arXiv:2301.02140v1 [math.CO] 5 Jan 2023

最大度为七的边色临界图的平均度

Yan Cao

大连理工大学数学科学学院，中国辽宁省大连市，邮编：116024 电子邮箱：ycao@dlut.edu.cn Rong Luo*西弗吉尼亚大学数学系，美国西弗吉尼亚州摩根敦，邮编：26505 电子邮箱：rluo@mail.wvu.edu Zhengke Miao†江苏师范大学数学与统计学院，中国江苏省徐州市，邮编：221116 电子邮箱：zkmiao@jsnu.edu.cn Yue Zhao 中佛罗里达大学数学系，美国佛罗里达州奥兰多，邮编：32816-1364 电子邮箱：Yue.Zhao@ucf.edu

摘要

本文通过建立若干关于含有 4 个或 5 个顶点的路径的新邻接引理，证明了 7-临界图的平均度至少为 6。这意味着 Vizing平面图猜想适用于最大度为 7 的平面图，也适用于可嵌入欧拉示性数非负的曲面的图；后者是 Sanders 和 Zhao（J. Combin. Theory Ser. B 83 (2001) 201-212 和 J. Combin. Theory Ser. B 87 (2003) 254-263）以及 Zhang（Graphs and Combinatorics 16 (2000) 467-495) 所作的推广。

关键词：。边染色、临界图、欧拉公式、平面图

1 引言

图的边染色是一个将数值（颜色）分配给图的边的函数，使得任意两条相邻边获得不同的颜色。如果存在一种边染色，使图的颜色取自 $C = \{1, \ldots, k\}$，则称该图是边 k可染色的。一个有限简单图

*部分研究得到西蒙斯基金会资助（编号：839830）

†部分研究得到国家自然科学基金委员会资助，项目编号为 12031018 和 11971205。

G 的最大度为 Δ ，若其边 Δ-可染色，则称其为一类。否则，称 G 为第二类；此时，Vizing 定理 [20] 保证它是边$(\Delta+1)$-可染色的。若G 是连通的、属于第二类，且对每条边 $e \in G$都有$\chi'(G-e) < \chi'(G)$，则称其为边色临界图（简称临界图）。最大度为 Δ 的临界图 G 称为Δ-临界图。Vizing 于 1968 [21]提出了关于 Δ-临界图平均度的以下猜想。

猜想 1.1 设 G 是一个 Δ-临界图。那么 $d(G) \geq \Delta - 1 + \frac{3}{|V(G)|}$，其中 $d(G)$ 是 G 的平均度。

解决这一猜想所取得的进展会带来直接推论。例如，如果能对 Δ-临界图的大小给出更好的界，就能得到关于 $\Delta(S)$ 的更好界，其中 S 是一个曲面，而 $\Delta(S) = \max\{\Delta(G)|G$ 是一个第二类连通图，可以嵌入 $S\}$。众所周知，如果 Vizing 猜想对 $\Delta = 7$ 成立，那么 $\Delta(S) \leq 6$ ，其中 S 是欧拉示性数至少为 1 的曲面；这一结果于 2003 年通过其他方法在 [17] 中得到证明。如果这个平均度猜想成立，那么对于 Δ-临界图 G，应用不等式 $\alpha \leq n - \frac{m}{\Delta}$，其中 $n = |V(G)|$、$m = |E(G)|$，且 α 是 G 的独立数，就可以很容易地得到 $\alpha \leq \frac{n}{2}$ 为 $\Delta \to \infty$。这为 Vizing 于 1968 [21]，提出的独立数猜想提供了有力证据。该猜想声称，如果 G 是一个临界图，那么 $\alpha \leq \frac{n}{2}$。

猜想 1.1 在 $\Delta = 3$ 由 Jakobsen [12], 验证，在 $\Delta = 4$ 由 Fiorini 和 Wilson[10], 验证，在 $\Delta = 5$ 由 Kayathri [13], 验证，并在 $\Delta = 6$ 由 Luo、Miao 和 Zhao [14]验证。关于 $d(G)$ 的下界，Woodall [22] 证明，若 G 是一个 Δ临界图，则 $d(G) \geq \frac{2}{3}(\Delta+1)$。Cao 和 Chen [5] 进一步将其改进为 $\frac{3\Delta}{4} - 8$ ，他们 [5, 6] 还证明了猜想 1.1 渐近成立。

本文将证明，若 G 是一个 7-临界图，则 $d(G) \geq 6$。这一结果蕴含了 Vizing平面图猜想对 $\Delta = 7$ 的结论：每个最大度至少为 7 的平面图都是一类图。该猜想已由 Sanders 和 Zhao [17]以及 Zhang [23]分别独立验证；此外，Sanders 和 Zhao 还在 [17] 和 [18]将其推广到了可嵌入欧拉示性数非负的曲面的图。

在继续之前，我们先介绍一些记号。在本文中，设 $G = (V, E)$ 是一个有 n 个顶点、m 条边且最大度为 $\Delta(G)$（或 Δ）的简单图。k-顶点、k^+-顶点或 k^--顶点分别指度为 k、至少为 k 或至多为 k 的顶点。我们用 $d(x)$、$d_k(x)$、$d_{k^+}(x)$、$d_{k^-}(x)$ 分别表示顶点 x 的度、与 x 相邻的 k-顶点的数量、与 x 相邻的 k^+-顶点的数量，以及与 x 相邻的 k^--顶点的数量。对于顶点 $v \in V$，令 $N(x) = \{v|xv \in E\}$ 表示 v 在 G 中的邻域。顶点 v 的 k-邻点是指 v 在 G 中属于 k- 顶点的邻点；顶点 v 的 k^+- 邻点或 k^-- 邻点是指 v 在 G 中属于 k^+-顶点或 k^--顶点的邻点。对于两个不相交的顶点集 U 和 U'，用 $[U, U']$ 表示一端在 U 中、另一端在 U' 中的边的集合。对于 $V(G)$ 的顶点集 A，记 $N(A) = \cup_{x \in A} N(x)$。

2 引理

本节中，我们介绍一些已有的引理，并建立证明主要结果所需的一些新引理。

2.1 旧引理

引理 2.1 *(*维津邻接引理 *[20])* 设 G 是一个 Δ-临界图。那么，对于任意两个相邻顶点 u 和 v，$d(u)+d(v) \geq \Delta+2$，并且若 x 有一个 k- 邻点，则 $d_{\Delta}(x) \geq$ 最大 $\{2, \Delta-k+1\}$。

引理 2.2 *(Luo*、*Miao* 和 *Zhao [14])* 设 G 是一个 Δ-临界图，满足 $\Delta \geq 5$，且 x 是一个 *3*-度顶点。那么，x 至少有两个 Δ-邻点，它们不与除 x之外的任何 $(\Delta-2)^{-}$-顶点相邻。

引理 2.3 *(Luo*、*Miao* 和 *Zhao [16])* 设 G 是一个 Δ-临界图，满足 $\Delta \geq 6$，且 x 是一个 *3*-度顶点。那么，x 有一个 Δ-邻点，它至少与 $\Delta-4-\lfloor \frac{\Delta-1}{3} \rfloor$ 个顶点 z相邻，其中$d(z)=\Delta$ 和 $d_{(\Delta-3)^{-}}(z)=0$。

引理 2.4 （*Sanders* 和 *Zhao [17]*及 *Zhang [23]*）设 G 是 Δ-临界图，$xyrs$ 是一条满足 $d(x)+d(y)=\Delta+2$的路径。则 $d(r)=\Delta$ 且 $d(s) \geq \Delta-1$。此外，若 $d(x)\ d(y)<\Delta$，则 $d(s)=\Delta$。

引理 2.5 （*Luo*、*Miao* 和 *Zhao [14]*）设 G 是一个 Δ-临界图，满足 $\Delta \geq 6$，且 x 是一个 *4*-度顶点。

(1) 若 x 与一个$(\Delta-2)$-顶点相邻，记为 y，则 $N(N(x)) \setminus \{x, y\} \subseteq V_{\Delta}$;

(2) 若 x 与任何$(\Delta-2)$-顶点都不相邻，且 x 的邻点 y 中有一个与$d(y)-(\Delta-3)$ 度至多为 $\Delta-2$的顶点相邻，则 x 的其余三个邻点各自只与一个$(\Delta-2)^{-}$-顶点相邻，该顶点为 x;

(3) 如果 x 与两个$(\Delta-1)$顶点相邻，那么 x 的每个邻点都恰好与一个$(\Delta-2)^{-}$-顶点相邻，该顶点是 x。

以下引理是 [17] 中由 Sanders 和 Zhao 得到的引理 2.4 的一个特例。**引理 2.6** 设 G 是一个7-临界图，xyz 是 G 中的一条路径。若 $3 \leq d(x) \leq 4$，$d(y)=7$，且 $d(x)+d(z) \leq 8$，则 y 和 z 至多有 $d(x)-3$ 个公共邻点。

2.2 新引理

以下引理将在第5节中证明。

设 G 是一个 Δ-临界图。对于每个顶点 v，记

$$N_{\Delta\sim 2}(v)=\{z \in N(v) : z \ has\ a\ neighbor\ of\ degree\ 2\}$$

引理 2.7 设 G 是一个 Δ-临界图，且满足 $\Delta \geq 7$。那么对于每个 $v \in V(G)$，都有 $|N_{\Delta\sim 2}(v)| \leq 5$。

引理 2.8 设 G 是一个 Δ-临界图，且 $xyrst$ 是一条路径，其中 $d(x)+d(y)=\Delta+2$，并且最大值$\{d(x)\ d(y)\}<\Delta$。则 $d(t) \geq \Delta-2$。

引理 2.9 设 G 是一个 Δ-临界图，$xyrst$ 是一条包含 $d(x)=3$ 和 $d(y)=\Delta$的路径。假设 y有一个邻点 $z \notin \{x, r, s\}$，且满足 $d(z) \leq \Delta-2$。那么 $d(s) \geq \Delta-1$；并且当 $d(t) \leq \Delta-4$时，$d(z)+d(t) \geq \Delta+1$。

到目前为止，所有邻接引理讨论的都是至多包含四个顶点的路径。引理 2.9 是第一个处理包含五个顶点的路径的引理。

根据引理 2.4、2.8 和 2.9，我们得到以下推论。

推论 2.10 设 G 是一个7-临界图， $xyrst$ 是一条路径，且 $d(x) = 3$。则有如下结论：

(1) 若 $d(y) = 6$，则 $d(r) = d(s) = 7$ 且 $d(t) \geq 5$。*(2)* 若 $d(y) = 7$ 且 y 除了 x之外还有另一个 4^--度邻点，则 $d(s) \geq 6$ 且 $d(t) \geq 4$。*(3)* 若 $d(y) = 7$ 且 y 有一个 *5*-度邻点，则或者 $d(s) = 6$ 且 $d(t) \geq 4$ ，或者 $d(s) = 7$ 且$d(t) \geq 3$。

引理 2.11 设 G 是一个 Δ-临界图， xy 是一条边，满足 $d(x) + d(y) = \Delta + 3$ 且最大值$\{d(x)\ d(y)\} < \Delta$。则 x 有 $d(x)-2$ 个度为 Δ 的邻点，且它们除 x、 y外没有其他$(\Delta-2)^-$-邻点。

引理 2.12 设 G 是一个 7-临界图，且 x 是一个 *5*-度顶点。

(1) 若 x 有三个 *6*-度邻点，则 x 的每个 7-邻点恰有一个 5^--邻点。*(2)* 若 x 有两个 *6*-度邻点，则 x 有两个 7-邻点，每个邻点至多有两个 5^--邻点。*(3)* 若 x 恰有四个 *7* 度邻点，则 x 有两个 7-邻点，每个邻点至多有三个 5^--邻点。

3 7-临界图的平均度

3.1 主要结果

本节将证明我们的主要结果。

定理 3.1 $d(G) \geq 6$ 对于每个 7-临界图 G。

证明。 设 G 是一个 7-临界图。我们定义以下顶点子集。

$A = \{u|d(u) = 7$ 和 u 与一个 2-度顶点 $\}$ 相邻，$B = \{u|d(u) = 6$ 和 u 与一个 3-度顶点 $\}$ 相邻，$C = \{u|d(u) = 7$ 和 u 与一个 3-度顶点及一个 5^--度顶点 $\}$ 相邻。根据引理 2.7 和推论 2.10，以下命题显然成立。

命题 3.2 设 x 是一个不与 5^--度顶点相邻的7-度顶点。那么，三个集合 $N(x)\cap A$、 $N(x)\cap B$ 和 $N(x)\cap C$ 中至多有一个是非空集合。此外， $|N(x)\cap A| \leq 5$ 和 $|N(x) \cap B| \leq 1$。

对于每个顶点 x，用 $M(x) = d(x) - 6$ 表示顶点 x的初始电荷。**R1** 设 u 是一个不与 5^--顶点相邻、但与 $A \cup B \cup C$中的一个顶点相邻的7-度顶点。那么， u 向 $A \cup B \cup C$中的每个邻点发送 $\frac{1}{|N(x)\cap A|+|N(x)\cap B|+|N(x)\cap C|}$。

R2 设 u 是一个与 5^--顶点相邻的7-度顶点。那么， u 向每个度为4或5的邻点发送 $\frac{1}{d_{5^-}(u)}$，向每个3-度邻点发送1，向每个2-度邻点发送2。

R3 每个6-度顶点向每个3-度邻点发送1。

R4 如果5-度顶点 u 与7-度顶点 $v \in C$相邻，那么 u 向 v发送$\frac{1}{8}$。

规则（R5）如果一个4-度顶点与一个5-度顶点相邻，那么该4-度顶点从其5-度邻点处获得$\frac{1}{2}$。

记顶点 x 的新电荷为 $M'(x)$。对于 $M'(x)$，我们有如下估计。

(I) 设 u 是一个度为2或3的顶点。那么 $M'(u) = 0$。

根据规则（R2），每个2-度顶点从每个邻点处获得2。根据引理 2.1，每个3-度顶点都不与一个 5^--顶点相邻。因此，根据规则（R2）和（R3），每个3-度顶点从每个邻点处获得1。因此，当 $d(u) = 2$ 或3时，$M'(u) = 0$。

(II) 设 uv 是一条边，满足 $d(u) + d(v) = \Delta + 2 = 9$，且 $3 \leq d(u) \leq d(v) < 7$。那么$M'(u) \geq 0$，且 $M'(v) \geq 1$。

设 $w \in N(u) \cup N(v)$ 且 $w \notin \{u, v\}$。若 $w \in N(u) \cap N(v)$，则由引理 2.4，$d(w) = 7$，且 w 只有两个 6^--邻点。因此由规则（R2），若 $d(u) = 4$且 $d(v) = 5$，则 w 向 u 和 v 各发送 $\frac{1}{2}$；若 $d(u) = 3$ 且 $d(v) = 6$，则 w 向 u发送 1，向 v 发送 0。

若 $w \notin N(v) \cap N(u)$，则由引理 2.4，$d(w) = 7$ 且 w 只有一个 6^--邻点，该邻点为 u 或 v。若 $w \in N(u)$，则由规则（R2），w 向 u 发送 1。设 $w \in N(v)$。若 $d(v) = 6$，则 $v \in B$，并且由命题 3.2，w 向 v发送 1。若 $d(v) = 5$，则根据引理 2.8，$N(w) \cap (A \cup B \cup C) = \emptyset$，因此由规则（R2），$w$ 向 v 发送 1。因此，无论哪种情况，若 $w \notin N(v) \cap N(u)$，w都会向 u或 v发送 1。

如果 $d(u) = 4$ 且 $d(v) = 5$，那么 u通过规则（R2）从 v获得$\frac{1}{2}$。因此，$M'(u) \geq 4-6+4\times\frac{1}{2} = 0$且 $M'(v) = 5 - 6 + \frac{1}{2}|N(u) \cap N(v)| + |N(v) \setminus N(u)| - \frac{1}{2} \geq 5 - 6 + \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2} \geq 1$。

如果 $d(u) = 3$ 且 $d(v) = 6$，那么根据（I），$M'(u) = 0$，且 v 根据规则（R3）向 u 发送 1。因此，$M'(v) = 6 - 6 + |N(v) \setminus N(u)| - 1 \geq 6 - 6 + 3 - 1 > 1$。

(III) 设 u 是一个有四个 6^+ 邻点的 4-度顶点。除非 u 有四个 7 度邻点，或有两个 6-度邻点和两个 7 度邻点，否则 $M'(u) > 0$；在后一种情况下，$M'(u) \geq 0$。

根据引理 2.1，u 至少与两个 7 度顶点相邻，并且 u 的每个 7-度邻点至多与三个 5^- 顶点相邻。

若 u 有一个 7-度邻点 v 与三个 5^- 顶点相邻，则根据引理 2.5，u 与四个 7 度顶点相邻；除 v 外，每个 7-度邻点仅与一个 5^- 顶点相邻。因此，根据规则（R2），$M'(u) \geq 4 - 6 + 3 \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$。

现在假设每个 7-度邻点至多与两个 5^- 顶点相邻。那么 u 从每个 7-度邻点获得至少 $\frac{1}{2}$。

如果 u 有四个 7 度邻点，那么 $M'(u) \geq 4 - 6 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$。

若 u 有一个 6 度邻点，则根据引理 2.11，u 的两个 7 度邻点各自只有一个 5^- 邻点。因此 $M'(u) \geq -2 + 2 + \frac{1}{2}(d_7(u) - 2)$，当 u 恰有两个 6 度邻点和两个 7 度邻点时取等号。

（IV）对于每个有五个 5^+ 邻点的 5-度顶点 u， $M'(u) > 0$。

由引理 2.1， u 至少与两个 7度顶点相邻，且 u 的每个 7 度邻点至多与四个 6^--顶点相邻。

若 v 是 u 的一个 7 度邻点，且 v 与一个 3-度顶点相邻，则 v 根据规则（R2）向 u 发送 $\frac{1}{2}$，而 u根据规则（R4）向 v 发送 $\frac{1}{8}$。因此， u 从 v 收到的总净电荷为 $\frac{3}{8}$。

因此，一般而言， u从每个 7 度邻点至少收到 $\min\{\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\}$。

如果 u有 至少四个 7 度邻点，那么由引理 2.12(3)， $M'(u) \geq -1+2\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{3}> \quad - \quad 0.$

现在假设 u 至多与三个 7度顶点相邻。

若 u 与一个5度顶点相邻，则由引理 2.11， u 有三个7度邻点，每个邻点至多与两个 5^-- 顶点相邻（ u 和 u 的 5 度邻点）。因此 $M'(u) \geq -1+3\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$。

最后，我们可以假设 u 至少与两个6度顶点相邻，且至多与三个7度顶点相邻。由引理 2.12(1) 和 (2)， $M'(u) \geq -1+\min\{\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}, 1+1\} > 0$。

（V）设 u 是一个与六个 4^+-顶点相邻的6度顶点。则由放电规则， $M'(u) = M(u) = 0$。

（VI） $M'(u) \geq 0$，若 $d(u) = 7$。

设 u 为一个 7-度顶点。则 $u \notin B$。由规则（R1）和规则（R2），若 $u \notin A \cup C$，则有 $M'(u) \geq 0$。

(a) 假设 $u \in A$ （即 u 有一个 2-度邻点 v）。

设 w 为 v的另一个邻点，且 $x \in N(u) \setminus \{v, w\}$。由引理 2.4， $d(x) = 7$，并且 x 不与一个 5^--度顶点相邻。由于 $u \in A$，根据命题 3.2， x 在 $A \cup C$中至多与五个顶点相邻。因此，根据规则（R1）， x 至少向 u发送 $\frac{1}{5}$。由于 $|N(u)\setminus\{v, w\}| \geq 5$，我们有 $M'(u) \geq 7-6-2+5\times\frac{1}{5} = 0$。

(b) 假设 $u \in C$ （即 u 与一个 3-度顶点 x 和另一个 5^--度顶点 z 相邻）。

由引理 2.1， x 和 z 不相邻，且 u 有五个 7 度邻点。由引理 2.6， u和 z 没有共同邻点。因此， u 至少有三个不与 x 或 z相邻的 7 度邻点。令 w 为 u的这样一个 7 度邻点。由命题 3.2， $N(w) \cap (A \cup B) = \emptyset$。

若 $d(z) \leq 4$，则由引理 2.1， $3 \leq d(z) \leq 4$，因此 u 向 x和 z各至多转移 1。由推论 2.10(2)， C 中只有顶点 u 与 w 相邻。因此，由规则（R1），w 向 u 转移 1。因此， $M'(u) \geq 7-6-1-1+3 = 1$。

若 $d(z) = 5$，则 w 在 C 中至多与七个顶点相邻，因此根据规则（R1）向 u 至少发送 $\frac{1}{7}$。根据规则（R2）， u 向 x 发送 $\frac{1}{2}$，并向 z 发送 $\frac{1}{2}$；根据规则（R4）， z 向 u 发送 $\frac{1}{8}$。因此， $M'(u) \geq 7-6-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3}{7} > 0$。这就完成了（VI）的证明。

根据（I）–（VI），对于每个顶点 x， $M'(x) \geq 0$，因此 $0 \leq \sum_{x\in V} M'(x) = \sum_{x\in V} M(x) = (d(G) - 6)|V|$。因此 $d(G) \geq 6$。定理得证。 ■

3.2 总结

有人可能会疑惑，为什么我们的结果没有像猜想 1.1 所述，在平均度的下界中包含项 $\frac{3}{|V|}$。原因是，我们可以构造一些最大度为 7、平均度为 6 的图的无限族，它们满足所有目前已知的邻接引理。例如，对于任意正整数 t，考虑一个度序列为 $(4^t,\ 7^{2t})$ 的图 G，其中每个 4-度顶点都与四个 7-度顶点相邻，每个 7-度顶点都与两个 4-度顶点相邻。容易验证，G 满足我们目前已知的所有邻接引理，且 $d(G) = 7 - 1 = 6$。上述例子可以推广到最大度任意的情形。对于每个 $t \geq 1$，令 G 为一个度序列为 $(k^t,\ \Delta^{kt})$ 的图，其中每个 k-度顶点都与 k 个度为 Δ 的顶点相邻，而每个 Δ- 度顶点恰好与一个 k- 度顶点相邻。于是 $d(G) = \Delta - 1 = 2k$，并且 G 满足我们已知的所有邻接引理。

–

上述例子以及其他几个例子不仅提出了挑战，也表明有必要发展新的邻接引理，以解决猜想 1.1 和其他边染色问题。特别是迄今为止，所有邻接引理所涉及的路径都至多有四个顶点。引理 2.9 确实处理了一条含五个顶点的路径，是证明我们主要结果的关键引理，但它只适用于度为 3 的顶点。要彻底解决 7-临界图及更一般情形的问题，就需要关于含五个顶点路径的、更一般的邻接引理，尽管发展此类引理极具挑战性。使用计算机程序完成 7-临界图尚未解决的情形，并为一般的临界图找出一些禁结构，将是切实可行且非常有用的。

4 非负欧拉示性数曲面上嵌入图的应用

定理 3.1 显然蕴含：每个最大度为 7 的平面图都是一类图。这一结论是 Vizing 提出的猜想，后来由 Sanders 和 Zhao 独立证明；由于每个可嵌入平面或射影平面的图的平均度都严格小于 6，该结论还被推广到射影平面图 [17], 。Zhang [23] 对此也有独立证明，而其推广到射影平面图的结果见 [18]。我们的结果还蕴含了 Sanders 和 Zhao [18] 得到的以下结果。

定理 4.1 （*Sanders 和 Zhao [18]*）设 G 是一个最大度为7的图。若 G 可嵌入环面或克莱因瓶，则 G 是一类图。

证明。用反证法证明。假设 G 不是一类图。那么我们可以假设 G 是 7-临界的。由欧拉公式，$d(G) \leq 6$。由定理 3.1，针对每个面 f，有 $d(G) = 6$且 $d(f) = 3$。由于 G是简单的，我们进一步有 $\delta \geq 3$。记顶点 x 的电荷新电荷为 $M'(x)$，并将 A、B、C记为上一节定义的集合。那么$\sum_{x\in V(G)} M'(x) = \sum_{x\in V(G)}(d(G) - 6) = 0$。因此，对 G中的每个顶点 x，都有 $M'(x) = 0$。

由于 $\delta(G) \geq 3$，我们有 $A = \emptyset$。根据定理 3.1 的证明中的 (II) 和 (IV)，$d(u)+d(v) \geq \Delta + 3$，且 G 中不存在 5度顶点。因此 $B = \emptyset$。由于每个面都是 3面，且 G 是 2-连通的，任意两个相邻顶点至少有两个公共邻点。

断言 4.1.1 $\delta(G) = 4$ 且每个4度顶点恰好与两个7度顶点和两个6度顶点相邻。

证明。设 y 是一个 7-度顶点，其邻点 x 满足 $3 \leq d(x) \leq 4$。由于任意两个相邻顶点至少有两个邻点，根据引理 2.6， y 仅与一个 4^--顶点相邻。由于 G 中不存在 5度顶点， y 恰好与一个 5^--顶点相邻。这意味着 $C = \emptyset$。因此 $A = B = C = \emptyset$。所以每个 7-度顶点都与一个 4^--顶点相邻；否则，若 x 是一个没有 4^--邻点的 7-度顶点，则 $M'(x) = M(x) = 1 > 0$。因此每个 7-度顶点恰好有一个 4^--邻点。

如果存在一个3-度顶点，根据引理 2.3，存在一个7-度顶点 x 没有 4^-邻点，这与事实矛盾。因此， $\delta = 4$ 且每个7-度顶点恰好与一个4-度顶点相邻。根据(III)，每个4-度顶点恰好与两个7度顶点和两个6度顶点相邻。 ■

用 V_i 表示 i顶点和 $n_i = |V_i|$的集合。于是，根据断言 4.1.1， $n_4 = 2n_7$ 和$n_4 \leq 2n_6$。

由于每个7-度顶点都与一个4-度顶点相邻，因此每个7-度顶点在 V_7 中至少与4个顶点相邻；根据引理 2.1，每个顶点在 V_7 中至少有两个邻点。因此 $2n_6 + 2n_4 \leq |[V_7, V_6 \cup V_4]| \leq 3n_7$。这意味着 $6n_7 = 3n_4 \leq 3n_7$。这一矛盾完成了定理的证明。 ■

5 新引理的证明

在给出证明之前，我们先介绍本节所需的一些记号和引理。

图 G 的所有 k-边着色构成的集合记为 $\mathcal{C}^k(G)$。令 $\varphi \in \mathcal{C}^k(G)$。对于任意颜色 α，令 $E_\alpha = \{e \in E : \varphi(e) = \alpha\}$。对于任意两个不同的颜色 α 和 β，用 $G_\varphi(\alpha, \beta)$ 表示由 $E_\alpha \cup E_\beta$ 在 G 中诱导的子图。 $G_\varphi(\alpha, \beta)$ 的连通分支称为 (α, β)- 链。显然，每条 (α, β)- 链都是一条路径或一个圈，其边交替着 α 和 β 两种颜色。对于每条 (α, β)-链 P，令 φ/P 表示由 φ 在 P 上交换颜色 α 和 β 后得到的 k-边着色。

对于任意 $v \in V$，令 $P_v(\alpha, \beta, \varphi)$ 表示包含 v 的唯一 (α, β)-链。注意，对于任意两个顶点 u、$v \in V$，要么 $P_u(\alpha, \beta, \varphi) = P_v(\alpha, \beta, \varphi)$，要么 $P_u(\alpha, \beta, \varphi)$ 与 $P_v(\alpha, \beta, \varphi)$ 顶点不相交。此事实将会频繁使用，故不再特别说明。为方便起见，当 $\alpha = \beta$ 时，我们定义 $P_v(\alpha, \beta, \varphi) = v$，并定义 $\varphi/P_v(\alpha, \beta, \varphi) = \varphi$。

对于任意 $v \in V$，令 $\varphi(v) = \{\varphi(e) : e \in E(v)\}$ 表示在 v 处呈现的颜色集，而$\bar{\varphi}(v) = C \setminus \varphi(v)$表示未分配给与 v关联的任何边的颜色集，这些颜色称为 v处的缺失颜色。对于一个顶点集 $X \subseteq V(G)$，若所有缺失颜色集 $\bar{\varphi}(x)$ $(x \in X)$ 两两不相交，则称 X 初等的（相对于 φ）。

关于边 $e = xy \in E(G)$ 和着色 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - e)$，以 x 为中心的一个多重扇是一个序列 $F = (x, e_1, y_1, \ldots, e_p, y_p)$，其中 $p \geq 1$ 由边 $e_1, e_2, \ldots, e_p$ 以及顶点$x, y_1, y_2, \ldots, y_p$ 组成，并满足以下两个条件：

- 这些边 e_1， e_2，……， e_p 互不相同， $e_1 = e$ 且 $e_i = xy_i$ 对于 $i = 1$，……， p。

• 对于每条边 e_i 满足 $2 \le i \le p$，都存在一个顶点 y_j 满足 $1 \le j < i$，使得$\varphi(e_i) \in \bar{\varphi}(y_j)$。

请注意，多重扇比 Vizing 扇的定义略为宽泛；Vizing 扇要求满足第二个条件中的 $j = i-1$。

引理 5.1（*Stiebitz*、*Scheide*、*Toft* 和 *Favrholdt* *[19]*）设 G 是一个 Δ-临界图，$xy_1 = e \in E(G)$ 且 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G-e)$。若 $F = (x, e_1, y_1, \ldots, e_p, y_p)$ 是关于 e 和 φ、以 x 为中心的多重扇，则以下结论成立：

(a) $\{x, y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ 是初等的。*(b)* 若 $\alpha \in \bar{\varphi}(x)$ 且 $\beta \in \bar{\varphi}(y_i)$ 对某个 i成立，则 $P_x(\alpha, \beta, \varphi) = P_{y_i}(\alpha, \beta, \varphi)$。以下引理是引理 5.1 的直接推论。

引理 5.2 设 G 是一个 Δ-临界图，$xy = e \in E(G)$ 且 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G-e)$。设 xyz 是一条路径。

(1) 若 $d(z) \le 2\Delta - (d(x) + d(y)) + 1$，则 $\alpha = \varphi(yz) \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$，并且对于任意颜色$\beta \in \bar{\varphi}(z) \cap (\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y))$，$P_z(\alpha, \beta, \varphi)$ 以 x 或 y 结束。

(2) 若 $\varphi(yz) \in \bar{\varphi}(x)$，则 $\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y) \subseteq \varphi(z)$ 因此 $d(z) \ge 2\Delta - (d(x) + d(y)) + 2$.

相对于 $e = y_0y_1$ 和 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G-e)$ 的一条 *Kierstead* 路径 是指一条路径 $K = y_0y_1 \cdots y_p$，其中 $p \ge 1$ 满足：对于每条满足 $1 \le i \le p-1$ 的边 y_iy_{i+1}，都存在一个满足$0 \le j < i$ 的顶点 y_j，使得 $\varphi(y_iy_{i+1}) \in \bar{\varphi}(y_j)$。

显然，由 3 个顶点构成的 Kierstead 路径是以 y_1 为中心的多重扇。下面两个引理是关于由 4 个顶点构成的 Kierstead 路径的初等性质。

引理 *5.3*（*Kostochka* 和 *Stiebitz* *[19]*, *Luo* 和 *Zhao* *[15]*）设 G 是一个 Δ-临界图，$y_0y_1 = e \in E(G)$ 且 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G-e)$。设 $K = y_0y_1y_2y_3$ 是关于 e 和 φ 的 *Kierstead* 路径。那么，除非 $d(y_1) = d(y_2) = \Delta(G)$，否则 $V(K)$ 是初等的；在此情形下，$\bar{\varphi}(y_0)$ $\bar{\varphi}(y_1)$ $\bar{\varphi}(y_2)$ 和 $\bar{\varphi}(y_3)$ 中的所有颜色均互不相同，但 $\bar{\varphi}(y_3) \cap (\bar{\varphi}(y_0) \cup \bar{\varphi}(y_1))$ 中可能有一个共同的缺失颜色。

引理 *5.4* 设 G 是一个 Δ-临界图，$y_0y_1 = e \in E(G)$ 且 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G-e)$。假设 $K = y_0y_1y_2y_3$ 是相对于 e 和 φ 的 *Kierstead* 路径，$\min\{d(y_1)\ d(y_2)\} < \Delta$，$\alpha \in \bar{\varphi}(y_3)$ 且 $\beta \in \bar{\varphi}(y_i)$，其中 $i \in \{0,1,2\}$ 为某个值。若 $\beta \notin \{\varphi(y_1y_2)\ \varphi(y_2y_3)\}$，则 $P_{y_3}(\alpha, \beta, \varphi)$ 以 y_i 为终点。

证明。由于 K 是一条 Kierstead 路径，且根据引理 5.3，$\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ 是初等的，因此有 $\alpha \notin \{\varphi(y_1y_2)\ \varphi(y_2y_3)\}$。反设 $P_{y_3}(\alpha,\ \beta,\ \varphi)$ 没有以 y_i 为终点。那么，在这条路径上交换 α，β 后，K 仍是一条 Kierstead 路径，但 β 在 y_i 和 y_3 处均缺失，这与引理 5.3 矛盾。证明完毕。 ■

关于 y_0y_1 和 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - y_0y_1)$ 的 φ-扫帚（图 1(a)）是一个序列$B = (y_0,\ e_1,\ y_1,$ ……，$e_p,\ y_p)$，满足 $p \ge 3$，使得 $e_1 = y_0y_1$, $e_2 = y_1y_2$, $\varphi(e_2) \in \bar{\varphi}(y_0)$，并且对所有 $i \ge 3$, $e_i = y_2y_i$ 和 $\varphi(e_i)$，$\in \bar{\varphi}(y_j)$ 对某个 $j < i$ 成立。

引理 5.5（*Cao*、*Chen*、*Jing*、*Stiebitz* 和 *Toft* *[7]*）设 G 是一个 Δ-临界图，$y_0y_1 = e_1 \in E(G)$ 且 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G-e_1)$。若 $B = (y_0, e_1, y_1, \ldots, e_p, y_p)$ 是一个 φ-扫帚，且 $\min\{d(y_1)\ d(y_2)\} < \Delta$，则 B 的顶点集是初等的。

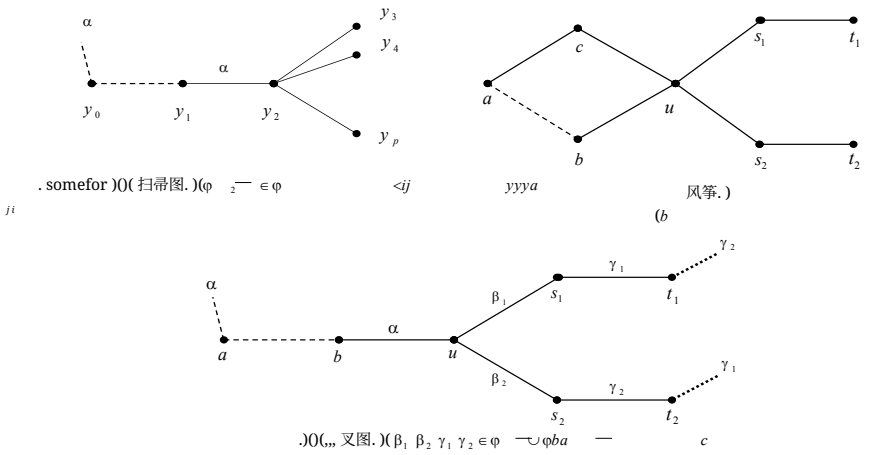

图1：扫帚图、风筝图和叉图。

一个风筝 H （图1（b））是一个具有以下性质的图

$$V(H) = \{a, b, c, u, s_1, s_2, t_1, t_2\} \text{ and } E(H) = \{ab, ac, bu, cu, us_1, us_2, s_1t_1, s_2t_2\}.$$

下面的引理揭示了边上指定颜色的风筝图的一些性质。

引理 *5.6*（*Cao*、*Chen*和*Shan [8]*）设 G 是一个 Δ-临界图， $H \subseteq G$ 是一个风筝图，其中 $V(H) = \{a, b, c, u, s_1, s_2, t_1, t_2\}$，并设 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - ab)$。假设 $K = abus_1t_1$和 $K^* = bacus_2t_2$ 都是关于 ab 和 φ的*Kierstead*路径。如果 $\varphi(s_1t_1) = \varphi(s_2t_2)$，那么$|\bar{\varphi}(t_1) \cap \bar{\varphi}(t_2) \cap (\bar{\varphi}(a) \cup \bar{\varphi}(b))| \leq 4$。

设 G 是一个 Δ-临界图， $ab \in E(G)$，且 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - ab)$。相对于 φ，叉图 H（图1 (c)）是一个满足以下条件的图： $V(H) = \{a, b, u, s_1, s_2, t_1, t_2\}$ 和 $E(H) = \{ab, bu, us_1, us_2, s_1t_1, s_2t_2\}$，使得 $\varphi(bu) \in \bar{\varphi}(a)$， $\varphi(us_1)\ \varphi(us_2) \in \bar{\varphi}(a) \cup \bar{\varphi}(b)$，且 $\varphi(s_1t_1) \in (\bar{\varphi}(a) \cup \bar{\varphi}(b)) \cap \bar{\varphi}(t_2)$，以及 $\varphi(s_2t_2) \in (\bar{\varphi}(a) \cup \bar{\varphi}(b)) \cap \bar{\varphi}(t_1)$。若 a、 t_1 和 t_2 的度数和较小，则 Δ-临界图中可能不存在叉图。

引理 5.7 （*Cao* 和 *Chen [6]*）设 G 是一个 Δ-临界图， $ab \in E(G)$，且 $\{u, s_1, s_2, t_1, t_2\} \subseteq V(G)$。若 $\Delta \geq d_G(a) + d_G(t_1) + d_G(t_2) + 1$，则对于任意 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - ab)$， G 不包含关于 φ 的 $\{a, b, u, s_1, s_2, t_1, t_2\}$ 上的叉。

5.1 引理2.7的证明

引理 2. **7** 设 G 是一个满足 $\Delta \geq 7$ 的 Δ-临界图。则对于每个 $v \in V(G$，都有 $|N_{\Delta\sim 2}(v)| \leq 5$).

证明。 反设存在一个 Δ-度顶点 v，满足 $|N_{\Delta\sim 2}(v)| \geq 6$。由引理 2.4，$v$ 没有 2-邻点；由引理 2.1，每个顶点 $z \in N_{\Delta\sim 2}(v)$ 恰有一个 2-邻点。设 $N^2(v) = N(N(v))\backslash N[v]$。由于 $|N_{\Delta\sim 2}(v)| \geq 6$，$N^2(v)$ 中至少有三个 2-度顶点。设 $N^2(v)$ 中的一个 2-度顶点为 x，并设 $N(x) \cap N(v)$ 中的一个顶点为 y。显然 $y \in N_{\Delta\sim 2}(v)$。令 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - xy)$。则 $\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y) = C$。我们先指出一个将会频繁用到的事实。

事实 1. 设 t_1, t_2 是 $N^2(v)\backslash\{x\}$, $s_1 \in N(v) \cap N(t_1)$ 和 $s_2 \in N(v) \cap N(t_2)$ 中的两个 2-度顶点。

(a) 若 $|N(x) \cap N(v)| = 2$ 且 $\varphi(s_1t_1) = \varphi(s_2t_2)$，则 $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$。

(b) 若 $\varphi(s_1t_1) \neq \varphi$，则 $\varphi(s_1t_1) \in \varphi(t_2)$ 或 $\varphi(s_2t_2) \in \varphi(t_1)$。

证明。 (a) 记 $N(x) \cap N(v) = \{y, z\}$。反设 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$。则$|\bar{\varphi}(t_1) \cap \bar{\varphi}(t_2)| \geq 5$，因为 $\Delta \geq 7$，且 $\{x, y, z, v, s_1, s_2, t_1, t_2\}$ 与 $\varphi(s_1t_1) = \varphi(s_2t_2)$ 构成一个风筝，这与引理 5.6 矛盾。

(b) 反设 $\varphi(s_1t_1) \in \bar{\varphi}(t_2)$ 且 $\varphi(s_2t_2) \in \bar{\varphi}(t_1)$。那么 $\{x, y, v, s_1, s_2, t_1, t_2\}$与 $\Delta \geq 7 = d(x) + d(t_1) + d(t_2) + 1$构成一个叉，这与引理 5.7 矛盾。 ■

下面分两种情形讨论： $N^2(v)$ 中有三个 2-度顶点，或者 $N^2(v)$ 中至少有四个 2-度顶点。

情形 1： $N^2(v)$ 中恰有三个 2-度顶点。

设 t_1, t_2 是 $N^2(v)\backslash\{x\}$ 中的两个 2-度顶点。由于 $N_{\Delta\sim 2}(v) \geq 6$，对于每个 $i = 1, 2$，我们有 $|N(t_i) \cap N(v)| = 2$，且 $|N(x) \cap N(v)| = 2$。设对于每个 $i = 1, 2$，$N(t_i) \cap N(v) = \{s_i, s_i'\}$。由 s_i 和 s_i' 的对称性，不妨设 $\varphi(s_1t_1) \neq \varphi(s_2t_2)$。根据事实 1(b)，不妨设 $\varphi(s_1't_1) = \varphi(s_2t_2)$。对 s_1', t_1, s_2, t_2 应用事实 1(a)，得到 $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$。因此，$\varphi(s_2't_2) \neq \varphi(s_1t_1)$、$\varphi(s_2't_2) \notin \varphi(t_1)$ 且 $\varphi(s_1t_1) \notin \varphi(t_2)$。这与对 s_1, t_1, s_2', t_2 应用事实 1(b) 得出的结论矛盾。

情形 2： $N^2(v)$中至少有四个2-度顶点。

设 $N^2(v)\backslash\{x\}$中的三个2-度顶点为 t_1, t_2, t_3， $N(t_i) \cap N(v)$中的一个顶点为 s_i，并且对每个 $i = 1,2,3$， t_i 的另一个邻点为 s_i'。

断言 A. 对于任意 $1 \leq i < j \leq 3$， $\varphi(s_it_i) \neq \varphi(s_jt_j)$。

证明。 反证法。由于 $\Delta \geq 7 > d(t_1)+d(t_2)+d(t_3)$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t_1) \cap \bar{\varphi}(t_2) \cap \bar{\varphi}(t_3)$。由对称性，只需考虑以下两种情形： $\varphi(s_1t_1) = \varphi(s_2t_2) = \varphi(s_3t_3) = \alpha$，或 $\varphi(s_1t_1) = \varphi(s_2t_2) = \alpha$ 且 $\varphi(s_3t_3) = \beta \neq \alpha$。

假设 $\varphi(s_1t_1) = \varphi(s_2t_2) = \varphi(s_3t_3) = \alpha$。那么根据对称性，我们不妨假设$P_{t_1}(\alpha, \eta, \varphi)$不经过 t_2， t_3。令 $\varphi' = \varphi/P_{t_1}(\alpha, \eta, \varphi)$。那么 s_1， t_1， s_2， t_2在 φ' 下与事实 1(b) 矛盾。

假设 $\varphi(s_1t_1) = \varphi(s_2t_2) = \alpha$，且 $\varphi(s_3t_3) = \beta \neq \alpha$。若 $P_{t_1}(\alpha, \eta, \varphi)$ 没有终止于 t_2，令 $\varphi' = \varphi/P_{t_1}(\alpha, \eta, \varphi)$。那么，在 φ' 下， s_1, t_1, s_2, t_2 与事实 1(b) 矛盾。因此， $P_{t_1}(\alpha, \eta, \varphi)$ 终止于 t_2，所以 $P_{t_3}(\alpha, \eta, \varphi)$ 不经过 t_1, t_2。令 $\varphi_1 = \varphi/P_{t_3}(\alpha, \eta, \varphi)$。现在 $\alpha \in \bar{\varphi_1}(t_3)$。于是根据事实 1(b)，我们有 $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = \{\alpha, \beta\}$。令 $\eta' \in \bar{\varphi_1}(t_1) \cap \bar{\varphi_1}(t_2) \cap \bar{\varphi}(t_3)$。由对称性，不妨设 $P_{t_3}(\beta, \eta', \varphi_1)$ 不经过

t_1。令 $\varphi_2 = \varphi_1/P_{t_3}(\beta,\ \eta',\ \varphi_1)$。那么，在 φ_2 下， $s_1,\ t_1,\ s_3,\ t_3$ 与事实 1(b) 矛盾。这证明了断言 A。 ■

Let $\varphi(s_1t_1) = \alpha, \varphi(s_2t_2) = \beta, \varphi(s_3t_3) = \gamma$.

断言 B. $\{\varphi(s_1't_1)\ \varphi(s_2't_2)\ \varphi(s_3't_3)\} = \{\varphi(s_1t_1)\ \varphi(s_2t_2)\ \varphi(s_3t_3)\}$。
证明。由断言 A， α、 β、 γ 两两不同。假设 $\varphi(t_1) = \{\alpha, \eta\}$，其中 $\eta \notin \{\beta, \gamma\}$。由事实 1(b)，可得 $\varphi(t_2) = \{\beta, \alpha\}$ 以及 $\varphi(t_3) = \{\gamma, \alpha\}$。于是 s_2、 t_2、 s_3、 t_3 与事实 1(b)矛盾。因此，由对称性，不妨设 $\varphi(t_1) = \{\alpha, \beta\}$。现在将事实 1(b)应用于 s_1、 t_1、 s_3、 t_3，可得 $\varphi(t_3) = \{\alpha, \gamma\}$；将事实 1(b)应用于 s_2、 t_2、 s_3、 t_3，可得$\varphi(t_2) = \{\beta, \gamma\}$。由此证明了断言 B。 ■

最后一步。不失一般性，假设 $\varphi(t_1) = \{\alpha, \beta\}$。由于 $|N_{\Delta\sim 2}| \geq 6$，令 $s_4 \in N_{\Delta\sim 2}\backslash\{s_1, s_2, s_3\}$ 和 t_4 为 s_4的 2-度邻点。若 $t_4 \in \{t_1, t_2, t_3\}$，则根据对称性，我们可以假设 $t_4 = t_1$。那么 $\varphi(s_4t_1) = \beta$ 且 $s_4,\ t_1,\ s_3,\ t_3$ 与事实 1(b)矛盾。若 $t_4 \notin \{t_1, t_2, t_3\}$，则根据断言 A，对于每个 $i = 1,\ 2,\ 3$，均有 $\varphi(s_4t_4) \neq \varphi(s_it_i)$。因此 $\{s_1, s_2, s_4, t_1, t_2, t_4\}$ 不满足断言 B。至此，情形 2 的证明完成，引理 2.7 的证明也随之完成。 ■

5.2 引理 2.8 的证明

引理 2.8 设 G 是一个 Δ-临界图， $xyrst$ 是一条满足 $d(x) + d(y) = \Delta + 2$ 且最大$\{d(x)\ d(y)\} < \Delta$的路径。那么 $d(t) \geq \Delta - 2$。

证明。设 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - xy)$。由于 $d(x) + d(y) = \Delta + 2$，我们有 $\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y) = C$。令$\varphi(yr) = \alpha, \varphi(rs) = \beta, \varphi(st) = \gamma$。那么 $\alpha \in \bar{\varphi}(x)$ 且 $\beta, \gamma \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。由于 $d(x) < \Delta$ 且$d(y) < \Delta$，我们有 $|\bar{\varphi}(x)| \geq 2$ 且 $|\bar{\varphi}(y)| \geq 2$。反设 $d(t) \leq \Delta - 3$。那么 $|\bar{\varphi}(t)| \geq 3$。

断言 A。存在 $\mathcal{C}^{\Delta}(G - xy)$ 的一个着色，使得 yr 和 st 着色不同，即我们可以假设 $\alpha \neq \gamma$。

证明。反设 $\alpha = \gamma$。由于 $d(t) \leq \Delta - 3$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus \{\alpha, \beta\}$。

若 $\eta \in \bar{\varphi}(y)$，则由引理 5.1， $P_x(\alpha, \eta, \varphi) = P_y(\alpha, \eta, \varphi)$，因此与 $P_t(\alpha, \eta, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(\alpha, \eta, \varphi)$。则 $\varphi_1(yr) \neq \varphi_1(st)$，得证。

设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。由于 $|\bar{\varphi}(y)| \geq 2$，令 $\delta \in \bar{\varphi}(y) \setminus \{\beta\}$。显然 $\delta \notin \{\varphi(yr)\ \varphi(rs)\ \varphi(st)\}$。令 $\varphi_1 = \varphi/P_x(\delta, \eta, \varphi)$，于是回到 $\eta \in \bar{\varphi}(y)$ 的情形。这就证明了断言 A。 ■

从现在起，在以下证明中我们假设 $\alpha \neq \gamma$。

断言 B。我们还可以假设 $\alpha,\ \beta \in \bar{\varphi}(t)$。**证明**。我们分两种情形讨论： $\beta \in \bar{\varphi}(t)$ 和 $\beta \notin \bar{\varphi}(t)$。

情形 B.1： $\beta \in \bar{\varphi}(t)$。

我们可以假设 $\alpha \in \varphi(t)$，否则结论成立。令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus \{\alpha, \beta\}$。显然 $\eta \neq \gamma$，因为 $\varphi(st) = \gamma$。

若 $\eta \in \bar{\varphi}(y)$，令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(\alpha,\ \eta,\ \varphi)$。于是有 $\alpha,\ \beta \in \bar{\varphi}_1(t)$，正如所需。

若 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$，令 $\delta \in \bar{\varphi}(y) \setminus \{\beta\}$。根据引理 5.1，无论 $\delta = \gamma$ 与否，$P_x(\delta, \eta, \varphi)$ 都不包含 yr，rs 或 st，因为 $\eta \in \bar{\varphi}(t)$。令 $\varphi_1 = \varphi / P_x(\delta, \eta, \varphi)$，于是我们回到了 $\eta \in \bar{\varphi}(y)$ 的情形。这就完成了情形 B.1 的证明。

情形 B.2：$\beta \notin \bar{\varphi}(t)$。

情形 B.2.1：$\alpha \in \bar{\varphi}(t)$。

若 $\beta \in \bar{\varphi}(y)$，则由引理 5.1，$P_x(\alpha, \beta, \varphi)$ 与 $P_t(\alpha, \beta, \varphi)$ 不相交。因此，$P_t(\alpha, \beta, \varphi)$ 不包含 yr 或 rs。令 $\varphi_1 = \varphi / P_t(\alpha, \beta, \varphi)$。于是 $\beta \in \bar{\varphi}_1(t)$，我们回到了情形 B.1。

现在假设 $\beta \in \bar{\varphi}(x)$。若存在颜色 $\delta \in \bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(t)$，令 $\varphi_1 = \varphi$。否则，令 $\delta \in \bar{\varphi}(y)$ 和 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus \{\alpha\}$。于是 $P_t(\eta, \delta, \varphi)$ 不经过 x 或 y。令 $\varphi_1 = \varphi / P_t(\eta, \delta, \varphi)$。于是 $\delta \in \bar{\varphi}_1(y) \cap \bar{\varphi}_1(t)$ 且 $\beta \in \bar{\varphi}_1(x)$。注意，$P_x(\delta, \beta, \varphi_1)$ 与 $P_t(\delta, \beta, \varphi_1)$ 不相交。若$P_t(\delta, \beta, \varphi_1)$ 不包含 rs，令 $\phi_2 = \varphi_1 / P_t(\delta, \beta, \varphi_1)$，则 φ_2 是所需的着色。若$P_x(\delta, \beta, \varphi_1)$ 不包含 rs，令 $\phi_2 = \varphi_1 / P_x(\delta, \beta, \varphi_1)$。于是 $\beta \in \bar{\varphi}_2(y)$，我们回到了 $\beta \in \bar{\varphi}(y)$ 的情形。这证明了情形 B.2.1。

情形 B.2.2：$\alpha \notin \bar{\varphi}(t)$。

若存在颜色 $\delta \in \bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(t)$，令 $\varphi_1 = \varphi / P_t(\alpha, \delta, \varphi)$。则 $\alpha \in \bar{\varphi}_1(t)$，于是回到情形 B.2.1。

假设 $\bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(t) = \emptyset$。令 $\eta \in \bar{\varphi}(t)$ 和 $\delta \in \bar{\varphi}(y) \setminus \{\beta\}$。则 $\delta \in \varphi(t)$。根据引理 5.1，无论 $\delta = \gamma$ 是否成立，$P_x(\delta, \eta, \varphi)$ 都不包含 yr, rs 或 st，因为 $\eta \in \bar{\varphi}(t)$。令 $\varphi_1 = \varphi / P_x(\delta, \eta, \varphi)$，我们便回到 $\bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(t) \neq \emptyset$ 的情形。至此完成情形 B.2 的证明，从而完成断言 B 的证明。

■

根据断言 B，在以下证明中，我们假设 $\alpha, \beta \in \bar{\varphi}(t)$。

断言 C。我们还可以假设 $\beta, \gamma \in \bar{\varphi}(y)$。

证明。我们考虑两种情形：$\beta \in \bar{\varphi}(y)$ 和 $\beta \notin \bar{\varphi}(y)$。

情形 C.1：$\beta \in \bar{\varphi}(y)$.

我们可以假设 $\gamma \in \varphi(y)$，否则结论成立。令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus \{\alpha, \beta\}$。

与情形 B.2 中的论证类似，我们可以假设存在一种颜色 $\delta \in \bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(t)$ 和 $\delta \neq \beta$。于是 $P_t(\delta, \gamma, \varphi)$ 与 $P_x(\delta, \gamma, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1 = \varphi / P_x(\delta, \gamma, \varphi)$。于是得到 $\beta, \gamma \in \bar{\varphi}_1(y)$，正如所需。情形 C.1 的证明至此完成。

情形 C.2：$\beta \notin \bar{\varphi}(y)$。

若 $\gamma \in \bar{\varphi}(y)$，则根据引理 5.1，$P_t(\gamma, \beta, \varphi)$ 与 $P_x(\gamma, \beta, \varphi)$ 不相交。注意，rs 和st 包含于 $P_t(\gamma, \beta, \varphi)$ 中。令 $\varphi_1 = \varphi / P_x(\gamma, \beta, \varphi)$。于是 $\beta \in \bar{\varphi}_1(y)$，我们回到了情形 C.1。

假设 $\gamma \in \bar{\varphi}(x)$。与情形 B.2 中的论证类似，我们可以假设存在一种颜色 $\delta \in \bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(t)$。于是 $\delta \notin \{\alpha, \beta\}$。因此，$P_x(\eta, \gamma, \varphi)$ 与 $P_t(\eta, \gamma, \varphi)$ 不相交，所以它不包含 st，因为 $\eta \in \bar{\varphi}(t)$。令 $\varphi_1 = \varphi / P_x(\eta, \gamma, \varphi)$，我们便回到了 $\gamma \in \bar{\varphi}(y)$ 的情形。这就完成了情形 C.2 的证明，因此断言 C 成立。 ■

现在，根据断言 A、B 和 C，我们假设 $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}(G - xy)$ 满足以下性质：

- $\varphi(yr) = \alpha$, $\varphi(rs) = \beta$, $\varphi(st) = \gamma$,
- $\alpha \neq \gamma$,
- α, $\beta \in \bar{\varphi}(t)$ 和 β, $\gamma \in \bar{\varphi}(y)$。

令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(\alpha, \gamma, \varphi)$。在着色 φ_1, $P_y(\beta, \alpha, \varphi_1)$ 下, $= yrst$ 终止于 t，但不终止于 x，这与引理 5.1 矛盾。至此，引理 2.8 的证明完成。 ■

5.3 引理 2.9 的证明

引理 2.9 令 G 为一个 Δ-临界图, $xyrst$ 为一条具有 $d(x) = 3$ 和 $d(y) = \Delta$的路径。假设 y有一个邻点 $z \notin \{x, r, s\}$，满足 $d(z) \leq \Delta - 2$。那么 $d(s) \geq \Delta - 1$; 并且若 $d(t) \leq \Delta - 4$, 则 $d(z) + d(t) \geq \Delta + 1$。

证明。令 φ 为 $\mathcal{C}^{\Delta}(G - xy)$ 中的一个着色。由于 $d(z) \leq \Delta - 2$, $d(x) = 3$ 且 $d(y) = \Delta$, 因此 $|\varphi(x) \cap \varphi(y)| = 1$。由引理 5.2，不失一般性，假设 $\varphi(x) = \{1, 2\}$,$\varphi(yz) = 2$, $\varphi(yr) = 3$。记 $\varphi(rs) = \beta$ 以及 $\varphi(st) = \gamma$。注意到 $\bar{\varphi}(y) = \{1\}$。

(1) 我们首先证明 $d(s) \geq \Delta - 1$。

反设 $d(s) \leq \Delta - 2$。

我们先考虑 $\varphi(rs) = \beta \neq 2 = \varphi(yz)$ 的情形。此时 $K = xyrs$ 是一条 Kierstead 路径。由引理 5.3, $|\bar{\varphi}(s) \cap (\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)| \leq 1$。因此 $d(s) \geq 2\Delta - (d(x) + d(y) + 1 = \Delta - 2$。由于 $d(s) \leq \Delta - 2$, 我们有 $d(s) = \Delta - 2$。注意，只有当 $2 \in \bar{\varphi}(s)$ 且$|\bar{\varphi}(s) \cap (\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y))| = 1$ 时, $d(s) = \Delta - 2$ 才成立。记 $\bar{\varphi}(s) = \{2, \alpha\}$。

若 $\bar{\varphi}(z) \setminus \{\alpha, \beta\} \neq \emptyset$, 则 $\eta \in \bar{\varphi}(z) \setminus \{\alpha, \beta\}$。由引理 5.2, $P_z(\eta, 2, \varphi)$ 终止于 x 或 y, 因此不会经过 s。令 $\varphi_1 = \varphi/P_z(\eta, 2, \varphi)$。那么 $xyrs$ 仍然是相对于 φ_1 和 xy 的 Kierstead 路径。然而, $\bar{\varphi}_1(s) = \{2, \alpha\} \subseteq \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$, 这与引理 5.3 矛盾。因此 $\bar{\varphi}(z) \setminus \{\alpha, \beta\} = \emptyset$。由于 $d(z) \leq \Delta - 2$, 我们有 $\bar{\varphi}(z) = \{\alpha, \beta\}$。

若 $\beta \neq 1$, 则我们可以假设 $\alpha = 1$。否则, $P_z(1, \alpha, \varphi)$ 和 $P_s(1, \alpha, \varphi)$ 均与 $P_x(1, \alpha, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_2 = \varphi/(P_z(1, \alpha, \varphi) \cup P_s(1, \alpha, \varphi))$。那么 1 在 z 和 s 处均缺失, 且 $3, \beta \in \bar{\varphi}_1(x) \cup \bar{\varphi}_1(y)$。由于 $1 \in \bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(s)$, $P_z(1, 3, \varphi)$ 和 $P_s(1, 3, \varphi)$ 均与 $P_x(1, 3, \varphi)$ 不相交, 因此两者都不会经过 x, y。令 $\varphi_2 = \varphi/(P_z(1, 3, \varphi) \cup P_s(1, 3, \varphi))$。那么 $3 \in \bar{\varphi}_2(z) \cap \bar{\varphi}_2(s)$, 且 $2 \in \varphi_2(x) \cap \varphi_2(y)$。由引理 5.2, $P_z(2, \beta, \varphi_2)$ 终止于 x 或 y, 因此与 $P_s(2, \beta, \varphi_2)$ 不相交。令 $\varphi_3 = \varphi_2/P_s(2, \beta, \varphi_2)$。那么 $P_z(2, \beta, \varphi_3) = zyrs$, 它不终止于 x 或 y, 这与引理 5.2 矛盾。

现在假设 $\beta = 1$。那么 $\bar{\varphi}(z) = \{1, \alpha\}$, 因此 $P_s(1, \alpha, \varphi)$ 不经过 x, y, z。在 $P_s(1, \alpha, \varphi)$ 上互换颜色，我们便回到了 $\beta \neq 1$ 的情形。因此，当 $\beta \neq \varphi(yz)$ 时，证明完成。

现在考虑 $\beta = \varphi(yz) = 2$ 的情形。令 η 为 $\bar{\varphi}(z)$ 中的一种颜色。显然 $\eta \neq 2$。若 $\eta = 1$, 则将 yz 重新着色为 1 后，我们便回到了 $\beta \neq \varphi(yz)$ 的情形。因此 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。于是 $P_x(\eta, 1, \varphi) = P_y(\eta, 1, \varphi)$。因此，在 $P_x(\eta, 1, \varphi)$ 上互换 η 与 1，然后将 yz 重新着色为 η, 我们便回到了 $\beta \neq \varphi(yz)$ 的情形。由此证明了 $d(s) \geq \Delta - 1$。

(2) 现在我们假设 $d(t) \leq \Delta - 4$, 并证明 $d(z) + d(t) \geq \Delta + 1$。

反设 $d(z)+d(t) \leq \Delta$。

断言 A。存在一种 $\mathcal{C}^{\Delta}$ 中的着色，使得 yr 和 st 获得不同的颜色，即我们可以假设 $\gamma \neq 3$。

证明。反设 $\gamma=3$。令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus\{2,3, \beta\}$。则 $\eta \in \bar{\varphi}(x) \cap \bar{\varphi}(y)$。

若 $\eta=1$，则由引理 5.1，$P_x(3, \eta, \varphi)=P_y(3, \eta, \varphi)$，因此 $P_t(3, \eta, \varphi)$ 与$P_x(3, \eta, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1=\varphi / P_t(3, \eta, \varphi)$。此时我们有 $\varphi_1(yr) \neq \varphi_1(st)$。

若 $\eta \neq 1$，则 $P_t(1, \eta, \varphi)$ 不包含 x 或 y。令 $\varphi_1=\varphi / P_t(1, \eta, \varphi)$，于是我们回到前一种情况。这就证明了断言 A。 ■

在下面的证明中，我们从现在起假设 $\varphi(yr) \neq \varphi(st)$（即 $\gamma \neq 3$）。

断言 B。我们还可以进一步假设 $3, \beta \in \bar{\varphi}(t)$。

证明。我们将证明分为两种情形：$\beta \in \bar{\varphi}(t)$ 和 $\beta \notin \bar{\varphi}(t)$。

情形 B.1：$\varphi(rs)=\beta \in \bar{\varphi}(t)$。

情形 B.1.1：$\beta \notin \bar{\varphi}(y)$。于是 $\beta \neq 1$。

若 $1 \in \bar{\varphi}(t)$，则 $P_t(1, 3, \varphi)$ 与 $P_x(1, 3, \varphi)=P_y(1, 3, \varphi)$ 以及 $yr, rs \notin P_t(1, 3, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1=\varphi / P_t(1, 3, \varphi)$。则 $\varphi_1(yr)=3, \varphi_1(rs)=\beta, \varphi_1(st)=\gamma$ 且 $3, \beta \in \bar{\varphi}_1(t)$，如所需。

现在假设 $1 \notin \bar{\varphi}(t)$。由于 $d(t) \leq \Delta-4$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus\{2,3, \beta\}$。于是 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。因此，$P_t(1, \eta, \varphi)$ 不经过 x 或 y，且不包含 yr, rs 或 st。令 $\varphi_1=\varphi / P_t(1, \eta, \varphi)$，于是我们回到了 $1 \in \bar{\varphi}(t)$ 的情形。

情形 B.1.2：$\beta \in \bar{\varphi}(y)$。于是 $\beta=1$。

如果 $\gamma \neq 2$，则 $\gamma \in \bar{\varphi}(x)$。因此，$P_t(1, \gamma, \varphi)$ 与 $P_x(1, \gamma, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1=\varphi / P_t(1, \gamma, \varphi)$。于是 $\varphi_1(rs)=\gamma \in \bar{\varphi}_1(x) \cap \bar{\varphi}_1(t)$，且 $\gamma \neq 1$。我们回到了情形 B.1.1。

现在假设 $\varphi(st)=\gamma=2$。由于 $d(z)+d(t) \leq \Delta$ 且 $2 \in \varphi(z) \cap \varphi(t)$，因此存在一种颜色$\eta \in \bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(t)$。由于 $\eta \neq \gamma$，我们有 $\eta \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。

若 $\eta \neq 1$，由引理 5.2，$P_z(2, \eta, \varphi)$ 终止于 x。因此 $P_t(2, \eta, \varphi)$ 不经过 x 或y，且不包含边 rs。令 $\varphi_1=\varphi / P_t(2, \eta, \varphi)$。于是 $\varphi_1(st)=\eta \in \bar{\varphi}_1(x) \cup \bar{\varphi}_1(y)$，我们回到了前一种情形

若 $\eta=1$，则 $P_z(1,2, \varphi)=yz$。令 $\varphi_1=\varphi / P_z(1,2, \varphi)$，我们便回到了情形 B.1.1。情形 B.1 的证明至此完成。

情形 B.2：$\varphi(rs)=\beta \notin \bar{\varphi}(t)$。

情形 B.2.1：$\varphi(yr)=3 \in \bar{\varphi}(t)$。

情形 B.2.1.1：$\beta \in \bar{\varphi}(y)$。也就是说 $\beta=1$。

根据引理 5.1，接着 $P_x(3, \beta, \varphi)$ 终止于 y，且它同时包含 yr 和 rs。因此，$P_x(3, \beta, \varphi)$ 和 $P_t(3, \beta, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1=\varphi / P_t(3, \beta, \varphi)$。那么 $\beta \in \bar{\varphi}_1(t)$，我们回到情形 B.1。

情形 B.2.1.2：$\beta=\varphi(yz)=2$。

若 $1 \in \bar{\varphi}(z)$，则将 yz 重新着色为 1。我们回到情形 B.2.1.1。

假设 $1 \notin \bar{\varphi}(z)$。由于 $d(z) \leq \Delta-2$ 且 $2 \in \varphi(z)$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(z) \backslash\{3\}$。显然 $\eta \neq 1, 2$ 且 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。那么 $P_z(1, \eta, \varphi)$ 不经过 x 或 y，也不包含边

rs。令 $\varphi_1 = \varphi/P_z(1,\ \eta,\ \varphi)$。那么 $1 \in \bar{\varphi}_1(z)$，于是我们回到前一种情形。

情形 B.2.1.3：$\beta \in \bar{\varphi}(x)$。

我们还可以假设 $1 \in \bar{\varphi}(t)$。否则，由于 $d(t) \leq \Delta - 4$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus \{2,3\}$。于是 $\eta \notin \{1,2,3,\beta\}$，且 $P_x(1,\ \eta,\ \varphi)$ 与 $P_t(1,\ \eta,\ \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(1,\ \eta,\ \varphi)$。于是 $1 \in \bar{\varphi}_1(t)$。

注意，$P_x(\beta,\ 1,\ \varphi_1)$ 与 $P_t(\beta,\ 1,\ \varphi_1)$ 不相交。若 $P_x(\beta,\ 1,\ \varphi_1)$ 不包含边rs，令 $\varphi_2 = \varphi_1/P_x(\beta,\ 1,\ \varphi_1)$，即可回到情形 B.2.1.1。若 $P_t(\beta,\ 1,\ \varphi_1)$ 不包含边 rs，令 $\varphi_2 = \varphi_1/P_t(\beta,\ 1,\ \varphi_1)$，即可回到情形 B.1。情形 B.2.1 的证明至此完成。

情形 B.2.2：$3 \notin \bar{\varphi}(t)$。

由于 $d(t) \leq \Delta - 4$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus \{2,3,\beta\}$。

如果 $\eta = 1$，则 $P_x(3,\ 1,\ \varphi)$ 和 $P_t(3,\ 1,\ \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(1,\ 3,\ \varphi)$。于是$\varphi_1(yr) = 3 \in \bar{\varphi}_1(t)$，我们回到了情形 B.2.1。

因此 $\eta \neq 1$。如果 $\beta \neq 1$，则 $P_x(1,\ \eta,\ \varphi)$ 不包含 yr，rs 或 st，因为 $\eta \in \bar{\varphi}(t)$。令 $\varphi_1 = \varphi/P_x(1,\ \eta,\ \varphi)$，我们回到了 $\eta = 1$ 的情形。

如果 $\beta = 1$，则 $P_x(\eta,\ 1,\ \varphi)$ 和 $P_t(\eta,\ 1,\ \varphi)$ 不相交。如果 $P_x(\eta,\ 1,\ \varphi)$ 不经过rs，令 $\varphi_1 = \varphi/P_x(\eta,\ 1,\ \varphi)$。于是 η此时在 y_1 处缺失，我们回到了 $\eta = 1$ 的情形。如果 $P_t(\eta,\ 1,\ \varphi)$ 不包含 rs，令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(\eta,\ 1,\ \varphi)$。于是 $\beta \in \bar{\varphi}_1(t)$，我们回到了情形 B.1。这就完成了情形 B.2 的证明，因此断言 B 成立。 ■

由断言 A 和 B，我们假设 φ 满足以下性质：

- $\varphi(yr) = 3 \in \bar{\varphi}(t)$ $\varphi(rs) = \beta \in \bar{\varphi}(t)$】【。
- $\varphi(st) = \gamma \neq 3$

断言 C。我们还可以假设 $\beta = \varphi(yz) = 2$。

证明。反设 $\beta \neq 2$。

情形 C.1：$\gamma \neq \varphi(yz)$（即 $\gamma \neq 2$）。

情况 C.1.1：$1 \in \{\gamma, \beta\}$。

若 $\beta = 1$，则 $P_t(\gamma,\ 1,\ \varphi)$ 不经过 x 或 y。令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(\gamma,\ 1,\ \varphi)$。则$\varphi_1(st) = 1$。因此，我们假设 $\gamma = 1$。

若 $\beta \in \bar{\varphi}(z)$，令 $\varphi_1 = \varphi/P_x(\beta,\ 1,\ \varphi)$，然后用 β 对 yz 重新着色。于是 φ_1 是所需的着色。

若 $3 \in \bar{\varphi}(z)$，令 $\varphi_1 = \varphi/P_x(\beta,\ 1,\ \varphi)$，并令 $\varphi_2 = \varphi_1/P_z(3,\ \beta,\ \varphi_1)$。注意，第二次 Kempe 交换不会影响 yr 或 rs，因为根据引理 5.1，它们位于 $P_x(3,\ \beta,\ \varphi_1) = P_y(3,\ \beta,\ \varphi_1)$ 上。因此，在 φ_2 条件下，用 β 对 yz 重新着色即可得到所需的着色。

现在我们假设 3，$\beta \notin \bar{\varphi}(z)$。

若 $\bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(t) \neq \emptyset$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(t)$。则 $\eta \notin \{1,2,3,\beta\}$ 且 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。注意，$P_x(1,\eta,\varphi) = P_y(1,\eta,\varphi)$ 不包含 st，因为 $\eta \in \bar{\varphi}(t)$。令 $\varphi_1 = \varphi/P_x(1,\eta,\varphi)$，则 $\eta \in \bar{\varphi}_1(y)$。令 $\varphi_2 = \varphi_1/P_z(\eta,3,\varphi_1)$，则 $3 \in \bar{\varphi}_2(z)$。注意，$P_z(\eta,3,\varphi_1)$ 不包含 yr或 t，因为 yr位于 $P_x(\eta,3,\varphi_1) = P_y(\eta,3,\varphi_1)$ 和 $3,\eta \in \bar{\varphi}_1(t)$ 上。最后，令$\varphi_3 = \varphi_2/P_x(\eta,1,\varphi_2)$。我们回到了 $\varphi(yr) \in \bar{\varphi}(z)$ 的情形。

现在假设 $\bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(t) = \emptyset$。由于 $d(z) + d(t) \leq \Delta$、$\varphi(z)$ 和 $\varphi(t)$ 构成 C 的一个划分，因此我们有 $1 \in \bar{\varphi}(z)$ 和 $2 \in \bar{\varphi}(t)$。由于 $d(z) \leq \Delta - 2$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(z) \setminus \{1\}$。显然，$\eta \in \bar{\varphi}(x)$ 且 $\eta \notin \{1, 2, 3, \beta\}$。令 φ_1 为将 yz 重新着色为 1 后由 φ 得到的着色。于是，根据引理 5.1，$2 \in \bar{\varphi}_1(y) \cap \bar{\varphi}_1(z)$ 且 $P_x(2, \eta, \varphi_1) = P_y(2, \eta, \varphi_1)$。令 $\varphi_2 = \varphi_1 / P_x(2, \eta, \varphi_1)$，并令 φ_3 为将 yz 重新着色为 η 后由 φ_2 得到的着色。现在有 $\gamma = 1 \in \bar{\varphi}_3(y)$、$\varphi_3(yz) = \eta \neq \beta$，且 $2 \in \bar{\varphi}_3(z) \cap \bar{\varphi}_3(t)$。因此我们回到了满足 $\bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(t) \neq \emptyset$ 的情形。情形 C.1.1 的证明至此完成。

情形 C.1.2：$1 \notin \{\gamma, \beta\}$。

由于 $d(t) \leq \Delta - 4$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \setminus \{2, 3, \beta\}$。我们不妨假设 $\eta = 1$。否则，由于 $\bar{\varphi}(x) = C \setminus \{1, 2\}$，有 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。因此，通过在 $P_t(1, \eta, \varphi)$ 上互换颜色，1 在 t 处缺失。由于 $\gamma \in \bar{\varphi}(x)$，我们有 $P_x(\gamma, 1, \varphi) = P_y(\gamma, 1, \varphi)$。由于 $1 \in \bar{\varphi}(t)$，$P_x(\gamma, 1, \varphi)$ 不含 st。因此，通过在 $P_x(\gamma, 1, \varphi)$ 上互换 γ 和 1，我们回到了情形 C.1.1。情形 C.1 的证明至此完成。

情形 C.2：$\gamma = \varphi(yz) = 2$。

在此情形下，$\varphi(yz) = \varphi(st) = 2 \in \varphi(z) \cap \varphi(t)$。若 $1 \in \bar{\varphi}(z)$，则用 1 重新为 yz 着色。若 $\beta \neq 1$，我们便回到情形 C.1。否则，我们就得到所需的着色。因此，以下假设 $1 \in \varphi(z)$。

情形 C.2.1：$\{3, \beta\} \cap \bar{\varphi}(z) \neq \emptyset$。

若 $\beta \in \bar{\varphi}(z)$，则由引理 5.2，$P_z(2, \beta, \varphi)$ 终止于 x，因为 $\beta \in \bar{\varphi}(x)$，且它与 $P_t(2, \beta, \varphi)$ 不相交。因此，$\varphi_1 = \varphi / P_z(2, \beta, \varphi)$ 是所需的着色。

假设 $3 \in \bar{\varphi}(z)$ 且 $\beta \in \varphi(z)$。

若 $\beta = 1$，则 $P_y(1, 3, \varphi)$ 包含边 yr 和 rs，且与 $P_z(1, 3, \varphi)$ 不相交。注意 1，$\beta \in \bar{\varphi}(t)$。令 $\varphi_1 = \varphi / P_z(1, 3, \varphi)$，于是我们回到了 $1 \in \bar{\varphi}(z)$ 的情形。

假设 $\beta \neq 1$。由于 $d(z) \leq \Delta - 2$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(z) \setminus \{3\}$。于是 $\eta \notin \{1, 2, 3, \beta\}$。因此，$P_z(1, \eta, \varphi)$ 不包含顶点 x，y 或边 rs，st。令 $\varphi_1 = \varphi / P_z(1, \eta, \varphi)$，于是我们回到了 $1 \in \bar{\varphi}(z)$ 的情形。情形 C.2.1 的证明至此完成。

情形 C.2.2：$\{3, \beta\} \cap \bar{\varphi}(z) = \emptyset$。

由于 $2 \in \varphi(z) \cap \varphi(t)$ 且 $d(z) + d(t) \leq \Delta$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \cap \bar{\varphi}(z)$。于是 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。若 $\beta \neq 1$，通过在 $P_x(\eta, 1, \varphi)$ 上交换颜色，然后用 η 对 yz 重新着色，我们便回到情形 C.1。假设 $\beta = 1$。则 $P_x(\eta, 1, \varphi)$ 和 $P_z(\eta, 1, \varphi)$ 不相交，并且 $P_x(\eta, 1, \varphi)$ 或 $P_z(\eta, 1, \varphi)$ 不包含 rs。在前一种情况下，通过在 $P_x(\eta, 1, \varphi)$ 上交换颜色和 1，然后用 η 对 yz 重新着色，我们便回到情形 C.1。在后一种情况下，通过在 $P_z(\eta, 1, \varphi)$ 上交换 η和 1，然后用 1 对 yz 重新着色，我们便得到所需的着色。至此，情形 C.2.2 的证明完成，因此断言 C 成立。

■

根据断言 C，我们进一步假设 $\varphi(yz) = \varphi(rs) = 2$。注意，$\varphi(x) \cap \varphi(y) = \{2\}$ 和$\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y) = C \setminus \{2\}$。

断言 D。我们可以进一步假设 $\bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(z) \neq \emptyset$ 和 $\gamma \in \bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(z)$。也就是说$\gamma = 1 \in \bar{\varphi}(z)$。

证明。我们将证明分为以下几种情形。

情形 D.1： $\varphi(yr) = 3 \in \bar{\varphi}(z)$。

情形 D.1.1： $\gamma = 1$。

在此情形下， $P_x(1, 3, \varphi)$ 与 $P_z(1, 3, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1 = \varphi / P_z(1, 3, \varphi)$。若 $P_z(1, 3, \varphi)$ 的终点不是 t，则 φ_1 是所需的着色。若 $P_z(1, 3, \varphi)$ 的终点是 t，令 φ_2 为将 yz 重新着色为 1 后由 φ_1 得到的着色。在着色 φ_2 中， y 缺少颜色 2， x 缺少颜色 3，并且 $P_y(3, 2, \varphi_2) = yrst$，这与引理 5.1 矛盾。由此证明了情形 D.1.1。

情形 D.1.2： $\gamma \neq 1$。于是 $\gamma \notin \{1, 2, 3\}$ 和 $\gamma \in \bar{\varphi}(x)$。

若 $1 \in \bar{\varphi}(t)$，则 $P_x(1, \gamma, \varphi)$ 终止于 y，因此不包含边 st。因此，在 $P_x(1, \gamma, \varphi)$ 上交换 1 和 γ，即可回到情形 D.1.1。

假设 $1 \notin \bar{\varphi}(t)$。由于 $d(t) \leq \Delta - 4$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \backslash \{2, 3\}$。于是 $\eta \notin \{1, 2, 3, \gamma\}$ 和 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。通过交换 $P_t(\eta, 1, \varphi)$ 上的颜色，即可回到 $1 \in \bar{\varphi}(t)$ 的情形。这证明了情形 D.1。

情形 D.2： $\varphi(yr) = 3 \notin \bar{\varphi}(z)$。

由于 $d(z) + d(t) \leq \Delta$，要么 $\varphi(z)$ 和 $\varphi(t)$ 构成 C 的划分，要么存在一种颜色 $\eta \in \bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(t)$。

情形 D.2.1：存在一个颜色 $\eta \in \bar{\varphi}(z) \cap \bar{\varphi}(t)$。

在这种情形下，我们有 $\eta \notin \{2, 3, \gamma\}$ 和 $\eta \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。

若 $\eta = 1$，则 $P_z(1,3,\varphi)$ 不经过 x, y 或 t，因为 α 和 η 在 t 处都缺失。通过在 $P_z(1,3,\varphi)$ 上交换 1 和 3，我们回到了情形 D.1。

若 $\eta \neq 1$，则 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$ 和 $P_x(\eta,1,\varphi)$ 不经过 t，因为 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \cap \bar{\varphi}(z)$。因此，在 $P_x(\eta, 1, \varphi)$ 上交换 η 和 1 后，我们回到了 $\eta = 1$ 的情形。这就完成了情形 D.2.1 的证明。

情形 D.2.2： $\varphi(z)$ 和 $\varphi(t)$ 构成 C 的一个划分。

在此情形下 $\gamma \in \bar{\varphi}(z)$。若 $\gamma = 1$，则 φ 是所需的着色。因此我们假设 $\gamma \neq 1$。于是 $\gamma \in \bar{\varphi}(x)$。令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \backslash \{2, 3\}$。根据引理 5.1， $P_x(1, \eta, \varphi)$ 不经过 z 或 t。注意，若 $1 = \eta$，则 $P_x(1, \eta, \varphi) = x$。令 $\varphi_1 = \varphi / P_x(1, \eta, \varphi)$。那么 $P_x(\eta, \gamma, \varphi_1) = P_y(\eta, \gamma, \varphi_1)$。注意， $P_x(\eta, \gamma, \varphi_1)$ 不包含 t，因为 $\eta \in \bar{\varphi}_1(t)$。令 $\varphi_2 = \varphi_1 / P_x(\eta, \gamma, \varphi_1)$。那么我们有 $\gamma \in \bar{\varphi}_2(y) \cap \bar{\varphi}_2(z)$，因此 φ_1 是所需的着色。至此，情形 D.2 的证明完成，因此断言 D 成立。

■

综上，根据断言 A、B、C 和 D，我们假设 φ 满足以下性质：

- $\varphi(x) = \{1, 2\}$ 和 $1 \in \bar{\varphi}(y) \cap \bar{\varphi}(z)$
- $\varphi(yr) = 3$， $\varphi(yz) = \varphi(rs) = 2$，以及 $\varphi(st) = 1$
- $2, 3 \in \bar{\varphi}(t)$。

注意到 $P_x(1, 3, \varphi)$ 终止于 y，且与 $P_t(1, 3, \varphi)$ 不相交。若 $P_t(1, 3, \varphi)$ 不终止于 z，令 φ_1 为通过交换 $P_t(1, 3, \varphi)$ 上的颜色并将 yz 重新着为 1 而从 φ 得到的着色。则 $3 \in \bar{\varphi}_1(x)$、$2 \in \bar{\varphi}_1(y)$ 和 $P_y(3, 2, \varphi_1) = yrst$ 不终止于 x，这与引理 5.1 矛盾。因此， $P_t(1, 3, \varphi)$ 终止于 z。令 $\varphi_2 = \varphi / P_t(1, 3, \varphi)$。则 $P_z(3,2,\varphi_2) = zyrst$ 不终止于 x，这与引理 5.2 矛盾。引理 2.9 的证明至此完成。

■

5.4 引理 2.11 的证明

引理 2.11 设 G 是一个 Δ-临界图， xy 是一条边，且 $d(x)+d(y)=\Delta+3$，并且最大$\{d(x)\ d(y)\}<\Delta$。那么 x 有 $d(x)-2$ 个度为 Δ 的邻点，且除 x、y外没有$(\Delta-2)^{-}$-邻点。

证明。设 $\varphi\in\mathcal{C}^{\Delta}(G-xy)$。由于 G 是 Δ-临界的，且 $d(x)+d(y)=\Delta+3$，因此有$|\varphi(x)\cap\varphi(y)|=1$。设 δ 是 $\varphi(x)\cap\varphi(y)$中的颜色。那么 $\bar{\varphi}(x)\cup\bar{\varphi}(y)=C\backslash\{\delta\}$。根据引理 2.1， x 至少有 $d(x)-2$ 个度为 Δ的邻点。因此，计入 y后， x 至多有两个度小于 Δ的邻点。根据引理 5.3 和引理 5.2，我们得到以下事实，后文将频繁用到。

事实 1。设 $yxzt$ 是一条满足 $\varphi(xz)\in\bar{\varphi}(y)$的路径。

(1) $\bar{\varphi}(z)\subseteq\{\delta\}$，因此 $d(z)\geq\Delta-1$。若 $\delta\in\bar{\varphi}(z)$，则对于任意颜色 $\eta\in\varphi(z)\setminus\{\varphi(xz)\}$，$P_z(\delta,\ \eta,\ \varphi)$终止于 x 或 y。

(2) 若 $yxzt$ 是一条 Kierstead 路径，则 $\bar{\varphi}(t)\subseteq\{\delta\}$，因此 $d(t)\geq\Delta-1$。

我　们根据 x 的 Δ-邻点数分两种情形讨论。

情形 1. x 有一个邻点 $z_0\neq y$，满足 $d(z_0)<\Delta$。

只需证明，对于任意满足 $z\neq z_0$ 的路径 $yxzt$，都有 $d(t)\geq\Delta-1$。

反设存在一条路径 $yxzt$，使得 $z\neq z_0$，但 $d(t)\leq\Delta-2$。我们根据 $\varphi(xz_0)=\delta$ 是否成立分两种情形讨论。

情形 1.1:　$\alpha=\varphi(xz_0)\neq\delta$。

根据事实 1(1)，$\bar{\varphi}(z_0)=\{\delta\}$。

首先假设 $\varphi(xz)\in\bar{\varphi}(y)$。那么根据事实 1(2)，$\varphi(zt)=\delta$ 否则 $yxzt$ 是一条 Kierstead 路径。由于 $d(t)\leq\Delta-2$ 且 $\delta\in\varphi(t)$，令 $\eta\in\bar{\varphi}(t)\setminus\{\alpha\}$。根据事实 1(1)，$P_{z_0}(\delta,\eta,\varphi)$ 以x 或 y 为端点，因此与 $P_t(\delta,\eta,\varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1=\varphi/P_t(\delta,\eta,\varphi)$。那么 $yxzt$ 是 φ_1 中的一条 Kierstead 路径，因此根据事实 1(2)，$d(t)\geq\Delta-1$，矛盾。

现在假设 $\varphi(xz)=\delta$。记 $\beta=\varphi(zt)$。那么 $\beta\in\bar{\varphi}(x)\cup\bar{\varphi}(y)$。我们可以假设 $\beta\in\bar{\varphi}(x)$。否则，若存在一种颜色 $\eta\in\bar{\varphi}(t)\cap\bar{\varphi}(x)$，则在路径$P_t(\eta,\beta,\varphi)$ 上交换颜色，该路径不包含 x 或 y。若不存在这样的 η，令 $\eta\in\bar{\varphi}(x)$，且 $\gamma\in\bar{\varphi}(t)\setminus\{\delta\}$。令 $\varphi_1=\varphi/P_t(\eta,\gamma,\varphi)$，然后令 $\varphi_2=\varphi_1/P_t(\eta,\beta,\varphi_1)$。

由事实 1(1)，$P_{z_0}(\delta,\beta,\varphi)$ 终止于 x，因此包含 xzt。这意味着 $\delta\in\varphi(t)$。因此$|\bar{\varphi}(t)\cap(\bar{\varphi}(x)\cup\bar{\varphi}(y))|\geq2$，因为 $d(t)\leq\Delta-2$。设 $\eta\in\bar{\varphi}(t)\setminus\{\alpha\}$。再次由事实 1(1)，$P_{z_0}(\delta,\eta,\varphi)$ 终止于 x 或 y，因此与 $P_t(\delta,\eta,\varphi)$ 不相交。设 $\varphi_1=\varphi/P_t(\delta,\eta,\varphi)$。那么在 φ_1 中，$P_x(\delta,\beta,\varphi_1)=xzt$，且与 $P_{z_0}(\delta,\beta,\varphi_1)$ 不相交，这与事实 1(1) 矛盾。情形 1.1 的证明至此完成。

情形 1.2:　$\varphi(xz_0)=\delta.$

于是 $\varphi(xz)\in\bar{\varphi}(y)$。由于 $d(t)\leq\Delta-2$，根据事实 1(2)，$\varphi(zt)=\delta$。设 $\eta\in\bar{\varphi}(z_0)$。与情形 1.1 中的论证类似，我们假设 $\eta\in\bar{\varphi}(x)$。用 η 给 xz_0 重新着色。于是 yxz_t 是一条 Kierstead 路径。根据事实 1(2)，$d(t)\geq\Delta-1$，这就产生了矛盾。情形 1 的证明到此完成。

情形 2. $N(x)\backslash\{y\}$ 中的所有顶点都是 Δ-顶点。

由于 $|\bar{\varphi}(y)\cap\varphi(x)| = d(x)-2$，若对每条满足 $\varphi(xz) \in\bar{\varphi}(y)$ 的路径 $yxzt$，都有 $d(t) \geq \Delta-1$，则结论成立。因此，假设存在一条路径 yxz_0t_0，使得 $\varphi(xz_0) \in \bar{\varphi}(y)$ 且 $d(t) \leq \Delta-2$。由事实 1(2)，$\varphi(z_0t_0) = \delta$。记 $\alpha = \varphi(xz_0)$。于是 $\alpha \in \bar{\varphi}(y)$。用与前面类似的论证，我们可以假设 $\alpha \in \bar{\varphi}(t_0)$，并且存在一种颜色 $\eta \in \bar{\varphi}(t_0) \cap \bar{\varphi}(x)$。于是 $\eta \neq \alpha$。现在只需证明，对于任意满足 $z \neq z_0$ 的路径 $yxzt$，都有 $d(t) \geq \Delta-1$。我们考虑以下两种情形。

情形 2.1. $\varphi(xz) = \beta \in \bar{\varphi}(y)$.

由事实 1(2)，$\varphi(zt) = \delta$，因此 $t \neq t_0$。由于 $d(t) \leq \Delta-2$，存在一个颜色 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(t)$。于是 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。类似地，我们可以假设 $\eta, \eta_1 \in \bar{\varphi}(x)$。注意，$d(t) \leq \Delta-2$ and$d(t_0) \leq \Delta-2$。因此 $\eta \neq \eta_1$，否则 $P_{t_0}(\delta, \eta, \varphi)$ 和 $P_t(\delta, \eta, \varphi)$ 都会由事实 1(2) 在 x 处结束，产生矛盾。

现在令 φ_1 为由 φ 得到的着色：将 xy 着为 α，使 xz_0 未着色，并将 z_0t_0 重新着色为 α。由引理 5.1，$P_x(\eta_1, \delta, \varphi_1) = P_{z_0}(\eta_1, \delta, \varphi_1)$。令 $\varphi_2 =\varphi_1/P_t(\eta_1, \delta, \varphi_1)$。于是 $\varphi_2(zt) = \eta_1 \in \bar{\varphi}_2(x)$。注意，最后一次 Kempe 交换可能会影响与 t_0 相 incident 的边的颜色，因此在 φ_2 下，δ 在 t_0 处可能不是缺失颜色。不过，我们仍有 $\eta \in \bar{\varphi}_2(x) \cap \bar{\varphi}_2(t_0)$。若 $\delta \in \varphi_2(t_0)$，令 $\varphi_3 = \varphi_2/P_{t_0}(\eta, \delta, \varphi_2)$。否则令 $\varphi_3 = \varphi_2$。于是我们有 $\delta \in \bar{\varphi}_3(z_0) \cap \bar{\varphi}_3(t_0)$。最后令 φ_4 为由 φ_3 得到的着色：将 z_0t_0 重新着色为 δ，将 xz_0 着为 α，并使 xy 未着色。于是 $yxzt$ 在 φ_4 下是一条 Kierstead 路径。然而 $d(t) \leq \Delta-2$，这与事实 1(2) 矛盾。

情形 2.2 $\varphi(xz) = \delta$。

记 $\varphi(zt)$ 为 $= \beta$。用与前面类似的论证，我们可以假设存在一种颜色$\eta' \in \bar{\varphi}(t) \cap \bar{\varphi}(x)$。于是我们可以假设 $\beta \in \bar{\varphi}(x)$，否则可以在 $P_x(\beta, \eta', \varphi)$ 上交换 β和 η'，从而得到所需的着色。

由于 $d(t)$ 为 $\leq \Delta-2$，令 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(t)\backslash\{\alpha\}$。接下来我们证明可以假设 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(x)$ 为 $\cup\{\delta\}$。反设 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(y)\backslash\{\alpha\}$。由于 $d(x)$ 为 $\leq \Delta-1$，因此有 $|\bar{\varphi}(x)| \geq 2$。令 α' 为 $\bar{\varphi}(x)\backslash\{\varphi(zt)\}$ 中的一种颜色。在 $P_x(\eta_1, \alpha', \varphi)$ 上交换 η_1 和 α'，即可得到所需的着色。

令 φ_1 为从 φ 得到的着色：将 xy 着为 α，使 xz_0 保持未着色，并将 z_0t_0 重新着为 α。那么在 φ_1 下，z_0xzt 是一条满足 $\eta_1 \in (\bar{\varphi}_1(x) \cup \bar{\varphi}_1(z_0)) \cap \bar{\varphi}_1(t)$ 的 Kierstead 路径，这与引理 5.3 矛盾。引理得证。 ■

5.5 引理 2.12 的证明

引理 2.12 设 G 是一个7-临界图，且 x 是一个 *5*-度顶点。

(1) 若 x 有三个 *6*-度邻点，则 x 的每个7-度邻点恰有一个 5^--度邻点。*(2)* 若 x 有两个 *6*-度邻点，则 x 有两个7-度邻点，每个都至多有两个 5^--度邻点。*(3)* 若 x 恰有四个 *7* 度邻点，则 x 有两个7-度邻点，每个都至多有三个 5^--度邻点。

证明。 如果 x 有一个5-度邻点，那么根据引理 2.1，x 至少有三个7-度邻点，因此至多有一个6-度邻点。要证明引理在这种情况下成立，我们只需考虑以下情形

x 有四个7-度邻点和一个5-度邻点的情形，即（3）；这由引理 2.11 得出。在证明的其余部分，我们假设 x 没有5-度邻点。根据引理的假设， x 有一个6-度邻点。设 y 是 x, $\varphi \in \mathcal{C}^{\Delta}$ $(G-xy)$ 的一个6-度邻点。不失一般性，假设 $\bar{\varphi}(y) = \{1,2\}$, $\bar{\varphi}(x) = \{3,4,5\}$，并且 $\varphi(x) \cap \varphi(y) = \{6,7\}$。根据引理 2.1， x 至少有两个7-度邻点。

(1) 将 N（x）中的两个6度顶点 $\setminus\{y\}$ 记为 z_1， z_2，将 N（x）中的两个7度顶点记为 v_1， v_2。我们需要证明，对于任意路径 $yxvt$，只要 $v \in \{v_1, v_2\}$, d（t） ≤ 5。我们分三种情形讨论。

情形 1。1 x， y， z_1， z_2 构成关于 xy 和 φ 的一个多重扇的顶点集。

在此情形下，由引理 5.1可得 $\bar{\varphi}$（z_1） $\cup\, \bar{\varphi}$（z_2） $= \{6,7\}$。不失一般性，设 $\bar{\varphi}$（z_1） $= \{6\}$ 且 $\bar{\varphi}$（z_2） $= \{7\}$。于是，对于每个 $\alpha \in \bar{\varphi}$（x）$\cup \bar{\varphi}$（y），P_{z_1}（6， α， φ）和 P_{z_2}（7， α， φ）均在 x 处结束，若 $\alpha \in \bar{\varphi}$（x）。

令 $yxvt$ 为一条路径，其中 $d(v) = 7$。令 η 为 $\bar{\varphi}(t)$ 和 $\beta = \varphi(vt)$ 中的一种颜色。我们不妨假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$，否则 $\eta \in \{1,2,6,7\}$，并且可以在 $P_t(\eta,3,\varphi)$ 上交换 η 和 3；该路径不经过 x 或 y（由引理 5.1），从而得到所需的着色。因此我们假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。

我们还可以假设 $\beta = \varphi(v_1t) \in \bar{\varphi}(x)$。否则 $\beta \in \{1,2,6,7\}$。注意，$P_t(\beta,\eta,\varphi)$ 不以 x 或 y 为端点。令 $\alpha \in \bar{\varphi}(x) \setminus \{\eta\}$。先在 $P_t(\beta,\eta,\varphi)$ 上交换 η 和 $\varphi(vt) = \beta$，然后在从 t 出发的 (β,α)-链上交换 β,α。由此得到所需的着色。因此我们假设 $\beta \in \bar{\varphi}(x)$。

现在令 $\varphi_1 = \varphi/P_t(\eta,\ \varphi(xv)\ \varphi)$。那么 $\varphi(xv) \in \bar{\varphi}_1(t)$，且 $P_x(\varphi(xv)\ \varphi(vt)\ \varphi_1) = xvt$ 不会终止于 y、 z_1或 z_2，这与引理 5.1 矛盾。情形 1.1 的证明至此完成。

情形 1。2 x， y， z_1， z_2 不构成相对于 xy 和 φ 的多重扇的顶点集，且 $|\{\varphi(xz_1)\ \varphi(xz_2)\} \cap \{1,2\}| = 1$。

由对称性，不妨设 $\varphi(xz_1) = 1$、 $\bar{\varphi}(z_1) = \{6\}$、 $\varphi(xz_2) = 7$、 $\varphi(xv_1) = 2$，且$\varphi(xv_2) = 6$。根据引理 5.1，对于每种颜色 $\eta \in \{2,3,4,5\}$， $P_{z_1}(\eta,\ 6,\ \varphi)$会终止于 x或 y，具体取决于 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$还是 $\eta \in \bar{\varphi}(y)$。与情形 1.1 中的论证类似，我们可以进一步假设 $3 \in \bar{\varphi}(z_2)$。

设 $yx\,vt$ 是一条路径，其中 $d(v) = 7$。于是 $\varphi(xv) \in \{2,6\}$。我们首先假设 $\varphi(xv) = 2$.

若 $\varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$，则 $yxvt$ 是一条 Kierstead 路径，且 $d(x) < \Delta$。因此，根据引理 5.3， $\bar{\varphi}(t_1) = \{6,7\}$。设 η 是 $\bar{\varphi}(x) \setminus \{\varphi(vt)\}$ 中的一个颜色。于是由引理 5.4， $P_t(\eta,$ $6,\varphi)$ 以 x 为终点。然而，由引理 5.1， $P_{z_1}(\eta,6,\varphi)$ 以 x 为终点，这就产生了矛盾。

若 $\varphi(vt) = 7$，则用 3 重新为 xz_2 染色，这样便回到了 $\varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$ 的情形。

若 $\varphi(vt) = 6$，令 $\eta \in \bar{\varphi}(t) \cap (\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y))$。我们不妨假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$，否则可以选取一种颜色 $\beta \in \bar{\varphi}(x)$，并在 $P_t(\eta,\beta,\varphi)$ 上交换颜色。由于 $P_{z_1}(\eta,6,\varphi)$ 终止于 x，$P_t(\eta,6,\varphi)$ 与 $P_{z_1}(\eta,6,\varphi)$ 不相交。在 $P_t(\eta,6,\varphi)$ 上交换颜色后，我们便回到 $\varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$ 的情形。

现在假设 $\varphi(xv) = 6$。记 $\varphi(vt) = \beta$。若 $\beta = 7$，则将边 xz_2 重新染为 3，此时 7 在 x 处缺失。因此，我们不妨假设 $\beta \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。

如果 $\varphi(vt) = \beta \in \bar{\varphi}(x)$，那么 $P_x(6,\ \beta,\ \varphi)$ 终止于 z_1，因此 $6 \in \varphi(t)$。由于 $d(t) \leq 5$， l et

$\alpha \in \bar{\varphi}(t) \cap (\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y))$。与之前类似，我们可以进一步假设 $\alpha \in \bar{\varphi}(x)$。注意， $P_{z_1}(\alpha, 6, \varphi)$ 和 $P_t(\alpha, 6, \varphi)$ 不相交。令 $\varphi_1 = \varphi / P_t(\alpha, 6, \varphi)$。那么 6 在 t 处缺失，因此 $P_x(6, \beta, \varphi_1) = xvt$ 不终止于 z_1，这与矛盾相悖。

假设 $\varphi(vt) = \beta \in \bar{\varphi}(y)$。令 α' 为 $\bar{\varphi}(t) \backslash \{7\}$中的一种颜色。那么，同理，我们可以假设 $\alpha' \in \bar{\varphi}(x)$。在 $P_t(\alpha', \beta, \varphi)$ 上交换 α' 和 β 后，我们又回到了 $\varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x)$的情形。情形 1.2 的证明至此完成。

情形 1.3 $\{\varphi(xz_1)\ \varphi(xz_2)\} = \{6, 7\}$。

令 $yxvt$ 为一条路径，其中 $d(v) = 7$。不失一般性，假设 $\varphi(xz_1) = 6$、$\varphi(xz_2) = 7$, 且 $\varphi(xv) = 1$。记 $\varphi(vt) = \beta$。

我们首先假设 $\beta \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。那么， $yxvt$ 是一条 Kierstead 路径，且 $d(x) < \Delta$。因此，由引理 5.3 可得$\bar{\varphi}(t) = \{6, 7\}$ 。令 α 为 $\bar{\varphi}(x) \backslash \{\beta\}$ 中的一种颜色，并令 η 为 $\bar{\varphi}(z_1)$ 中的一种颜色。注意，由引理 5.4 可知， $P_x(\alpha, 7, \varphi)$ 的终点是 t。因此，我们可以假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$，否则$\eta \in \{1, 2, 7\}$，且我们可以在 $P_{z_1}(\eta, \alpha, \varphi)$ 上交换 η和 α。所以我们假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$。接着我们断言，还可以进一步假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x) \backslash \{\varphi(vt)\}$。否则， $\eta = \varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x)$。先在 $P_{z_1}(\eta, 1, \varphi)$ 上交换 η和 1，然后在从 z_1 开始的 $(1, \alpha)$-链上交换 1 和 α。因此我们假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x) \backslash \{\varphi(vt)\}$。现在， $P_x(\eta, 6, \varphi)$ 的终点是 z_1，但不是 t，这与引理 5.4 矛盾。

现在我们进一步假设 $\beta \in \{6, 7\}$。不失一般性，假设 $\varphi(vt) = 6$。令$\eta' \in \bar{\varphi}(t) \backslash \{7\}$。采用与前面类似的论证，我们假设 $\eta' \in \bar{\varphi}(x)$。令 η_1 为 z_1 缺少的颜色， η_2 为 z_2缺少的颜色。

我们首先断言 $\eta_1 = 7$。否则，我们有 $\eta_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，并且如有必要，通过在 $P_{z_1}(\eta_1, 3, \varphi)$ 上交换η_1,3，可假设 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(x)$。然后用$\eta_1$对 xz_1 重新着色，我们便回到了 $\varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$ 的情形。

接着我们断言 $\eta_2 = 6$。否则， $\eta_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$，并且如有必要，通过在 $P_{z_2}(\eta_2, 3, \varphi)$ 上交换 η_2, 3，可假设 $\eta_2 \in \bar{\varphi}(x)$。用 η_2对 xz_2 重新着色，然后用 7 对 xz_1 重新着色，我们便回到了 $\varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$ 的情形。因此$\eta_2 = 6$。注意，上述论证也说明 $P_{z_2}(6, \eta', \varphi)$ 终止于 x；否则，在这条路径上交换 $6, \eta'$ ，我们便回到了 $\eta_2 \neq 6$ 的情形。现在令 $\varphi_1 = \varphi / P_t(\eta', 6, \varphi)$，则有 $\varphi_1(vt) = \eta' \in \bar{\varphi_1}(x)$，因此我们便回到了 $\varphi(vt) \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$ 的情形。至此，(1) 得证。□

(2) 由于 x 没有 5^--度邻点，根据 (1)， x 有两个 6-度邻点和三个 7 度邻点。记这三个 7度顶点为 v_1, v_2, v_3，并记与 y不同的 x 的 6-度邻点为 z。于是 $\varphi(xz) \in \{1, 2\}$或 $\varphi(xz) \in \{6, 7\}$。

情形 2.1 $\varphi(xz) \in \{1, 2\}$.

在此情形下， x, y, z 构成相对于 xy 和 φ的多重扇的顶点集。根据引理 5.1，我们有 $\bar{\varphi}(z) \in \{6, 7\}$。不失一般性，设 $\varphi(xz) = 1$, $\bar{\varphi}(z) = \{6\}$， $\varphi(xv_1) = 2$ 且 $\varphi(xv_2) = 6$。注意，如果 v_1 和 v_2 各自至多有两个5^--度邻点，则结论成立。因此我们考虑以下两种情形。

如果 v_1 具有 三个 5^--邻点，则存在 $t_1 \in N(v_1) \backslash \{x\}$ 使得 $d(t_1) \leq 5$ 一个 d

$\varphi(v_1t_1) \neq 7$。令 η_1 为 $\bar{\varphi}(t_1)\backslash\{7\}$中的一种颜色。按照前面的类似论证，我们可以假设 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(x)$ 且 $\varphi(v_1t_1) \in \bar{\varphi}(x)$。现在， yxv_1t_1 是关于 xy 和φ的一条 Kierstead 路径。但 $\eta_1 \in \bar{\varphi}(x) \cap \bar{\varphi}(t_1)$，这与引理 5.3 矛盾。

如果 v_2 有三个 5^-邻点，那么存在 $t_2 \in N(v_2)\backslash\{x\}$ 使得 $d(t_1) \leq 5$ 且$\varphi(v_2t_2) \neq 7$。令 η_2 为 $\bar{\varphi}(t_2)\backslash\{7\}$中的一个颜色。与前面的论证类似，我们可以假设 η_2和 $\varphi(v_2t_2)$属于 $\bar{\varphi}(x)$。令 $\varphi' = \varphi/P_{t_2}(\eta_2, 6, \varphi)$。于是我们有 $6 \in \bar{\varphi}'(t_2)$。因此$P_x(6, \varphi'(v_2t_2)\ \varphi') = xv_2t_2$不会终止于 z，这与引理 5.1矛盾。情形 2.1的证明至此完成。

情形 2.2 $\varphi(xz) \in \{6, 7\}$.

在此情形下，不失一般性，设 $\varphi(xz) = 6$, $\varphi(xv_1) = 1$ 且 $\varphi(xv_2) = 2$. 注意，如果 v_1 和 v_2 各自至多有两个 5^--邻点，那么结论成立。因此，利用对称性，不妨设 v_1 有三个 5^--邻点。于是存在两个顶点 $t, t' \in N(v_1)\backslash\{x\}$，使得 $d(t) \leq 5$ 且 $d(t') \leq 5$。

断言 1 $\{\varphi(v_1t)\ \varphi(v_1t')\} = \{6, 7\}$.

否则，不失一般性，设 $\varphi(v_1t) \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。那么 y, x, v_1, t 构成一条 Kierstead 路径的顶点集，且 $d(x) < \Delta$。因此，由引理 5.3， $\bar{\varphi}(t) = \{6, 7\}$ 。令 α 为 $\bar{\varphi}(x)\backslash\{\varphi(v_1t)\}$ 中的一种颜色， η 为 $\bar{\varphi}(z)$ 中的颜色。注意，由引理 5.4， $P_x(\alpha, 7, \varphi)$ 终止于 t。因此，不妨设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$; 否则 $\eta \in \{1, 2, 7\}$ ，并且我们可以在 $P_{z_1}(\eta, \alpha, \varphi)$ 上交换 η, α。此外，我们可以假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)\backslash\{\varphi(v_1t)\}$。否则， $\eta = \varphi(v_1t) \in \bar{\varphi}(x)$，我们可以先在 $P_z(\eta, 1, \varphi)$ 上交换 η 和 1，然后在从 z 出发的 $(1, \alpha)$-链上交换 1 和 α。现在，从 x 出发的 $(6, \eta)$-链终止于 z，但不终止于 t，这与引理 5.4 矛盾。因此， $\{\varphi(v_1t)\ \varphi(v_1t')\} = \{6, 7\}$，且不失一般性，设 $\varphi(v_1t) = 6$ 且 $\varphi(v_1t') = 7$。断言 1 得证。

断言 2 $\bar{\varphi}_1(z) \neq \{7\}$。

令 η 为 z 处缺失的颜色。. 否则 $\eta \in \bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。我们不妨假设 $\eta \in \bar{\varphi}(x)$，否则我们可以在 $P_z(\eta, 3, \varphi)$ 上交换 η 和 3，以得到所需的着色。现在通过将 xz 重新着色为 η，我们有 $\{\varphi(v_1t)\ \varphi(v_1t')\} \neq \{6, 7\}$，这与断言 1 矛盾。因此 $\bar{\varphi}(z) = \{7\}$。

现在令 η' 为 $\bar{\varphi}(t')\backslash\{6\}$ 中的一种颜色。与前面类似，我们不妨假设 $\eta' \in \bar{\varphi}(x)$。如果 $P_{t'}(\eta', 7, \varphi)$ 不以 x 结束，令 $\varphi_1 = \varphi/P_{t'}(\eta', 7, \varphi)$。那么我们有 $\{\varphi_1(v_1t)\ \varphi_2(v_1t')\} \neq \{6, 7\}$, 这与断言 1 矛盾。如果 $P_{t'}(\eta', 7, \varphi)$ 以 x 结束，令 $\varphi_1 = \varphi/P_z(\eta', 7, \varphi)$。那么我们有 $\bar{\varphi}_1(z) \neq \{7\}$，这与断言 2 矛盾。至此，(2) 的证明完成。□

(3) 由于 y 是 x 和 $|\varphi(x) \cap \varphi(y)| = 2$ 唯一的 6 度邻点，因此 x 有两个 7 度邻点，设为 v_1, v_2, 使得 $\{\varphi(xv_1)\ \varphi(xv_2)\} \subseteq \bar{\varphi}(y)$。只需证明每个 v_1 和 v_2 至多有三个 5^- 邻点。

反设 v_1 除了 x 之外还有三个 5^--邻点，分别为 t_1, t_2, t_3。由于对于每个 $i = 1, 2, 3$, 均有 $|\bar{\varphi}(x)| = 3$、 $|\bar{\varphi}(y)| \geq 2$ 和 $|\bar{\varphi}(t_i)| \geq 2$，根据引理 5.5， $\varphi(v_1t_1)\ \varphi(v_1t_2)\ \varphi(v_1t_3)$ 中至多有一个属于 $\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。不失一般性，设 $\varphi(v_1t_1) \in$

$\bar{\varphi}(x) \cup \bar{\varphi}(y)$。于是 $\{\varphi(v_1t_2)\ \varphi(v_1t_3)\} = \{6,7\}$。根据引理 5.3，我们有 $\bar{\varphi}(t_1) = \varphi(x) \cap \varphi(y) = \{6,7\}$。因此，$\{y, x, v_1, t_1, t_2, t_3\}$ 是一个 φ-扫帚的顶点集。但 $\{y, x, v_1, t_1, t_2, t_3\}$ 不是初等的，这与引理 5.5 矛盾。由此完成了 (3) 的证明，也完成了该引理的证明。

■

参考文献

[1] L.W. Beineke、S. Fiorini，关于边着色意义下的临界小图，离散数学，16(1976), 109-121。[2] D. Bokal、G. Brinkmann 和 S. Gr¨unewald，13 阶和 14 阶的色指数临界图，离散数学，300(2005)，16-29。[3] G. Brinkmann 和 E. Steffen，小偶数阶的 3-临界图和 4-临界图，离散数学，169 (1997)，193-197。[4] G. Brinkmann 和 E. Steffen，11 阶和 12 阶的色指数临界图，欧洲组合学杂志，19(1998)，889-900。[5] Y. Cao 和 G. Chen，关于边色临界图的平均度，组合理论杂志 B 辑，147 (2021)，299-338。[6] Y. Cao 和 G. Chen，边色临界图的平均度 II，组合理论杂志 B 辑，145 (2020)，470-486。[7] Y. Cao、G. Chen、G. Jing、M. Stiebitz 和 B. Toft，图的边染色：综述，图论与组合学，35 (2019)，33-66。[8] Y. Cao、G. Chen 和 S. Shan，具有一个 2 度顶点的 Δ-临界图，arXiv:2005.12909[9] A. G. Chetwynd 和 H. P. Yap，9 阶色指数临界图，离散数学，47(1983)，23-33。[10] S. Fiorini 和 R.J. Wilson，图的边着色，Pitman，旧金山 (1977)。[11] K. Horacek、R. Luo、Z. Miao 和 Y. Zhao，求曲面 Σ（特征为-6）上的 $\Delta(\Sigma)$ 和 -7，图论与组合学，33 (2017) 929-944。[12] I.T. Jakobsen，关于色指数为 4 的临界图，离散数学，9(1974), 265-276。[13] K. Kayathri，关于边色临界图的大小，图论与组合学，10 (1994) 139-144。[14] R. Luo、L.Y. Miao 和 Y. Zhao，最大度为 6 的边色临界图的大小，图论杂志，60 (2009) 149-171。[15] R. Luo 和 Y. Zhao，求曲面 Σ（特征为 $\chi(\Sigma)$）上的 $\Delta(\Sigma) = -5$，图论杂志，68 (2011) 148-168。[16] R. Luo、Z.K. Miao 和 Y. Zhao，求曲面 Σ（特征为 $\chi(\Sigma)$）上的 $\Delta(\Sigma) = -4$，图论杂志，83 (2016) 277-302。[17] D. Sanders 和 Y. Zhao，最大度为七的平面图属于 I 类，组合理论杂志 B 辑，83 (2001) 201-212。

[18] D. Sanders 和 Y. Zhao，特征为零的曲面上嵌入图的边染色，组合理论杂志 *B* 辑，**87** (2003) 254-263。[19] M. Stiebitz、D. Scheide、B. Toft、L. Favrholdt，图的边染色：Vizing 定理与 Goldberg 猜想，第 75 卷，Wiley，2012。[20] V.G. Vizing，具有给定色类的临界图（俄文），离散分析**5**(1965) 9-17。[21] V.G. Vizing，图论中的若干未解问题，数学科学进展**23** (1968) 117-134，俄罗斯数学综述**23** (1968) 125-142。[22] D.R. Woodall，边色临界图的平均度 II，图论杂志，**42** (2007) 194-218。[23] L. Zhang，每个最大度为 7 的平面图都属于 1 类，图论与组合学，**16** (2000) 467-495。