近最优多重 ZCZ 序列集的一种直接新构造

Nishant Kumar、Sudhan Majhi，*IEEE*高级会员，以及 Ashish K. Upadhya y

arXiv:2301.02144v2 [cs.IT] 6 Feb 2023

摘要——**本文首次提出一种基于广义布尔函数的多重零相关区（ZCZ）序列集直接新构造，该序列集具有集合间零互相关区（ZCCZ）。Tang等人在其2010年论文中提出了一个开放问题：构造 N 二元 ZCZ 序列集，使得其中每个零相关区序列集都是最优的，并且取这些 N 集合的并集后，该并集仍是最优零相关区序列集。本文提出的构造部分解决了这一开放问题，给出了最优零相关区序列集的构造，使其并集成为近最优零相关区序列集。此外，所提构造中每个二元 ZCZ 序列集的性能参数为1 ，其并集的性能参数趋近1 。本文通过双层图形表示展示所提构造，并将其与现有最先进方法进行比较。最后，利用所提多个零相关区序列集，给出一种新颖的多簇准同步码分多址（QS-CDMA）系统模型。**

索引词—**广义布尔函数（GBF）、零互相关区（ZCCZ）、零相关区（ZCZ）、多个零相关区序列集、多簇准同步码分多址系统。**

I. 引言

A set 如果两条序列的自相关之和除零移位 [1]–[4]外均为零，则称它们为 Golay 互补对（GCP）。然而，二进制 GCP 的长度十分有限，因此 Fan等人 [5]提出了 Z-互补对（ZCP）。Feng等人在 [6]将 ZCP 的概念推广为 Z-互补码集（ZCCS）。ZCCS 是指一个包含 K 个码的集合，其中每个码由 M 条长度相同的组成序列构成L，并且在 ZCZ 宽度（Z） [7], [8]内具有理想的非周期自相关和互相关特性。当 $Z = L$ 且 $K = M$时，该集合称为完全互补码（CCC） [9]–[11]。在无线通信中，“远近效应”指接收机因同信道干扰、邻道干扰、捕获效应、失真等因素，难以接收到来自远处的较弱信号。为减轻“远近效应”，并确保异步码分多址（CDMA）系统中的通信不受干扰，零相关区序列于20世纪90年代末被提出 [12]。零相关区序列集通过引入准同步 CDMA（QS-CDMA）系统，可以解决同步问题和干扰受限问题。零相关区序列集可应用于 QS-CDMA 系统，以消除同一小区内的多址干扰（MAI）和多径干扰（MPI） [13], [14]。然而，零相关区序列的长度会随用户数增加而增长，导致每比特所需的码片数增加，从而提高收发机复杂度。因此，构造多个具有集合间零互相关区（ZCCZ）的零相关区序列集对于多簇 QS-CDMA 系统可能发挥关键作用，因为这类系统能够在不显著增加系统复杂度的情况下提升用户数。

多个零相关区序列集由若干 ZCZ 序列集作为其子集组成，且来自不同子集的任意两条序列之间的互相关函数具有 ZCCZ 或低互相关区（LCCZ） [15]–[18]。[16] 和 [17] 中的作者分别使用广义弯曲函数和完美非线性函数构造多个零相关区序列集。但他们往往只能实现集合间具有 LCCZ 而非 ZCCZ 的多个零相关区序列集。 [15],中，Tang 等人提出了一种利用互相正交的 Golay 互补集（MOGCS）构造多个二元 ZCZ 序列集的方法，该方法具有良好的集合间互相关特性，并提出了一个开放问题：如何构造 N最优二元 ZCZ 序列集，使 ZCZ 与 ZCCZ 的比值为 $1/2$。

受本信中 [15], 提出的开放问题启发，我们首次提出一种利用广义布尔函数（GBF）直接构造具有 ZCCZ 的近最优多个零相关区序列集的新方法。我们还对所提出的构造进行了图形分析。利用所提出的序列，我们提出了一种多簇上行 QS-CDMA 系统，该系统能够以更短的码长服务更多用户，实现频谱高效的无多址干扰通信。我们还给出了所提系统模型的性能。

II. 记号与定义

A. 定义与相关函数

设 $\mathbf{a}_1 = (a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1(L-1)})$ 和 $\mathbf{a}_2 = (a_{20}, a_{21}, \ldots, a_{2(L-1)})$ 是两个长度为 L 的复序列。对于整数u，$\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{a}_2$ 的非周期互相关函数（ACCF）为

$$\gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(u) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{L-1-u} a_{1i} a_{2(i+u)}^*, & 0 \le u < L, \\ \sum_{i=0}^{L+u-1} a_{1(i-u)} a_{2i}^*, & -L < u < 0. \end{cases} \quad (1)$$

此外，当 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ 时，ACCF 称为非周期自相关函数（AACF），记作 $\gamma(\mathbf{a}_1)(u)$。接下来，我们根据 ACCF 定义周期互相关函数（PCCF）： $\phi(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(u) = \gamma(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(u) + \gamma^*(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1)(L-u)$。

定义 *1*：设 $\mathbf{C} = \{\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \ldots\ldots, \mathbf{C}_{P-1}\}$ 为一个具有 M 行和 L 列的 P 码集合。定义 $\mathbf{C}^\eta = [\mathbf{a}_0^\eta \mathbf{a}_1^\eta \ldots \mathbf{a}_{M-1}^\eta]_{M\times L}^T$，其中 $\mathbf{a}_\nu^\eta (0 \le \nu \le M-1,\ 0 \le \eta \le P-1)$ 表示第 ν 行序列，$[\cdot]^T$ 表示矩阵 $[\cdot]$的转置。于是，两个码的 ACCF 定义为

$$\gamma(\mathbf{C}_{\eta_1}, \mathbf{C}_{\eta_2})(u) = \sum_{\nu=0}^{M-1} \gamma(\mathbf{a}_\nu^{\eta_1}, \mathbf{a}_\nu^{\eta_2})(u). \quad (2)$$

定义 *2*：设 $\mathbf{C}$ 为满足以下条件的码集合

$$\gamma(\mathbf{C}_{\eta_1},\mathbf{C}_{\eta_2})(u)=\begin{cases}LM, & \eta_1=\eta_2 \text{ and } u=0,\\ 0, & \eta_1=\eta_2 \text{ and } 0<|u|<L,\\ 0, & \eta_1\neq\eta_2 \text{ and } |u|<L.\end{cases} \quad (3)$$

若 $P=M$，则 $\mathbf{C}$ 称为（P，P，L）-CCC。

定义*3*：设 $\mathfrak{Z}^l=\{\mathbf{z}_0^l,\ \mathbf{z}_1^l,\ \ldots,\ \mathbf{z}_{K-1}^l\}$ 为一组 K序列。则，若满足以下条件，$\mathfrak{Z}^l$ 称为（K，Z，L）-ZCZ序列集

$$\phi(\mathbf{z}_i^l,\mathbf{z}_j^l)(u)=\begin{cases}0, & i=j \text{ and } 1\le|u|\le Z,\\ 0, & i\neq j \text{ and } 0\le|u|\le Z,\\ L, & i=j \text{ and } u=0,\end{cases} \quad (4)$$

其中 $0\le i,\ j\le K-1$ 和 Z 称为ZCZ宽度。

定义*4*：设 $\mathfrak{Z}=\{\mathfrak{Z}^1,\mathfrak{Z}^2,\ldots,\mathfrak{Z}^N\}$ 是由若干个（K，Z，L）-ZCZ序列集组成的集合，则若对于$0\le|u|\le Z_c$，$\phi(\mathbf{z}_i^l,\ \mathbf{z}_j^{l'})(u)=0$，$\forall 1\le l\neq l'\le N$，$\mathfrak{Z}$称为ZCCZ等于 Z_c的多重 ZCZ 序列集。

引理*1*（*[19]*）：对于（K，Z，L）-ZCZ序列集 $\mathfrak{Z}$，性能参数 ρ 满足 $\rho=\frac{K}{L}\left(Z+1\right)\ge 1$. $\mathfrak{Z}$。若等号成立，则称其为最优。对于二进制情形，猜想 $\rho=\frac{2KZ}{L}$ 成立。此外，若 $\frac{K}{L}\left(Z+2\right)=1$（或二进制情形下 $\frac{2K}{L}\left(Z+1\right)=1$），则称 $\mathfrak{Z}$ 为近最优。

B. 广义布尔函数 *(GBF) [20]*

我们定义一个与广义布尔函数对应的复值序列，f：$\{0,1\}^m\longrightarrow\mathbb{Z}_q$ 个 m变量表示为 $\Psi(f)=(\omega^{f_0},\ \omega^{f_1},\ \ldots\ldots,\ \omega^{f_{2^m-1}})$，其中 $f_j=f(j_0,\ j_1,\ \ldots\ldots,\ j_{m-1})$，$\omega=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}/q\right)$，且 $(j_0,\ j_1,\ \ldots\ldots,\ j_{m-1})$ 是 j 的二进制向量表示；而在本文余下部分，q 是一个不小于 2 的偶整数。

定义 *5*：设 $J=\{j_0,j_1,\ldots,j_{k-1}\}\subset\{0,1,\ldots,m-1\}$ 且 $\mathbf{x}_J=[x_{j_0},x_{j_1},\ldots,x_{j_{k-1}}]$。对于常数 $\mathbf{e}\in\{0,1\}^k$，$f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}}$ 称为 f 在 $\mathbf{e}$ 上的限制，它通过在函数 f 中代入 $x_{j_\beta}=e_\beta$（$\beta=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ k-1$）得到。此外，序列 $\Psi(f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}})$ 与长度为 2^m 的序列$\Psi(f)$相同，唯有位置 $i_{j_\beta}\neq e_\beta$ 不同；对于每个$0\le\beta<k$，在这些位置上，$\Psi(f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}})$ 的元素为零。

设 f 是一个定义在 m 个变量上的 r 阶广义布尔函数。若 $f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}}$ 是二次广义布尔函数，则 $f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}}$ 的图，即 $G(f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}})$，其顶点集为 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_{m-1}\}\backslash\{x_{j_0},x_{j_1},\ \ldots,x_{j_{k-1}}\}$。如果广义布尔函数 $f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}}$ 中有一项 $q_{\beta_1\beta_2}x_{\beta_1}x_{\beta_2}$（$0\le\beta_1<\beta_2<m,\ x_{\beta_1},x_{\beta_2}\in V$），且满足 $q_{\beta_1\beta_2}\neq 0$（$q_{\beta_1\beta_2}\in\mathbb{Z}_q$），那么通过用一条边连接顶点 x_{β_1} 和 x_{β_2}，即可得到图 $G(f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}})$。对于 $k=0,$，$f|_{\mathbf{x}_J=\mathbf{e}}$ 的图与 f 的图相同。

C. 广义 *Reed-Muller* 码

定义 *6*：令 $q\ge 2$ 和 $0\le r\le m$，则由 x_0中次数不超过 r的单项式所对应的 $\mathbb{Z}_q$值序列生成的、定义在 $\mathbb{Z}_q$ 上的线性码，称为 r阶广义 Reed-Muller（RM）码，记为 $RM_q(r;m)$。

D. 多重 *CC* 的现有构造 *Cs*

引理 *2*（*[21]*）：设 m，k 和 s 为整数，且满足 $0\le s\le k\le m-2$。定义 $J_s=\{j_{k-s},j_{k-s+1},\ldots,j_{k-1}\}=\{m-s,m-s+1,\ldots,m-1\}$、$J=\{j_0,j_1,\ldots,j_{k-1-s}\}\subset\mathbb{Z}_{m-s}$ $I=\{i_0,i_1,\ldots,i_{m-k-1}\}=\mathbb{Z}_{m-s}\backslash J$、$\mathbf{x}=[x_{j_0},x_{j_1},\ldots,x_{j_{k-s-1}}]$，$\mathbf{x_s}=[x_{j_{k-s}},x_{j_{k-s+1}},\ldots,x_{j_{k-1}}]$。设 π 是符号 $\{0,1,\ldots,m-k-1\}$ 上的一个置换。设 f 是关于 m 个变量 x_0，x_1，...，x_{m-1} 的一个二次广义布尔函数，使得对于 $\mathbf{e}\in\{0,1\}^{k-s}$

$$f|_{\mathbf{x}=\mathbf{e}}=\frac{q}{2}\sum_{\beta=0}^{m-k-2}x_{i_{\pi(\beta)}}x_{i_{\pi(\beta+1)}}+\sum_{\beta=0}^{m-k-1}u_\beta x_{i_\beta}+\sum_{\beta=0}^{s-1}v_\beta x_{j_{k-s+\beta}}+v, \quad (5)$$

其中 $u_\beta\in\mathbb{Z}_q\ \forall\ 0\le\beta\le m-k-1$，$v_\beta\in\mathbb{Z}_q\ \forall\ 0\le\beta\le s-1$，且 $v\in\mathbb{Z}_q$ 令 γ_1 和 γ_2 为路径 $G(Q)$ 的两个端点，$t_1=\sum_{\beta=0}^{s-1}b_{k+1+\beta}2^\beta$、$t_2=\sum_{\beta=0}^{k}b_\beta 2^\beta$，其中对于 $0\le\beta\le k+s$，有 $b_\beta\in\{0,1\}$。对于由 $(t_1,\ t_2)$ 生成的自然顺序，定义集合 $S^{(t_1,t_2)}$ 为

$$\left\{f+\frac{q}{2}\left(\sum_{\beta=0}^{k-1}d_\beta x_{j_\beta}+dx_{\gamma_1}+\sum_{\beta=0}^{k-1}b_\beta x_{j_\beta}+\sum_{\beta=k-s}^{k-1}d_\beta b_{s+1+\beta}+b_k x_{\gamma_2}\right):d_\beta,d\in\{0,1\}\right\}. \quad (6)$$

令$\mathbf{S}^{t_1}=\left\{S^{(t_1,t_2)}:\ 0\le t_2\le 2^{k+1}-1\right\},0\le t_1\le 2^s-1$。那么 $\{\mathbf{S}^{t_1}:\ 0\le t_1\le 2^s-1\}$ 是由 2^s 个互补码集组成的集合，且来自不同互补码集$\mathbf{S}^{t_1}$ 和$\mathbf{S}^{t_1'}$ 的任意两个广义互补序列在满足 $0\le t_1\neq t_1'\le 2^s-1$ 时，都具有宽度为 2^{m-s}的 ZCCZ。

对于 t_1 和 t_2的固定取值，$S^{(t_1,t_2)}$ 是一个广义互补序列。记为：

$$S^{(t_1,t_2)}=\left[s_0^{(t_1,t_2)}\ s_1^{(t_1,t_2)}\ \ldots\ s_{2^{k+1}-1}^{(t_1,t_2)}\right]^T, \quad (7)$$

其中，$s^{(t_1,t_2)_\nu}(0\le\nu\le 2^{k+1}-1)$ 是$S^{(t_1,t_2)}$的第 ν行序列。

引理 *3*（*[13]*）：令 $q=2$和 $x_0,x_1,\ \ldots,\ x_k,x_{k+1}$为 k+个二进制变量。此外，令 h 为定义在 $x_0,x_1,\ \ldots,\ x_k,x_{k+1}$上的布尔函数，其定义如下

$$h=\sum_{\beta=1}^{k+1}c_\beta x_\beta x_0+\sum_{1\le\mu<\nu\le k}d_{\mu\nu}x_\mu x_\nu+\sum_{\alpha=0}^{k+1}e_\alpha x_\alpha+e', \quad (9)$$

其中 $c_{k+1}=1$，$c_\beta\in\mathbb{Z}_2$对于 $1\le\beta\le k$，$d_{\mu\nu}$，e_α，$e'\in\mathbb{Z}_2$。令$\boldsymbol{h}$ 表示与函数 h对应的二进制向量，即 $\boldsymbol{h}=[h_0,h_1,\ldots,h_{2^{k+2}-1}]$. 对于 $0\le\tau\le 2^{k+1}-1$，我们有

$$(-1)^{h_\tau+h_{\tau+1}}+(-1)^{h_{\tau+2^{k+1}}+h_{\tau+1+2^{k+1}}}=0, \quad (10)$$

其中，下标中的运算均按模 2^{k+2} 进行。

III. 提出的构造

本节给出一个可生成所需多个零相关区序列集的广义布尔函数。

定理*1*：令 x_0、x_1、.....、x_{m+k+1}为 $m+k+2$个二进制变量。定义一个广义布尔函数 $f(x_0$、x_1、.....、$x_{m-1})$，其定义在 m 个变量上，与引理 2中相同，即从 f的图中移除具有 $k-s$ 个顶点的 $J=\{j_0,j_1,\ldots,j_{k-1-s}\}$后，在 J_s 中得到 s 个孤立顶点以及一条包含 $m-k$ 个顶点的路径。再定义另一个广义布尔函数 $h(x_m$、x_{m+1}、.....、$x_{m+k+1})$，其定义在 $k+2$ 个变量上，如下所示：

$$h=\sum_{r=1}^{k+1}c_r x_{m+r}x_m+\sum_{2\le\mu<\nu\le t}d_{\mu\nu}x_{m+\mu}x_{m+\nu}+\sum_{\beta=1}^{k+1}e_\beta x_{m+\beta}+e', \quad (11)$$

其中， $c_{k+1}\neq 0$、 $c_r\in\mathbb{Z}_2$、 $1\le r\le k$、 $d_{\mu\nu}$、 $e_\beta\in\mathbb{Z}_2$。对于固定的 t_1，定义集合 $\mathfrak{Z}^{t_1}=\{\Psi(\mathbf{z}_{t_2}^{t_1})\colon\ 0\le t_2\le 2^{k+1}-1\}$ 如下:

$$\left\{f+h+\frac{q}{2}\left(\sum_{\beta=0}^{k-1}x_{m+\beta}x_{j_\beta}+\sum_{\beta=k-s}^{k-1}x_{m+\beta}b_{s+1+\beta}+\sum_{\beta=0}^{k-1}b_\beta x_{j_\beta}+x_{m+k}x_{\gamma_1}+b_k x_{\gamma_2}\right)\right\}. \quad (12)$$

那么， $\mathfrak{Z}=\left\{\mathfrak{Z}^{t_1}\colon\ 0\le t_1\le 2^s-1\right\}$ 是一个 2^s $(2^{k+1},\ 2^m,\ 2^{m+k+2})$-ZCZ序列集，其ZCCZ等于 $2^{m-s}-1$。

证明：利用（6）、（7）、（12），并按照 t_2生成的自然顺序，可得 $\mathfrak{Z}^{t_1}=\left[\mathfrak{Z}_{\mathbf{0}}^{t_1},\mathfrak{Z}_1^{t_1}\right]$，其中 $\left[\mathfrak{Z}_0^{t_1},\mathfrak{Z}_1^{t_1}\right]$ 是矩阵 $\mathfrak{Z}_{r-1}^{t_1}$的水平拼接，适用于 $1\le r\le 2$，定义如下:

$$\mathfrak{Z}_{r-1}^{t_1}=\begin{bmatrix} s_0^{(t_1,0)}\omega^{h_{rl}} & s_1^{(t_1,0)}\omega^{h_{rl+1}} & \dots & s_{l-1}^{(t_1,0)}\omega^{h_{(r+1)l-1}}\\ s_0^{(t_1,1)}\omega^{h_{rl}} & s_1^{(t_1,1)}\omega^{h_{rl+1}} & \dots & s_{l-1}^{(t_1,1)}\omega^{h_{(r+1)l-1}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_0^{(t_1,l-1)}\omega^{h_{rl}} & s_1^{(t_1,l-1)}\omega^{h_{rl+1}} & \dots & s_{l-1}^{(t_1,l-1)}\omega^{h_{(r+1)l-1}}\end{bmatrix},$$

其中 $l=2^{k+1}$。现在，我们需要证明 $\mathfrak{Z}^{t_1}$ 是一个$(2^{k+1},\ 2^m,\ 2^{m+k+2})$-ZCZ序列集。对于 $0\le i,\ j\le 2^{k+1}-1$，$\phi(\Psi(\mathbf{z}_i^{t_1})\ \Psi(\mathbf{z}_j^{t_1}))(\tau)$在时移$0\le\tau\le 2^m$处的值由（8）给出，其中 $t_1=t_1'$。接下来，根据（10）、$t_1=t_1'$ 时的（8）以及CCCs的非周期和性质，可得:

$$\begin{aligned}\phi(\Psi(\mathbf{z}_i^{t_1}),\Psi(\mathbf{z}_j^{t_1}))(\tau)&=2\cdot\sum_{m=0}^{2^{k+1}-1}\gamma\left(s_m^{(t_1,i)},s_m^{(t_1,j)}\right)(\tau)\\&=\begin{cases}2^{k+m+2}, & \text{if } \tau=0 \text{ and } i=j,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

这证明了 $\mathfrak{Z}^{t_1}$ 是一个 $(2^{k+1},\ 2^m,\ 2^{m+k+2})$-ZCZ序列集 $\forall\ 0\le t_1\le 2^s-1$。现在，令 $0\le t_1\ne t_1'<2^s$ 和 $0\le i,\ j\le 2^{k+1}-1$，则对于 $0\le\tau\le 2^{m-s}-1$，$\phi(\Psi(\mathbf{z}_i^{t_1})\ \Psi(\mathbf{z}_j^{t_1'}))(\tau)$ 的值由式 (8) 给出。现在，根据式 (10)、式 (8) 以及 引理 2 中互补码集的 ZCCZ 性质，可得 $\phi(\Psi(\mathbf{z}_i^{t_1})\ \Psi(\mathbf{z}_j^{t_1'}))(\tau)=0$,

$\forall\ 0\le\tau\le 2^{m-s}-1$. ■

注 *1*：由于定理1 中孤立顶点的集合使所构造的多重 ZCZ 序列集具有多重性。因此，对于 $s=0$，即定理1 中的 $J_s=\phi$，我们的构造退化为 [13] 中的构造。因此，[13] 中给出的构造是所提出构造的一个特例。

推论*1*： 定理 1 中所有零相关区序列的集合，即 $\{\Psi(\mathbf{z}_{t_2}^{t_1})\colon\ 0\le t_2\le 2^{k+1}-1,\ \ 0\le t_1\le 2^s-1\}$ 是一个近最优的（2^{k+s+1}, $2^{m-s}-1$, 2^{m+k+2}）零相关区序列集。

注释*2*： 容易计算得出，每个 $\mathfrak{Z}^{t_1}$ 的性能参数为 $\rho_1=1$，它们的并集的性能参数为 $\rho_2\le 1$。此外，当 m的值较大时， ρ_2 趋近于1。

注释*3*： 由公式（12）可知，所提出的多重 ZCZ 序列集由广义RM码的二阶陪集得到。由于RM码具有高效的编码方式、良好的纠错性能，以及易于解码这一重要的实用优势 [26]，因此，我们提出的构造优于任何其他非广义布尔函数构造。

注释*4*： 由（12）可知，单项式的最高次数为 2，因此所提出的每个 ZCZ 序列集的构造的计算复杂度为二阶，即 $O(n^2)$。

IV. 图形化方法

本节从图形化的角度解读所提出的构造。

图1展示了（12）的图形表示。该图具有双层结构，中间由一条水平直线分隔上层和底层。上层和下层分别对应布尔函数 f 和 h的图。这两层通过边集相互连接

$$\{x_{j_0}x_m,x_{j_1}x_{m+1},\dots,x_{j_{k-1-s}}x_{m+k-1-s},x_{m-s}x_{m+k-s},x_{m-s+1}x_{m+k-s+1},\dots,x_{m-1}x_{m+k-1}\},$$

并且，顶点 x_{m+k} 与 I 中路径的任一端点相连。有趣的是，每个 ZCZ序列集的零相关区等于上层

$$\begin{aligned}\phi(\Psi(\mathbf{z}_i^{t_1}),\Psi(\mathbf{z}_j^{t_1'}))(\tau)=&2\cdot\sum_{m=0}^{l-1}\gamma\left(s_m^{(t_1,i)},s_m^{(t_1',j)}\right)(\tau)+[(-1)^{h_{l-1}+h_l}+(-1)^{h_{2l-1}+h_0}]\gamma^*\left(s_0^{(t_1',j)},s_{2l-1}^{(t_1,i)}\right)(L-\tau)\\&+\sum_{m=0}^{l-2}[(-1)^{h_m+h_{m+1}}+(-1)^{h_{m+l}+h_{m+1+l}}]\gamma^*\left(s_{m+1}^{(t_1',j)},s_m^{(t_1,i)}\right)(L-\tau).\end{aligned}\quad (8)$$

表I：所提出的构造与 [18], [22]–[25]的比较。

Ref.	方法	参数[1]	最优性[2]	ZCCZ	集合数	约束条件
[22,阶 1]	间接	$(L,\ M-1,\ LP)$	No	$2M-1$	N	$N=\lfloor\frac{T}{M}\rfloor>1,\ \ L=KM,\ \ M>1,\ \ K>1$
[22,定理 2]	间接	$(T,\ M,\ TL)$	No	TL	N	$N=\lfloor\frac{T}{M}\rfloor>1,\ \ L=KM,\ \ M>1,\ \ K>1$
[23]	间接	$(M,\ M-1,\ PM)$	Yes	$PM-1$	N	$N=\lfloor\frac{T}{M}\rfloor,\ \ N>1,\ \ M>1$
[24]	间接	$(L,\ P,\ TLP)$	No	TLP	T	$gcd(T,P)=1, gcd(L,P)=1 (or L\|P or P\|L)$
[25]	间接	$(2M,Z,2TP)$	No	$2TP$	T	$\lfloor\frac{P-2}{Z}\rfloor=M$ 或 $\lfloor\frac{P-1}{Z}\rfloor=M, Z\le 2$
[18]	间接	$(N^2,\ N,\ N)$	Yes	$Z+1$	M	N 是 DFT矩阵的阶， $N=M(Z+1)$
本文	直接	$(2^{k+1},\ 2^m,\ 2^{m+k+2})$	Yes	$2^{m-s}-1$	2^s	$0\le s\le k\le m-2$

[1]每个ZCZ序列集的参数。 [2]每个ZCZ序列集的最优性。

图中顶点数量的幂，而零相关区序列集的 ZCCZ 等于图的上层中除孤立顶点外的顶点数量的幂减一。

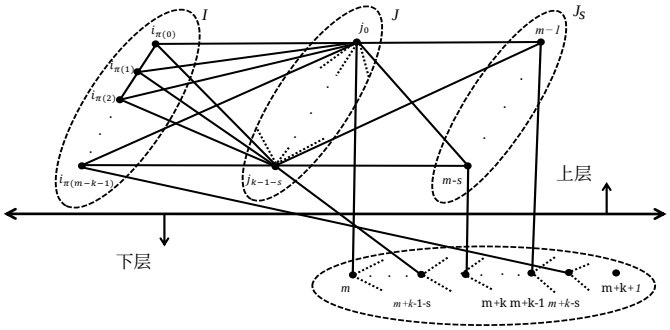

图1： $\{f+h+\frac{q}{2}(\sum_{\alpha=0}^{k-1} x_{m+\alpha}x_{j_\alpha}+x_{m+k}x_\beta)\}$.的图形表示

例*1*： 设 $m=4, q=2, s=1$ 和 $k=2$。假设$J=\{0\}$, $J_s=\{3\}, I=\{1,2\}$ 以及广义布尔函数 $f=x_0x_1+x_0x_2+x_0x_3+x_1x_2+x_1+x_2$， $h=x_4x_5+x_4x_6+x_4x_7+x_4$.生成两个序列集 $\mathfrak{Z}^0$ 和 $\mathfrak{Z}^1$，使得

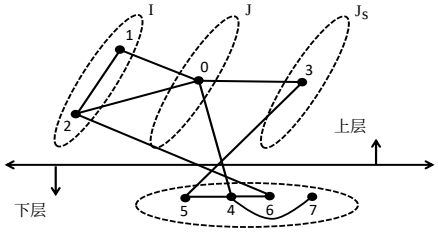

图2： $f+h+x_0x_4+x_2x_6+x_3x_5$.的图形表示

$$\mathfrak{Z}^0=\{\Psi(f+h+x_0x_4+x_2x_6+x_3x_5+b_0\cdot x_0+b_1\cdot x_3+b_2\cdot x_1+0\cdot x_5):b_0,b_1,b_2\in\mathbb{Z}_2\},$$
$$\mathfrak{Z}^1=\{\Psi(f+h+x_0x_4+x_2x_6+x_3x_5+b_0\cdot x_0+b_1\cdot x_3+b_2\cdot x_1+1\cdot x_5):b_0,b_1,b_2\in\mathbb{Z}_2\}. \quad (13)$$

那么， $\mathfrak{Z}^0$ 和 $\mathfrak{Z}^1$ 是两个最优的 (8，16，256)-ZCZ序列集，其集合间零相关区互相关等于 7。此外， $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}^0\cup\mathfrak{Z}^1$是一个近最优的 (16，7，256)-ZCZ序列集。图 2 展示了与二次型对应的图，即示例 1 中的 $f+h+x_0x_4+x_2x_6+x_3x_5$。

V. 系统模型与性能分析

考虑图 3 所示的密集网络场景，多个用户直接与单个基站（BS）通信，或通过接入点（AP）通信。与某个 AP 通信的用户可能会对其他 AP 造成干扰。每个接入点附近进行通信的用户都归入一个簇，并为该簇中的每个用户分配一个来自该簇所对应的零相关区（ZCZ）序列集的签名序列。一个小区中可服务的簇总数取决于多个零相关区序列集的数量。我们展示了在加性高斯白噪声（AWGN）信道中运行的多簇 QS-CDMA 系统的误码率（BER）。我们考虑了 4 个簇，每个簇有 8 个用户。多个零相关区序列包含 4 个序列集，每个簇对应一个序列集；每个序列集由 8 个零相关区

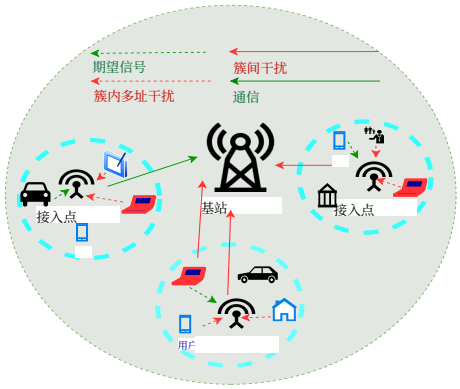

图 3：多簇 QS-CDMA系统模型。

序列组成，数量等于该簇中的用户数，且每个序列的长度为 256。图 4 展示了每个簇中一个用户的误码率性能，计算时考虑了来自 7 个用户和 3 个簇的干扰。可以看出，所有用户的误码率性能几乎相同；当信噪比为 0 分贝时，误码率低至 10^{-5}。仿真进行了 10^5 次蒙特卡洛迭代，使用了 10^4 比特。这是因为系统通过较长序列进行扩频而获得了处理增益。系统的时延容限为 3 个码片。然而，若要在采用零相关区序列的传统 QS-CDMA 系统中容纳相同数量的用户，则需要长度为 2048 的零相关区序列。

。这会带来较高的处理增益，但系统的扩频效率以及带宽效率会大幅下降，使其不适用于实际场景，因此本文省略了性能分析。

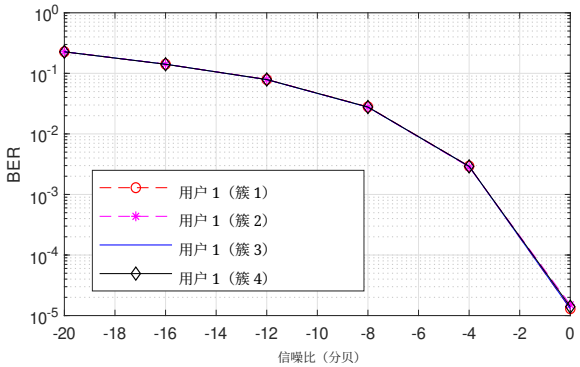

图 4：采用多个零相关区的多簇 QS-CDMA 的误码率性能。

VI. 结论

本文首次提出了利用GBF直接构造具有ZCCZ的多个ZCZ序列集的方法。我们还提出了一种新型多簇上行QS-CDMA系统。此外，我们涵盖了许多此前尚未涉及的长度。对于每个ZCZ序列集，所提出构造的计算复杂度为 $O(n^2)$。在这一研究方向上，直接构造涵盖更多文献中尚未涉及长度的多个ZCZ序列集，将是一项重大贡献。

参考文献

[1] M. Golay，《互补序列》，IRE信息论汇刊，第7卷，第2期，第82–87页，1961年。[2] A. R. Adhikary、P. Sarkar和S. Majhi，《利用广义布尔函数直接构造q元偶长度Z互补对》，IEEE信号处理快报，第27卷，第146–150页，2020年。[3] A. R. Adhikary、S. Majhi、Z. Liu和Y. L. Guan，《新型最优奇长度二进制Z互补对集》，IEEE信息论汇刊，第66卷，第1期，第669–678页，2020年。[4] ——，《具有渐近ZCZ比率 3/4的偶长度二进制Z互补对新集》，IEEE信号处理快报，第25卷，第7期，第970–973页，2018年。[5] P. Fan、W. Yuan和Y. Tu，《Z互补二进制序列》，IEEE信号处理快报，第14卷，第8期，第509–512页，2007年。[6] L. Feng、P. Fan、X. Tang和K.-k. Loo，《广义成对Z互补码》，IEEE信号处理快报，第15卷，第380页，2008年，第377页——。[7] P. Sarkar、S. Majhi和Z. Liu，《用于构造长度灵活的最优Z互补码集的伪布尔函数》，IEEE信号处理快报，第28卷，第1350–1354页，2021年。[8] G. Ghosh、S. Majhi、P. Sarkar和A. K. Upadhaya，《利用广义布尔函数直接构造最优偶长度Z互补码集》，IEEE信号处理快报，第29卷，第872–876页，2022年。[9] S. Das、S. Budiˇsin、S. Majhi、Z. Liu和Y. L. Guan，《多相完全互补码的无乘法器生成器》，IEEE信号处理汇刊，第66卷，第5期，第1184–1196页，2018年。[10] S. Das、S. Majhi和Z. Liu，《一类新型完全互补码及其在APU矩阵中的应用》，IEEE信号处理快报，第25卷，第9期，第1300–1304页，2018年。[11] S. Das、S. Majhi、S. Budiˇsin和Z. Liu，《多种长度多相完全互补码的新构造框架》，IEEE信号处理汇刊，第67卷，第10期，第2639–2648页，2019年。[12] P. Fan、N. Suehiro、N. Kuroyanagi和X. Deng，《具有零相关区的一类二进制序列》，《电子快报》，第35卷，第777–779(2)页，1999年。[13] Z. Liu、Y. Guan和U. Parampalli，《从广义 Reed-Muller 码构造零相关区序列的新方法》，载于IEEE信息论研讨会（ITW），2014年。[14] N. Kumar、S. Majhi、P. Sarkar和A. K. Upadhyay，《面向QS-CDMA系统的素数幂长度零相关区序列的直接构造》，2021年。 [在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2111 06675 。X. Tang、P. Fan和J. Lindner，[15]《基于互补序列集、具有良好互相关特性的多组二进制零相关区序列集》，IEEE信息论汇刊，第56卷，第4038–4045页，2010年。[16] D. Zhang、M. Parker和T. Helleseth，《由广义Bent函数构造多相零相关区序列》，《密码学与通信》，第12卷，第1–11页，2020年。[17] Z. Zhou、D. Zhang、T. Helleseth和J. Wen，《具有良好互相关性的多个最优零相关区序列集的构造》，IEEE信息论汇刊，第PP卷，第1–1页，2018年。[18] X. Chen、X. Gao和X. Peng，《具有集合间零互相关区的多个最优多相零相关区序列集的构造》，IEEE通信快报，第25卷，第2799页，2021年，第9期，第2795页——。[19] X. Tang、P. Fan和S. Matsufuji，《低相关区或零相关区扩频序列集相关性的下界》，《电子快报》，第36卷，第551–552页，2000年。[20] P. Kumar、P. Sarkar、S. Majhi和S. Paul，《大ZCZ比率偶长度Z互补对的直接构造》，《密码学与通信》，第1–10页，2022年。[21] L. Tian、Y. Li和C. Xu，《具有集合间零互相关区的多组完全互补码》，IEEE通信汇刊，第68卷，第3期，第1925–1936页，2020年。[22] H. Torii、T. Matsumoto和M. Nakamura，《多相非对称ZCZ序列集构造方法的扩展》，IEICE基础汇刊，第96卷，第11期，第2244–2252页，2013年。[23] ——，《包含不相关序列的最优多相非对称ZCZ序列集》，《信号处理杂志》，第16卷，第6期，第487–494页，2012年。[24] L. Wang、X. Zeng和H. Wen，《通过交织技术构造具有子集间不相关序列的非对称ZCZ序列集》，IEICE基础汇刊。

，第100卷，第2期，第751–756页，2017.

[25] L. Wang、G. Zhang、H. Wen 和 X. Zeng，“具有子集间非相关特性和灵活零相关区长度的非对称零相关区序列集”，《通信数学进展》，第 12 卷第 3 期，第 541 页，2018 年。[26] J. A. Davis 和 J. Jedwab，“正交频分复用、Golay互补序列和 Reed-Muller码中的峰均功率控制”，*IEEE*信息论汇刊，第 45 卷第 7 期，第 2397–2417 页，1999 年。