聚焦位置色差与脉冲前沿曲率的某种延伸，并且在 x 和 y中具有不对称性，因此，当加入群延迟色散时，具有色差像散的超短脉冲在焦点处应当会出现一些类似的时空效应。图 6 中的 $\phi_2 = 10\tau_0^2$展示了这些效应的一个示例。图 6(a) 显示了纯纵向色差情况下超短脉冲振幅的分布，包括轴上位置和两个离轴位置。可以清楚地看到，有一种结构以不同于 c的速度传播，即根据 $\tau_p = 2\tau_0$以 v_{ff} 的速度传播。尽管由于干涉，这种效应在离轴位置不太明显，但它仍然存在。

加入色差像散后，我们发现了有趣的行为：光脉冲的强度具有在空间不同位置以不同速度传播的特征。当纵向色差与色差像散的数值相等时，如图 6(b) 所示，实际上只有 x 中的色差行为，这是因为 $\tau_y = 0$。当 $\upsilon = 0$ 时，有一种以v_{ff}传播的弱结构；之所以更弱，是因为强度的增加仅源于沿x方向较弱的色差行为。当 $\upsilon \neq 0$时，这种非光速结构会更加明显。

仅存在色差像散时，图6(c)中在 $v_{\mathrm{ff}}(\tau_a)$ 和 $v_{\mathrm{ff}}(-\tau_a)$ 处存在结构。当 $|x| = |y|$ 时，不存在速度异于 c 的显著整体结构，但在两个有效的 v_{ff} 值处均存在明显的次要结构，因为 $\tau_x = 2\tau_0 = -\tau_y$。然而，当 $|x| \neq |y|$ 时，则存在非光速结构。例如，当 $y = 0$ 时，强度结构以符合 τ_x 的速度传播；当 $x = 0$ 时，则以符合 τ_y 的速度传播。这些观察结果与方程的对称性及上一节的结果一致。事实上，由于存在色差像散时各种效应相互混合，非光速结构不如纵向色差情况下那样明显。

5. 推广至其他自由空间光束

由于色差像散会在焦点处产生复杂的时空效应，使空间和时间轮廓相互“混合”，因此基于不同空间轮廓的超短激光脉冲会产生不同的结果。本节展示具有色差像散的超短拉盖尔-高斯（LG）光束在焦点处的时空场。关于结果

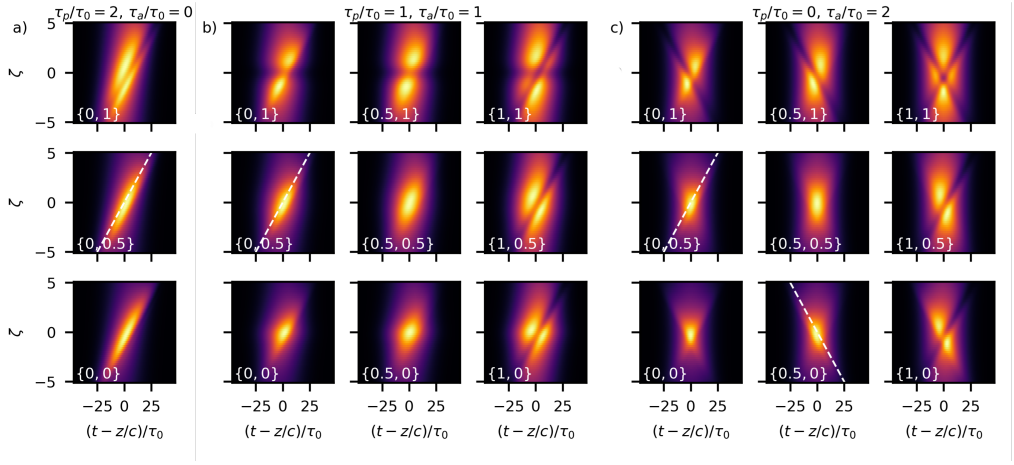


图 6. 焦点附近具有纵向色差和/或色差像散，并附加群延迟色散的超短激光脉冲（$\phi_2 = 10\tau_0^2$）。脉冲在 (a) 中具有 $\tau_p = 2\tau_0$ 和 $\tau_a = 0$，在 (b) 中具有 $\tau_p = \tau_a = \tau_0$，在 (c) 中具有 $\tau_p = 0$ 和 $\tau_a = 2\tau_0$。每个图中的括号对应其所对应的 $\{\xi,\ \upsilon\}$ 值。注意，沿竖直线的结构意味着其速度为光速，而虚线对应于 $v\mathrm{ff}(\pm\tau_a)$。

准直光束的结果则简单得多——只是高阶空间轮廓，并带有式 2 所示的空间变化延迟。因此，本节将聚焦于焦点附近的场。

阶数为 n 的标准拉盖尔-高斯光束的场可简洁地写为 [20–22]

$$\psi^{(\mathrm{LG})} = L_n(2ff^*\rho^2)\left(\frac{f}{f^*}\right)^n \psi_0, \tag{10}$$

其中，ψ_0 来自基模高斯光束。与高斯光束一样，具有色差像散的 n 阶拉盖尔-高斯光束可按如下方式构造

$$\psi_a^{(\mathrm{LG})} = L_n\left(2(f_x f_x^*\xi^2 + f_y f_y^*\upsilon^2)\right)\left(\frac{f_x f_y}{f_x^* f_y^*}\right)^{n/2} \psi_a, \tag{11}$$

其中，ψ_a 来自具有色差像散的基模高斯光束，f_x 和 f_y 与前文相同，* 表示复共轭。

图 7 展示了在 $\upsilon = 0$ 处，$\zeta = 0$、1 和 2 对应的、仅具有色差像散（$\tau_a = \tau_0$）的 $n = 1$ 拉盖尔-高斯光束在若干时间切片和一个时空切片上的振幅与场的实部。可以清楚地看到，时空结构更加复杂：基模高斯光束中出现的干涉条纹与拉盖尔-高斯光束的空间复杂性相结合。随着 $|\zeta|$ 增大，光束还呈现出明显的不对称性，其时空结构也比基模高斯光束的情况更加复杂。

除了图 7 所示的显著时空轮廓外，轴上（$\xi = \upsilon = 0$）时间轮廓中也存在值得仔细考察的非平凡效应。图 8 展示了在一系列 ζ 值下，纯纵向色差（仅有 $\tau_p \neq 0$）和纯色差像散（仅有 $\tau_a \neq 0$）两种情况下，$n = 0$（高斯）、1 和 2 对应的轴上时间轮廓（振幅）。

不同情况有几个显著特征。纯 LC 情况（图 8(a)）在 $\zeta = 0$ 附近存在时间延迟，并且该延迟随 n 增大；而纯色差像散情况（图 8(b)）

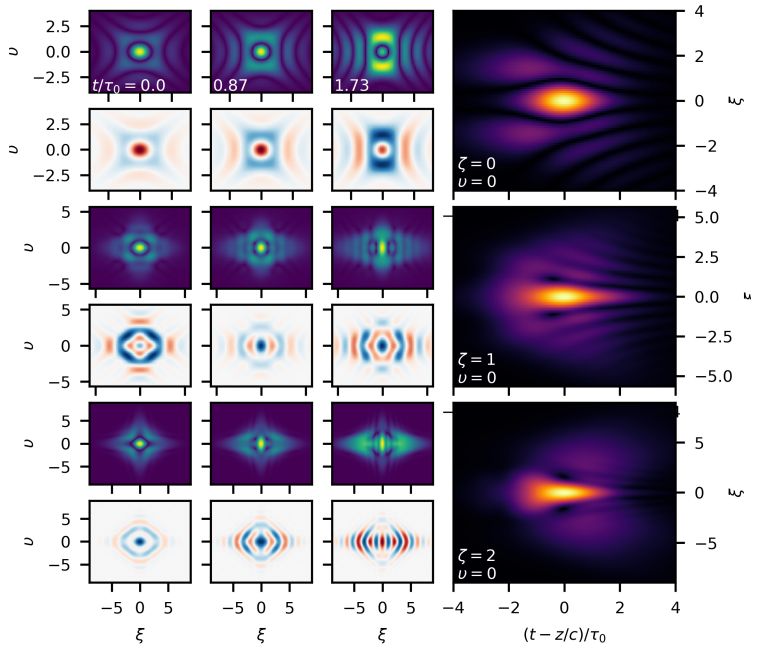


图 7. 焦点附近具有色差像散（$\tau_a = \tau_0$）的超短拉盖尔-高斯（$n = 1$）激光脉冲的时域图。图中展示了三个不同时间（由于已知的对称性，此处现在仅显示正值）下的 $\xi - \upsilon$ 平面中的振幅和电场实部，以及当 $\upsilon = 0$时的时空振幅，其中 $\zeta = 0$、1 和 2。

则没有这种现象。从近场分布来看，这一点直观上是合理的——产生 LC 的脉冲前沿曲率会带来整体时间延迟，而鞍形到达时间不会造成平均到达时间偏移。对于纯 LC 情况，$\zeta = 0$ 附近的持续时间也会随 n 增大；而对于色差像散情况，$\zeta = 0$ 附近的持续时间会随 n 增大。在这两种情况下，随着 $|\zeta|$ 增大，持续时间都会减小至 τ_0。

研究轴上谱相位$\phi(\omega,\ \zeta)$时，可以定量解释这些特性；该相位仅由古伊相位项的色散特性造成。这一分析与第3.2节中的分析互为补充，后者考察的是 $\zeta = 0$处的时空谱相位。根据公式 10，轴上电场正比于（$f_x f_y / f_x^* f_y^*$）$^{(n/2)}\sqrt{f_x f_y}$，因此相位为

$$\phi = \frac{2n+1}{2}\left[\arctan\left(\zeta - \tau_x\delta\omega\right) + \arctan\left(\zeta - \tau_y\delta\omega\right)\right] \tag{12}$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[\arctan\left(\zeta - (\tau_p + \tau_a)\delta\omega\right) + \arctan\left(\zeta - (\tau_p - \tau_a)\delta\omega\right)\right] \tag{13}$$

$$= (2n+1)\ \text{反正切}\ (\zeta)\ - \phi(\omega, \zeta), \tag{14}$$

使得

$$\frac{\phi(\omega,\zeta)}{2n+1} = \frac{\tau_p}{1+\zeta^2}\delta\omega + \frac{2\zeta(\tau_p^2+\tau_a^2)}{(1+\zeta^2)^2}\frac{\delta\omega^2}{2} + \frac{2(3\zeta^2-1)(\tau_p^2+3\tau_a^2)\tau_p}{(1+\zeta^2)^3}\frac{\delta\omega^3}{6} + O(\delta\omega^4). \tag{15}$$

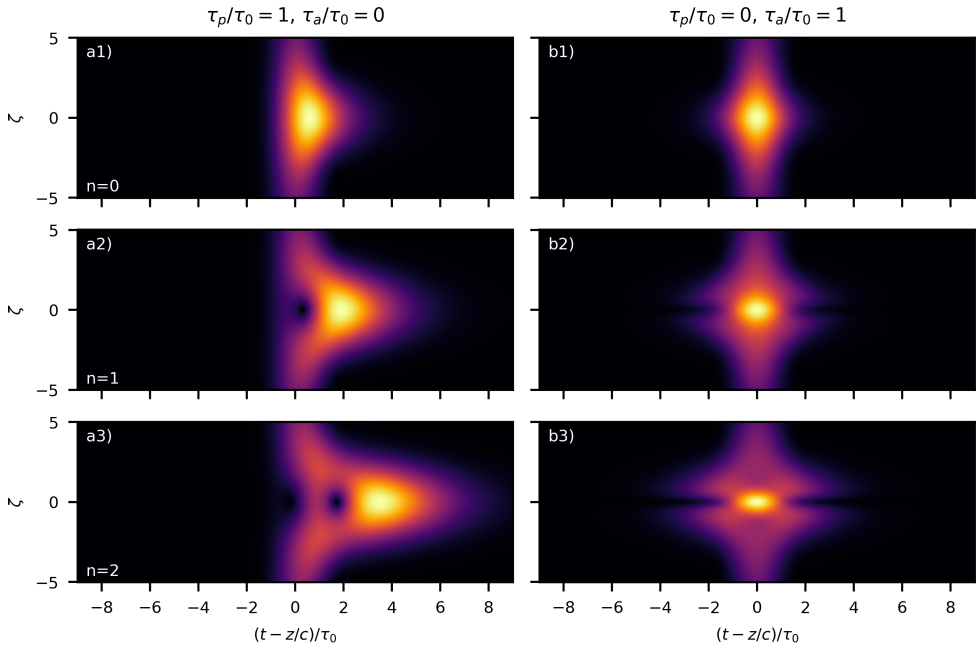


图 8. 具有纯纵向色差$\tau_p = \tau_0$ 或纯色差像散 $\tau_a = \tau_0$ 的超短拉盖尔–高斯激光脉冲在焦点附近、光轴上随时间的变化（$\xi = \upsilon = 0$）。

如果 $\tau_a = 0$，那么在所有 ζ下，谱相位均呈奇宇称。谱相位的线性项$\propto (2n + 1)\tau_p/(1 + \zeta^2)$，并导致 $\zeta = 0$处的时间延迟。三阶项（以及在较小程度上高阶奇数项）导致持续时间随 n 在$\zeta = 0$处增加。

如果 $\tau_p = 0$，那么谱相位仅包含非零偶数阶项，并且在 $\zeta = 0$ 处为零（此处再次提醒频谱与时间对称性）。因此，在 $\zeta = 0$ 处，持续时间与 n 无关，仅取决于初始谱带宽 $\Delta\omega = 2/\tau_0$ 以及由 τ_a 导致的带宽缩减（~~根据~~ $\sqrt{f_x f_y}$ 项）。二阶谱相位$\propto (2n + 1)\zeta\tau_a^2/(1 + \zeta^2)^2$ 在 $\zeta = \pm\sqrt{1/3}$ 处达到峰值；~~但~~由于带宽随着 $|\zeta|$增大而增加，两者的相互作用使持续时间的峰值出现在不同的 ζ 值处，并且随着 n 增大，峰值也随之增大。

所有情况下，随着 $|\zeta|$ 增大，谱相位趋于零，同时带宽趋近于全带宽。这就是为什么在图 8(a) 和 (b) 中，持续时间总是趋向于 τ_0。

6. 结论

色差像散是一种新的时空耦合：超短脉冲光束中不同频率分量的像散程度不同。本文从理论上对其进行了描述，包括解析分析和数值傅里叶变换。色差像散会使准直光束具有鞍形到达时间，并在焦点附近产生复杂得多的行为。我们利用谱相位阐明了基模高斯光束和拉盖尔-高斯光束在焦点及其附近的效应。

目前尚未通过实验产生色差像散，但我们认为，色差柱面透镜系统能够以类似于标准色差透镜的方式产生色差像散 [16], ，并且我们正在着手验证这一点。这个概念

以及本文对色差像散的分析，对于利用和应用这种新的时空耦合开展实验与应用至关重要。与许多其他时空耦合一样，色差像散有望应用于超快激光加工、宽带计量学或显微术、粒子操控或加速、多模光子学等领域。

资助。 玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动（801505）。

致谢。 S.W.J. 获得了欧盟地平线2020研究与创新计划的资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第801505号。

利益披露。 作者声明不存在利益冲突 。

数据可用性。 本文所报告结果的相关数据目前未公开， is
但可根据合理请求向作者获取。

参考文献

1. S. Akturk, X. Gu, P. Bowlan, and R. Trebino, “超短激光脉冲中的时空耦合，” J. Opt. **12**, 093001 2010( ). 2. C. Bourassin-Bouchet, M. Stephens, S. de Rossi, F. Delmotte, and P. Chavel, “ 存在时空耦合时超短脉冲的持续时间，” Opt. Express **19**, 17357–17371 (2011). 3. A. Debus, R. Pausch, A. Huebl, K. Steiniger, R. Widera, T. E. Cowan, U. Schramm, and M. Bussmann, “突破激光尾场加速的退相位和耗尽极限，” Phys. Rev. X **9**, 031044 (2019). 4. S. W. Jolly, “纵向色差对强径向偏振激光束真空加速的影响，” Opt. Lett. **44**, 1833–1836 (2019). 5. J. P. Palastro, J. L. Shaw, P. Franke, D. Ramsey, T. T. Simpson, and D. H. Froula, “无退相位激光尾场加速，” Phys. Rev. Lett. **124**, 134802 (2020). 6. C. Caizergues, S. Smartsev, V. Malka, and C. Thaury, “锁相激光尾场电子加速，” Nat. Photonics **14**, 475–479 (2020). 7. S. W. Jolly, “频率相关光束参数对少周期径向偏振激光束真空加速的重要性，” Opt. Lett. **45**, 3865–3868 (2020). 8. Z. Bor, B. Rácz, G. Szabó, M. Hilbert, and H. A. Hazim, “角度色散导致的飞秒脉冲前沿倾斜，” Opt. Eng. **32**, 2501–2504 (1993). 9. Z. Bor, “透镜及透镜系统中的飞秒激光脉冲畸变，” J. Mod. Opt. **35**, 1907–1918 (1988). 10. Z. Bor, “透镜中的飞秒激光脉冲畸变，” Opt. Lett. **14**, 119–121 (1989). 11. B. Alonso, J. Pérez-Vizcaíno, G. Mínguez-Vega, and Í. J. Sola, “通过脉冲整形定制衍射聚焦超短脉冲的时空分布，” Opt. Express **26**, 10762–10772 (2018). 12. A. Sainte-Marie, O. Gobert, and F. Quéré, “通过时空耦合控制超短光脉冲在真空中的速度，” Optica **4**, 1298–1304 (2017). 13. M. A. Porras, “表征聚焦脉冲高斯光束的电场，以实现与物质的相位敏感相互作用，” Opt. Lett. **34**, 1546–1548 (2009). 14. J. P. Palastro, D. Turnbull, S.-W. Bahk, R. K. Follett, J. L. Shaw, D. Haberberger, J. Bromage, and D. H. Froula, “飞行焦点驱动的任意速度电离波，” Phys. Rev. A **97**, 033835 (2018). 15. D. H. Froula, D. Turnbull, A. S. Davies, T. J. Kessler, D. Haberberger, J. P. Palastro, S.-W. Bahk, I. A. Begishev, R. Boni, S. Bucht, J. Katz, and J. L. Shaw, “激光强度的时空控制，” Nat. Photonics **12**, 262–265 (2018). 16. S. W. Jolly, O. Gobert, A. Jeandet, and F. Quéré, “使用折射透镜控制飞秒激光脉冲的速度，” Opt. Express **28**, 4888–4897 (2020). 17. D. Turnbull, P. Franke, J. Katz, J. P. Palastro, I. A. Begishev, R. Boni, J. Bromage, A. L. Milder, J. L. Shaw, and D. H. Froula, “任意速度电离波，” Phys. Rev. Lett. **120**, 225001 (2018). 18. D. Ramsey, P. Franke, T. T. Simpson, D. H. Froula, and J. P. Palastro, “动态激光脉冲中的电子真空加速，” Phys. Rev. E **102**, 043207 (2020). 19. D. Ramsey, B. Malaca, A. D. Piazza, M. Formanek, P. Franke, D. H. Froula, M. Pardal, T. T. Simpson, J. Vieira, K. Weichman, and J. P. Palastro, “有质动力控制下的非线性汤姆孙散射，” Phys. Rev. E **105**, 065201 2021( ). 20. H. Kogelnik and T. Li, “激光束与谐振腔，” Appl. Opt. **5**, 1550–1567 (1966). 21. A. E. Siegman, “作为光束本征函数的复变量厄米-高斯函数，” J. Opt. Soc. **63**, 1093 1094 1973–( ). 22. S. W. Jolly and M. A. Porras, “关于不同径向偏振拉盖尔-高斯光束场的澄清，” Opt. Lett. **47**, 3632–3635 (2022).