arXiv:2301.02164v2 [cond-mat.quant-gas] 7 Jun 2023

一维中自旋和电荷动力学所涌现的任意子关联

Oleksandr Gamayun,[1,2] Eoin Quinn,[3] Kemal Bidzhiev,[4] 和 Mikhail B. Zvonarev[3]

[1] *London Institute for Mathematical Sciences, Royal Institution, 21 Albermarle St, London W1S 4BS, UK* [2] *Faculty of Physics, University of Warsaw, ul. Pasteura 5, 02-093 Warsaw, Poland*

[3] *Université Paris-Saclay, CNRS, LPTMS, 91405, Orsay, France* [4] *PASQAL, 7 rue Léonard de Vinci, 91300 Massy, France*(日期：2023年6月8日)

我们提出一种适用于一维晶格系统中自旋和电荷自由度的变换，这些系统受到无双占据格点的约束，可直接获取系统的动力学关联。该变换将粒子产生与湮灭算符表示为无自旋粒子以及作用于自旋-1/2 链态空间上的非局域算符。由此，动力学关联函数可以分解为不可穿透任意子的关联函数与自旋链关联函数的卷积。针对卷积的各个部分，可以分别采用专门的方法进行进一步分析，从而大大提升这一方法的影响力和灵活性。

多体量子系统的物理性质包含了裸粒子的相互作用和统计性质所产生的效应。涌现出的准粒子可能继承其非相互作用同类粒子的统计性质：自由费米子变成费米液体，自由玻色子则变成玻色-爱因斯坦凝聚态。降低系统的维数会增强相互作用效应，并掩盖构成粒子的统计性质特征。在一维中，任意微弱的排斥作用都会阻止粒子宏观地占据零动量单态，也就是说，会破坏玻色-爱因斯坦凝聚态 [1]。此外，相互作用可能会将玻色子的激发谱转变为费米子型激发谱。例如，玻色子通过强度无限大的 δ函数势相互排斥时，形成的系统称为托克斯-吉拉尔多气体，其激发谱与自由费米气体完全相同 [2]。

在一维中，自旋和电荷自由度之间的相互作用可能尤为复杂。低能下具有线性色散谱的系统，无论裸粒子的统计性质如何，都属于卢廷格液体（LL）普适类。微观理论中的自旋和电荷自由度，在卢廷格液体哈密顿量中由彼此对易的项表示，并在动力学关联函数中相互分离，这种现象称为自旋-电荷分离 [3, 4]。在有效场论方法中，要将激发谱的非线性效应纳入考量，就必须适当地修正卢廷格液体描述。近期研究的情形包括：高度简并基态之上的自旋和电荷动力学（自旋非相干区，参见文献 [5–7]）、存在激发谱二次分支时的情形（巡游铁磁区，参见文献 [8–12]），以及激发谱边缘附近的情形，参见文献 [13]。自旋-电荷分离这一概念能否以及如何扩展到卢廷格液体有效场论描述之外，仍是一个颇具挑战性的开放问题；这一问题对于超冷气体实验尤其重要 [14]。

研究具有无双占据（NDO）约束的系统（任意两个粒子都不能占据同一个晶格点），是理解自旋和电荷自由度如何在所有能量尺度上耦合的关键。忽略未占据的格点（“挤压”晶格），可将含有 N 个自旋-1/2 粒子的原系统的态空间，缩减为长度为 N 的自旋-1/2 链的态空间。借助超冷量子气体显微镜，可以直接控制和操纵挤压晶格上各个自旋的状态 [15–17]。在理论方面，研究者利用多体波函数的坐标表示，计算出了一些动力学关联函数；无双占据约束使这些波函数具有非常特殊的结构 [18–21]。第二量子化形式将系统的基本微观场表示为集体自旋和电荷变量，可作为一种系统性方法，揭示自旋和电荷动力学对任意关联函数的贡献。然而，迄今尚未建立这种形式。

在本文中，我们提出一种变换，可将受无双占据约束的自旋-1/2 费米子转化为集体电荷变量（晶格上的无自旋费米子）和自旋变量（另一晶格上的自旋-1/2 算符）。这些集体电荷和自旋变量彼此对易，并且在变换中以高度非局域的方式出现，如式（9）–（12）所示。将该变换用于关联函数时，可得到不可穿透任意子的电荷动力学，其统计角按照由自旋构型定义的权重函数取平均。

变换到自旋和电荷变量。— 我们考虑无限一维晶格上的自旋-1/2 费米子。其中，$\hat{\psi}^\dagger_{j\alpha}$、$\hat{\psi}_{j\alpha}$和$\hat{n}_{j\alpha} = \hat{\psi}^\dagger_{j\alpha}\hat{\psi}_{j\alpha}$ 分别是格点 j （$-\infty \le j \le \infty$）上的产生、湮灭和粒子数算符，而 $\alpha = \uparrow, \downarrow$ 是自旋指标。局域自旋矢量$\hat{\mathbf{s}}(j) = (\hat{s}_x(j), \hat{s}_y(j), \hat{s}_z(j))$可以表示为

表示为

$$\hat{\mathbf{s}}(j)=\frac{1}{2}\left(\hat{\psi}_{j\uparrow}^{\dagger}\ \ \hat{\psi}_{j\downarrow}^{\dagger}\right)\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix}\hat{\psi}_{j\uparrow}\\ \hat{\psi}_{j\downarrow}\end{pmatrix},\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$是由三个泡利矩阵构成的矢量。自旋升降算符$\hat{s}_{\pm}(j)=\hat{s}_x(j)\pm i\hat{s}_y(j)$分别为$\hat{s}_{+}(j)=\hat{\psi}_{j\uparrow}^{\dagger}\hat{\psi}_{j\downarrow}$和$\hat{s}_{-}(j)=\hat{\psi}_{j\downarrow}^{\dagger}\hat{\psi}_{j\uparrow}$。我们要求系统中的费米子总数$\hat{N}=\sum_j\hat{n}_j$是守恒量。每个格点上只能有零个或一个费米子，

$$\hat{n}_j\equiv\hat{n}_{j\uparrow}+\hat{n}_{j\downarrow}=\{0,1\},\tag{2}$$

由于无双占据约束。投影算符

$$\hat{\mathcal{X}}=\prod_{j=-\infty}^{\infty}(1-\hat{n}_{j\uparrow}\hat{n}_{j\downarrow})\tag{3}$$

作用于基态$|\Psi\rangle=\hat{\psi}_{j_1\alpha_1}^{\dagger}\ldots\hat{\psi}_{j_N\alpha_N}^{\dagger}|0\rangle$，会消除任何存在双重占据的状态。其余状态可唯一表示为状态$|f\rangle$和$|\ell\rangle$的乘积：

$$|\Psi\rangle=|f\rangle\otimes|\ell\rangle.\tag{4}$$

这里，$|f\rangle=\hat{c}_{j_1}^{\dagger}\cdots\hat{c}_{j_N}^{\dagger}|0\rangle$由无限晶格上的无自旋费米子定义，这些费米子位于原始自旋-1/2 费米子所在的位置。状态$|\Psi\rangle$和$|f\rangle$的真空态$|0\rangle$分别不含费米子、$\psi_j|0\rangle=0$和$\hat{c}_j|0\rangle=0$。长度为N的自旋-1/2 链的状态$|\ell\rangle=|\alpha_1\cdots\alpha_N\rangle$可表示为$|\ell\rangle=\hat{\ell}_{-}(m_1)\cdots\ell_{-}(m_M)|\Uparrow\rangle$。集合$\{m_1,\ldots,m_M\}$表示$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$中向下自旋的位置，其中$M$为向下自旋的总数。例如，$|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle$给出$\{m_1,m_2,m_3\}=\{2,4,5\}$。真空态$|\Uparrow\rangle$是自旋向上极化态。算符$\hat{\boldsymbol{\ell}}(m)=\boldsymbol{\sigma}(m)/2$作用于第$m$个粒子的自旋态，而$\ell_{\pm}=\ell_x\pm i\ell_y$。

现在，我们通过作用于由$|f\rangle$和$|\ell\rangle$构成的空间中的算符来表示自旋-1/2 费米子场。第j个格点左侧的粒子数为

$$\hat{\mathcal{N}}_j=\sum_{a=-\infty}^{j}\hat{n}_a.\tag{5}$$

此处，$\hat{n}_j=\hat{c}_j^{\dagger}\hat{c}_j$作用于$|f\rangle$对应于由式$n_j$（2）定义的$\hat{}$，作用于$|\Psi\rangle$。注意，算符$\hat{\mathcal{N}}_j$的谱为整数值。任何依赖于$\hat{\mathcal{O}}$的算符$\hat{\mathcal{N}}_j$都可通过以下公式求得：

$$\hat{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{N}}_j)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{\mathcal{O}}(m)\delta_{m,\hat{\mathcal{N}}_j}.\tag{6}$$

算符$\hat{\mathcal{O}}(m)$表征第m个粒子的状态，而克罗内克δ

$$\delta_{m,\hat{\mathcal{N}}_j}=\int_0^{2\pi}\frac{d\lambda}{2\pi}\,e^{i\lambda(\hat{\mathcal{N}}_j-m)}\tag{7}$$

当晶格点正是第m个粒子所在的位置时，该值为1；否则为0。复合律

$$\hat{\mathcal{O}}_1(\hat{\mathcal{N}}_j)\hat{\mathcal{O}}_2(\hat{\mathcal{N}}_j)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{\mathcal{O}}_1(m)\hat{\mathcal{O}}_2(m)\delta_{m,\hat{\mathcal{N}}_j}\tag{8}$$

直接由方程（6）和（7）得出。

我们提出如下费米子产生算符表达式

$$\hat{\psi}_{j\uparrow}^{\dagger}=\mathcal{P}_{\hat{\mathcal{N}}_j,\hat{N}}\hat{c}_j^{\dagger},\tag{9}$$

$$\hat{\psi}_{j\downarrow}^{\dagger}=\mathcal{P}_{\hat{\mathcal{N}}_j,\hat{N}}\hat{\ell}_{-}(\hat{N})\hat{c}_j^{\dagger}.\tag{10}$$

以及相应的湮灭算符

$$\hat{\psi}_{j\uparrow}=\hat{c}_j\hat{\eta}(\hat{N})\mathcal{P}_{\hat{\mathcal{N}}_j,\hat{N}}^{\dagger},\tag{11}$$

$$\hat{\psi}_{j\downarrow}=\hat{c}_j\hat{\ell}_{+}(\hat{N})\mathcal{P}_{\hat{\mathcal{N}}_j,\hat{N}}^{\dagger}.\tag{12}$$

方程（11）中的算符$\hat{\eta}=\ell_{+}\ell_{-}=|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$作用于自旋链上由数算符$\hat{N}$的值确定的格点。方程（6）和（7）说明了如何理解其对$\hat{\mathcal{N}}_j$的依赖。包含从m到m'各格点的晶格上的循环移位算符$\mathcal{P}_{m,\ m'}$为

$$\mathcal{P}_{m,m'}=\Pi_{m,m+1}\Pi_{m+1,m+2}\cdots\Pi_{m'-1,m'}.\tag{13}$$

置换算符$\Pi_{m,\ m'}$交换格点m和m'上的状态；对于自旋为1/2 的粒子，它表示为

$$\Pi_{m,m'}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma}(m)\otimes\boldsymbol{\sigma}(m')+I\otimes I].\tag{14}$$

这里，I是单位矩阵。显然，Π是自身的逆算符，$(\Pi_{m,\ m'})^2=I$，是厄米算符，$\Pi_{m,m'}^{\dagger}=\Pi_{m,m'}$，且是幺正算符，$\Pi_{m,m'}^{\dagger}\Pi_{m,m'}=I$。这意味着$\mathcal{P}_{m',m}=\mathcal{P}_{m}^{-1},_{m'}=\mathcal{P}_{m,\ m'}^{\dagger}$。图 1 展示了算符 (13) 对自旋链状态的作用。注意，局域自旋算符 (1) 由以下各对组成：$\hat{\psi}_{j\alpha}^{\dagger}\hat{\psi}_{j\alpha'}$，其中$\hat{\psi}^{\dagger}$和$\hat{\psi}$取自同一格点$j$。因此，使用方程 (9)–(12) 时，置换算符会相互抵消，从而得到如下表示

$$\hat{\mathbf{s}}(j)=\hat{n}_j\hat{\boldsymbol{\ell}}(\hat{\mathcal{N}}_j)\tag{15}$$

在文献中已有所论述 [12]。我们展示了方程（9）–（12）在揭示自旋和电荷自由度对以下内容的贡献方面有多么有效

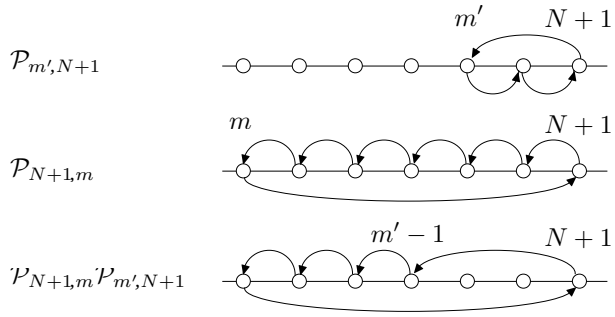

图 1. 图示为算符 $\mathcal{P}$ 作用于自旋链的各个状态。箭头表示局域状态的转移方向。对于 $m' > m$，复合算符 $\mathcal{P}_{N+1,m}\mathcal{P}_{m',N+1}$ 的作用结果如图所示。

本文其余部分将讨论动力学关联函数。

哈密顿量。——我们将变换（9）应用于哈密顿量（12）

$$\hat{H} = \hat{H}_f + \hat{H}_\ell, \tag{16}$$

其中

$$\hat{H}_f = \hat{\mathcal{X}}\left[-t_h \sum_{\substack{j=-\infty \\ \alpha=\uparrow,\downarrow}}^{\infty} (\hat{\psi}^\dagger_{j\alpha}\hat{\psi}_{j+1\alpha} + \text{H.c.}) - h\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{jj'=-\infty}^{\infty} :\hat{n}_j U_{j-j'}\hat{n}_{j'}:\right]\hat{\mathcal{X}} \tag{17}$$

具有 SU(2) 对称性，而项

$$\hat{H}_\ell = 2B\hat{\mathcal{X}}\hat{S}_z\hat{\mathcal{X}}, \quad \hat{S}_z = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{s}_z(j) \tag{18}$$

由于沿总自旋 z 投影方向施加的磁场 B，打破了这一对称性。式 (17) 中的符号 H.c. 和 $:\cdots:$ 分别表示厄米共轭和正规序。式 (3) 给出的投影算符 $\mathcal{X}$ 施加了无双占据约束。注意，位点相互作用项 $:\hat{n}_j^2:$ $U_0/2$ 意味着在 $U_0 \to \infty$ 极限下，任何格点上有两个粒子都会产生无限大的能量代价。因此，使用 $\mathcal{X}$ 等价于令哈密顿量 (16)$\hat{}$ $\hat{}$ 中的 $U_0 \to \infty$，且没有 $\mathcal{X}$。使用 $\mathcal{X}$ 时，U_0 的实际取值无关紧要，因为 $\hat{}\mathcal{X} : \hat{}n_j^2 : \hat{}\mathcal{X} = 0$。

利用变换（9）–（12），我们得到仅用无自旋费米子表示的方程（17），

$$\hat{H}_f = -t_h \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\hat{c}^\dagger_j\hat{c}_{j+1} + \text{H.c.}) - h\hat{N} + \frac{1}{2}\sum_{j,j'=-\infty}^{\infty} :\hat{n}_j U_{j-j'}\hat{n}_{j'}: \tag{19}$$

以及包含无自旋费米子和自旋算符的方程（18），

$$\hat{H}_\ell = 2B\sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{n}_j\hat{\ell}_z(\hat{\mathcal{N}}_j). \tag{20}$$

令人惊讶的是，$\hat{} H_f$ ($\hat{} H_\ell$) 对态 (4) 的作用仅对 $|f\rangle$ ($|\ell\rangle$) 部分是非平凡的：

$$\hat{H}_f|\Psi\rangle = E_f|f\rangle \otimes |\ell\rangle, \quad \hat{H}_\ell|\Psi\rangle = |f\rangle \otimes E_\ell|\ell\rangle. \tag{21}$$

能量 $E_\ell = 2BL_z$，其中 L_z 是算符 $\hat{}L_z = \sum_{m=1}^{N} \hat{}\ell_z(m)$ 的本征值，用于测量自旋链状态 z的总自旋在 $|\ell\rangle$ 方向上的投影。因此，对于任意16)，哈密顿量的自旋简并都会出现 $\hat{}$ $L_z \neq \pm N/2$。此外，$H_\ell = 0$ 当 $B = 0$时，这意味着只要系统没有在某些边界条件下置于有限体积中，就存在 2^N重简并。

热态中的场-场关联函数。—我们考虑描述粒子传播的单体关联函数，

$$G^\alpha_p(j-j',t) = \frac{1}{Z}\langle\hat{\psi}_{j\alpha}(t)\hat{\psi}^\dagger_{j'\alpha}(0)\rangle_T, \quad \alpha = \uparrow,\downarrow, \tag{22}$$

以及空穴传播，

$$G^\alpha_h(j-j',t) = \frac{1}{Z}\langle\hat{\psi}^\dagger_{j\alpha}(t)\hat{\psi}_{j'\alpha}(0)\rangle_T, \quad \alpha = \uparrow,\downarrow, \tag{23}$$

在温度 T、化学势 h 和磁场 B 下，对热态进行求值

$$\langle\cdots\rangle_T = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{f,\ell}\langle\Psi|e^{-\beta\hat{H}}\cdots|\Psi\rangle, \tag{24}$$

其中 $|\Psi\rangle$ 由方程（4）给出。对 f 的求和遍历了刻画 N 费米子态 $|f\rangle$的自由粒子动量所有可能取值。对ℓ 的求和遍历了自旋 z投影的所有可能配置，Z 是巨配分函数，而 $\beta = T^{-1}$。对称性

$$G^\uparrow_{p(h)}(j-j',t;h,B) = G^\downarrow_{p(h)}(j-j',t;h,-B) \tag{25}$$

这使得只需计算 $G^\uparrow$。

利用方程（6）–（12），我们将方程（22）中的矩阵元分解为两部分，

$$\langle\Psi|\hat{\psi}_{j\uparrow}(t)\hat{\psi}^\dagger_{j'\uparrow}(0)|\Psi\rangle = \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{d\lambda}{2\pi}\frac{d\lambda'}{2\pi} e^{-i\lambda m + i\lambda' m'}e^{-\beta(E_f+E_\ell)}\mathcal{C}_p(\lambda,\lambda';j-j';t)\mathcal{S}(m,m'). \tag{26}$$

第一项包含无自旋费米子态 $|f\rangle$ 的贡献，

$$\mathcal{C}_p(\lambda,\lambda';j-j';t) = \langle f|\hat{c}_j(t)e^{i\lambda\hat{\mathcal{N}}_j(t)}e^{-i\lambda'\hat{\mathcal{N}}_{j'}(0)}\hat{c}^\dagger_{j'}|f\rangle. \tag{27}$$

其非平凡的时间演化由哈密顿量（19）支配。第二项涉及自旋链的态 $|\ell\rangle$，而自由费米子的存在只能通过其总数 N来体现，该总数定义了链的长度，

$$\mathcal{S}(m,m') = \langle \ell | \mathcal{P}_{N+1,m} \mathcal{P}_{m',N+1} | \ell \rangle = \langle \ell | \prod_{j=\min\{m,m'\}}^{\max\{m,m'\}-1} [\frac{1}{2} I + \hat{\ell}_z(j)] | \ell \rangle. \quad (28)$$

这一部分与时间无关，因为循环移位算符（方程（13））不会改变总自旋的 z 投影值，L_z。算符 $\mathcal{P}_{N+1,\ m}\mathcal{P}_{m',\ N+1}$的作用如图 1所示；如果格点 $\mathcal{S}$ 与 m 之间有任何自旋朝下，就会导致 m' 消失。由此得到方程（28）的右侧。

接下来，将方程（28）代入方程（22），并对自旋构型求和：

$$\sum_{\ell} e^{-\beta E_\ell} \mathcal{S}(m,m') = \frac{[2\cosh(\beta B)]^N}{\nu^{|m-m'|}}, \quad (29)$$

其中 $\nu = 1 + e^{2\beta B}$。我们得到

$$G_p^{\uparrow}(j-j',t) = \frac{1}{Z} \sum_{\{N\}} e^{-\beta \tilde{E}_f} \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \frac{d\lambda'}{2\pi} \times \mathcal{C}_p(\lambda,\lambda';j-j';t) \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda m + i\lambda' m'}}{\nu^{|m-m'|}}, \quad (30)$$

其中

$$\tilde{E}_f = E_f - \frac{1}{\beta} N \ln[2\cosh(\beta B)], \quad (31)$$

对 $\{N\}$ 的求和包含对 N和 f的求和。配分函数 Z 可对费米子构型 f 求和，其能量由方程（31）给出。我们有

$$\sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda m + i\lambda' m'}}{\nu^{|m-m'|}} = 2\pi \delta(\lambda - \lambda') F(\lambda;T), \quad (32)$$

其中

$$F(\lambda;\nu) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \nu^{-m} (e^{im\lambda} + e^{-im\lambda}). \quad (33)$$

因此，

$$G_p^{\uparrow}(j-j',t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} F(\lambda;\nu) \mathcal{C}_p(\lambda;j-j';t;T), \quad (34)$$

其中

$$\mathcal{C}_p(\lambda;j-j';t;T) = \frac{1}{Z} \sum_{\{N\}} e^{-\beta \tilde{E}_f} \mathcal{C}_p(\lambda;j-j';t), \quad (35)$$

并且我们用 $\mathcal{C}_p$（λ）代替 $\mathcal{C}_p$（λ，λ），以简化记号。式（35）右侧的求和定义了˜具有以下能谱的无自旋费米子的热态：E_f。

空穴关联函数（23）的处理方式与粒子关联函数相同。结果由方程（34）和（35）给出，其中 $\mathcal{C}_p$ 替换为

$$\mathcal{C}_h(\lambda;j-j';t) = \langle f | e^{i\lambda \hat{\mathcal{N}}_j(t)} \hat{c}_j^{\dagger}(t) \hat{c}_{j'} e^{-i\lambda \hat{\mathcal{N}}_{j'}(0)} | f \rangle. \quad (36)$$

不可穿透任意子的出现。—算符 $\hat{a}_j = \hat{c}_j e^{-i\lambda \hat{\mathcal{N}}_j}$ 满足对易关系

$$\hat{a}_j \hat{a}_{j'}^{\dagger} + e^{-i\lambda\epsilon(j-j')} \hat{a}_{j'}^{\dagger} \hat{a}_j = \delta_{jj'}, \quad (37)$$

$$\hat{a}_j \hat{a}_{j'} + e^{i\lambda\epsilon(j-j')} \hat{a}_{j'} \hat{a}_j = 0, \quad (38)$$

其中 $\epsilon(x) = |x|/x$，且 $\epsilon(0) = 0$。这是参考文献 [22]中讨论的费米子—任意子映射。函数 $\mathcal{C}_p(\lambda)$ 转化为

$$\mathcal{C}_p(-\lambda;j-j';t) = \langle f | \hat{a}_j(t) \hat{a}_{j'}^{\dagger}(0) | f \rangle, \quad (39)$$

这是晶格上不可穿透任意子的关联函数，其中变量 λ 为统计角。

任意子关联函数的出现，以及随后将其与函数 λ F 在方程（34）中积分，可以作如下理解。考虑一个含有 M 个自旋向上粒子和 $N-M$ 个自旋向下粒子的系统。从中选取一个自旋向上粒子，让它穿过整个系统，随后将它的坐标与其他粒子的坐标依次交换。与自旋向下粒子的交换并非平凡：由于总波函数的费米子对称性并不约束自旋部分的对称性，自旋部分的波函数可以产生任意相位因子。我们强调，通过考察坐标表示下的精确有限-波函数（例如参考文献中给出的波函数）来形式化地论证我们对方程（事后 34）结构的解释，超出了本文的范围。

在其他方法中的位置。——哈密顿量（16）在 $U_{j-j'} = 0$ 所表示的是一种可精确求解的$t-0$ 模型，也称为无限强排斥极限下的哈伯德模型 [24]。在该模型中，利用坐标表象下的精确波函数，式（34）被写成了弗雷德霍姆行列式的形式 [21, 23, 25]。将变换（9）–（12）用于推导式（34），再结合参考文献 [26] 中针对函数（27）给出的方法，只需经过简短得多的计算，就能得到相同的弗雷德霍姆行列式表示。请注意，当 $U_{j-j'} = U\delta_{j,\ j'\pm 1}$ 时，模型（19）也可精确求解。此时，哈密顿量（27）原则上可通过贝特拟设方法计算。

文献中特别关注了 $T \to 0$ 极限下的模型。其基态是非简并的；当 B 为负时，自旋向上（向下）极化

（为正时亦然）。在前一种情况下，式（34）描述一个自旋向上的费米子在由其他自旋向上费米子组成的气体中传播 [27]。由式（33）可得 $F = 2\pi\delta(\lambda)$，因此$G_p^{\uparrow} = \langle \hat{c}_j(t)\hat{c}_{j'}^{\dagger}\rangle$。在后一种情况下，式（34）描述一个自旋向上的费米子（一个杂质粒子）在由自旋向下费米子组成的气体中传播。此时有 $F = 1$，而$G_p^{\uparrow}$ 的长时间和长距离渐近行为揭示了对数扩散现象 [8, 9]。 $B \neq 0$ 处基态的非简并性与 $B = 0$处的高度简并形成鲜明对比；此时， F 由式（33）给出，其中 $\nu = 2$。这一状态被称为自旋非相干状态 [5–7]。上述研究提出的一项挑战是寻找低能有效场论，因为对于 $B > 0$和 $B = 0$，自旋激发的低能谱无法线性化，LL理论也不适用。表示式（34）以如下方式解决了这一问题：LL理论适用于函数 $\mathcal{C}_p$；自旋激发则由对 λ 的积分来描述，其权重函数为 F，且不作任何近似；这等价于在参考文献 [6, 8]所采用的第一量子化路径积分方法中对世界线数量进行计数。

致谢

我们感谢 V. Cheianov 和 K. Seetharam 富有成果的讨论。O.G. 感谢波兰国家学术交流署（NAWA）通过项目编号 PPN/ULM/2020/1/00247 提供支持。O.G. 感谢伽利略·伽利雷研究所的接待与支持；本研究的部分工作是在该所举办的“随机性、可积性与普适性”科学项目期间完成的。E. Q. 的工作得到项目编号 ANR-16-CE91-0009-01 的资助。K.B. 感谢 S. Bocini、V. Mari´c、L. Zadnik 和 M. Fagotti 提供有益的讨论。K.B. 的工作部分得到欧洲研究理事会 Starting Grant 项目（编号 805252 LoCoMacro）的支持。M. B. Z. 的工作得到项目编号 ANR-16-CE91-0009-01 的资助，以及法国国家科学研究中心 PICS06738 项目的支持。M. B. Z. 感谢俄罗斯量子中心和 A. Fedorov 教授在工作期间给予的接待。

[1] L. Pitaevskii 和 S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* 2003 （牛津大学出版社，牛津，）。[2] M. Girardeau，一维中不可穿透玻色子与费米子系统之间的关系，《数学物理杂志》1，516（1960）。[3] A. O. Gogolin、A. A. Nersesyan 和 A. M. Tsvelik, *Bosonization and Strongly Correlated Systems*（剑桥大学出版社，剑桥，1999）。[4] T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension*（牛津大学出版社，牛津，2004）。

[5]V. V. Cheianov 和 M. B. Zvonarev，《一维费米气体中的非幺正自旋-电荷分离》，Phys. Rev. Lett. 92, 176401 (2004), arXiv:cond- mat/0308470. [6] G. A. Fiete 和 L. Balents，《一维磁性非相干相互作用电子的格林函数》，Phys. Rev. Lett. 93, 226401 (2004), arXiv:cond-mat/0403744. [7] G. A. Fiete，《专题综述：自旋非相干卢廷格液体》，Rev. Mod. Phys. 79, 801 (2007), arXiv:cond-mat/0611597. [8] M. B. Zvonarev、V. V. Cheianov 和 T. Giamarchi，《一维铁磁玻色气体中的自旋动力学》，Phys. Rev. Lett. 99, 240404 (2007), arXiv:0708.3638. [9] S. Akhanjee 和 Y. Tserkovnyak，《强关联自旋极化链中的自旋-电荷分离》，Phys. Rev. B 76, 140408(R) (2007), arXiv:0708.4012. [10] A. Kamenev 和 L. I. Glazman，《一维自旋玻色液体的动力学：一种现象学方法》，Phys. Rev. A 80, 011603 (2009), arXiv:0808.0479.[11] M. B. Zvonarev、V. V. Cheianov 和 T. Giamarchi，《杨-高丁模型动态自旋结构因子中的边缘指数》，Phys. Rev. B 80, 201102 (2009), 0905.0598.[12]M. B. Zvonarev、V. V. Cheianov 和 T. Giamarchi，《莫特绝缘体到铁磁液体转变附近一维自旋1/2玻色-哈伯德模型的动力学性质》，Phys. Rev. Lett. 103, 110401 2009 0811 2676 ( ), arXiv: . . [13] A. Imambekov、T. L. Schmidt 和 L. I. Glazman，《一维量子液体：超越卢廷格液体范式》，Rev. Mod. Phys. 84, 1253 (2012), arXiv:1110.1374. [14] R. Senaratne、D. Cavazos-Cavazos、S. Wang、F. He、Y.- T. Chang、A. Kafle、H. Pu、X.-W. Guan 和 R. G. Hulet，《可调相互作用一维费米气体中的自旋-电荷分离》，Science 376, 1305 (2022), arXiv:2111.11545.[15] T. A. Hilker、G. Salomon、F. Grusdt、A. Omran、M. Boll、E. Demler、I. Bloch 和 C. Gross，《通过弦关联函数揭示掺杂哈伯德链中隐藏的反铁磁关联》，Science 357, 484 (2017), arXiv:1702.00642.[16] G. Salomon、J. Koepsell、J. Vijayan、T. A. Hilker、J. Ne- spolo、L. Pollet、I. Bloch 和 C. Gross，《直接观测哈伯德链中的非公度磁性》，Nature 565, 56 (2019), arXiv:1803.08892. [17] J. Vijayan、P. Sompet、G. Salomon、J. Koepsell、S. Hirthe、A. Bohrdt、F. Grusdt、I. Bloch 和 C. Gross，《时间分辨观测费米子哈伯德链中的自旋-电荷去禁闭》，Science 367, 186 (2020), arXiv:1905.13638. [18] M. Ogata 和 H. Shiba，《一维强关联哈伯德模型的贝特拟设波函数、动量分布和自旋关联》，Phys. Rev. B 41, 2326 (1990). [19] A. V. Zabrodin 和 A. A. Ovchinnikov，《强相互作用一维费米气体的自旋密度关联函数》，Soviet Physics - JETP (English Translation) 69, 750 1989( ). [20] A. V. Zabrodin 和 A. A. Ovchinnikov，《一维自旋1/2费米粒子系统的单粒子密度矩阵》，Theor. Math. Phys. 85, 1321 (1990).

[21]A. G. Izergin、A. G. Pronko 和 N. I. Abarenkova，《强耦合极限下一维哈伯德模型的温度关联函数》，Phys. Lett. A 245, 537 1998 9801167 ( ), hep-th/ . [22] M. D. Girardeau，《任意子-费米子映射及其在紧束缚波导中超冷气体研究中的应用》，Phys. Rev. Lett. 97, 100402 (2006), arXiv:cond-mat/0604357. [23] A. G. Izergin 和 A. G. Pronko，《一维双组分气体的温度关联函数》，Nucl. Phys. B 520, 594 (1998), arXiv:solv-int/9801004. [24] F. H. L. Essler、H. Frahm、F. G¨ohmann、A. Kl¨umper 和 V. E. Korepin，*The One-Dimensional Hubbard Model*(剑桥：剑桥大学出版社，2005)。[25] A. G. Izergin 和 A. G. Pronko，《一维双组分玻色气体和费米气体中的关联函数》，Phys. Lett. A 236, 445 (1997). [26] M. B. Zvonarev、V. V. Cheianov 和 T. Giamarchi，《作为弗雷德霍姆行列式的约当-维格纳算符时间依赖关联函数》，J. Stat. Mech. 2009, P07035 (2009), arXiv:0812.4059.[27] 关于此类“移动杂质”的动力学和有限温度方面，另请参见 [28–32]。

[28]O. Gamayun、A. G. Pronko 和 M. B. Zvonarev，《一维费米气体的杂质格林函数》，Nucl.Phys. B **892**，83（2015），1410.1502。[29] O. Gamayun、A. G. Pronko 和 M. B. Zvonarev，《一维费米气体和托克斯-吉拉多气体中杂质的时间和温度依赖关联函数：弗雷德霍姆行列式》，New J. Phys. **18**，045005（2016）1608 08200（），。。[30] O. Gamayun、O. Lychkovskiy、E. Burovski、M. Malcomson、V. V. Cheianov 和 M. B. Zvonarev，《注入方案对杂质定态的影响》，Phys. Rev. Lett. **120**，220605（2018），1402.6362。[31] O. Gamayun、O. Lychkovskiy 和 M. B. Zvonarev，《一维费米气体和托克斯-吉拉多气体极化子态中杂质的零温动量分布》，SciPost Phys. **8**，053（2020）。[32] O. Gamayun、M. Panfil 和 F. T. SantAna，《有限温度下一维气体中的可移动杂质》，Physical Review A **106**, 10.1103/physreva.106.023305 （2022）。