arXiv:2301.02159v1 [math.NA] 5 Jan 2023

任意维数下标量曲率的有限元近似

Evan S. Gawlik* Michael Neunteufel†

摘要

我们分析维数为 $N \geq 2$ 时标量曲率的有限元离散。我们的分析聚焦于多面体区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上单纯形剖分中的光滑黎曼度量 g 的分片多项式插值函数，其中最大单元直径为 h。我们证明，若此类插值函数 g_h 的多项式次数为 $r \geq 0$，且在余维一单形上具有单值的切向-切向分量，那么它便有一种自然的（密度化）标量曲率概念；当 $h \to 0$ 时，该曲率以 $O(h^{r+1})$ 的速率在 $H^{-2}(\Omega)$ 范数下收敛到 g 的（密度化）标量曲率，前提是 $N = 2$ 或 $r \geq 1$ 成立。作为一个特例，我们的结果表明，在二维三角剖分上广泛使用的高斯曲率“角亏”近似在 $H^{-2}(\Omega)$ 中收敛，且无需对插值度量 g_h 作严格假设。我们还给出了数值实验，结果表明我们的解析估计是尖锐的。

1 引言

许多源于数理物理和几何分析的偏微分方程都涉及黎曼曲率张量及其缩并。标量曲率 R由黎曼曲率张量经过两次缩并得到，尤为重要；它既是广义相对论中爱因斯坦-希尔伯特泛函的被积函数，也出现在二维里奇流的控制方程中。为了近似涉及标量曲率的偏微分方程的解，有必要对将黎曼度量张量映射为其标量曲率的非线性微分算子进行离散化。本文旨在构造并分析任意维数 $N \geq 2$ 下的此类离散化方法。

我们特别关注这样的情形：光滑黎曼度量张量 g 在多面体区域 Ω 上 $\subset \mathbb{R}^N$ 由单纯形剖分上的分片多项式 Regge 度量 g_h 近似 $\mathcal{T}$，其中 Ω 的最大单元直径为 h。这里，若一个度量在 $\mathcal{T}$ 上分片光滑，且其切向-切向分量在 $\mathcal{T}$的每个余维为 1 的单形上取单值，则称其为 Regge 度量。当这样的度量是分片多项式时，它属于一个称为Regge有限元空间 [11, 12, 21]的有限元空间。Regge 度量不可经典地微分，因此我们的首要任务是为 g_h的标量曲率赋予意义。我们的定义是当前已在维数 $N = 2$中确立的一种定义的自然推广，它将 g_h 的标量曲率视为分布，并将其看作 g的密度化标量曲率的近似，即标量曲率 R 乘以体积形式 ω。对于分片常数 Regge 度量，我们的定义退化为分片平坦空间上的经典分布密度化标量曲率定义

*夏威夷大学马诺阿分校数学系，檀香山，夏威夷州 96822,‒美国，egawlik@hawaii.edu
†维也纳工业大学分析与科学计算研究所，维德纳主街 8-10 号，1040 维也纳，奥地利，michael.neunteufel@tuwien.ac.at

。它是由支撑在（ [8, 23]）-单形 S上的狄拉克 δ 分布的线性组合$N-2$，其权重为角亏，位于 S 处： 2π 减去与 S相邻的二面角之和。对于次数更高的分片多项式 Regge 度量，它还包括额外项，涉及每个 N-单纯形内部的标量曲率，以及跨越每个（$N-1$）-单形的平均曲率跳跃。

我们研究随着 g_h 三角剖分不断细化，其分布意义下的密度化标量曲率收敛到 g 的密度化标量曲率的情况。我们在定理4.1 中证明，在$H^{-2}(\Omega)$-范数下，当 $O(h^{r+1})$ 时，这种收敛以 g_h 的速率发生，其中 g 是 $r\geq 0$次分片多项式 $N=2$ 的最优阶插值函数，前提是 $r\geq 1$或5 。第5 节中的数值实验表明，这些估计通常是尖锐的。

为了解释这一收敛结果的背景，我们先概述文献中关于标量曲率有限元近似的一些已有收敛结果。首先需要整理一些记号。

记号。下文中， $W^{s,p}(\Omega)$ 表示可微性指标为 $s\in[0,\infty)$、可积性指标为 $p\in[1,\infty]$ 的 Sobolev-Slobodeckij 空间；$\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ 和 $|\cdot|_{W^{s,p}(\Omega)}$ 表示相应的范数和半范数，我们始终以欧几里得度量为准。我们将 $L^p(\Omega)$ 记为 $=W^{0,p}(\Omega)$，将 $H^s(\Omega)$ 记为 $=W^{s,2}(\Omega)$。对于 $k\in\mathbb{N}$，我们将 $H^{-k}(\Omega)$ 记为 $=(H_0^k(\Omega))'$，其中$H_0^k(\Omega)$ 表示 $H^k(\Omega)$ 中那些在 $\partial\Omega$ 上从 0 阶至 $k-1$ 阶导数的迹均为零的函数所构成的空间，撇号表示对偶空间。我们有时会使用与黎曼度量 g 相对应的加权 L^p 和H^{-k} 空间，记为 $L^p(\Omega\ g)$ 和 $H^{-k}(\Omega\ g)$；详情见第4节及 [16,公式 4.1] 。

若 g 是光滑黎曼度量且 g_h 是 Regge 度量，则 $R(g)$ 表示 g的标量曲率，$(R\omega)(g)$ 表示 g的密度化标量曲率，$(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h)$ 表示 g_h 的分布意义下的密度化标量曲率（定义见下文定义 3.1），而 $R_h^{(q)}(g_h)$ 表示将 $(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h)$ 投影到次数为 q的 Lagrange 有限元空间上的 $L^2(\Omega\ g_h)$-投影。

下文还将使用最优阶插值函数、典范插值函数和测地插值函数这几个术语。第一个术语是一个统称，指属于 Regge有限元空间的任意 g 的分片多项式插值函数 g_h，并且该插值函数在 N-单形 T上具有关于 $W^{s,p}(T)$-范数的最优阶误差估计；见定义 4.2。典范插值函数是一种特定的插值函数（也是最优阶插值函数），详见 [21, 第 2]章。 g 的测地插值函数是唯一的分片常数 Regge 度量 g_h，满足以下性质：在 $\mathcal{T}$中，每条边的长度按 g_h测量时，都等于相应顶点之间的测地距离，而该测地距离按 g测量。

现有结果总结。现在我们可以总结一些关于用 g_h 的分布曲率逼近 g 的曲率的现有结果。在下文中，字母 r 表示 g_h 的多项式次数。

1. Cheeger、M¨uller 和 Schrader [8, 方程（5.7）和定理 5.1] 证明了，若 $r=0$ 和g_h 是 g的测地插值函数，那么 $(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h)$ 在测度的（集值）意义下收敛到 $(R\omega)(g)$，在维数 $N=2$ 时收敛速率为 $O(h)$，在维数 $N\geq 3$时收敛速率为 $O(h^{1/2})$。 2. Gawlik [16, 定理 4.1] 证明了，若 $r\geq 1$、 $N=2$，且 g_h 是 g的任意最优阶插值函数，那么 $R_h^{(q)}(g_h)$ 收敛到 $R(g)$，在 $H^{-1}(\Omega\ g)$-范数下的收敛速率为 $O(h^r)$，在分片 $H^k(\Omega)$-范数下的收敛速率为$O(h^{r-k-1})$， $k=0$，1，2，...，$r-2$，前提是 $q\geq\max\{1,r-2\}$。 3. Berchenko-Kogan 和 Gawlik [4, 推论 6.2] 证明了，若 $r\geq 1$、 $N=2$，且 g_h 是 g的任意最优阶插值函数，那么 $(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h)$ 收敛到 $(R\omega)(g)$，收敛速率为 $O(h^r)$，在

范数$\|u\|_{V',\ h} = \text{上确界}_{v\in V,\ v\neq 0}\langle u、\ v\rangle_{V',\ V}/\|v\|_{V,\ h}$，其中

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in H^2(T)\,\forall T \in \mathcal{T}^N\} \tag{1}$$

以及$\|v\|_{V,\ h} = |v|_{H^1(\Omega)} + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}^N} h_T^2|v|^2_{H^2(T)}\right)^{1/2}$。这里，$h_T$表示 T的直径，$\mathcal{T}^N$ 表示 $\mathcal{T}$ 中 N-单形的集合。

4. Gopalakrishnan、Neunteufel、Sch¨oberl 和 Wardetzky [19, 定理 6.5 和推论 6.6]证明了，如果 $r \geq 0$、$N = 2$，且 g_h 是 g的典范插值函数，那么 $R_h^{(r+1)}(g_h)$ 以 $O(h^{r+1})$ 的速率收敛到 $R(g)$，在 $H^{-1}(\Omega\ g)$-范数下如此，在破碎的$H^k(\Omega)$-范数下则以 $O(h^{r-k})$ 的速率收敛，$k = 0$，1，2，.....，$r - 1$。

新结果。正如上文所示，本文的分析涵盖了文献中尚未探讨的两个重要情形：

1. 我们证明了在 $N \geq 3$ 和 $r \geq 1$的情形下的收敛结果。这为利用分片多项式 Regge 度量在高维中近似标量曲率打开了大门。

2. 我们证明了在 $N = 2$、$r = 0$，且 g_h 是 g的任意最优阶插值函数的情形下的收敛结果。这是高斯曲率近似文献中长期存在的一个空白。此前，针对 $N = 2$ 和 $r = 0$ 情形的研究依赖于测地插值函数 [8] 和典范插值函数 [19]的一些微妙性质。我们的结果表明，涉及角亏的高斯曲率近似是成立的，无需对插值后的度量张量 g_h作出严格假设。

请注意，我们的分析预测，当 $N \geq 3$ 和 $r = 0$时，在 $H^{-2}(\Omega)$范数下完全不会收敛。数值实验表明，对于一般的最优阶插值函数，这一结果是尖锐的。然而，对于典范插值函数，数值实验表明，当 $N \geq 3$ 和 $r = 0$时，$(R\omega)_{\text{dist}}(g_h)$在 $H^{-2}(\Omega)$范数下以 $O(h)$的速率收敛到$(R\omega)(g)$。我们计划在未来工作中研究典范插值函数所展现的这一超收敛现象。

论文结构。 我们证明（$R\omega$）$_{\text{dist}}(g_h)$ 收敛到（$R\omega$）（g）的策略分为两个步骤。首先，在第 2-3节中，我们研究（$R\omega$）$_{\text{dist}}(g_h)$ 在度量变形下的演化，从而得到误差（$R\omega$）$_{\text{dist}}(g_h)$ $-(R\omega)$（g）的积分公式，其形式如下：

$$\langle (R\omega)_{\text{dist}}(g_h) - (R\omega)(g), v\rangle_{V',V} = \int_0^1 b_h(\widetilde{g}(t);\sigma,v) - a_h(\widetilde{g}(t);\sigma,v)\,dt, \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

这里，$\widetilde{g}(t) = (1-t)g + tg_h$、$\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g}(t) = g_h - g$、$V$是（1）中定义的空间，而 $b_h(\widetilde{g}(t);\cdot,\cdot)$和 $a_h(\widetilde{g}(t);\cdot,\cdot)$是某些依赖于度量的双线性型。在第4节中，我们使用有限元理论中的技术来估计（2）的右端，从而得到定理 4.1。

上述方法与在维数 $N = 2$ 中[4, 16, 19], 使用的方法类似，但有几点重要区别。首先，我们采用误差的积分公式（$R\omega$）$_{\text{dist}}(g_h)$ $-(R\omega)(g)$ ，而不是曲率本身的积分公式。此前在 [4, 16, 19]中的分析都依赖后一类公式。粗略地说，本文计算的是沿着一参数族 Regge 度量从 误差 出发并终止于 g 的演化；而论文 [4, 16, 19] 计算的是沿着两族一参数度量的曲率 演化：一族从欧几里得度量 δ 出发并终止于 g_h，另一族从

δ 出发并终止于 g。基于误差演化的方法似乎更适合用于证明最优误差估计。

我们分析的另一个关键方面是使用 $H^{-2}(\Omega)$-范数来度量误差。这个范数弱于 [4, 16, 19], 中使用的范数，而且对于度量曲率误差似乎更为自然。例如，对于维数为 $N = 2$的分片常数 Regge 度量，我们证明，任意最优阶插值函数$R\omega$在$_{\mathrm{dist}}(g_h)$下收敛至$R\omega(g)$，且该结论在 $H^{-2}(\Omega)$-范数下成立；然而，数值实验表明，当 g不是 g_h 的典范插值函数时，这一结论在更强的范数下并不成立。我们用来证明在 g中收敛的一个关键工具，是$H^{-2}(\Omega)$上某一对依赖于度量且依赖于网格的范数近似等价；见命题V4.5。这一等价性类似于 Walker在定理 4.1 和 4.3]中针对三角剖分曲面上一族类似的依赖于网格的范数所证明的等价性。

补充说明。 公式（2）不仅对误差分析有用，其本身也很有意思。它有一个微分形式的对应式（见定理 3.6）：

$$\frac{d}{dt}\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(\widetilde{g}(t)), v\rangle_{V',V} = b_h(\widetilde{g}(t);\sigma,v) - a_h(\widetilde{g}(t);\sigma,v), \quad \forall v \in V, \tag{3}$$

它仿照了公式

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega Rv\omega = \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)v\omega - \int_\Omega \langle G,\sigma\rangle v\omega, \quad \forall v \in V \tag{4}$$

该公式适用于一族光滑黎曼度量 $g(t)$，其密度化标量曲率为 $R\omega$，爱因斯坦张量为 $G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg$。这里， $\mathbb{S}\sigma = \sigma - g\mathrm{Tr}\ \sigma$，div 是协变散度算子；关于更多记号细节，见下文。

仔细考察 b_h 和 a_h （见定理 3.6）的公式后， （3）与（4）之间的对应关系便更加清晰。双线性形式 b_h（$\widetilde{g}$； ·， ·）除含有$\mathbb{S}$之外，是 Hellan-Herrmann-Johnson 有限元方法中一种双线性形式的非欧几里得、 N维推广 [1–3， 5–7， 9， 22]。它可以视为 div div$\mathbb{S}\sigma$ 对 v的积分，其中 div div 按分布意义解释。此前已有研究指出并利用了这种与 Hellan-Herrmann-Johnson 方法的联系，维数为 $N = 2$ [4, 16,19]。

双线性形式 $a_h(\widetilde{g};\cdot,\cdot)$，它仅在维数为 $N \geq 3$时非零，似乎起到了$\int_\Omega\langle G,\sigma\rangle v\omega$的作用，而后者也仅在维数为 $N \geq 3$时非零。它为在分布意义下定义 Regge 度量的爱因斯坦张量提供了一种自然方法。我们将在第3.2节进一步讨论这一点。除此之外，我们还指出， a_h 的公式包含一项，该项涉及余维一单形两侧迹反转第二基本形式的跳跃；研究广义相对论中的奇异源时也会出现同一量，在那里，它体现了众所周知的以色列匹配条件，适用于应力-能量集中所在的超曲面两侧 [20]。

我们的计算与物理文献中的计算还有一些其他联系。广义相对论中的吉本斯-霍金-约克边界项的变分 [17, 28]就是一例。它与第2.2节中的计算有许多相似之处。调整记号之后，无疑可以在文献中找到类似公式（6）的表达式。我们仍然完整推导这类公式，不仅是为了让读者熟悉我们的记号，也是为了给出严谨的推导：不舍弃全导数（它们在无边流形上积分为零，但一般情况下并非如此），并尽可能减少局部坐标计算的使用。

2 几何量的演化

本节中，我们考虑一个配备光滑黎曼度量 g 的 N 维流形 M，并研究在 g 发生形变时各种几何量的演化。

本节采用以下记号。与 g关联的 Levi-Civita 联络记作 ∇。若 σ 是一个（p,q）阶张量场，则其协变导数是（$p,q+1$）阶张量场$\nabla\sigma$，沿向量场 X 方向的协变导数是（p,q）阶张量场 $\nabla_X\sigma$。其迹 $\operatorname{Tr}\sigma$ 是沿前两个指标对 σ 进行缩并，必要时利用 g 升降指标。我们将 $\operatorname{div}\sigma=$记作 $\operatorname{Tr}\nabla\sigma$，并将 $\Delta\sigma=\operatorname{div}$ 记作 $\nabla\sigma$。两个（p,q）阶张量场 σ 和 ρ 的 g-内积记作 $\langle\sigma,\rho\rangle$。

与 g 关联的体积形式记作 ω。 g的里奇张量和标量曲率分别记作 Ric 和 R。若要强调它们对 g的依赖，我们写作$\omega(g)$、$\mathrm{Ric}(g)$、 $R(g)$等。

若 D 是 M的嵌入子流形，则记 ω_D 为 D上的诱导体积形式。若 σ是 M上的张量场，则 $\sigma|_D$ 表示 σ在包含映射 $D\hookrightarrow M$下的拉回。稍后我们将介绍一些与余维一嵌入子流形相关的其他记号，例如平均曲率 H 和第二基本形式 II；参见第2.2节。

我们用 $d\alpha$ 表示微分形式 α 的外微分。若 α 是 1-形式，则 $\alpha^\sharp$ 表示通过用 g 升指标得到的向量场。若 f 是标量场，有时我们会将 1-形式 $\nabla f=df$ 视为向量场 $(df)^\sharp$，而不显式写出这一点。

稍后，在第4节，我们会在许多量（如 ∇ 和 $\langle\cdot$ g 的下标，以强调它们对 g的依赖。仅在该节中，省略下标通常表示相关量是相对于欧几里得度量计算的，我们将其记为 δ。关于这一记号变化，我们会在第4节作进一步说明。

2.1 密度化标量曲率的演化

首先，我们研究度量变形下密度化标量曲率 $R\omega$ 的演化。

命题 2.1. 设 $g(t)$ 是一族时间导数为 $\frac{\partial}{\partial t}g=:\sigma$ 的光滑黎曼度量。则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\omega)=(\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)\omega-\langle G,\sigma\rangle\omega,$$

其中，$G=\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}Rg$表示与 g相关的爱因斯坦张量，且

$$\mathbb{S}\sigma=\sigma-g\operatorname{Tr}\sigma.$$

证明。我们计算

$$\frac{\partial}{\partial t}(R\omega)=\dot{R}\omega+R\dot{\omega}$$

并调用众所周知的公式 [15, 引理 2]

$$\dot{R}=\operatorname{div}\operatorname{div}\sigma-\Delta\operatorname{Tr}\sigma-\langle\mathrm{Ric},\sigma\rangle$$

以及 [10,方程 2.4]

$$\dot{\omega}=\frac{1}{2}(\operatorname{Tr}\sigma)\omega.$$

由于 $\Delta\operatorname{Tr}\sigma=\operatorname{div}\operatorname{div}(g\operatorname{Tr}\sigma)$ 且 $\operatorname{Tr}\sigma=\langle g,\sigma\rangle$，结论得证。 □

2.2 平均曲率的演化

接下来，我们研究超曲面 F的平均曲率 H 的演化。我们假设 F的切丛平凡，因此存在光滑的 g-正交标架场 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N-1}$，定义在 F上。（如果情况并非如此，只需固定一点 $p \in F$，并考察 p的一个邻域，在该邻域上切丛是平凡的。）令 n为 F的单位法向量，使得在 F上的每一点， $n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N-1}$构成一个右手的 g-正交标架（位于环境流形中）。如果度量 g随时间光滑变化，则假设向量 $n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{N-1}$也随时间光滑变化，并且始终保持 g-正交。

我们采用以下记号

$$\mathrm{II}(X, Y) = g(\nabla_X n, Y) = -g(n, \nabla_X Y)$$

表示 F 上的第二基本形式。我们的符号约定使得对于具有外向法向量的球面，$\mathrm{Tr\,II} = H$，且 H 为正。我们还用 ∇_F 和 div_F 分别表示 F 上的曲面梯度和曲面散度算子，其含义如下。对于标量场 v,

$$\nabla_F v = \nabla v - n \nabla_n v = \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i \nabla_{\tau_i} v,$$

对于 1-形式 α,

$$\mathrm{div}_F\, \alpha = \mathrm{Tr}\left(\nabla \alpha|_F\right) = \sum_{i=1}^{N-1} (\nabla_{\tau_i} \alpha)(\tau_i).$$

注意，在公式 $\nabla_F v = \nabla v - n \nabla_n v$ 中，我们将 ∇v 视为向量场，而非 1-形式。回想一下，曲面散度算子满足恒等式

$$\int_F (\mathrm{div}_F\, \alpha) \omega_F = \int_{\partial F} \alpha(\nu_F) \omega_{\partial F} + \int_F H \alpha(n) \omega_F, \tag{5}$$

其中， ν_F 是 ∂F 的外向单位法向量， H 是 F 的平均曲率。

命题 2.2. 设 $g(t)$ 是一族光滑黎曼度量，其时间导数为 $\frac{\partial}{\partial t} g =: \sigma$。设 F 是一个与时间无关的超曲面，其平均曲率为 H ，诱导体积形式为 ω_F。则

$$\frac{\partial}{\partial t}(H \omega_F) = -\frac{1}{2}\left(\left\langle \overline{\mathrm{II}}, \sigma|_F \right\rangle + (\mathrm{div}\, \mathbb{S}\sigma)(n) + \mathrm{div}_F\left(\sigma(n, \cdot)\right) - H\sigma(n, n)\right) \omega_F, \tag{6}$$

其中

$$\overline{\mathrm{II}}(X, Y) = \mathrm{II}(X, Y) - H g(X, Y)$$

是迹反转第二基本形式。

注记 2.3. 在维数 $N = 2$下，公式 (6) 大为简化。令 τ 和 n分别表示 F的单位切向量和单位法向量，则有 $\nabla_\tau n = H\tau$， $-\nabla_\tau \tau = Hn$，且 $\mathrm{II}(\tau, \tau) = g(\nabla_\tau n, \tau) - Hg(\tau, \tau) = H - H = 0$，因此 II 消失。此外，

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_F\left(\sigma(n, \cdot)\right) - H\sigma(n, n) &= \nabla_\tau\left(\sigma(n, \cdot)\right)(\tau) - H\sigma(n, n) \\
&= \nabla_\tau\left(\sigma(n, \tau)\right) - \sigma(n, \nabla_\tau \tau) - H\sigma(n, n) \\
&= \nabla_\tau\left(\sigma(n, \tau)\right).
\end{aligned}$$

因此，在二维情况下，

$$\frac{\partial}{\partial t}(H \omega_F) = -\frac{1}{2}\left((\mathrm{div}\, \mathbb{S}\sigma)(n) + \nabla_\tau\left(\sigma(n, \tau)\right)\right) \omega_F.$$

为证明命题2.2，我们写出

$$\dot{H} = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial t} g(n, \nabla_{\tau_i} \tau_i) \tag{7}$$

并使用以下引理。

引理 2.4。对于任意时变向量场 X 和 Y，

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_Y X = \nabla_{\dot{Y}} X + \nabla_Y \dot{X} + \frac{1}{2} \left((\nabla_X \sigma) Y + (\nabla_Y \sigma) X - (\nabla \sigma)(X, Y) \right)^\sharp,$$

其中，$(\nabla\sigma)(X,Y)$ 表示 1-形式 $Z \mapsto (\nabla_Z \sigma)(X,Y)$，而 $(\nabla_X \sigma)Y$ 表示 1-形式 $Z \mapsto (\nabla_X \sigma)(Y,Z)$。

证明。在坐标中，

$$(\nabla_Y X)^\ell = Y^j \frac{\partial X^\ell}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^\ell Y^j X^i,$$

其中，Γ_{ij}^ℓ 表示与 g 相关联的第二类克里斯托费尔符号。因此，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_Y X)^\ell &= \dot{Y}^j \frac{\partial X^\ell}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^\ell \dot{Y}^j X^i + Y^j \frac{\partial \dot{X}^\ell}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^\ell Y^j \dot{X}^i + \dot{\Gamma}_{ij}^\ell Y^j X^i \\ &= (\nabla_{\dot{Y}} X)^\ell + (\nabla_Y \dot{X})^\ell + \dot{\Gamma}_{ij}^\ell Y^j X^i. \end{aligned}$$

接下来，我们回顾度量变形下克里斯托费尔符号变化率的以下公式 [10, 公式 2。23]:

$$\dot{\Gamma}_{ij}^\ell = \frac{1}{2} g^{\ell m} \left((\nabla_i \sigma)_{jm} + (\nabla_j \sigma)_{im} - (\nabla_m \sigma)_{ij} \right).$$

由此可得

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{ij}^\ell Y^j X^i &= \frac{1}{2} g^{\ell m} \left((\nabla_X \sigma)_{jm} Y^j + (\nabla_Y \sigma)_{im} X^i - (\nabla_m \sigma)_{ij} Y^j X^i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\nabla_X \sigma) Y + (\nabla_Y \sigma) X - (\nabla \sigma)(X, Y) \right]^\ell. \end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_Y X)^\ell = (\nabla_{\dot{Y}} X)^\ell + (\nabla_Y \dot{X})^\ell + \frac{1}{2} \left((\nabla_X \sigma) Y + (\nabla_Y \sigma) X - (\nabla \sigma)(X, Y) \right)^\ell.$$

□

引理 2.5. 对任意时变向量场 X，

$$\frac{\partial}{\partial t} g(n, X) = \frac{1}{2} \sigma(n, n) g(n, X) + g(n, \dot{X}).$$

证明。将 $X = ng(n,X)$ 写为 $+\sum_{i=1}^{N-1} \tau_i g(\tau_i, X)$，我们计算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(n, X) &= \sigma(n, X) + g(\dot{n}, X) + g(n, \dot{X}) \\ &= \sigma(n,n) g(n,X) + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma(n, \tau_i) g(\tau_i, X) + g(\dot{n}, n) g(n, X) + \sum_{i=1}^{N-1} g(\dot{n}, \tau_i) g(\tau_i, X) + g(n, \dot{X}) \\ &= \left(\sigma(n,n) + g(\dot{n}, n) \right) g(n, X) + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sigma(n, \tau_i) + g(\dot{n}, \tau_i) \right) g(\tau_i, X) + g(n, \dot{X}). \end{aligned}$$

对于每个 $i = 1,2,\ldots,N-1$，有

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial t} g(n,\tau_i) &= \sigma(n,\tau_i) + g(\dot{n},\tau_i) + g(n,\dot{\tau}_i) \\ &= \sigma(n,\tau_i) + g(\dot{n},\tau_i) \end{aligned}$$

因为 $\dot{\tau}_i$ 与 g正交于 n。同样，

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} g(n,n) = \sigma(n,n) + 2g(n,\dot{n}),$$

因此结论得证。 □

现在我们可以计算平均曲率的时间导数了 H。由引理2.5，可得

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial t} g(n, \nabla_{\tau_i}\tau_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1}{2}\sigma(n,n) g(n,\nabla_{\tau_i}\tau_i) + g\left(n, \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\tau_i}\tau_i\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} H\sigma(n,n) - \sum_{i=1}^{N-1} g\left(n, \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\tau_i}\tau_i\right). \end{aligned} \tag{8}$$

利用引理2.4 以及第二基本形式的对称性，我们可以将第二项写成

$$\begin{aligned} g\left(n, \frac{\partial}{\partial t}\nabla_{\tau_i}\tau_i\right) &= g(n,\nabla_{\dot{\tau}_i}\tau_i) + g(n,\nabla_{\tau_i}\dot{\tau}_i) + (\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i) - \frac{1}{2}(\nabla_n\sigma)(\tau_i,\tau_i) \\ &= 2g(n,\nabla_{\dot{\tau}_i}\tau_i) + (\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i) - \frac{1}{2}(\nabla_n\sigma)(\tau_i,\tau_i). \end{aligned}$$

将上面的第一项对 i 求和后，可简化如下。我们写作 $\dot{\tau}_i = \sum_{j=1}^{N-1} \tau_j g(\tau_j,\dot{\tau}_i)$，并利用 $\nabla_X Y$ 关于 X 的线性来计算

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{N-1} g(n,\nabla_{\dot{\tau}_i}\tau_i) &= 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} g(n,\nabla_{\tau_j}\tau_i) g(\tau_j,\dot{\tau}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} g(n,\nabla_{\tau_j}\tau_i)\left(g(\tau_j,\dot{\tau}_i) + g(\dot{\tau}_j,\tau_i)\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} g(n,\nabla_{\tau_j}\tau_i)\sigma(\tau_j,\tau_i) \\ &= \langle \mathrm{II}, \sigma|_F \rangle. \end{aligned}$$

上文中，我们利用第二基本形式的对称性从第一行推导出第二行，并利用恒等式

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} g(\tau_j,\tau_i) = \sigma(\tau_j,\tau_i) + g(\tau_j,\dot{\tau}_i) + g(\dot{\tau}_j,\tau_i)$$

从第二行推导出第三行。将这些结果代入（8），得到

$$\dot{H} = \frac{1}{2}H\sigma(n,n) - \langle \mathrm{I\!I}, \sigma|_F \rangle + \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1}{2}(\nabla_n \sigma)(\tau_i, \tau_i) - (\nabla_{\tau_i}\sigma)(n, \tau_i) \right]. \tag{9}$$

引理 2.6. 我们有

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1}{2}(\nabla_n \sigma)(\tau_i, \tau_i) - (\nabla_{\tau_i}\sigma)(n, \tau_i) \right] = \frac{1}{2} \left(\langle \mathrm{I\!I}, \sigma|_F \rangle - (\operatorname{div} \mathbb{S}\sigma)(n) - \operatorname{div}_F (\sigma(n, \cdot)) \right). \tag{10}$$

证明。 恒等式 $0 = \nabla_{\tau_i}(g(n,n)) = 2g(n, \nabla_{\tau_i} n)$ 表明 $\nabla_{\tau_i} n$ 属于 $\{\tau_j\}_{j=1}^{N-1}$ 的张成空间，因此 (10) 右端的第一项满足

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{I\!I}, \sigma|_F \rangle &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sigma(\tau_j, \tau_i) g(\tau_j, \nabla_{\tau_i} n) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sigma(\nabla_{\tau_i} n, \tau_i). \end{aligned} \tag{11}$$

(10) 右端的第二项可按如下方式计算。回顾 $\mathbb{S}\sigma = \sigma - g \operatorname{Tr} \sigma$，我们有

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbb{S}\sigma)(n) &= \nabla_n (\mathbb{S}\sigma)(n,n) + \sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\tau_i} (\mathbb{S}\sigma)(n, \tau_i) \\ &= (\nabla_n \sigma)(n,n) - \nabla_n (g \operatorname{Tr} \sigma)(n,n) + \sum_{i=1}^{N-1} \left[(\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i) - \nabla_{\tau_i}(g \operatorname{Tr}\sigma)(n,\tau_i) \right] \\ &= (\nabla_n \sigma)(n,n) - g(n,n)\nabla_n \operatorname{Tr}\sigma + \sum_{i=1}^{N-1} \left[(\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i) - g(n,\tau_i)\nabla_{\tau_i} \operatorname{Tr}\sigma \right] \\ &= (\nabla_n \sigma)(n,n) - \nabla_n \operatorname{Tr}\sigma + \sum_{i=1}^{N-1} (\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i). \end{aligned}$$

由于迹与协变微分可交换，

$$\nabla_n \operatorname{Tr}\sigma = \operatorname{Tr} \nabla_n \sigma = (\nabla_n \sigma)(n,n) + \sum_{i=1}^{N-1} (\nabla_n \sigma)(\tau_i, \tau_i).$$

因此，

$$(\operatorname{div} \mathbb{S}\sigma)(n) = \sum_{i=1}^{N-1} \left[(\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i) - (\nabla_n \sigma)(\tau_i, \tau_i) \right]. \tag{12}$$

(10) 右端的第三项为

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_F (\sigma(n,\cdot)) &= \sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\tau_i} (\sigma(n,\cdot))(\tau_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \left[\nabla_{\tau_i} (\sigma(n,\tau_i)) - \sigma(n, \nabla_{\tau_i}\tau_i) \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

结合 (11)、(12) 和 (13)，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\langle \mathrm{I\!I}, \sigma|_F\rangle - (\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n) - \operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot))\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left[\sigma(\nabla_{\tau_i} n, \tau_i) - (\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i) + (\nabla_n\sigma)(\tau_i,\tau_i) - \nabla_{\tau_i}(\sigma(n,\tau_i)) + \sigma(n,\nabla_{\tau_i}\tau_i)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left[(\nabla_n\sigma)(\tau_i,\tau_i) - 2(\nabla_{\tau_i}\sigma)(n,\tau_i)\right].
\end{aligned}$$

□

结合引理 2.6 与（9），得到

$$\dot{H} = \frac{1}{2}\left(-\langle \mathrm{I\!I}, \sigma|_F\rangle - (\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n) - \operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot)) + H\sigma(n,n)\right). \tag{14}$$

命题 2.2 由以下恒等式立即推出

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\omega_F) = \dot{H}\omega_F + H\dot{\omega}_F = \dot{H}\omega_F + \frac{1}{2}H\operatorname{Tr}(\sigma|_F)\omega_F$$

and

$$\langle \mathrm{I\!I}, \sigma|_F\rangle - H\operatorname{Tr}(\sigma|_F) = \langle \overline{\mathrm{I\!I}}, \sigma|_F\rangle.$$

2.3 角度的演化

接下来，我们研究度量变形下角度的演化。

引理 2.7. 设 $g(t)$ 是一族光滑黎曼度量，其时间导数为 $\frac{\partial}{\partial t}g =: \sigma$。设 $(\bar{n}(t)\ \bar{\tau}(t))$ 是一对 $g(t)$-正交归一向量，且 $(n(t)\ \tau(t))$ 是另一对位于 $(\bar{n}(t)\ \bar{\tau}(t))$ 的张成空间中的 $g(t)$-正交归一向量。设 $\theta(t)$ 为满足下式的角度

$$\begin{aligned}
\tau &= \bar{\tau}\cos\theta + \bar{n}\sin\theta,\\
n &= -\bar{\tau}\sin\theta + \bar{n}\cos\theta.
\end{aligned}$$

假设这些向量随时间光滑变化，并假设 $n(t)$（分别地，$\bar{n}(t)$）在所有时刻均与一个与时间无关的超曲面 F（分别地，F）$g(t)$-正交。那么，对于所有满足 $\theta \in (0,\pi)$ 的时刻，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \frac{1}{2}\sigma(n,\tau) - \frac{1}{2}\sigma(\bar{n},\bar{\tau}). \tag{15}$$

证明。对关系式 $\cos\theta = g(\bar{n}, n)$ 求导，得到

$$-\dot{\theta}\sin\theta = \frac{\partial}{\partial t}\left(g(\bar{n}, n)\right).$$

特别地，在任意时刻 s，我们可以写成

$$-\dot{\theta}(s)\sin\theta(s) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=s}(g(t)(\bar{n}(t), n(s))) + \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=s}(g(t)(\bar{n}(s), n(t))) - \sigma(s)(\bar{n}(s), n(s)).$$

利用引理 2.5 并省略在 $t=s$处的取值，可得

$$\begin{aligned}-\dot{\theta}\sin\theta &= \frac{1}{2}\sigma(\bar{n},\bar{n})g(\bar{n},n)+\frac{1}{2}\sigma(n,n)g(n,\bar{n})-\sigma(\bar{n},n)\\ &= \frac{1}{2}\sigma(\bar{n},\bar{n}\cos\theta-n)+\frac{1}{2}\sigma(n\cos\theta-\bar{n},n)\\ &= \frac{1}{2}\sigma(\bar{n},\bar{\tau}\sin\theta)+\frac{1}{2}\sigma(-\tau\sin\theta,n).\end{aligned}$$

若 $\theta\in(0,\ \pi)$ 在时刻 $t=s$，那么我们可以除以 $\sin\theta$，得到 (15)。 □

3 分布稠密化标量曲率

设 $\mathcal{T}$ 是多面体区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 的一个单纯形剖分。我们用 $\mathcal{T}^k$ 表示 $\mathcal{T}$ 中所有 k-单形构成的集合。我们还用 $\mathring{\mathcal{T}}^k$ 表示 $\mathcal{T}^k$ 的子集，其中包含那些不位于 Ω 边界上的 k-单形。我们称这类单形为内部单形。我们称 $(N-1)$-单形为面。

设 g 是 $\mathcal{T}$ 上的 Regge 度量。回顾一下，这意味着 $g|_T$ 在每个 $T\in\mathcal{T}^N$ 上都是光滑的黎曼度量，并且诱导度量 $g|_F$ 在每个 $F\in\mathring{\mathcal{T}}^{N-1}$ 上都是单值的（因此，该诱导度量在 $\mathcal{T}$ 的所有低维单形上也都是单值的）。

在每个 $T\in\mathcal{T}^N$ 上，我们用 R_T 表示 $g|_T$ 的标量曲率。对于位于两个 N-单形 T^+ 和 T^- 的边界上的内部面 $F\in\mathring{\mathcal{T}}^{N-1}$，由 $g|_{T^+}$ 测得的 F 上的第二基本形式通常不同于由 $g|_{T^-}$ 测得的值。我们用 $[\![\mathrm{II}]\!]_F$ 表示跨越 F 的第二基本形式的跳跃。更准确地说，

$$[\![\mathrm{II}]\!]_F(X,Y)=g|_{T^+}(\nabla_X n^+,Y)+g|_{T^-}(\nabla_X n^-,Y)$$

对于任意与 F 相切的向量 X、Y，其中 $n^\pm$ 从 $T^\pm$ 向外指向，相对于 $g|_{T^\pm}$ 的长度为单位长度，并且与 F 的 $g|_{T^\pm}$ 正交。对于跨越 F 的其他量的跳跃，我们采用类似的记法。例如，$[\![H]\!]_F$ 表示跨越 F 的平均曲率跳跃。在不会引起混淆时，我们有时省略下标 F。若 F 包含于 $\partial\Omega$ 中，则我们将标量场 v 跨越 F 的跳跃简单定义为 $[\![v]\!]_F=v|_F$。

在每个 $S\in$上 $\mathring{\mathcal{T}}^{N-2}$，沿着 S 的角亏为

$$\Theta_S=2\pi-\sum_{\substack{T\in\mathcal{T}^N\\ T\supset S}}\theta_{ST},$$

其中，θ_{ST} 表示由 T 中包含 S 的两个面所形成的二面角，其测量方式为 $g|_T$。一般而言，此角度可能沿着 S 变化。若 F^+ 和 F^- 是 T 中包含 S 的两个面，且 $n^\pm$ 表示相对于 $g|_T$、从 T 向外指向的 $F^\pm$ 的单位法向量，则

$$\cos\theta_{ST}=-g|_T(n^+,n^-).$$

Let

$$V=\{v\in H^1_0(\Omega)\mid\forall T\in\mathcal{T}^N,\ v|_T\in H^2(T)\}.$$

注意，如果 $v\in V$,那么 v 在 $\mathcal{T}$ 的每个维数为 $\geq N-$的单纯形上都有单值迹 3.

定义 3.1. 设 g 为一个 Regge 度量。g 的分布意义下的密度化标量曲率是线性泛函 $(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g)\in V'$，定义如下：

$$\langle(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g),v\rangle_{V',V}=\sum_{T\in\mathcal{T}^N}\int_T R_T v\omega_T+2\sum_{F\in\mathring{\mathcal{T}}^{N-1}}\int_F[\![H]\!]_F v\omega_F+2\sum_{S\in\mathring{\mathcal{T}}^{N-2}}\int_S\Theta_S v\omega_S,\quad\forall v\in V. \tag{16}$$

此定义推广了 [4], 中的定义 3.1，其中为维数为 $N=2$ 的 Regge 度量定义了分布曲率二形式（即高斯曲率乘以体积形式）。注意，式（16）中除第一项外，其余各项都带有因子 2，这与维数为 $N=2$ 时标量曲率 R 是高斯曲率的两倍这一事实相符。

可以用与说明其二维对应版本大致相同的方式，直观地阐释定义 3.1。当 g 为分片常数时，定义 3.1 恢复了经典概念 [23]：分布意义下的密度化标量曲率是支撑在（$N-2$）维单形上的狄拉克 δ 分布的线性组合，其权重由角亏给出。当 g 不是分片常数时，会出现额外项，用以计入每个 N 维单纯形 T 内部 g 的非零（经典定义的）曲率，以及跨越每个内部面 F的平均曲率跳跃。跨越 F 的平均曲率跳跃，可以通过以下事实来理解：点 $p\in F$ 处的标量曲率 R 可表示为（两倍）N（$N-1$）/2 切平面截面曲率之和，这些切平面在 p处两两 g-正交；其中（$N-1$）$N-2$个切平面与 F 在 p 处相切，而 $N-1$ 个切平面与 F 在 p处 g-正交。由于切向-切向连续性，切于 F的平面所对应的截面曲率没有奇异性。其余 $N-1$个截面曲率则是奇异的。考虑一个包围 F 一部分的 N 维区域，并使其在与 F g-正交的方向上具有很小的厚度，便可利用高斯-博内定理（沿二维切片）将这些截面曲率之和的（体积）积分，近似为跨越 F的平均曲率跳跃的（曲面）积分。（在这项计算中，须谨记截面曲率与高斯曲率之间的关系由高斯-科达齐方程给出。）关于维数 $N=2$下的更多见解，参见 [4], 中定义 3.1 后的讨论以及 [26], 。另请参见 [13] ，其中论证了当 g 为分片常数且 $N\geq 2$时定义 3.1 的合理性。

下文中，我们将始终用字母 T、F 和 S 分别表示维数为 N、$N-1$ 和 $N-2$ 的单形。因此，我们将分别用 $\sum_T$、$\sum_F$ 和 $\sum_S$ 代替 $\sum_{T\in\mathcal{T}^N}$、$\sum_{F\in\mathcal{T}^{N-1}}$和 $\sum_{S\in\mathcal{T}^{N-2}}$。若要对给定维数 $^\circ$ 的内部单形求和，我们会在求和符号上方加一个圆圈。例如，$\sum_F$ 是 $\sum_{F\in\mathring{\mathcal{T}}^{N-1}}$的简写。

3.1 分布意义的标量曲率的演化

我们关注（16）在度量变形下如何变化。为此，考虑一参数族 Regge 度量 $g(t)$，其时间导数为

$$\sigma=\frac{\partial}{\partial t}g.$$

我们的目标是计算

$$\frac{d}{dt}\langle(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g(t)),v\rangle_{V',V}$$

其中 $v\in V$ 任意。

根据命题 2.1 和2.2，（16）右端前两项的导数满足

$$\frac{d}{dt}\int_T R_T v\omega_T=\int_T\left(\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma-\langle G,\sigma\rangle\right)v\omega_T$$

and

$$2\frac{d}{dt}\int_F[\![H]\!]_F v\omega_F=-\int_F\left[\!\!\left[\left\langle\overline{\mathrm{II}},\sigma|_F\right\rangle+(\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n)+\operatorname{div}_F\left(\sigma(n,\cdot)\right)-H\sigma(n,n)\right]\!\!\right]v\omega_F. \tag{17}$$

对于式（16）右端的第三项，我们使用以下引理 a.

引理 3.2. 沿任意内部 $(N-2)$-单纯形 S，有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Theta_S \omega_S) = \frac{1}{2}\left(\sum_{F\supset S} [\![\sigma(n,\tau)]\!]_F + \Theta_S \operatorname{Tr}(\sigma|_S)\right)\omega_S,$$

其中，求和遍及所有包含 S, n 的 $(N-1)$-单形 F； τ 是相对于 g、指向 F 的单位法向量，而 τ 是相对于 g 、从 S 指向 F 且与 S 和 n 均成 g-正交的单位向量。这里，我们约定，若 F 为两个 N-单形 T^+ 和 T^- 共有，则

$$[\![\sigma(n,\tau)]\!]_F = \sigma^+(n^+,\tau) + \sigma^-(n^-,\tau),$$

其中 $\sigma^\pm = \sigma|_{T^\pm}$ 和 $n^\pm$ 从 $T^\pm$ 向外指向。

注 3.3。注意， n 通常在 F 的两侧取值不同，而 τ 则不会，因为 g 沿 F 的切向-切向分量是单值的。

证明。我们计算

$$\dot\Theta_S = -\sum_{T\supset S}\dot\theta_{ST}$$

并使用引理 2.7 对每个角度求导 θ_{ST}。由此得到的 Θ_S 表达式涉及在连续的面 $\sigma(n,\tau)$ 对上计算的差值，这些面 F从 S发出。重新整理该和可得

$$\dot\Theta_S = \frac{1}{2}\sum_{F\supset S}[\![\sigma(n,\tau)]\!]_F. \tag{18}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\Theta_S\omega_S) &= \dot\Theta_S\omega_S + \Theta_S\dot\omega_S \\ &= \frac{1}{2}\sum_{F\supset S}[\![\sigma(n,\tau)]\!]_F\omega_S + \frac{1}{2}\Theta_S \operatorname{Tr}\left(\sigma|_S\right)\omega_S.\end{aligned}$$

□

由上述引理可得

$$\begin{aligned}2\frac{d}{dt}\int_S \Theta_S v\omega_S &= \int_S\sum_{F\supset S}[\![\sigma(n,\tau)]\!]_F v\omega_S + \int_S \Theta_S\operatorname{Tr}(\sigma|_S)v\omega_S \\ &= \int_S\sum_{F\supset S}[\![\sigma(n,\tau)]\!]_F v\omega_S + \int_S \langle\Theta_S g|_S, \sigma|_S\rangle\, v\omega_S.\end{aligned}$$

汇总我们的结果，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g(t)), v\rangle_{V',V} &= \sum_T\int_T(\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)v\omega_T \\ &- \mathring{\sum_F}\int_F [\![(\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n) + \operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot)) - H\sigma(n,n)]\!]_F\, v\omega_F + \mathring{\sum_S}\int_S\sum_{F\supset S}[\![\sigma(n,\tau)]\!]_F v\omega_S \\ &- \sum_T\int_T\langle G,\sigma\rangle v\omega_T - \mathring{\sum_F}\int_F\left\langle[\![\overline{\mathrm{II}}]\!]_F, \sigma|_F\right\rangle v\omega_F + \mathring{\sum_S}\int_S\langle\Theta_S g|_S,\sigma|_S\rangle\, v\omega_S.\end{aligned} \tag{19}$$

现在，我们将利用分部积分改写前三项，使其不含 σ的导数。

引理 3.4. 对任意 $v \in V$，有

$$\sum_T \int_T (\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma) v\omega_T - \mathring{\sum_F} \int_F [\![(\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n) + \operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot)) - H\sigma(n,n)]\!]_F \, v\omega_F$$
$$+ \mathring{\sum_S} \int_S \sum_{F\supset S} [\![\sigma(n,\tau)]\!]_F v\omega_S = \sum_T \int_T \langle \mathbb{S}\sigma, \nabla\nabla v\rangle\omega - \sum_F \int_F \mathbb{S}\sigma(n,n)[\![\nabla_n v]\!]\omega_F.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_T \int_T \langle \mathbb{S}\sigma, \nabla\nabla v\rangle\omega - \sum_F \int_F \mathbb{S}\sigma(n,n)[\![\nabla_n v]\!]\omega_F \qquad (20)\\
&= \sum_T \left(\int_T \langle \mathbb{S}\sigma, \nabla\nabla v\rangle\omega - \int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,n)\nabla_n v\, \omega_{\partial T}\right)\\
&= \sum_T \left(\int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,\nabla v)\omega_{\partial T} - \int_T (\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(\nabla v)\omega - \int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,n)\nabla_n v\, \omega_{\partial T}\right)\\
&= \sum_T \left(\int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,\nabla v)\omega_{\partial T} - \int_{\partial T} (\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n) v\omega_{\partial T} + \int_T (\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma) v\omega \right.\\
&\qquad \left. - \int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,n)\nabla_n v\, \omega_{\partial T}\right). \qquad (21)
\end{aligned}$$

注意，这里我们将 ∇v 视为向量场，而非1-形式。在每个 N-单纯形T上，我们可以将$\int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,\nabla v)\omega_{\partial T} - \int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,n)\nabla_n v\, \omega_{\partial T}$写成面 $F \subset \partial T$上的积分之和：

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,\nabla v)\omega_{\partial T} - \int_{\partial T} \mathbb{S}\sigma(n,n)\nabla_n v\, \omega_{\partial T} &= \sum_{F\subset\partial T} \int_F \mathbb{S}\sigma(n,\nabla v - n\nabla_n v)\omega_F\\
&= \sum_{F\subset\partial T} \int_F \mathbb{S}\sigma(n,\nabla_F v)\omega_F\\
&= \sum_{F\subset\partial T} \int_F \sigma(n,\nabla_F v)\omega_F.
\end{aligned}$$

在上面最后一行中，我们用到了 $\nabla_F v$ 与 n在 g下正交这一事实，因此

$$\mathbb{S}\sigma(n,\nabla_F v) = \sigma(n,\nabla_F v) - g(n,\nabla_F v)\operatorname{Tr}\sigma = \sigma(n,\nabla_F v).$$

F 上的每个积分都可以如下进行分部积分。我们有

$$\sigma(n,\nabla_F v) = \operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot)v) - \operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot))\, v,$$

因此，将恒等式（5）应用于 $\alpha = \sigma(n,\cdot)v$ 可得

$$\int_F \sigma(n,\nabla_F v)\omega_F = \int_{\partial F} \sigma(n,\nu_F) v\omega_{\partial F} - \int_F (\operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot)) - H\sigma(n,n))\, v\omega_F.$$

现在将这个结果代入（21），得到

$$\begin{aligned}
&\sum_T \int_T \langle \mathbb{S}\sigma, \nabla\nabla v\rangle\omega - \sum_F \int_F \mathbb{S}\sigma(n,n)[\![\nabla_n v]\!]\omega_F\\
&= \sum_T \left(\sum_{F\subset\partial T} \int_{\partial F} \sigma(n,\nu_F) v\omega_{\partial F} - \sum_{F\subset\partial T} \int_F (\operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot)) - H\sigma(n,n))\, v\omega_F \right.\\
&\qquad \left. - \int_{\partial T} (\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n) v\omega_{\partial T} + \int_T (\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma) v\omega \right).
\end{aligned}$$

第一项可以利用引理 3.2中的记号，重新表示为对内部（$N-2$）单形 S 求和；接下来的两项可以用跨越内部面 F的跳跃重新表示。（对（$N-2$）单形 $S \subset \partial\Omega$ 和（$N-1$）单形 $F \subset \partial\Omega$ 的积分为零，因为$v=0$ 在 $\partial\Omega$ 上。）结果为

$$\sum_T \int_T \langle \mathbb{S}\sigma, \nabla\nabla v\rangle \omega - \sum_F \int_F \mathbb{S}\sigma(n,n)[\![\nabla_n v]\!]\omega_F = \mathring{\sum_S} \int_S \sum_{F\supset S} [\![\sigma(n,\tau)]\!]_F v\omega_S$$
$$- \mathring{\sum_F} \int_F \left[\!\left[\operatorname{div}_F(\sigma(n,\cdot)) - H\sigma(n,n) + (\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)(n)\right]\!\right] v\omega_F + \sum_T \int_T (\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma) v\omega.$$

□

注 3.5。 上述许多计算与 [4, 命题 42], 中的计算类似，只是这里的维数是 N 而非 2。

现在可以陈述本小节的主要结果。

定理 3.6。设 $g(t)$ 是一族时间导数为 $\frac{\partial}{\partial t}g =: \sigma$ 的 Regge 度量。对于每个$v \in V$，都有

$$\frac{d}{dt}\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g(t)), v\rangle_{V',V} = b_h(g;\sigma,v) - a_h(g;\sigma,v), \tag{22}$$

其中

$$b_h(g;\sigma,v) = \sum_T \int_T \langle \mathbb{S}\sigma, \nabla\nabla v\rangle\omega - \sum_F \int_F \mathbb{S}\sigma(n,n)[\![\nabla_n v]\!]_F \omega_F,$$
$$a_h(g;\sigma,v) = \sum_T \int_T \langle G,\sigma\rangle v\omega_T + \mathring{\sum_F} \int_F \left\langle [\![\overline{\mathrm{II}}]\!]_F, \sigma|_F\right\rangle v\omega_F - \mathring{\sum_S} \int_S \langle \Theta_S g|_S, \sigma|_S\rangle v\omega_S.$$

证明。 将（19）与引理 3.4结合即可。 □

3.2 分布意义下的稠密化爱因斯坦张量

现在我们暂停一下，对定理 $a_h(g;\cdot,\cdot)$ 和 $b_h(g;\cdot,\cdot)$ 中出现的双线性形式作几点说明。3.6这些说明不会在我们的分析中发挥作用，但有助于阐明定理 3.6的内容。读者若愿意，可以直接跳到第 4 节。

数值分析学家可能会认出定理 $b_h(g;\cdot,\cdot)$ 中出现的双线性形式。3.6正如我们在第 1 节提到的，除出现 $\mathbb{S}$ 外，它是 Hellan-Herrmann-Johnson 有限元方法中出现的一种双线性形式的非欧几里得 N-维推广–3, 5–7, 9, 22]。它可以看作 div div $\mathbb{S}\sigma$ 对 v 的积分，其中 div div 按分布意义理解。

通过比较定理 $a_h(g;\cdot,\cdot)$ 这一双线性形式，可以理解其含义：3.6 它与命题 2.1 的比较表明，将其与连续函数 v 对积分后，命题指出，对于一族光滑黎曼度量 $g(t)$，其标量曲率 R,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega Rv\omega = \int_\Omega (\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbb{S}\sigma)v\omega - \int_\Omega \langle G,\sigma\rangle v\omega, \tag{23}$$

其中 $\sigma = \frac{\partial}{\partial t}g$和 $G =$Ric $-\frac{1}{2}Rg$是与 g相关联的爱因斯坦张量。比较（23）和（22）可知，对于 Regge 度量 g，双线性形式 $a_h(g;\sigma,v)$ 应视为 $\int_\Omega \langle G,\sigma\rangle v\omega$ 的分布意义下的对应物。

这促使我们给出以下定义。固定一个数 $s > 1$，并令 Σ 表示由满足以下性质的平方可积对称（0, 2）张量场 σ 构成的空间：σ 在每个 $T \in \mathcal{T}^N$ 上的限制属于 $H^s(T)$，且 σ 沿任意面 $F \in \mathring{\mathcal{T}}^{N-1}$ 的切向-切向分量均为单值。注意，这些条件也意味着 σ 沿任意 $S \in \mathring{\mathcal{T}}^{N-2}$ 的切向-切向分量均定义良好且为单值。

定义 3.7. 设 g 是一个 Regge 度量。与 g 相关联的分布型密度化爱因斯坦张量是线性泛函 $(G\omega)_{\mathrm{dist}}(g) \in \Sigma'$，定义如下：

$$\langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(g), \sigma \rangle_{\Sigma',\Sigma} = \sum_T \int_T \langle G, \sigma \rangle \omega_T + \mathring{\sum_F} \int_F \langle [\![\mathrm{II}]\!]_F, \sigma|_F \rangle \, \omega_F - \mathring{\sum_S} \int_S \langle \Theta_S g|_S, \sigma|_S \rangle \, \omega_S, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

注 3.8. 在维数 $N = 2$下，对于任意 Regge 度量 g，我们有 $(G\omega)_{\mathrm{dist}}(g) = 0$，因为$G$ 在每个三角形内部都为零，II 在每条边上都为零，而 σ 在每个顶点上的限制为零。

注 3.9. 定义 3.7中出现迹反转第二基本形式 II 是很自然的。在对广义相对论中奇异源的研究里也会出现同一量，II 的跳跃编码了著名的 以色列匹配条件，该条件适用于应力-能量集中的超曲面 [20]。

注 3.10. 若我们定义映射 $(\mathrm{div}\,\mathrm{div}\,\mathbb{S})_{\mathrm{dist}} : \Sigma \to V'$ 如下：

$$\langle (\mathrm{div}\,\mathrm{div}\,\mathbb{S})_{\mathrm{dist}} \sigma, v \rangle_{V',V} = b_h(g; \sigma, v), \quad \forall v \in V,$$

那么，根据构造，我们有

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g + t\sigma), v \rangle_{V',V} = \langle (\mathrm{div}\,\mathrm{div}\,\mathbb{S})_{\mathrm{dist}} \sigma, v \rangle_{V',V} - \langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(g), v\sigma \rangle_{\Sigma',\Sigma}$$

对于每个分片光滑的 $\sigma \in \Sigma$ 以及每个在 Ω 中具有紧支撑的光滑函数 v，上述结论均成立。特别地，假设 Ω 没有边界（例如，假设 Ω 是一个 N 维立方体，并将其相对的面识别起来）。那么 $b_h(g; \sigma, 1) = 0$并且

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g + t\sigma), 1 \rangle_{V',V} = -\langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(g), \sigma \rangle_{\Sigma',\Sigma}$$

对每个分片光滑的 $\sigma \in \Sigma$ 都成立。这意味着，如果分布型密度化爱因斯坦张量为零：$(G\omega)_{\mathrm{dist}}(g) = 0$，则 Regge 度量 g 是 $\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g)1 \rangle_{\Sigma',\Sigma}$ 的驻点。

泛函 $\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g)1 \rangle_{\Sigma',\Sigma}$ 是广义相对论中爱因斯坦-希尔伯特泛函 $\int_\Omega R\omega$ 的对应物，其驻点是（真空）爱因斯坦场方程的解$G = 0$。当 g 为分片常数时，它便化为 Regge 微积分中的 Regge 作用量。也就是说，

$$\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g), 1 \rangle_{\Sigma',\Sigma} = 2 \mathring{\sum_S} \Theta_S V_S, \quad \text{if } g \text{ is piecewise constant},$$

其中，$V_S = \int_S \omega_S$ 表示 S的体积。如果 g 随 t 变化，并且对所有 t均保持分片常数，那么

$$\frac{d}{dt} 2 \mathring{\sum_S} \Theta_S V_S = 2 \mathring{\sum_S} \dot{\Theta}_S V_S + 2 \mathring{\sum_S} \Theta_S \dot{V}_S,$$

并且可以验证（在无边界的区域上）

$$2\mathring{\sum_S}\dot{\Theta}_S V_S = b_h(g;\sigma,1) = 0$$

and

$$2\mathring{\sum_S}\Theta_S \dot{V}_S = -a_h(g;\sigma,1) = -\langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(g), \sigma\rangle_{\Sigma',\Sigma},$$

其中 $\sigma = \frac{\partial}{\partial t} g$。事实是 $\mathring{\sum_S}\dot{\Theta}_S V_S = 0$ 对于任意分片常数 Regge 度量 g （在无边界的区域上），这一点已在 Regge的经典论文 [23] 中用截然不同的方法证明。

注 3.11. 若 g 是一个 Regge 度量，且 $\sigma = gv$ 对某个在 Ω 中具有紧支撑的光滑函数 v 成立，则：

1. 在每个 N-单纯形 T上，我们有

$$\langle G, \sigma\rangle = \langle G, g\rangle v = (\operatorname{Tr} G)v = -\left(\frac{N-2}{2}\right) Rv.$$

2. 在每个内部（$N-1$）-单纯形 F的两侧，我们有：

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\mathrm{II}}, \sigma|_F \right\rangle &= \left\langle \mathrm{II}, g|_F \right\rangle v - \left\langle g|_F, g|_F \right\rangle Hv \\ &= Hv - (N-1)Hv \\ &= -(N-2)Hv.\end{aligned}$$

3. 在每个内部（$N-2$）-单纯形 S上，我们有

$$\langle \Theta_S g|_S, \sigma|_S\rangle = \Theta_S v \operatorname{Tr}(g|_S) = (N-2)\Theta_S v.$$

这表明

$$\begin{aligned}\langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(g), gv\rangle_{\Sigma',\Sigma} &= -\left(\frac{N-2}{2}\right)\left(\sum_T \int_T R_T v\omega_T + 2\mathring{\sum_F}\int_F [\![H]\!]_F v\omega_F + 2\mathring{\sum_S}\int_S \Theta_S v\omega_S\right) \\ &= -\left(\frac{N-2}{2}\right)\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g), v\rangle_{V',V}\end{aligned}$$

对于 Ω 中每个具有紧支撑的光滑函数 v。可以将其理解为：$(G\omega)_{\mathrm{dist}}(g)$ 的迹为 $-\left(\frac{N-2}{2}\right)(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g)$。

注 3.12. 若 g 是分片常数 Regge 度量，且 $\sigma \in \Sigma$ 是分片常数，则

$$\langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(g), \sigma\rangle_{\Sigma',\Sigma} = -\mathring{\sum_S}\int_S \Theta_S \operatorname{Tr}(\sigma|_S)\omega_S.$$

如果我们在欧几里得度量 $g = \delta$附近进行线性化，那么由（18）可知 t

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(\delta + t\rho), \sigma\rangle_{\Sigma',\Sigma} &= -\mathring{\sum_S}\int_S \dot{\Theta}_S \operatorname{Tr}(\sigma|_S)\omega_S \\ &= -\frac{1}{2}\mathring{\sum_S}\int_S \sum_{F\supset S} [\![\rho(n,\tau)]\!]_F \operatorname{Tr}(\sigma|_S)\omega_S\end{aligned}$$

对于每个分片常数的 $\rho, \sigma \in \Sigma$。（注意，右端没有额外项，因为 $\Theta_S = 0$ 在 $t = 0$。）因此，如果 Ω 没有边界，那么

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(\delta + t\sigma), 1\rangle_{V',V} &= -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle (G\omega)_{\mathrm{dist}}(\delta + t\sigma), \sigma\rangle_{\Sigma',\Sigma} \\ &= \frac{1}{2}\mathring{\sum_S} \int_S \sum_{F \supset S} [\![\sigma(n,\tau)]\!]_F \operatorname{Tr}(\sigma|_S)\omega_S\end{aligned}$$

对于每个分片常数 $\sigma \in \Sigma$。这等价于 Christiansen 的公式 [12, 定理 2 和方程（25-26）]，该公式给出了维数为 $N = 3$ 时欧几里得度量附近 Regge 作用量的二阶变分。（其中，Regge 作用量取为 $\frac{1}{2}\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g)\, 1\rangle_{V',\, V}$ 而不是 $\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g) 1\rangle_{V',\, V}$。）

4 收敛

本节中，我们将证明分布意义下的密度化标量曲率在范数

$$\|u\|_{H^{-2}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^2(\Omega), \\ v \neq 0}} \frac{\langle u, v\rangle_{H^{-2}(\Omega), H_0^2(\Omega)}}{\|v\|_{H^2(\Omega)}}. \tag{24}$$

我们的收敛结果适用于一族 $\{g_h\}_{h>0}$ Regge 度量，它们定义在 Ω 的一族形状正则三角剖分 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 上，并由 $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h^N} h_T$ 参数化，其中 $h_T = \operatorname{diam}(T)$。形状正则性意味着存在一个与 h 无关的常数 C_0，使得

$$\max_{T \in \mathcal{T}_h^N} \frac{h_T}{\rho_T} \leq C_0$$

对所有 $h > 0$，其中 ρ_T 表示 T 的内切半径。

定理 4.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个配备了光滑黎曼度量 g 的多面体区域。设 $\{g_h\}_{h>0}$ 是定义在 Ω 的一个形状正则三角剖分族 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 上的 Regge 度量族。假设 $\lim_{h\to 0} \|g_h - g\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ 且 $C_1 := \sup_{h>0} \max_{T \in \mathcal{T}_h^N} \|g_h\|_{W^{1,\infty}(T)} < \infty$。以下结论成立：

(i) 若 $N = 2$，则存在正常数 C 和 h_0，使得

$$\begin{aligned}\|(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C &\left(1 + \max_T h_T^{-1} \|g_h - g\|_{L^\infty(T)} + \max_T |g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}\right) \\ &\times \left(\|g_h - g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_T h_T^2 |g_h - g|_{H^1(T)}^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{25}$$

对所有 $h \leq h_0$ 均成立。常数 C 和 h_0 取决于 $\|g\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$、$\|g^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}$、$C_0$ 和 C_1。

(ii) 若 $N \geq 3$，则还需假设 $C_2 := \sup_{h>0} \max_{T \in \mathcal{T}_h^N} |g_h|_{W^{2,\infty}(T)} < \infty$。那么存在正常数 C 和 h_0，使得

$$\|(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C \left(1 + \max_T h_T^{-2} \|g_h - g\|_{L^\infty(T)} + \max_T h_T^{-1} |g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}\right) \times \left(\|g_h - g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_T h_T^2 |g_h - g|_{H^1(T)}^2 + \sum_T h_T^4 |g_h - g|_{H^2(T)}^2\right)^{1/2} \tag{26}$$

对所有 $h \leq h_0$ 均成立。常数 C和 h_0取决于 N、 $\|g\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$、$\|g^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}$、 C_0、 C_1 和C_2。

上述定理立即给出 g 的分片多项式插值函数的最优阶误差估计，其中多项式次数为 $r \geq 0$，前提是 $N = 2$ 或 $r \geq 1$成立。为了精确表述这一结论，我们引入一个定义。回顾一下，次数为 $r \geq 0$ 的 Regge有限元空间由 Ω 上的对称（0, 2）阶张量场组成，这些张量场是次数至多为 r 的分片多项式，并且在内部的 $(N-1)$-单形上具有单值的切向-切向分量。

定义 4.2. 设 $\mathcal{I}_h$ 是一个映射，它将 Ω 上光滑的对称（0, 2）阶张量场映射到次数为 $r \geq 0$的 Regge有限元空间。若存在一个数 $m \in \{0, 1, \ldots, N\}$ 和一个常数 $C_3 = C_3(N, r, h_T/\rho_T, t, s)$，使得对每个 $p \in [1, \infty]$、每个 $s \in (m/p, r+1]$、每个 $t \in [0, s]$以及每个具有 $W^{s,p}(\Omega)$ 正则性的对称（0, 2）阶张量场 g， $\mathcal{I}_h g$ 均存在（通过对 $\mathcal{I}_h$作连续延拓），且满足

$$|\mathcal{I}_h g - g|_{W^{t,p}(T)} \leq C_3 h_T^{s-t} |g|_{W^{s,p}(T)} \tag{27}$$

对于每个 $T \in \mathcal{T}_h^N$。我们称数值 m 为 $\mathcal{I}_h$的余维指标。若 Regge 度量 g_h是黎曼度量 g 在一个次数为 r 且余维指标为 m的最优阶插值算子作用下的像，则称其为 g 的次数为 r 且余维指标为 m 的最优阶插值函数。

最优阶插值算子的一个例子是映射到在第r 章中引入的次数为 [21, 第 2] 章的 Regge有限元空间的典范插值算子。它的自由度涉及余维不超过 $N-1$的单形上的积分，因此，只要张量场 g 在余维不超过 $N-1$的单形上有迹，即 g 具有$W^{s,p}(\Omega)$正则性， g 上的作用便有定义。相应地，其余维指标为 $m = N-1$。

推论 4.3。 设 Ω， g，以及 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 与定理 *4.1*中的条件相同。设 $\{g_h\}_{h>0}$ 是 g 的一族最优阶插值函数，其次数为 $r \geq 0$，余维指标为 m。若 $N \geq 3$，则假设 $r \geq 1$。那么存在正的常数 C 和 h_0，使得

$$\|(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C \left(\sum_T h_T^{p(r+1)} |g|_{W^{r+1,p}(T)}^p\right)^{1/p}$$

对所有 $h \leq h_0$ 以及所有满足 $p > \frac{m}{r+1}$的 $p \in [2, \infty]$。（我们将右端解释为$C \max_T h_T^{r+1} |g|_{W^{r+1,\infty}(T)}$，若 $p = \infty$。）常数 C和 h_0取决于 *(i)*（若 $N = 2$）和 *(ii)*（若 $N \geq 3$）中列出的相同量，以及 Ω、 r，并且（若 $N \geq 3$）还取决于 $|g|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$。

注 4.4。 如果允许定义 4.2 中稍微更一般的插值函数，上述推论仍然成立。例如，若将（27）替换为

$$|\mathcal{I}_h g - g|_{W^{t,p}(T)} \leq C_3 h_T^{s-t} \sum_{T':T'\cap T\neq\emptyset} |g|_{W^{s,p}(T')}, \tag{28}$$

其中求和遍及所有与 T 共享一个子单形的 $T' \in \mathcal{T}_h^N$。

在下文中，我们沿用字母 C 表示一个正的常数，该常数可能随每次出现而变化，并且可能依赖于 N、 $\|g\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$、$\|g^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}$、 C_0和 C_1。从引理 4.8开始，我们还允许 C 依赖于 C_2。

证明定理 4.1 的策略是考虑一个演化度量

$$\widetilde{g}(t) = (1-t)g + tg_h$$

其时间导数为

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g}(t) = g_h - g.$$

注意， $\widetilde{g}(t)$ 是分片光滑且切向-切向连续的，因此对所有 $t \in [0,1]$，它都是一个 Regge 度量；并且在 $t = 0$ 处，它恰好是一个（整体）光滑的黎曼度量。由于 $\widetilde{g}(0) = g$且 $\widetilde{g}(1) = g_h$，定理 3.6 表明

$$\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g), v\rangle_{V',V} = \int_0^1 b_h(\widetilde{g}(t);\sigma,v) - a_h(\widetilde{g}(t);\sigma,v)\,dt, \quad \forall v \in V.$$

因此，我们可以通过估计双线性型 $b_h(\widetilde{g}(t);\cdot,\cdot)$ 和 $a_h(\widetilde{g}(t);\cdot,\cdot)$，来估计 $(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)$。

为此，我们引入一些记号。给定任意 Regge 度量 g，我们分别用 ∇_g 和 ∇表示相对于 g 和 δ 的协变导数。类似地，当其他算子（如 Tr 、 $\mathbb{S}$ 和 div ）是相对于 g 取值时，我们在其下标处添加g ；当它们是相对于 δ取值时，则省略下标。在任意 N-单纯形 T的边界上，我们分别用 n_g 和 n 表示相对于 $g|_T$ 和 δ的外向单位法向量。这两个向量在坐标下的关系为

$$n_g = \frac{1}{\sqrt{n^T g^{-1} n}} g^{-1} n, \tag{29}$$

这里我们将 g 视为矩阵，将 n 和 n_g 视为列向量。我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ 表示两个张量场的g-内积。若 D 是 Ω 的一个子流形，且其上的诱导度量 $g|_D$定义良好，并且 ρ 是定义在 D上的张量场，则记

$$\|\rho\|_{L^p(D,g)} = \begin{cases} \left(\int_D |\rho|_g^p\, \omega_D(g)\right)^{1/p}, & \text{if } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_D |\rho|_g, & \text{if } p = \infty, \end{cases}$$

其中 $\omega_D(g)$ 是 D 上的诱导体积形式，且 $|\rho|_g = \langle\rho,\rho\rangle_g^{1/2}$。我们将$\|\cdot\|_{L^p(D)} = \|\cdot\|_{L^p(D,\delta)}$ 和 $|\cdot| = |\cdot|_\delta$简记为。

我们引入两种依赖于度量、依赖于网格的范数。对于 $v \in V$，定义为

$$\|v\|_{2,h,g}^2 = \sum_T \|\nabla_g\nabla_g v\|_{L^2(T,g)}^2 + \sum_F h_F^{-1} \|[\![dv(n_g)]\!]\|_{L^2(F,g)}^2.$$

如果 σ 是一个对称的 (0,2) 张量场，且具有如下性质： $\sigma(n_g, n_g)$ 在每个 $F \in \mathcal{T}_h^{N-1}$ 上都有定义且取值唯一，则定义为

$$\|\sigma\|_{0,h,g}^2 = \sum_T \|\sigma\|_{L^2(T,g)}^2 + \sum_F h_F \|\sigma(n_g, n_g)\|_{L^2(F,g)}^2,$$

其中 h_F是 F的欧几里得直径。注意，任何沿面具有单值切向-切向分量的对称 (0, 2) 阶张量场在 $\mathbb{S}_g$ 下的像，都会自动具有沿面单值的法向-法向分量，因为

$$\mathbb{S}_g \sigma(n_g, n_g) = \sigma(n_g, n_g) - g(n_g, n_g) \operatorname{Tr}_g \sigma = -\operatorname{Tr}_g (\sigma|_F).$$

现在我们回到定理 4.1 的设定及其后的讨论： g 是一个光滑黎曼度量， g_h 是一个 Regge 度量， $\widetilde{g}(t) = (1-t)g + tg_h$，且 $\sigma = g_h - g$。在下文中，我们始终假设 $\lim_{h\to 0} \|g_h - g\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ 且 $\sup_{h>0} \max_{T\in\mathcal{T}_h^N} \|g_h\|_{W^{1,\infty}(T)} < \infty$。这些假设有一些基本推论，我们在此记录以供参考（推导见 [16]）。对于每个充分小的 h 、每个 $t \in [0,1]$，以及每个欧几里得长度为单位长度的向量 w ，

$$\|\widetilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\widetilde{g}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C, \tag{30}$$

$$\max_T |\widetilde{g}|_{W^{1,\infty}(T)} \le C, \tag{31}$$

$$C^{-1} \le \inf_\Omega (w^T \widetilde{g} w) \le \sup_\Omega (w^T \widetilde{g} w) \le C, \tag{32}$$

在最后一行中，我们将 $\widetilde{g}$ 视为矩阵，将 w 视为列向量。注意，最后一行还意味着 $w^T \widetilde{g}^{-1} w$ 存在正的上下界：

$$C^{-1} \le \inf_\Omega (w^T \widetilde{g}^{-1} w) \le \sup_\Omega (w^T \widetilde{g}^{-1} w) \le C. \tag{33}$$

此外，不等式 $\|\widetilde{g}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C$ 和 $\|\widetilde{g}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \le C$ 意味着

$$C^{-1} \|\rho\|_{L^p(D,\widetilde{g}(t_2))} \le \|\rho\|_{L^p(D,\widetilde{g}(t_1))} \le C \|\rho\|_{L^p(D,\widetilde{g}(t_2))} \tag{34}$$

and

$$C^{-1} \|\rho\|_{L^p(D)} \le \|\rho\|_{L^p(D,\widetilde{g}(t_1))} \le C \|\rho\|_{L^p(D)} \tag{35}$$

对于每个 t_1， $t_2 \in [0,1]$、每个容许子流形 D、每个 $p \in [1,\infty]$、每个张量场 ρ（其 $L^p(D)$-范数有限），以及每个 h 充分小。我们选取 $h_0 > 0$ 使得（30-35）对所有$h \le h_0$均成立，并在整个分析过程中默认使用这些不等式。

我们将证明范数 $\|\cdot\|_{2,h,\widetilde{g}}$ 与 $\|\cdot\|_{2,h}$ 近似等价：

g.

命题 4.5. 对于每个 $v \in V$、每个 $h \le h_0$ 以及每个 $t \in [0,1]$,

$$\|v\|_{2,h,\widetilde{g}}^2 \le C \Bigg[\|v\|_{2,h,g}^2 + \left(\max_T h_T^{-2} \|g_h - g\|_{L^\infty(T)}^2 + \max_T |g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}^2 \right) \times \sum_T \left(\|dv\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 |dv|_{H^1(T)}^2 \right) \Bigg].$$

命题 4.5 的证明依赖于以下引理。

引理 4.6. 设 g_1 和 g_2 是两个对称正定矩阵，且 n 是一个单位向量。设

$$n_{g_i} = \frac{1}{\sqrt{n^T g_i^{-1} n}} g_i^{-1} n, \quad i = 1, 2.$$

于是存在一个常数 c，它依赖于 $|g_1|$、$|g_2|$、$|g_1^{-1}|$、$|g_2^{-1}|$，使得

$$|n_{g_1} - n_{g_2}| \le c|g_1 - g_2|.$$

证明。利用恒等式

$$\frac{1}{\sqrt{n^T g_1^{-1} n}} - \frac{1}{\sqrt{n^T g_2^{-1} n}} = \frac{n^T (g_2^{-1} - g_1^{-1}) n}{n^T g_1^{-1} n \sqrt{n^T g_2^{-1} n} + n^T g_2^{-1} n \sqrt{n^T g_1^{-1} n}}, \tag{36}$$

我们可以写成

$$n_{g_1} - n_{g_2} = \frac{n^T (g_2^{-1} - g_1^{-1}) n}{n^T g_1^{-1} n \sqrt{n^T g_2^{-1} n} + n^T g_2^{-1} n \sqrt{n^T g_1^{-1} n}} g_1^{-1} n + \frac{1}{\sqrt{n^T g_2^{-1} n}} (g_1^{-1} - g_2^{-1}) n.$$

由于 $g_1^{-1} - g_2^{-1} = g_1^{-1}(g_2 - g_1)g_2^{-1}$，因此很容易得到该界。 □

注意到，根据（29），引理4.6 可知

$$\|n_{\widetilde{g}} - n_g\|_{L^\infty(F)} \le C\|\widetilde{g} - g\|_{L^\infty(F)} \tag{37}$$

在任意一个面 F 的两侧。

现在我们可以开始证明命题 4.5 了。考虑定义 $\|v\|_{2,h,\widetilde{g}}^2$ 中出现的项 $\sum_F h_F^{-1} \left\|[\![dv(n_{\widetilde{g}})]\!]\right\|_{L^2(F,\widetilde{g})}^2$。注意到

$$dv(n_{\widetilde{g}}) = dv(n_g) + dv(n_{\widetilde{g}} - n_g),$$

并且我们可以使用界（37）进行估计

$$\begin{aligned}
\|dv(n_{\widetilde{g}} - n_g)\|_{L^2(F,\widetilde{g})} &\le C\|dv(n_{\widetilde{g}} - n_g)\|_{L^2(F)} \\
&\le C\|dv\|_{L^2(F)}\|n_{\widetilde{g}} - n_g\|_{L^\infty(F)} \\
&\le C\|dv\|_{L^2(F)}\|\widetilde{g} - g\|_{L^\infty(F)} \\
&\le C\|dv\|_{L^2(F)}\|g_h - g\|_{L^\infty(F)}
\end{aligned}$$

在 F 的任一侧。利用迹不等式

$$\|dv\|_{L^2(F)}^2 \le C\left(h_T^{-1}\|dv\|_{L^2(T)}^2 + h_T|dv|_{H^1(T)}^2\right), \quad F \subset T \in \mathcal{T}_h^N, \tag{38}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\sum_F h_F^{-1}\|[\![dv(n_{\widetilde{g}})]\!]\|_{L^2(F,\widetilde{g})}^2 \\
&\quad \le C\left(\sum_F h_F^{-1}\|[\![dv(n_g)]\!]\|_{L^2(F,g)}^2 + \sum_T h_T^{-1}\left(h_T^{-1}\|dv\|_{L^2(T)}^2 + h_T|dv|_{H^1(T)}^2\right)\|g_h - g\|_{L^\infty(T)}^2\right) \\
&\quad = C\left(\sum_F h_F^{-1}\|[\![dv(n_g)]\!]\|_{L^2(F,g)}^2 + \sum_T \left(h_T^{-2}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)}^2\|dv\|_{L^2(T)}^2 + \|g_h - g\|_{L^\infty(T)}^2|dv|_{H^1(T)}^2\right)\right),
\end{aligned}$$

其中我们用到了（34）、（38），以及界 $h_T \le Ch_F$，它由 $\mathcal{T}_h$ 的形状正则性推出。

接下来，考虑出现在 $\|v\|_{2,\,h,\,\widetilde{g}}^2$ 定义中的项 $\sum_T \|\nabla_{\widetilde{g}}\nabla_{\widetilde{g}} v\|_{L^2(T,\,\widetilde{g})}^2$。注意到

$$\left(\nabla_{\widetilde{g}}\nabla_{\widetilde{g}} v\right)_{ij} = \left(\nabla_g \nabla_g v\right)_{ij} + (\Gamma_{ij}^k - \widetilde{\Gamma}_{ij}^k)\frac{\partial v}{\partial x^k},$$

其中，Γ_{ij}^k 和 $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ 分别是与 g 和 $\widetilde{g}$ 相关联的第二类克里斯托费尔符号。我们有

$$\|\Gamma_{ij}^k - \widetilde{\Gamma}_{ij}^k\|_{L^\infty(T)} \le C\|\widetilde{g} - g\|_{W^{1,\infty}(T)} \le C\|g_h - g\|_{W^{1,\infty}(T)},$$

so

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\widetilde{g}}\nabla_{\widetilde{g}} v\|_{L^2(T,\widetilde{g})} &\le C\|\nabla_{\widetilde{g}}\nabla_{\widetilde{g}} v\|_{L^2(T)} \\
&\le C\left(\|\nabla_g \nabla_g v\|_{L^2(T)} + \|g_h - g\|_{W^{1,\infty}(T)}\|dv\|_{L^2(T)}\right) \\
&\le C\left(\|\nabla_g \nabla_g v\|_{L^2(T,g)} + \|g_h - g\|_{W^{1,\infty}(T)}\|dv\|_{L^2(T)}\right).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2,h,\widetilde{g}}^2 \le C\Bigg[\|v\|_{2,h,g}^2 + \left(\max_T h_T^{-2}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)}^2 + \max_T |g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}^2\right) \\
\times \sum_T \left(\|dv\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 |dv|_{H^1(T)}^2\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

这就完成了命题 4.5 的证明。

下一步，我们将估计双线性形式 $b_h(\widetilde{g};\cdot,\cdot)$。

命题 4.7。对于任意 $h \le h_0$、任意 $t \in [0,1]$ 以及任意 $v \in H_0^2(\Omega)$，都有（其中 $\sigma = g_h - g$）

$$\begin{aligned}
|b_h(\widetilde{g};\sigma,v)| \le C&\left(\|g_h - g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_T h_T^2 |g_h - g|_{H^1(T)}^2\right)^{1/2} \\
&\times \left(1 + \max_T h_T^{-1}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)} + \max_T |g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}\right)\|v\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

证明。根据 $\|\cdot\|_{0,h,\widetilde{g}}$ 和 $\|\cdot\|_{2,h,\widetilde{g}}$ 的定义，我们有

$$|b_h(\widetilde{g};\sigma,v)| \le \|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma\|_{0,h,\widetilde{g}}\|v\|_{2,h,\widetilde{g}}. \tag{39}$$

回想一下

$$\|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma\|_{0,h,\widetilde{g}}^2 = \sum_T \|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma\|_{L^2(T,\widetilde{g})}^2 + \sum_F h_F\|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma(n_{\widetilde{g}}, n_{\widetilde{g}})\|_{L^2(F,\widetilde{g})}^2,$$

我们计算

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma, \mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma\rangle_{\widetilde{g}} &= \left\langle \sigma - \widetilde{g}\langle\widetilde{g},\sigma\rangle_{\widetilde{g}},\ \sigma - \widetilde{g}\langle\widetilde{g},\sigma\rangle_{\widetilde{g}}\right\rangle_{\widetilde{g}} \\
&= \langle\sigma,\sigma\rangle_{\widetilde{g}} - 2\langle\widetilde{g},\sigma\rangle_{\widetilde{g}}^2 + \langle\widetilde{g},\widetilde{g}\rangle_{\widetilde{g}}\langle\widetilde{g},\sigma\rangle_{\widetilde{g}}^2 \\
&= \langle\sigma,\sigma\rangle_{\widetilde{g}} + (N-2)\langle\widetilde{g},\sigma\rangle_{\widetilde{g}}^2,
\end{aligned}$$

由此得到界

$$\|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma\|_{L^2(T,\widetilde{g})} \le C\|\sigma\|_{L^2(T,\widetilde{g})} \le C\|\sigma\|_{L^2(T)}.$$

此外，由迹不等式，

$$\begin{aligned}\|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma(n_{\widetilde{g}}, n_{\widetilde{g}})\|^2_{L^2(\partial T,\widetilde{g})} &\le C\|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma\|^2_{L^2(\partial T,\widetilde{g})}\\ &\le C\|\sigma\|^2_{L^2(\partial T)}\\ &\le C\left(h_T^{-1}\|\sigma\|^2_{L^2(T)} + h_T|\sigma|^2_{H^1(T)}\right).\end{aligned}$$

（这里我们测量的是完整张量 $\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma$ 的 $L^2(\partial T,\widetilde{g})$-范数，而不是它在 ∂T 的切丛上的限制。）因此，

$$\begin{aligned}\|\mathbb{S}_{\widetilde{g}}\sigma\|^2_{0,h,\widetilde{g}} &\le C\left(\|\sigma\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_T h_T^2|\sigma|^2_{H^1(T)}\right)\\ &= C\left(\|g_h - g\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_T h_T^2|g_h - g|^2_{H^1(T)}\right).\end{aligned} \tag{40}$$

现在考虑$\|v\|_{2,\ h,\ \widetilde{g}}$ 在（39）中的项。命题 4.5 意味着

$$\|v\|_{2,h,\widetilde{g}} \le C\left(\|v\|_{2,h,g} + \left(\max_T h_T^{-1}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)} + \max_T |g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}\right)\|v\|_{H^2(\Omega)}\right)$$

因为 $v \in H^2_0(\Omega)$。此外，由于 g 光滑且 $v \in H^2_0(\Omega)$，我们在每个内部面 F 上都有 $[\![dv(n_g)]\!] = 0$，并且在 Ω 的每个面 $F \subset \partial$ 上都有 $[\![dv(n_g)]\!] = dv(n_g) = 0$。因此，$\|v\|^2_{2,\ h,\ g} = \sum_T \|\nabla_g\nabla_g v\|^2_{L^2\ (T,\ g)} = \|\nabla_g\nabla_g v\|^2_{L^2(\Omega\ g)}$。由于

$$(\nabla_g\nabla_g v)_{ij} = (\nabla\nabla v)_{ij} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial v}{\partial x^k},$$

我们看到

$$\|v\|_{2,h,g} = \|\nabla_g\nabla_g v\|_{L^2(\Omega)} \le C(|v|_{H^2(\Omega)} + |v|_{H^1(\Omega)}) \le C\|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

因此，

$$\|v\|_{2,h,\widetilde{g}} \le C\left(1 + \max_T h_T^{-1}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)} + \max_T |g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}\right)\|v\|_{H^2(\Omega)}. \tag{41}$$

结合（39）、（40）和（41）即可完成证明。 □

至此，我们已经完成了定理 4.1 的第 (i) 部分的证明。事实上，在 $N = 2$ 维中，a_h 消失，因此我们可以写成

$$\left|\langle (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g), v\rangle_{V',V}\right| \le \int_0^1 |b_h(\widetilde{g}(t); \sigma, v)|\, dt$$

并应用命题 4.7 推出（25）。

为证明定理 4 1, $N \ge 3$ $h>0$ $T\in\mathcal{T}_h^N |g_h|_{W^2\infty\ T} <$ (ii)，我们假设且 sup max, $^{\infty}$ ()，并按如下步骤进行。回顾一下

$$a_h(\widetilde{g}; \sigma, v) = \sum_T \int_T \langle G(\widetilde{g}), \sigma\rangle_{\widetilde{g}} v\omega_T(\widetilde{g}) + \sum_F{}^{\circ} \int_F \langle [\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]_F, \sigma|_F\rangle_{\widetilde{g}} v\omega_F(\widetilde{g}) - \sum_S{}^{\circ} \int_S \langle \Theta_S(\widetilde{g})\widetilde{g}|_S, \sigma|_S\rangle_{\widetilde{g}} v\omega_S(\widetilde{g}), \tag{42}$$

其中，我们已在记号中明确写出所有对度量的依赖。我们将对上面的三个项分别进行估计，先从第一项开始。在下文中，我们仍用$\sigma = g_h - g$表示，并令 v 为 V的任意一个元素。

引理 4.8. 我们有

$$\left|\sum_T \int_T \langle G(\widetilde{g}), \sigma\rangle_{\widetilde{g}}\, v\omega_T(\widetilde{g})\right| \le C\|g_h - g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

证明。由于现在假设 $\sup_{h>0}\max_{T\in\mathcal{T}_h^N}\|g_h\|_{W^{2,\infty}(T)} < \infty$，与 $\widetilde{g}$ 相关联的爱因斯坦张量满足

$$\|G(\widetilde{g})\|_{L^\infty(T)} \le C$$

对于每个 $h \le h_0$、每个 $t \in [0,1]$ 和每个 $T \in \mathcal{T}_h^N$，均成立。由此可得

$$\begin{aligned}\left|\int_T \langle G(\widetilde{g}), \sigma\rangle_{\widetilde{g}}\, v\omega_T(\widetilde{g})\right| &\le \|G(\widetilde{g})\|_{L^\infty(T,\widetilde{g})}\|\sigma\|_{L^2(T,\widetilde{g})}\|v\|_{L^2(T,\widetilde{g})}\\ &\le C\|G(\widetilde{g})\|_{L^\infty(T)}\|\sigma\|_{L^2(T)}\|v\|_{L^2(T)}\\ &\le C\|\sigma\|_{L^2(T)}\|v\|_{L^2(T)}\\ &= C\|g_h - g\|_{L^2(T)}\|v\|_{L^2(T)}.\end{aligned}$$

对所有 $T \in \mathcal{T}_h^N$ 求和即可完成证明。 □

引理 4.9. 我们有

$$\begin{aligned}&\left|\mathring{\sum_F}\int_F \left\langle [\![\overline{\mathrm{I\!I}}(\widetilde{g})]\!]_F, \sigma|_F\right\rangle_{\widetilde{g}} v\omega_F(\widetilde{g})\right| \le C\max_T\left(h_T^{-1}\|g_h - g\|_{W^{1,\infty}(T)}\right)\\ &\quad\times\left(\sum_T \|g_h - g\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2|g_h - g|_{H^1(T)}^2\right)^{1/2}\left(\sum_T \|v\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2|v|_{H^1(T)}^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

证明。考虑一个内部 $(N-1)$-单纯形 F。对坐标进行欧几里得旋转和平移后，不失一般性地假设 F 位于平面 $x^N = 0$ 中。在这些坐标下，与 $\widetilde{g}$ 相关联的第二基本形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{I\!I}_{ij}(\widetilde{g}) &= -\widetilde{g}(n_{\widetilde{g}}, \nabla_{\widetilde{g},e_i}e_j)\\ &= -\widetilde{g}(n_{\widetilde{g}}, \widetilde{\Gamma}_{ij}^k e_k)\\ &= -n_{\widetilde{g}}^\ell \widetilde{g}_{\ell k}\widetilde{\Gamma}_{ij}^k, \quad i,j = 1,2,\dots,N-1,\end{aligned}$$

其中 e_1、e_2、……、e_N 是欧几里得坐标基向量。由于 $n_{\widetilde{g}} = \widetilde{g}^{-1}n/\sqrt{n^T\widetilde{g}^{-1}n}$ 和 n 指向 x^N 方向，因此我们得到

$$\mathrm{I\!I}_{ij}(\widetilde{g}) = -\frac{1}{\sqrt{n^T\widetilde{g}^{-1}n}}\widetilde{\Gamma}_{ij}^N.$$

该量跨越 F 的跳跃可利用恒等式 $[\![ab]\!] = [\![a]\!]\{b\} + \{a\}[\![b]\!]$计算，其中 $\{\cdot\}$ 表示跨越 F的平均值，从而得到

$$-[\![\mathrm{I\!I}_{ij}(\widetilde{g})]\!] = \left[\!\!\left[\frac{1}{\sqrt{n^T\widetilde{g}^{-1}n}}\right]\!\!\right]\left\{\widetilde{\Gamma}_{ij}^N\right\} + \left\{\frac{1}{\sqrt{n^T\widetilde{g}^{-1}n}}\right\}\left[\!\!\left[\widetilde{\Gamma}_{ij}^N\right]\!\!\right].$$

鉴于（36），我们有

$$\begin{aligned}\left\|\left[\!\left[\frac{1}{\sqrt{n^T\widetilde{g}^{-1}n}}\right]\!\right]\right\|_{L^\infty(F)} &\le C\,\|[\![\widetilde{g}]\!]\|_{L^\infty(F)}\\ &\le C\,\|[\![g_h-g]\!]\|_{L^\infty(F)}\\ &\le C\left(\|g_h-g\|_{L^\infty(T_1)}+\|g_h-g\|_{L^\infty(T_2)}\right),\end{aligned}$$

其中， T_1和 T_2是共享面 F的两个 N-单形。这里，我们用到了$\widetilde{g}=g+t(g_h-g)$光滑这一事实。同理，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\left[\!\left[\widetilde{\Gamma}^N_{ij}\right]\!\right]\right\|_{L^\infty(F)} &\le C\|[\![\widetilde{g}]\!]\|_{W^{1,\infty}(F)}\\ &\le C\|[\![g_h-g]\!]\|_{W^{1,\infty}(F)}\\ &\le C\left(\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T_1)}+\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T_2)}\right).\end{aligned}\tag{43}$$

因此，

$$\|[\![\mathrm{II}(\widetilde{g})]\!]\|_{L^\infty(F)} \le C\left(\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T_1)}+\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T_2)}\right).$$

由此容易得到，同一上界也适用于迹反转张量 $\mathrm{II}(\widetilde{g})=\mathrm{II}(\widetilde{g})-H(\widetilde{g})\widetilde{g}$，但常数可能更大，为 C:

$$\|[\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]\|_{L^\infty(F)} \le C\left(\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T_1)}+\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T_2)}\right).$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_F \langle[\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]_F,\sigma|_F\rangle_{\widetilde{g}}\,v\omega_F(\widetilde{g})\right|\\ &\le \|[\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]\|_{L^\infty(F,\widetilde{g})}\|\sigma|_F\|_{L^2(F,\widetilde{g})}\|v\|_{L^2(F,\widetilde{g})}\\ &\le C\|[\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]\|_{L^\infty(F)}\|\sigma|_F\|_{L^2(F)}\|v\|_{L^2(F)}\\ &\le C\left(\sum_{i=1}^2\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T_i)}\right)\left(h_{T_1}^{-1}\|\sigma\|^2_{L^2(T_1)}+h_{T_1}|\sigma|^2_{H^1(T_1)}\right)^{1/2}\left(h_{T_1}^{-1}\|v\|^2_{L^2(T_1)}+h_{T_1}|v|^2_{H^1(T_1)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

由 $\mathcal{T}_h$的形状正则性，存在一个与 h和 F无关的常数 C，使得 $C^{-1}\le h_{T_1}/h_{T_2}\le C$，因此

$$\begin{aligned}\left|\mathring{\sum_F}\int_F\langle[\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]_F,\sigma|_F\rangle_{\widetilde{g}}\,v\omega_F(\widetilde{g})\right| &\le C\max_T\left(h_T^{-1}\|g_h-g\|_{W^{1,\infty}(T)}\right)\\ \times\left(\sum_T\|g_h-g\|^2_{L^2(T)}+h_T^2|g_h-g|^2_{H^1(T)}\right)^{1/2}&\left(\sum_T\|v\|^2_{L^2(T)}+h_T^2|v|^2_{H^1(T)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

□

Re标记 **4.10**。 若 g_h 是分片常数，则在（43）中，我们得到更精确的界 d

$$\|[\![g_h-g]\!]\|_{W^{1,\infty}(F)}=\|[\![g_h-g]\!]\|_{L^\infty(F)}\le C\left(\|g_h-g\|_{L^\infty(T_1)}+\|g_h-g\|_{L^\infty(T_2)}\right)$$

因为 $\frac{\partial g_h}{\partial x^i} = 0$ 且 $\frac{\partial g}{\partial x^i}$ 对每个 i都是连续的。这意味着，对于分片常数 g_h，我们可以将引理 $\|g_h - g\|_{W^{1,\infty}(T)}$ 中的$\|g_h - g\|_{L^\infty(T)}$ 替换为，从而得到4.9

$$\left|\sum_F \int_F \langle [\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]_F, \sigma|_F \rangle_{\widetilde{g}} v \omega_F(\widetilde{g})\right| \le C \max_T \left(h_T^{-1}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)}\right)$$
$$\times \left(\sum_T \|g_h - g\|^2_{L^2(T)} + h_T^2 |g_h - g|^2_{H^1(T)}\right)^{1/2} \left(\sum_T \|v\|^2_{L^2(T)} + h_T^2 |v|^2_{H^1(T)}\right)^{1/2}.$$

现在我们将注意力转向（42）中的第三个积分。为此，我们首先利用形状正则性假设证明，每个 N-单纯形在$\mathcal{T}_h$ 中的二面角（按欧几里得度量测量）都有一致的上下界。

引理 4.11. 存在常数 $\theta_{\min}, \theta_{\max} \in (0, \pi)$，使得对于任意 $h > 0$ 和任意$T \in \mathcal{T}_h^N$， T 中的二面角（按欧几里得度量测量）都介于 $\theta_{\min}$ 和 $\theta_{\max}$之间。

证明. 这一事实在维数 $N = 3$ 的情形下由 [18, 引理 3.6]证明。我们将他们的证明推广到维数 $N \ge 3$如下。给定处于一般位置的 $\mathbb{R}^N$中的 $N+1$ 个点 $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$，令 $T = [x_1, x_2, \dots, x_{N+1}]$ 表示以 $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$为顶点的 N-单纯形。考虑两个面 $F_1 = [x_1, x_3, x_4, \dots, x_{N+1}]$ 和 $F_2 = [x_2, x_3, x_4, \dots, x_{N+1}]$，它们沿着（$N-2$）维子单形 $S = [x_3, x_4, \dots, x_{N+1}]$相交。以下过程中，我们都采用欧几里得度量。令 A 为 x_1 在包含F_2的（$N-1$）维超平面上的正交投影，并令 B 为 x_1 在包含S的（$N-2$）维超平面上的正交投影。注意到 $[x_1, A]$ 和 $[x_1, B]$ 都与 S 正交，因为 $S \subset F_2$。因此，三角形$[x_1, A, B]$ 与 S 正交。该三角形是一个斜边为 $[x_1, B]$的直角三角形，所以沿着 S 的二面角 θ_{ST} 满足

$$\sin\theta_{ST} = \frac{|[x_1, A]|}{|[x_1, B]|},$$

其中，$|\cdot|$ 表示欧几里得体积（即此处的长度）。显然，$|[x_1, B]|$ 不大于 h_T，即 T的直径。此外，$|[x_1, A]|$ 不小于 ρ_T的 2 倍，其中 T的内切半径为 ρ_T。为说明原因，我们将 [18, 命题 2.3], 中的论证加以推广，同时注意到我们的 ρ_T 定义与他们的定义相差一个因子 2。考虑 T中的内切（$N-1$）球，其球心 C 到 F_2的距离为 ρ_T。设 D 为该内切球与 F_2的切点， E 为球面上与 D 直径相对的点。线段$[D, E]$ 垂直于 F_2，因此 N单纯形 $T' = [E, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{N+1}]$ 的体积满足

$$|T'| = \frac{1}{N}|[D, E]||F_2| = \frac{2\rho_T}{N}|F_2|.$$

由于 $T' \subset T$，我们有

$$|T'| \le |T| = \frac{1}{N}|[x_1, A]||F_2|,$$

so

$$2\rho_T \le |[x_1, A]|.$$

因此，

$$\sin\theta_{ST} \ge \frac{2\rho_T}{h_T}.$$

该结果由此界以及 $\mathcal{T}_h$ 的形状正则性推出。 □

接下来我们证明，引理 4.11 在使用 g 而非欧几里得度量 δ来测度角度时，仍然成立。

引理 4.12. 如有必要，减小 h_0 的值，则存在常数 $\theta_{\min,g},\theta_{\max,g} \in (0,\pi)$，使得对于每个 $h \le h_0$、每个 $T \in \mathcal{T}_h^N$、每个 $(N-2)$-单纯形 $S \subset \partial T$ 以及每个点 $p \in S$，T 中在 p 处的二面角（由 g 测量）介于 $\theta_{\min,g}$ 与 $\theta_{\max,g}$ 之间。

证明. 若不存在这样的下界 $\theta_{\min,g} > 0$，则存在一列 N-单纯形 $T_1 \in \mathcal{T}_{h_1}$, $T_2 \in \mathcal{T}_{h_2}, \ldots$，其面为 $F_{(1)1}, F_1^{(2)} \subset T_1$, $F_{(1)2}, F_2^{(2)} \subset T_2, \ldots$，并且存在点 $p_1 \in F_1^{(1)} \cap F^{(2)1}, p_2 \in F_{(1)2} \cap F_{(2)2}, \ldots$，使得

$$\angle_{g|_{T_i}(p_i)}(F_i^{(1)}, F_i^{(2)}) \to 0$$

如 $i \to \infty$，其中 $\angle_g(X,Y)$ 表示由 g 测得的 X 与 Y 之间的角度。利用格拉斯曼流形的紧致性，这意味着在抽取一个子列（仍记为原列）之后，

$$\angle_\delta(F_i^{(1)}, F_i^{(2)}) \to 0,$$

其中 $\angle_\delta(X,Y)$ 表示由欧几里得度量 δ 测得的 X 与 Y 之间的角度。这与欧几里得二面角具有正下界这一假设矛盾。上界 $\theta_{\max,g} < \pi$ 的存在性可用类似方法证明。

□

现在我们可以估计式（42）中的第三个积分了。

引理 4.13。我们有

$$\begin{aligned}
&\left| \mathring{\sum_S} \int_S \langle \Theta_S(\widetilde{g})\, \widetilde{g}|_S\,, \sigma|_S \rangle_{\widetilde{g}}\, v \omega_S(\widetilde{g}) \right| \\
&\le C \left(\max_T h_T^{-2} \|g_h - g\|_{L^\infty(T)} \right) \left(\sum_T \|g_h - g\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 |g_h - g|_{H^1(T)}^2 + h_T^4 |g_h - g|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\sum_T \|v\|_{L^2(T)}^2 + h_T^2 |v|_{H^1(T)}^2 + h_T^4 |v|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

证明。固定一个内部的 $(N-2)$-单纯形 S，以及一个包含 S 的 N-单纯形 T。沿着 S 上的任意一点 p，我们有

$$\begin{aligned}
\cos\theta_{ST}(g) - \cos\theta_{ST}(\widetilde{g}) &= \widetilde{g}(n_{\widetilde{g}}^{(1)}, n_{\widetilde{g}}^{(2)}) - g(n_g^{(1)}, n_g^{(2)}) \\
&= \widetilde{g}(n_{\widetilde{g}}^{(1)} - n_g^{(1)}, n_{\widetilde{g}}^{(2)} - n_g^{(2)}) + \widetilde{g}(n_{\widetilde{g}}^{(1)} - n_g^{(1)}, n_g^{(2)}) + \widetilde{g}(n_g^{(1)}, n_{\widetilde{g}}^{(2)} - n_g^{(2)}) \\
&\quad + \widetilde{g}(n_g^{(1)}, n_g^{(2)}) - g(n_g^{(1)}, n_g^{(2)}),
\end{aligned}$$

其中 $n_g^{(1)}$和 $n_g^{(2)}$是经过适当定向的单位法向量（相对于 $g|_T$），分别对应于 T 中包含 S的两个面；对于 $n_{\widetilde{g}}^{(1)}$ 和 $n_{\widetilde{g}}^{(2)}$，情况类似。利用引理4.6，我们可知在点 p,

$$|\cos\theta_{ST}(\widetilde{g}) - \cos\theta_{ST}(g)| \le C|\widetilde{g} - g| \le C|g_h - g|$$

对所有充分小的 h。由于存在常数 $\theta_{\min,g},\theta_{\max,g} \in (0,\pi)$，使得 $\theta_{\min,g} \le \theta_{ST}(g) \le \theta_{\max,g}$，因此我们得到

$$|\theta_{ST}(\widetilde{g}) - \theta_{ST}(g)| \le C|g_h - g| \le C\|g_h - g\|_{L^\infty(T)}.$$

对 $T \supset S$ 求和，并注意到 $\sum_{T\supset S}\theta_{ST}(g) = 2\pi$，我们得到

$$|\Theta_S(\widetilde{g})| = |\Theta_S(\widetilde{g}) - \Theta_S(g)| \le \sum_{T\supset S} |\theta_{ST}(\widetilde{g}) - \theta_{ST}(g)| \le C \sum_{T\supset S} \|g_h - g\|_{L^\infty(T)}. \tag{44}$$

现在我们几乎可以估计积分 $\int_S \langle \Theta_S(\widetilde{g})\ \widetilde{g}|_S, \sigma|_S\rangle_{\widetilde{g}}\, v\omega_S(\widetilde{g})$ 了。首先注意到

$$\|v\|^2_{L^2(S)} \le C\left(h_T^{-2}\|v\|^2_{L^2(T)} + |v|^2_{H^1(T)} + h_T^2|v|^2_{H^2(T)}\right),$$

这可以通过余维 2 迹不等式和尺度变换论证来证明，也可以将余维 1 迹不等式（38）应用两次（对 v而非 dv）。若 T_1，T_2，……，T_m是共享（N）-单纯形 $N-2$的 S-单形，则有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_S \langle \Theta_S(\widetilde{g})\ \widetilde{g}|_S, \sigma|_S\rangle_{\widetilde{g}}\, v\omega_S(\widetilde{g})\right| \\
&\le C\|\Theta_S(\widetilde{g})\|_{L^\infty(S,\widetilde{g})}\|\sigma|_S\|_{L^2(S,\widetilde{g})}\|v\|_{L^2(S,\widetilde{g})} \\
&\le C\|\Theta_S(\widetilde{g})\|_{L^\infty(S)}\|\sigma|_S\|_{L^2(S)}\|v\|_{L^2(S)} \\
&\le C\left(\sum_{i=1}^m \|g_h - g\|_{L^\infty(T_i)}\right)\left(h_{T_1}^{-2}\|\sigma\|^2_{L^2(T_1)} + |\sigma|^2_{H^1(T_1)} + h_{T_1}^2|\sigma|^2_{H^2(T_1)}\right)^{1/2} \\
&\quad\times\left(h_{T_1}^{-2}\|v\|^2_{L^2(T_1)} + |v|^2_{H^1(T_1)} + h_{T_1}^2|v|^2_{H^2(T_1)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

对所有内部（$N-2$）-单形 S 求和，并代入 $\sigma = g_h - g$，即可完成证明。

□

综合以上结果，我们可以给出双线性形式 $a_h(\widetilde{g};\cdot,\cdot)$ 的一个界。

命题 4.14 。对于每个 $h \le h_0$、每个 $t\in[0,1]$和每个 $v\in V$，都有（其中 $\sigma = g_h - g$），

$$\begin{aligned}
|a_h(\widetilde{g};\sigma,v)| \le C&\left(1 + \max_T h_T^{-2}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)} + \max_T h_T^{-1}|g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}\right) \\
&\times\left(\sum_T \|g_h - g\|^2_{L^2(T)} + h_T^2|g_h - g|^2_{H^1(T)} + h_T^4|g_h - g|^2_{H^2(T)}\right)^{1/2} \\
&\times\left(\sum_T \|v\|^2_{L^2(T)} + h_T^2|v|^2_{H^1(T)} + h_T^4|v|^2_{H^2(T)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

证明。 结合引理 4.8、4.9和 4.13。 □

结合命题4.7 与命题4.14，可知

$$\begin{aligned}
\|(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)\|_{H^{-2}(\Omega)} \le C&\left(1 + \max_T h_T^{-2}\|g_h - g\|_{L^\infty(T)} + \max_T h_T^{-1}|g_h - g|_{W^{1,\infty}(T)}\right) \\
&\times\left(\|g_h - g\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_T h_T^2|g_h - g|^2_{H^1(T)} + \sum_T h_T^4|g_h - g|^2_{H^2(T)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

这就完成了定理4.1的证明。推论4.3 由（27）和以下界估计即可得出

$$\begin{aligned}
\|g_h - g\|_{L^2(\Omega)} &\le |\Omega|^{1/2-1/p}\|g_h - g\|_{L^p(\Omega)},\\
\left(\sum_T h_T^2 |g_h - g|^2_{H^1(T)}\right)^{1/2} &\le |\Omega|^{1/2-1/p}\left(\sum_T h_T^p |g_h - g|^p_{W^{1,p}(T)}\right)^{1/p},\\
\left(\sum_T h_T^4 |g_h - g|^2_{H^2(T)}\right)^{1/2} &\le |\Omega|^{1/2-1/p}\left(\sum_T h_T^{2p} |g_h - g|^p_{W^{2,p}(T)}\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

对于所有 $p \in [2,\infty]$ 均成立（对 $p=\infty$ 作显而易见的相应修改即可）。

注 4.15。注意，上述分析得到

$$|b_h(\widetilde{g};\sigma,v)| = O(h^{r+1}), \qquad \text{（根据命题4.7），} \tag{45}$$

$$\left|\sum_T \int_T \langle G(\widetilde{g}),\sigma\rangle_{\widetilde{g}}\, v\omega_T(\widetilde{g})\right| = O(h^{r+1}), \qquad \text{(by Lemma 4.8)}, \tag{46}$$

$$\left|\mathring{\sum_F}\int_F \langle [\![\overline{\mathrm{II}}(\widetilde{g})]\!]_F, \sigma|_F\rangle_{\widetilde{g}}\, v\omega_F(\widetilde{g})\right| = \begin{cases} O(h), & \text{if } r=0, \\ O(h^{2r}), & \text{if } r\ge 1, \end{cases} \quad \begin{matrix}\text{(by Remark 4.10)},\\ \text{(by Lemma 4.9)},\end{matrix} \tag{47}$$

$$\left|\mathring{\sum_S}\int_S \langle \Theta_S(\widetilde{g})\,\widetilde{g}|_S\,, \sigma|_S\rangle_{\widetilde{g}}\, v\omega_S(\widetilde{g})\right| = O(h^{2r}), \qquad \text{(by Lemma 4.13)} \tag{48}$$

对于任意次数为 $r\ge 0$ 的 g 最优阶插值函数 g_h。考虑到当 $N=2$ 时 (46-48) 为零，我们看到，除 $N\ge 3$ 且 $r=0$ 的情况外，上述估计均给出最优误差估计 $\|(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)\|_{H^{-2}(\Omega)} = O(h^{r+1})$；在该情形下，由于 (48)，我们得到 $\|(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)\|_{H^{-2}(\Omega)} = O(1)$。数值实验表明，对于一般的最优阶插值函数，这些分析结果是紧的；而对于典范插值函数，估计 (48) 可改进为 $O(h^{2(r+1)})$，从而当 $r=0$ 时得到 $\|(R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)\|_{H^{-2}(\Omega)} = O(h)$；参见图2。

5 数值算例

本节展示维数为 $N=2$、3 的数值实验，以说明预测的收敛阶。算例使用开源有限元库 NGSolve[1][24, 25], 完成，该库支持任意多项式阶的 Regge 有限元。我们按如下方式构造度量张量 g_h 的最优阶插值函数 g。在每个单元 T上，计算局部L^2 最佳逼近 $\bar{g}_h|_T$。然后，对两个或多个相邻单元共有的切向-切向自由度取平均值，从而得到全局切向-切向连续的插值函数 g_h。我们在附录A 中验证，该插值函数是备注 4.4 意义下的最优阶插值函数，适用于形状正则、拟一致的三角剖分。

为计算误差 $f := (R\omega)_{\mathrm{dist}}(g_h) - (R\omega)(g)$ 的 $H^{-2}(\Omega)$-范数，我们利用如下事实：$\|f\|_{H^{-2}(\Omega)}$ 等价于 $\|u\|_{H^2(\Omega)}$，其中 $u\in H^2_0(\Omega)$ 满足双调和方程 $\Delta^2 u = f$。我们将采用（欧几里得）Hellan–Herrmann–Johnson 方法对该方程进行数值求解。为避免离散误差掩盖真实误差，u_h 所用的多项式阶数比 g_h高两阶。

[1]www.ngsolve.org

我们考虑维数 $N = 2$ 下文献 [16], 提出的数值算例：在正方形 $\Omega = (-1, 1)^2$ 上取光滑黎曼度量张量

$$g(x,y) := \begin{pmatrix} 1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2 & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} & 1+(\frac{\partial f}{\partial y})^2 \end{pmatrix}$$

其中，定义了 $f(x,y) := \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{12}(x^4+y^4)$。该度量对应于由嵌入 $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$ 诱导的曲面，其精确标量曲率为

$$R(g)(x,y) = \frac{162(1-x^2)(1-y^2)}{(9+x^2(x^2-3)^2+y^2(y^2-3)^2)^2}.$$

对于一个三维示例，我们考虑立方体 $\Omega = (-1,1)^3$ 以及由嵌入

$(x\ y\ z) \mapsto (x\ y\ z\ f\ x\ y\ z)$ $f\ x\ y\ z = \frac{1}{2}\ x^2+y^2+,,,,,(,,)$, 诱导的黎曼度量张量,

$z^2 - \frac{1}{12}\ x^4+y^4+z^4$

其中 $(,,):()()$。标量曲率为

$$R(g)(x,y,z) = \frac{18\left((1-x^2)(1-y^2)(9+q(z))+(1-y^2)(1-z^2)(9+q(x))+(1-z^2)(1-x^2)(9+q(y))\right)}{(9+q(x)+q(y)+q(z))^2},$$

其中 $q(x) = x^2(x^2-3)^2$。

我们首先在二维和三维中分别采用由 $2\cdot 2^{2k}$ 个三角形和 $6\cdot 2^{3k}$ 个四面体组成的结构化网格，其中 $\tilde{h} = \text{最大}_T\, h_T = \sqrt{N}\,2^{1-k}$ （最小边长为 2^{1-k}），对于 $k = 0, 1, \ldots$。为避免网格对称性可能导致的超收敛，我们将内层网格顶点的每个分量都扰动一个随机数，该随机数从 $[-\tilde{h}\,2^{-(2N+1)/2}, \tilde{h}\,2^{-(2N+1)/2}]$范围内的均匀分布中抽取。如图1（左）所示，并列于表1中，当 $N = 2$ 且 g_h 的多项式次数为 $r = 0$时，观察到线性收敛。这与定理4.1(i)一致。对于 $r = 1$ 和 $r = 2$，如预期所示，收敛阶更高。

在三维情况下，得到的收敛阶与 $N = 2$相同，参见图1（右）和表2。这表明，对于 $r \geq 1$，定理4.1(ii) 是尖锐的。对于 $r = 0$，我们在数值上观察到线性收敛，这优于定理4.1(ii)的预测。然而，进一步研究表明，对于 $r = 0$，观察到的线性收敛属于预渐近现象。事实上，为检验式（48）是否尖锐，我们计算线性泛函的 $H^{-2}(\Omega)$-范数

$$v \mapsto \int_0^1 \mathring{\sum_S} \int_S \langle \Theta_S(\widetilde{g}(t))\ \widetilde{g}(t)|_S\,,\,\sigma|_S\rangle_{\widetilde{g}(t)}\ v\omega_S(\widetilde{g}(t))\,dt, \tag{49}$$

其中，我们使用七阶高斯求积近似参数积分。如图 2 所示，最优阶插值函数 g_h 在 $r = 0$ 时，该泛函的范数停滞在约 $4\cdot 10^{-4}$，低于最细网格下的总体误差 $4.296\cdot 10^{-3}$；参见表 2。因此，定理 4.1(ii) 所预言的收敛缺失在图 1中尚未显现。对于 $r = 1$，2，已证明的 $O(h^{2r})$ 阶收敛率适用于 (49)（见 (48)），且结果十分明显。有趣的是，使用典范插值函数似乎将 (49) 的收敛阶提高到 $O(h^{2(r+1)})$（即提高了两阶），如图 2 所示。因此，典范插值函数似乎在最低阶情形下也能实现收敛。我们计划在未来工作中研究典范插值函数所呈现的这一超收敛现象。

致谢

我们感谢 Yasha Berchenko-Kogan 进行的多次有益讨论，尤其是关于定义3.1中平均曲率项的讨论。我们还感谢 Snorre Christiansen 指出了与以下内容的联系

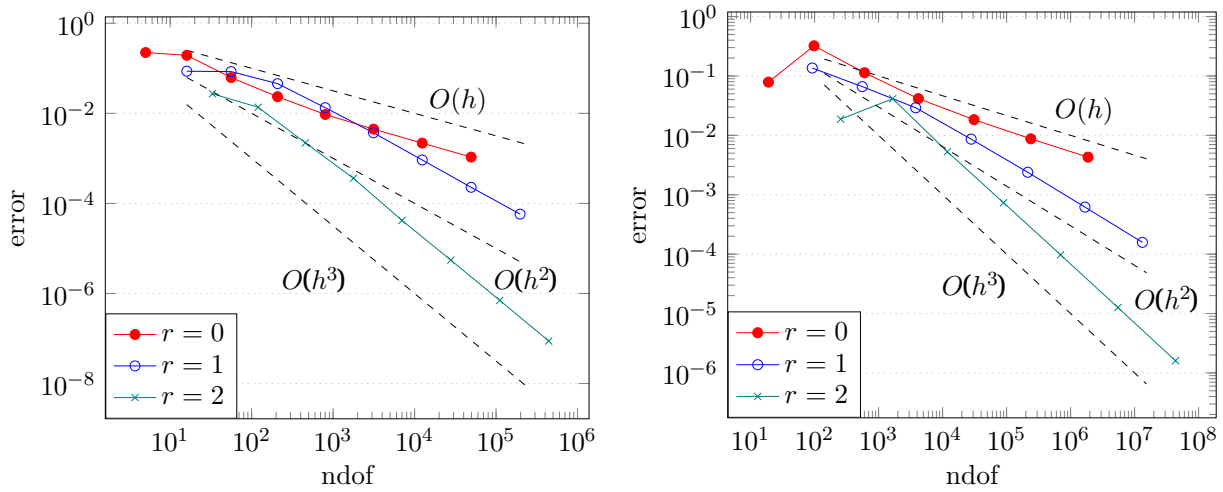

图1：$N = 2$（左）和 $N = 3$（右）的分布意义的标量曲率在 $H^{-2}(\Omega)$-范数下的收敛情况，随 g_h 的自由度数（ndof）变化，适用于 $r = 0$、1、2。

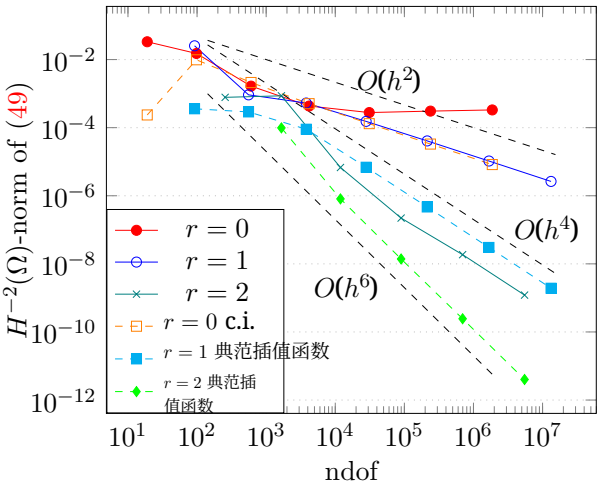

图2：(49)在 $H^{-2}(\Omega)$-范数下随自由度数（ndof）的收敛情况，比较最优阶插值函数与典范插值函数（c.i.），适用于 $r = 0$、1、2，维数为 $N = 3$。

	$r = 0$		$r = 1$		$r = 2$	
h	误差	阶	误差	阶	误差	阶
$2.828 \cdot 10^{-0}$	$2.237 \cdot 10^{-1}$		$8.613 \cdot 10^{-2}$		$2.720 \cdot 10^{-2}$	
$1.534 \cdot 10^{-0}$	$1.945 \cdot 10^{-1}$	0.23	$8.448 \cdot 10^{-2}$	0.03	$1.364 \cdot 10^{-2}$	1.13
$8.584 \cdot 10^{-1}$	$6.220 \cdot 10^{-2}$	1.96	$4.565 \cdot 10^{-2}$	1.06	$2.213 \cdot 10^{-3}$	3.13
$4.609 \cdot 10^{-1}$	$2.336 \cdot 10^{-2}$	1.57	$1.335 \cdot 10^{-2}$	1.98	$3.615 \cdot 10^{-4}$	2.91
$2.417 \cdot 10^{-1}$	$9.434 \cdot 10^{-3}$	1.41	$3.689 \cdot 10^{-3}$	1.99	$4.189 \cdot 10^{-5}$	3.34
$1.251 \cdot 10^{-1}$	$4.457 \cdot 10^{-3}$	1.14	$9.205 \cdot 10^{-4}$	2.11	$5.504 \cdot 10^{-6}$	3.08
$6.260 \cdot 10^{-2}$	$2.181 \cdot 10^{-3}$	1.03	$2.280 \cdot 10^{-4}$	2.02	$7.028 \cdot 10^{-7}$	2.97
$3.198 \cdot 10^{-2}$	$1.067 \cdot 10^{-3}$	1.06	$5.777 \cdot 10^{-5}$	2.04	$8.784 \cdot 10^{-8}$	3.1

表1：与图 1 （左）相同，但以表格形式呈现。

	$r=0$		$r=1$		$r=2$	
h	误差	阶	误差	阶	误差	阶
$3.464\cdot10^{-0}$	$7.869\cdot10^{-2}$		$1.359\cdot10^{-1}$		$1.871\cdot10^{-2}$	
$1.850\cdot10^{-0}$	$3.215\cdot10^{-1}$	-2.24	$6.613\cdot10^{-2}$	1.15	$4.133\cdot10^{-2}$	-1.26
$9.709\cdot10^{-1}$	$1.132\cdot10^{-1}$	1.62	$2.912\cdot10^{-2}$	1.27	$5.286\cdot10^{-3}$	3.19
$4.999\cdot10^{-1}$	$4.152\cdot10^{-2}$	1.51	$8.633\cdot10^{-3}$	1.83	$7.342\cdot10^{-4}$	2.97
$2.753\cdot10^{-1}$	$1.838\cdot10^{-2}$	1.37	$2.391\cdot10^{-3}$	2.15	$9.753\cdot10^{-5}$	3.38
$1.358\cdot10^{-1}$	$8.733\cdot10^{-3}$	1.05	$6.194\cdot10^{-4}$	1.91	$1.261\cdot10^{-5}$	2.89
$6.878\cdot10^{-2}$	$4.296\cdot10^{-3}$	1.04	$1.579\cdot10^{-4}$	2.01	$1.604\cdot10^{-6}$	3.03

表 2：与图1（右）相同，但采用表格形式。

备注3.9中提到的 Israel 形式。EG 获得了美国国家科学基金会 DMS-2012427 项目的资助。MN 感谢奥地利科学基金（FWF）项目 F65 的支持。

A 通过平均实现的最优阶插值

下文将验证，第5 节所述的插值函数，是备注4.4意义下的最优阶插值函数，假设 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 具有形状正则性和准一致性。回顾一下，准一致性意味着 $\max_{T\in\mathcal{T}_h^N} h/h_T$有一个与 h无关的上界常数。在下文中，字母 C可能依赖于该常数以及以下参数 N， h_T/ρ_T， r， s和t 。

令 r 表示次数为 $r\geq 0$、$\ell^{(M)}$定义在 $\mathcal{T}_h$ [21, 方程 (2.4b)]上的 Regge有限元空间的典范自由度。每个线性泛函 $\ell^{(i)}$ 都与一个单形相关联$D\in\mathcal{T}_h^k$，其维数为 $k\geq 1$，具体如下： $\ell^{(i)}$ 将对称 (0,2) 张量场 g 映射为 $g|_D$ 在 $\leq r-k+1$ 上与一个次数为 D的（取值为对称张量的）多项式相乘后所得的积分。

我们采用如下局部编号系统来枚举这些自由度。对于给定的 N-单纯形 $T\in\mathcal{T}_h^N$，与 T的子单纯形相关联的自由度记为$\ell_1^T,\ell_2^T,\ldots,\ell_{M_T}^T$。若 $T,T'\in\mathcal{T}_h^N$是两个交集非空的 N-单纯形，则对于某些 和 i， ℓ_i^T与 $\ell_j^{T'}$可能重合，且 j也可能重合。我们用 $\mathcal{S}(i,T)$ 表示所有满足 ℓ_i^T与 $\ell_j^{T'}$ 重合的有序对 (j,T') 的集合。

在上述局部编号系统下，令 $\psi_1^T,\psi_2^T,\ldots,\psi_{M_T}^T$ 表示与上述自由度对偶的次数为-r 的 Regge有限元空间基。也就是说，

$$\ell_i^T(\psi_j^{T'})=\begin{cases}1, & \text{if } (j,T')\in\mathcal{S}(i,T),\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

假设上述自由度和基函数首先定义在参考单纯形上，然后通过仿射变换映射到 T。尺度变换论证表明 [21,引理 2.11]

$$\|\psi_i^T\|_{L^p(T)}\leq Ch_T^{N/p-2} \tag{50}$$

and

$$|\ell_i^T(g)|\leq Ch_T^{-N/p+2}\|g\|_{L^p(T)} \tag{51}$$

对 ℓ_i^T 的定义域中的所有 g 。注意，上述指数中出现的 -2 和 $+2$ 是由对称（0, 2）阶张量场在仿射变换下的拉回性质所致；参见 [21, 引理 2.11]。

设 g 是一个对称（0, 2）阶张量场，对每个 $p \in [1,\infty]$ 和每个 $s > (N-1)/p$，它都具有 $W^{s,p}(\Omega)$ 正则性。到 Regge有限元空间上的典范插值算子 $\mathcal{J}_h$ 按单元定义如下：

$$\mathcal{J}_h g|_T = \mathcal{J}_h^T(g|_T) = \sum_{i=1}^{M_T} \ell_i^T(g)\psi_i^T.$$

令 $\bar{g}_h$ 表示将 g 逐单元投影到次数至多为 r 的间断分片多项式对称（0, 2）张量场空间上的 L^2-投影。由于 $\mathcal{J}_h$ 是一个投影算子，因此有

$$\bar{g}_h|_T = \mathcal{J}_h^T(\bar{g}_h|_T) = \sum_{i=1}^{M_T} \ell_i^T(\bar{g}_h)\psi_i^T.$$

第 5 节中讨论的插值函数定义为

$$g_h|_T = \sum_{i=1}^{M_T} \left(\frac{1}{|\mathcal{S}(i,T)|} \sum_{(j,T')\in\mathcal{S}(i,T)} \ell_j^{T'}(\bar{g}_h) \right) \psi_i^T,$$

其中，$|\mathcal{S}(i,T)|$ 表示 $\mathcal{S}(i,T)$ 的基数。

为分析误差 $g_h - g$，令 $p \in [1,\infty]$, $s \in ((N-1)/p, r+1]$，以及 $t \in [0,s]$。我们有

$$|g_h - g|_{W^{t,p}(T)} \le |g_h - \mathcal{J}_h g|_{W^{t,p}(T)} + |\mathcal{J}_h g - g|_{W^{t,p}(T)}.$$

第二项满足 [21, 定理 2。5]

$$|\mathcal{J}_h g - g|_{W^{t,p}(T)} \le C h_T^{s-t} |g|_{W^{s,p}(T)}. \tag{52}$$

为了界定第一项，我们利用以下事实：

$$\ell_i^T(g) = \frac{1}{|\mathcal{S}(i,T)|} \sum_{(j,T')\in\mathcal{S}(i,T)} \ell_j^{T'}(g)$$

以便书写

$$(g_h - \mathcal{J}_h g)|_T = \sum_{i=1}^{M_T} \frac{1}{|\mathcal{S}(i,T)|} \sum_{(j,T')\in\mathcal{S}(i,T)} \ell_j^{T'}(\bar{g}_h - g)\psi_i^T.$$

利用逆估计，(50)、(51) 以及标准误差估计 [14, 命题 1。135] 对于逐单元的 L^2-投影算子，我们得到

$$\begin{aligned}
|g_h - \mathcal{J}_h g|_{W^{t,p}(T)} &\le C h_T^{-t} \|g_h - \mathcal{J}_h g\|_{L^p(T)} \\
&\le C h_T^{-t} \sum_{T':T'\cap T\neq\emptyset} h_{T'}^{-N/p+2} \|\bar{g}_h - g\|_{L^p(T')} h_T^{N/p-2} \\
&\le C h_T^{-t} \sum_{T':T'\cap T\neq\emptyset} \|\bar{g}_h - g\|_{L^p(T')} \\
&\le C h_T^{-t} \sum_{T':T'\cap T\neq\emptyset} h_{T'}^{s} |g|_{W^{s,p}(T')} \\
&\le C h_T^{s-t} \sum_{T':T'\cap T\neq\emptyset} |g|_{W^{s,p}(T')}.
\end{aligned} \tag{53}$$

这里我们反复用到了这样一个事实：比值 $h_T/h_{T'}$ 被正的常数从上方和下方一致地界定。结合（52）和（53）可知，误差 $g_h - g$ 满足（28）。

参考文献

[1] D. N. Arnold 和 F. Brezzi。“混合与非协调有限元方法：实现、后处理与误差估计”。载于：ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 19.1（1985），第 7–32 页。[2] D. N. Arnold 和 S. W. Walker。“采用曲边单元的 Hellan–Herrmann–Johnson 方法”。载于：SIAM Journal on Numerical Analysis 58.5（2020），第 2829–2855 页。[3] I. Babuˇska、J Osborn 和 J. Pitk¨aranta。“使用网格相关范数分析混合方法”。载于：Mathematics of Computation 35.152（1980），第 1039–1062 页。[4] Y. Berchenko-Kogan 和 E. S. Gawlik。“二维 Levi-Civita 联络及其曲率的有限元近似”。载于：Foundations of Computational Mathematics，即将出版（2022）。[5] D. Braess、R. H. Hoppe 和 C. Linsenmann。“双调和方程的双能量原理，以及内罚间断 Galerkin 近似的后验误差估计子”。载于：ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 52.6（2018），第 2479–2504 页。[6] D. Braess、A. S. Pechstein 和 J. Sch¨oberl。“双调和方程的基于平衡的后验误差界及两种有限元方法”。载于：IMA Journal of Numerical Analysis（2019）。[7] F. Brezzi 和 P.-A. Raviart。“四阶椭圆方程的混合有限元方法”。载于：Topics in Numerical Analysis, III。伦敦：Academic Press，1977，第 33–56 页。[8] J. Cheeger、W. M¨uller 和 R. Schrader。“分片平坦空间的曲率”。载于：Communications in Mathematical Physics 92.3（1984），第 405–454 页。[9] L. Chen、J. Hu 和 X. Huang。“Kirchhoff 板弯曲问题的 Hellan–Herrmann–Johnson 混合方法的多重网格方法”。载于：Journal of Scientific Computing 76.2（2018），第 673–696 页。[10] B. Chow、P. Lu 和 L. Ni。Hamilton 的 Ricci 流。第 77 卷。美国数学学会，2006。[11] S. H. Christiansen。“有限元空间上二阶微分算子的刻画”。载于：Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 14.12（2004），第 1881–1892 页。[12] S. H. Christiansen。“Regge 微积分的线性化”。载于：Numerische Mathematik 119.4（2011），第 613–640 页。[13] S. H. Christiansen。“联络与曲率近似的精确公式”。载于：arXiv 预印本 arXiv:1307.3376（2013）。[14] A. Ern 和 J.-L. Guermond。有限元理论与实践。第 159 卷。Springer Science & Business Media，2004。[15] A. E. Fischer 和 J. E. Marsden。“标量曲率形变”。载于：Duke Mathematical Journal 42.3（1975），第 519–547 页。[16] E. S. Gawlik。“采用 Regge 有限元的高阶高斯曲率近似”。载于：SIAM Journal on Numerical Analysis 58.3（2020），第 1801–1821 页。[17] G. W. Gibbons 和 S. W. Hawking。“量子引力中的作用量积分与配分函数”。载于：Euclidean Quantum Gravity。World Scientific，1993，第 233–237 页。

[18] S. Gong、J. Guzm´an 和 M. Neilan。《关于 Worsey-Farin 分割形状正则性的一则说明》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2205.05059（2022）。[19] J. Gopalakrishnan、M. Neunteufel、J. Sch¨oberl 和 M. Wardetzky。《通过协变旋度和 Regge 度量的不相容性分析曲率近似》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2206.09343（2022）。[20] W. Israel。《广义相对论中的奇异超曲面与薄壳》。载于：Il Nuovo Cimento B (1965-1970) 44.1（1966），第 1–14 页。[21] L. Li。《Regge 有限元及其在固体力学与相对论中的应用》。博士论文。明尼苏达大学，2018 年 5 月。[22] A. S. Pechstein 和 J. Sch¨oberl。《用于 Reissner–Mindlin 板的 TDNNS 方法》。载于：Numerische Mathematik 137.3（2017），第 713–740 页。[23] T. Regge。《无坐标的广义相对论》。载于：Il Nuovo Cimento (1955-1965) 19.3（1961），第 558–571 页。[24] J. Sch¨oberl。《NGSolve 中有限元的 C++ 11 实现》。载于：分析与科学计算研究所，维也纳工业大学（2014）。[25] J. Sch¨oberl。《NETGEN：基于抽象规则的推进前沿二维/三维网格生成器》。载于：Computing and Visualization in Science 1.1（1997），第 41–52 页。[26] R. S. Strichartz。《通过高斯–博内定理在某些奇异曲面上将曲率定义为测度》。载于：The Journal of Geometric Analysis 30.1（2020），第 153–160 页。[27] S. W. Walker。《带边界分片线性曲面上网格依赖的 2-范数的庞加莱不等式》。载于：Computational Methods in Applied Mathematics 22.1（2022），第 227–243 页。[28] J. W. York Jr.《共形三维几何在引力动力学中的作用》。载于：Physical Review Letters 28.16（1972），第 1082–1085 页。