arXiv:2301.02174v1 [math.PR] 5 Jan 2023

布朗运动与分数布朗运动混合扰动下半线性随机偏微分方程的长时间行为

Marco Dozzi* Ekaterina T. Kolkovska† Jos´e A. L´opez-Mimbela† Rim Touibi‡

摘要

我们研究由乘性布朗运动与分数布朗运动混合驱动的半线性偏微分方程的逐轨道爆破解行为，该方程刻画了不同类型的随机扰动。假设线性算子具有一个符号恒定的特征函数，我们阐明了该特征函数、其特征值以及方程其他参数对解是否会在有限时间内爆破的影响。我们给出了有限时爆破概率以及在给定固定时间之前发生爆破的概率估计。相关随机偏微分方程的温和形式和弱形式是本文的关键工具。

关键词 随机反应扩散方程；混合分数噪声；轨道的有限时爆破

A数学主题分类 60H15 60G22 35R60 35B40 35B44 35K5

1 引言

本文研究如下形式的分数阶随机偏微分方程的解的存在性、唯一性及爆破行为

$$\begin{aligned} du(x,t) &= \left[\frac{1}{2}k^2(t)Lu(x,t) + g(u(x,t))\right]dt + u(x,t)\,dN_t, \quad x \in D, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \geq 0, \\ u(x,t) &= 0, \quad x \in \partial D, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界利普希茨区域， L 是强连续半群的无穷小生成元，该半群由压缩算子构成，并满足下文的条件 (3.18)、(3.19)，而 $\varphi \in L^\infty(D)$，其中 $L^\infty(D)$ 是定义在 D. 上的实值本质有界函数空间。此外， g 是一个非负局部利普希茨函数，且 N 是由下式给出的过程:

$$N_t = \int_0^t a(s)\,dB(s) + \int_0^t b(s)\,dB^H(s), \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

*通讯作者，marco.dozzi@univ-lorraine.fr，UMR-CNRS 7502，洛林埃利·嘉当研究所，法国南锡

†瓜纳华托数学研究中心，墨西哥。

‡UMR-CNRS 7502，洛林埃利·嘉当研究所，南锡，法国。

其中 B 是布朗运动， B^H 是赫斯特参数为 $H > 1/2$的分数布朗运动；a 连续， b 是 $\alpha > 1 - H$. 阶赫尔德连续的。假设 B 和 B^H均定义在滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \geqq 0)\ \mathbb{P})$ 上，并且适应于滤过 $(\mathcal{F}_t, t \geqq 0)$。此类模型近来在随机微分方程领域以“混合模型”之名得到研究，参见 [19] 和 [20]。当 $N = 0, L = \Delta, k = 1, g(u) = u^{1+\beta}$ 时，我们得到经典的藤田方程，该方程已在 [10]中研究。当N为布朗运动时， [7] 和 [1]研究了相应情形； [5] 考察了 N 为赫斯特参数为 $H > 1/2$ 的分数布朗运动且 $D \subset \mathbb{R}^d$的情形； [6] 则研究了 $H \geq 1/2$ 和 $D = \mathbb{R}^d$的情形。

分数布朗运动（fBm）常见于存在粗糙外力的许多随机现象中。与布朗运动相比，主要区别在于，分数布朗运动既不是半鞅，也不是马尔可夫过程，因此无法应用经典随机积分理论。由于 $H > 1/2$, 式（1.1）中关于 B^H 的随机积分可以理解为分数阶积分。此外，式（1.1）中同时存在布朗运动和分数布朗运动，由于二者在分析和概率性质上的差异，能够刻画解随时间随机演化的不同方面。 L 前面的因子 $k^2/2$ 会影响耗散性，在某些情况下有助于延缓甚至阻止爆破。

我们同时考虑式（1.1）的弱解和温和解，并证明二者等价且唯一。除了研究弱解和温和解的存在唯一性，我们还关注它们的定性行为。在下文的定理3中，我们得到一个随机时间 τ^* ，它是爆炸时间 $\tau.$ 的上界。在定理 8 中，我们得到 τ 的下界 τ_* ，使得几乎必然有。

$$\tau_* \leq \tau \leq \tau^*.$$

随机时间 τ_* 和 τ^* 由布朗运动与分数布朗运动混合过程的指数泛函给出。目前尚不了解此类泛函的分布。为了研究 τ^* 的分布，我们使用 B^H 的如下经典表示

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t,s)\, dW_s,$$

其中，核 K^H 由（3.23）给出，而 W 是在与 B相同的滤过概率空间上定义的布朗运动。一般而言，W 可能不同于出现在（1.2）第一个积分中的布朗运动 B 。我们获得了概率 $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ 以及 τ^*的尾分布的估计。为此，我们采用了 N.T. Dung [8, 9] 关于连续等距正态高斯过程的马利亚万理论的最新结果。

在定理4中，我们在 $B = W$的情况下得到了 $\mathbb{P}(\tau^* \leq T)$的上界；在定理5中，我们讨论了 B 与 W 相互独立，以及 B 和 W 为一般布朗运动的情形。在定理 6中，当 $B = W$时，我们得到了 $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ 的下界。因此，在 $W = B$ 的情况下，我们得到了系数 a、b 和 k 的具体配置，在这些配置下，方程(1.1)的弱解（因而温和解也）会发生有限时爆破。具体而言，假设 $g(z) \geq Cz^{1+\beta}$ ，其中

某些常数 $C > 0$、 $\beta > 0$、 $B_t^H = \int_0^t K^H(t、 s)\, dB_s$，并且

$$\int_0^t a^2(r)\, dr \sim t^{2l}, \quad \int_0^t b^2(r)\, dr \sim t^{2m}, \quad \int_0^t k^2(r)\, dr \sim t^{2p} \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

对于某些非负常数 l， m 和 p。若$\beta \in (0,\ 1/2)$ 且 $\max\{p, l\} > H + m - 1/2$，或若 $\beta = 1/2$且 $p > H + m - 1/2$，或若 $\beta > 1/2$且 $p > \max\{l, H + m - 1/2\}$，则方程 (1.1) 的所有非平凡正解都以正概率发生有限时爆破。

我们在此采用的方法是将方程 (1.1) 变换为随机偏微分方程（RPDE）(2.5)，其解与方程 (1.1) 的解在同一随机时刻 τ 发生爆破，并对该方程进行研究。确定 (2.5) 的爆破行为较为容易，因为其中 N 是一个系数，而不像在 (1.1) 中那样是随机积分器。对于比 (1.1) 更一般的随机偏微分方程，这类变换也已为人所知，包括随机项不以线性方式依赖于 u的方程，参见 [17]。但对于与更一般的随机偏微分方程相关的随机偏微分方程，要找到爆破时间上界和下界的显式表达式似乎很困难，而这正是本研究的关键所在。选择 (1.1) 和 (2.5) 这种相对简单形式的另一个原因是，我们考察逐轨道爆破；与解的矩发生爆破（例如参见 [4]）相比，这是一种相对较强的概念。证明中的关键要素是 L. 的伴随算子存在一个正特征值和一个符号恒定的特征函数。我们特别关注 $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ 的情形，因为此时过程 N等价于布朗运动 [3]。这使我们能够运用 Dufresne 和 Yor 关于布朗运动指数泛函分布的结果 [27]，从而在定理 7 中得到有限时间内发生爆破概率的显式下界。

本节最后介绍后文所需的一些记号和定义。关于滤过 $(\mathcal{F}_t, t \geqq 0)$，停时 $\tau\colon \Omega \to (0, \infty)$ 若满足以下条件，则称为解 u（1.1）的爆破时间：

$$\limsup_{t \nearrow \tau} \sup_{x \in D} |u(x,t)| = +\infty \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

设（P_t^D， $t \geqq 0$）和（（P^D）$_t^*$， $t \geqq 0$）分别是与算子 L 及其伴随算子 L^*对应的强连续半群：

$$\int_D f(x) P_t^D g(x) dx = \int_D g(x) (P^D)_t^* f(x) dx, \quad f, g \in L^2(D). \tag{1.3}$$

通常，对于定义域内的所有 $f \in L^2(D)$，都有 $Lf := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(P_t^D f - f)$，该定义域记为 Dom($L$)。根据 Hille–Yosida定理，Dom($L$) 和 Dom($L^*$) 在 $L^2(D)$ 中稠密。令 $P_t^D(x, \Gamma)$ 和 $(P^D)_t^*(x, \Gamma)$ 表示相应的转移函数，其中 $t > 0$、 $x \in D$ 和 $\Gamma \in \mathcal{B}(D)$ 是 D 上的博雷尔集。下文假设它们具有密度，即存在连续函数族

$(p^D(t,\cdot,\cdot)\ t>0)$ 和 $((p^D)^*(t,\cdot,\cdot)\ t>0)$ 定义在 $D\times D$ 上，使得

$$\begin{aligned} P_t^D g(x) &= \int_D g(y)P_t^D(x,dy)=\int_D g(y)p^D(t,x,y)dy,\\ (P^D)_t^* f(x) &= \int_D f(y)(P^D)_t^*(x,dy)=\int_D f(y)(p^D)^*(t,x,y)dy. \end{aligned}$$

由 (1.3),

$$(p^D)^*(t,x,y)=p^D(t,y,x)\quad \text{for all } t>0 \text{ and } x,y\in D. \tag{1.4}$$

2 相关随机偏微分方程的弱解及其与温和解的等价性

考虑随机偏微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{2}k^2(t)Lv(x,t)-\frac{1}{2}a^2(t)v(x,t)+\exp(-N_t)g(\exp(N_t)v(x,t)), \\ v(x,0) &= \varphi(x),\ x\in D, \\ v(x,t) &= 0,\ t\geq 0,\ x\in\partial D. \end{aligned} \tag{2.5}$$

本节中，我们利用变换$v(x,t)=\exp(-N_t)u(x,t)\ \ x\in D,\ t\geq 0.$ 将 (1.1) 的弱形式变为 (2.5) 的弱形式。因此，如果在有限时间内发生爆破，那么两个方程的解当然会在同一时刻、同一位置 $x\in D$ 发生爆破。

下文中，我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_D$ 表示 $L^2(D)$ 中的内积。

定义 1. 若一个取值于$L^2(D)$的 $(\mathcal{F}_t,t\geqq 0)$-适应随机场 $v=(v(x,t)\ \ t\in[0,T],\ x\in D)$ 满足：对所有 $t\in[0,T]$ 以及所有 $f\in\mathrm{Dom}(L^*)$，都有 $\mathbb{P}$-几乎处处成立，则称其为 (2.5) 的弱解。

$$\begin{aligned} \langle v(\cdot,t),f\rangle_D &= \langle\varphi,f\rangle_D+\int_0^t\left(\frac{1}{2}k^2(s)\langle v(\cdot,s),L^*f\rangle_D-\frac{1}{2}a^2(s)\langle v(\cdot,s),f\rangle_D\right)ds \\ &\quad+\int_0^t\exp(-N_s)\langle g(\exp(N_s)v(\cdot,s)),f\rangle_D\,ds. \end{aligned} \tag{2.6}$$

由于 g 被假设为局部利普希茨函数，v 可能在有限时间内发生爆破，且爆破时间 τ 通常取决于 $\omega\in\Omega$。方程 (2.5) 在 τ 之前的弱解定义为一个 $(\mathcal{F}_t,t\geqq 0)$-适应随机场 v，它对于所有 $t\in(0,T\wedge\tau)$ $\mathbb{P}$-几乎处处满足 (2.6)。如果 ω 满足 $v(\omega,\cdot,\cdot)$ 不会在有限时间内发生爆破，则令 $\tau(\omega)=\infty.$

定义 2. 若取值于 $L^2(D)$ 的 $(\mathcal{F}_t,t\geqq 0)$-适应随机场 $u=(u(x,t)\ \ t\in[0,T],x\in D)$ 满足 τ，则称其为方程 (1.1) 的弱解；此处，对所有 $t\in(0,T\wedge\tau)$ 以及所有 $f\in\mathrm{Dom}(L^*)$ $\mathbb{P}$，均几乎必然成立。

$$(i)\ \int_0^t a^2(s)\left[1+\langle u(\cdot,s),f\rangle_D^2\right]ds<\infty,\quad b(\bullet)\langle u(\cdot,\bullet),f\rangle_D\in\mathcal{C}^\beta[0,t]\ \textit{for some}\ \beta>1-H,$$

$$(ii)\quad \int_0^t \left(k^2(s)\,|\langle u(\cdot,s), L^*f\rangle_D| + |\langle g(u(\cdot,s)), f\rangle_D|\right)\,ds < \infty,$$

and

$$\langle u(\cdot,t), f\rangle_D = \langle \varphi, f\rangle_D + \int_0^t \left(\frac{1}{2}k^2(s)\,\langle u(\cdot,s), L^*f\rangle_D + \langle g(u(\cdot,s), f\rangle_D\right) ds$$

$$+ \int_0^t \langle u(\cdot,s), f\rangle_D\, dN_s. \tag{2.7}$$

上述定义中的条件 (i) 和 (ii) 足以保证 (2.7) 中的 Itˆo 积分、分数阶积分和勒贝格积分几乎必然有定义。

现在我们来讨论 (2.7) 与 (2.6) 之间的关系。

命题 1. 若 u 是 (1.1) 的弱解，且定义在随机时刻 τ之前，则 $v(x,t) = \exp(-N_t)u(x,t)$ 是 (2.5) 的弱解，且定义在 τ之前；反之亦然。

注 1. 我们注意到，若 v 是 (2.5) 的弱解，则 $\langle v(\cdot,s)\ f\rangle_D$ 在 s 上绝对连续。取 $u(x,t) := \exp(N_t)v(x,t)$ 后，条件 (i) 得到满足。事实上，对于 $t < T \wedge \tau(\omega)$,

$$\int_0^t \langle u(\cdot,s), f\rangle_D\, a(s)\, dB_s = \int_0^t \langle v(\cdot,s), f\rangle_D \exp(N_s)a(s)\, dB_s$$

它定义良好，因为 $\int_0^t (\int_D v(x,s)f(x)\ dx)^2 \exp(2N_s)a^2(s)\ ds < \infty$ $\mathbb{P}$-几乎必然。

回顾一下，分数阶积分 $\int_0^T f(x)dg(x)$（按 Z ¨ahle *[28]*的意义）在 *[18,* Def. 2.1.*1]* 中定义，适用于属于分数阶索伯列夫空间的 f, g 。若 $0 < \varepsilon < H$, f 和 g 分别是指数为 α 和 $H - \varepsilon$ 的 H ¨older 连续函数，且 $\alpha + H - \varepsilon > 1$，则该分数阶积分与相应的广义黎曼–斯蒂尔杰斯积分一致；参见 *[18,* Thm. 2.1.*7]*。因此，分数阶积分

$$\int_0^t \langle u(\cdot,s), f\rangle_D\, b(s)\, dB_s^H = \int_0^t \langle v(\cdot,s), f\rangle_D \exp(N_s)b(s)\, dB_s^H \tag{2.8}$$

对于 $t < T \wedge \tau(\omega)$，该积分是良定义的，因为一方面，根据柯尔莫哥洛夫定理和 *[22,* 命题 4.*1]*，$N_\cdot = \int_0^\cdot (a(s)\ dB_s + b(s)\ dB_s^H)$ 对所有 $\epsilon > 0$ 几乎必然是 $\mathbb{P}$-H ¨older 连续的，连续阶为 $1/2 - \epsilon$ 。另一方面， $b(\cdot)$ 是 α-H ¨older 连续的（其中 $\alpha > 1 - H$），而 B^H 对任意 $\varepsilon > 0$都是指数为 $H - \varepsilon$ 的 H ¨older 连续函数。因此，取 $\varepsilon < \min\{H/2 - 1/4, \alpha + H - 1\}$ ，可得 (2.8) 右侧的被积函数是连续阶为 $\min\{\alpha, 1/2 - \varepsilon\}$ 的 H ¨older 连续函数，故 $H - \varepsilon + \min\{\alpha, 1/2 - \varepsilon\} > 1$ ，该积分作为广义黎曼–斯蒂尔杰斯积分是良定义的。

证明。令 $T > 0$. It 如此 只需证明该断言对 $t \in (0, T \wedge \tau)$ 成立。我们应用（稍作推广的

) [18, 第 184] 页中的伊藤公式。令

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \int_0^t a(s)\,dB_s\ , \quad Y_t^2 = \int_0^t \langle u(\cdot,s), f\rangle_D\, a(s)\,dB_s, \\ Y_t^3 &= \int_0^t b(s)\,dB_s^H, \quad Y_t^4 = \int_0^t \langle u(\cdot,s), f\rangle_D\, b(s)\,dB_s^H, \\ Y_t^5 &= \langle \varphi, f\rangle_D + \int_0^t \left(\frac{1}{2}k^2(s)\,\langle u(\cdot,s), L^*f\rangle_D + \langle g(u(\cdot,s)), f\rangle_D\right) ds, \end{aligned}$$

并令 $F(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) = \exp(-y_1-y_3)(y_5+y_2+y_4)$。于是

$$F(Y_t^1,\ldots,Y_t^5) = \exp(-N_t)\,\langle u(\cdot,t), f\rangle_D = \langle v(\cdot,t), f\rangle_D\,.$$

上述 Itô 公式可写为

$$\begin{aligned} &F(Y_t^1,\ldots,Y_t^5) \\ &= F(Y_0^1,\ldots,Y_0^5) + \sum_{i=1}^5 \int_0^t \frac{\partial F}{\partial y_i}(Y_s^1,\ldots,Y_s^5)\,dY_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2 \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(Y_s^1,\ldots,Y_s^5)\,d\left\langle Y_s^i, Y_s^j\right\rangle. \end{aligned}$$

由于 u 是方程 (1.1) 的弱解,

$$\begin{aligned} \langle v(\cdot,t), f\rangle_D &= \langle \varphi, f\rangle_D - \int_0^t \exp(-N_s)\,\langle u(\cdot,s), f\rangle_D \left(a(s)\,dB_s + b(s)\,dB_s^H\right) \\ &\quad + \int_0^t \exp(-N_s)\,\langle u(\cdot,s), f\rangle_D \left(a(s)dB_s + b(s)dB_s^H\right) \\ &\quad + \int_0^t \exp(-N_s)\left(\frac{1}{2}k^2(s)\,\langle u(\cdot,s), L^*f\rangle_D + \langle g(u(\cdot,s)), f\rangle_D\right) ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \exp(-N_s)\,\langle u(\cdot,s), f\rangle_D\, a^2(s) ds \\ &= \langle \varphi, f\rangle_D + \int_0^t \left(\frac{1}{2}k^2(s)\,\langle v(\cdot,s), L^*f\rangle_D - \frac{1}{2}a^2(s)\,\langle v(\cdot,s), f\rangle_D\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \exp(-N_s)\,\langle g(\exp(N_s)v(\cdot,s)), f\rangle_D\, ds. \end{aligned}$$

因此 v 是方程 (2.5) 的弱解。类似地，我们也可得到反向结论。 □

为了定义方程 (1.1) 和 (2.5) 的温和解，我们首先定义与生成元 $\frac{1}{2}k^2(t)L$. 对应的压缩演化族。对于 $0 \le s < t$ ，令

$$K(t,s) = \frac{1}{2}\int_s^t k^2(r)\,dr, \quad A(t,s) = \frac{1}{2}\int_s^t a^2(r)\,dr, \quad K(t) = K(t,0), \quad A(t) = A(t,0), \tag{2.9}$$

并设 $p^D(s,x;\,t,y) = p^D(K(t,s)\;x,y)\;\; x,y \in D\times D,\, 0 \leqq s < t.$。对于 $f \in L^2(D)$，相应的 $L^2(D)$ 上的压缩演化族定义为

$$\begin{aligned} U^D(t,s)f(x) &= \int_D p^D(s,x;t,y)f(y)dy = P^D_{K(t,s)}f(x), \\ (U^D)^*(t,s)f(x) &= \int_D p^D(s,y;t,x)f(y)dy = (P^D)^*_{K(t,s)}f(x). \end{aligned}$$

定义 3. 若取值于 $L^2(D)$ 的 $(\mathcal{F}_t, t \geqq 0)$-适应随机场 $v = (v(x,t)\;\; t \geqq 0,\; x \in D)$ 满足以下条件，则称其为 (2.5) 在 $[0,T]$ 上的温和解：对所有 $t \in [0,T]$, $\mathbb{P}$- 几乎必然成立。

$$\begin{aligned} v(x,t) &= U^D(t,0)\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)U^D(t,s)v(x,s)\,ds \\ &\quad + \int_0^t \exp(-N_s)U^D(t,s)\left(g((\exp N_s)v(x,s))\right)\,ds. \end{aligned}$$

命题 2. (2.5) 的温和形式可写为

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \exp(-A(t))U^D(t,0)\varphi(x) \\ &\quad + \int_0^t \exp(-N_s - A(t,s))U^D(t,s)g(\exp(N_s)v(\cdot,s))(x)ds, \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中，$A(t,s)$ 和 $A(t)$ 在 (2.9) 中给出。

注 2. 由于 g 和 φ 被假设为非负，

$$v(x,t) \geq \exp(-A(t))U^D(t,0)\varphi(x) \geq 0 \;\; for\;\; all\; x \in D \;\; and\; t \geq 0.$$

证明. 令 $w(x,t) = \exp(A(t))v(x,t)$. 对于 $f \in L^2(D)$，由温和解的定义可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle w(\cdot,t), f\rangle_D &= \frac{1}{2}a^2(t)\exp(A(t))\langle v(\cdot,t), f\rangle_D + \exp(A(t))\frac{d}{dt}\langle v(\cdot,t), f\rangle_D \\ &= \frac{1}{2}a^2(t)\exp(A(t))\langle v(\cdot,t), f\rangle_D \\ &\quad + \exp(A(t))\left(\frac{1}{2}k^2(t)\left\langle v(\cdot,t), L^*f\right\rangle_D - \frac{1}{2}a^2(t)\left\langle v(\cdot,t), f\right\rangle_D\right) \\ &\quad + \exp(A(t))\exp(-N_t)\left\langle g(\exp(N_t)v(\cdot,t)), f\right\rangle_D \\ &= \frac{1}{2}\exp(A(t))k^2(t)\left\langle v(\cdot,t), L^*f\right\rangle_D + \exp(A(t)-N_t)\left\langle g(\exp(N_t)v(\cdot,t)), f\right\rangle_D \\ &= \frac{1}{2}k^2(t)\left\langle w(\cdot,t), L^*f\right\rangle_D + \exp(A(t)-N_t)\left\langle g(\exp(N_t - A(t))w(\cdot,t)), f\right\rangle_D, \end{aligned}$$

满足边界条件 $w(x,0) = \varphi(x)$，其中 $x \in D$ 和 $w(x,t) = 0$，其中 $x \in \partial D$.。因此，w 是随机偏微分方程的弱解，形式上可表示为

$$\frac{d}{dt}w(x,t) = \frac{1}{2}k^2(t)Lw(x,t) + \exp(A(t)-N_t)g(\exp(N_t - A(t))w(x,t)).$$

根据温和解的定义

$$w(x,t) = U^D(t,0)\varphi(x) + \int_0^t \exp(A(s) - N_s)U^D(t,s)g(\exp(N_s - A(s))w(\cdot,s))(x)\,ds.$$

因此,

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \exp(-A(t))w(x,t) \\ &= \exp(-A(t))U^D(t,0)\varphi(x) + \int_0^t ds\exp(-A(t,s) - N_s)U^D(t,s)g(\exp(N_s)v(\cdot,s))(x). \end{aligned}$$

□

定理1. 方程 (2.10) 存在唯一的非负局部温和解，即存在 $t > 0$，使得 (2.10) 在 $L^\infty([0,t[\times D)$ 中有温和解。

证明. 令 $T > 0$，并记 $E_T = \{v\colon [0,T]\times D \to L^\infty(D)\colon [\![v]\!] < \infty\}$，其中

$$[\![v]\!] := \sup_{0\le t\le T} \|v(t,\cdot)\|_\infty.$$

令 $P_T = \{v \in E_T\colon v \ge 0\}$，对于 $R > 0$，令 $C_R = \{v \in E_T\colon [\![v]\!] \le R\}$. 。则 E_T 是一个巴拿赫空间，且 P_T 和 C_R 是 E_T 的闭子集。现在定义

$$\psi(v)(t,x) = e^{-A(t)}U^D(t,0)\varphi(x) + \int_0^t e^{-A(t,s)-N_s}U^D(t,s)g\left(e^{N_s}v(\cdot,s)\right)(x)\,ds.$$

我们将证明，当 R 足够大且 T 足够小时，ψ 是 $P_T \cap C_R$ 上的压缩映射。令 v_1，$v_2 \in P_T \cap C_R$. 。则

$$[\![\psi(v_1) - \psi(v_2)]\!] \le \sup_{0\le t\le T}\int_0^t \left\|e^{-N_s}\left[g\left(e^{N_s}v_1\right) - g\left(e^{N_s}v_2\right)\right]\right\|_\infty ds.$$

令 $A_T = \sup_{0\le s\le T} e^{|N_s|}$ 且 $G_R = \sup_{|x|<R}|g(x)|$，并假设 g 在以 0 为中心、半径为 $R > 0$ 的球内是局部利普希茨的，其利普希茨常数为 K_R。则,

$$\sup_{0\le s\le T}\left\|e^{-N_s}v_i(s,\cdot)\right\|_\infty \le A_T R, \quad i = 1,2,$$

and

$$\left\|e^{-N_s}g\left(e^{N_s}v_1(s,\cdot)\right) - e^{-N_s}g\left(e^{N_s}v_2(s,\cdot)\right)\right\|_\infty \le A_T^2 K_{A_T R}\left\|v_1(s) - v_2(s)\right\|_\infty.$$

因此,

$$[\![\psi(v_1) - \psi(v_2)]\!] \le \sup_{0\le t\le T}\int_0^t A_T^2 K_{A_T R}[\![v_1 - v_2]\!]\,ds = TA_T^2 K_{A_t R}[\![v_1 - v_2]\!].$$

我们需要

$$TA_T^2 K_{A_T R} < 1. \tag{2.11}$$

此外，我们要求 $C_R \cap P_T$在 ψ的作用下映射到自身。令 $v \in C_R \cap P_T$。利用当 $0 \leq s \leq T$时，算子 $U^D(t,s)$ 是压缩映射，且 $\|e^{N_s} v(\cdot,s)\|_\infty \leq A_T R$，可得 $\|g(e^{N_s} v(\cdot,s))\|_\infty \leq G_{A_T R}$. 由此可得

$$[\![\psi(v)]\!] \leq \|\varphi\|_\infty + \sup_{0\leq t\leq T} \int_0^t \left\| e^{-N(s)} \right\|_\infty ds\, G_{A_T R} \leq \|\varphi\|_\infty + TA_T G_{A_T R}.$$

因此，我们需要

$$\|\varphi\|_\infty + TA_T G_{A_T R} < R. \tag{2.12}$$

令 R满足 $R \geq 2\|\varphi\|_\infty$。由于 $\lim_{T\to 0} A_T = 1$，我们选取 $\varepsilon_1 > 0$，使得当 $T < \varepsilon_1$时有 $A_T < 2$，并且

$$\varepsilon < \frac{R}{4G_{2R}} \wedge \frac{1}{4K_{2R}} \wedge \varepsilon_1.$$

利用 $G_A \leq G_B$，以及当 $A \leq B$时 $K_A \leq K_B$，可得对于 $R > 2\|\varphi\|_\infty$ 和 $T < \varepsilon$,

$$\|\varphi\|_\infty + TA_T G_{A_T R} \leq \|\varphi\|_\infty + 2\varepsilon G_{2R} < \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

and

$$TA_T^2 K_{A_T R} < 4\varepsilon K_{2R} < 1.$$

□

我们接下来证明（2.5）的弱解与温和解等价。该定理的证明沿用 [24, 定理9.15], 中的方法，其中证明了具有自治微分算子且由 Lévy 噪声驱动的随机偏微分方程的弱解与温和解等价。关于由分数布朗运动驱动的随机偏微分方程的弱解与温和解的比较，请参见 [11]。

我们首先陈述 U^D. 的柯尔莫哥洛夫后向方程和前向方程。根据关于 P^D 的柯尔莫哥洛夫后向方程，转移密度 $p^D(u,x,y)$ 满足：对于任意固定的 y， $\frac{\partial}{\partial u} p^D(u,x,y) = Lp^D(u,x,y)$。那么，$(s,x) \to p^D(s,x;\, t,y)$ 满足以下方程，其中 (t,y) 固定：

$$-\frac{\partial}{\partial s} p^D(s,x;t,y) = -\frac{\partial}{\partial s} p^D(K(t,s),x,y) = -\frac{\partial}{\partial u} p^D(u,x,y) \mid_{u=K(t,s)} \frac{\partial}{\partial s} K(t,s)$$

$$= \frac{1}{2} k^2(s) Lp^D(K(t,s),x,y) = \frac{1}{2} k^2(s) Lp^D(s,x;t,y). \tag{2.13}$$

类似地，由于关于 P^D 的柯尔莫哥洛夫前向方程，对于任意固定的 x， $p^D(u,x,y)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial u} p^D(u,x,y) = L^* p^D(u,x,y).$$

于是，$(t,y) \to p^D(s,x;t,y)$ 在 (s,x) 固定时满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}p^D(s,x;t,y) = \frac{\partial}{\partial t}p^D(K(t,s),x,y) = \frac{\partial}{\partial u}p^D(u,x,y)\mid_{u=K(t,s)} \frac{\partial}{\partial t}K(t,s)$$

$$= \frac{1}{2}k^2(t)L^*p^D(K(t,s),x,y) = \frac{1}{2}k^2(t)L^*p^D(s,x;t,y). \tag{2.14}$$

定理 2. 考虑随机偏微分方程 (2.5)。则 v 是(2.5) 在 $[0,T]$ 上的弱解，当且仅当 v是(2.5) 在 $[0,T]$上的温和解。

证明。假设 v是 (2.5) 的弱解。令 $h \in C^1([0,\infty)\ \mathbb{R})$, $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$, 且 $G(x,t) := -\frac{1}{2}a^2(t)v(x,t) + \exp(-N_t)g(\exp(N_t)v(x,t))$。由于 $h \in C^1([0,\infty)\ \mathbb{R})$，分部积分公式适用（见 [24] 命题 9.16），从而得到

$$\begin{aligned}\langle v(\cdot,t),h(t)f(\cdot)\rangle_D &= \langle v(\cdot,0),h(0)f(\cdot)\rangle_D + \int_0^t \langle v(\cdot,s),h'(s)f(\cdot)\rangle_D\,ds \\ &+ \int_0^t \langle v(\cdot,s),\frac{1}{2}h(s)k^2(s)L^*f(\cdot)\rangle_D\,ds + \int_0^t \langle G(\cdot,s),h(s)f(\cdot)\rangle_D\,ds.\end{aligned}$$

由于函数 $h\cdot f$ 在 $C^1([0,\infty),\mathrm{Dom}(L^*))$ 中稠密，对于每个 $z \in C^1([0,\infty),\mathrm{Dom}(L^*))$，我们有

$$\begin{aligned}\langle v(\cdot,t),z(\cdot,t)\rangle_D &= \langle v(\cdot,0),z(\cdot,0)\rangle_D + \int_0^t \langle v(\cdot,s),\frac{\partial}{\partial s}z(\cdot,s)\rangle_D\,ds \\ &+ \int_0^t \langle v(\cdot,s),\frac{1}{2}k^2(s)L^*z(\cdot,s)\rangle_D\,ds + \int_0^t \langle G(\cdot,s),z(\cdot,s)\rangle_D\,ds.\end{aligned} \tag{2.15}$$

对于每个 $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$，我们定义

$$\psi(x,s) := (U^D)^*(t,s)f(x) = \begin{cases} \langle p^{D^*}(s,x;t,\cdot),f(\cdot)\rangle_D & \text{if } s<t, \\ f(x) & \text{if } s=t, \end{cases}$$

因此 $\psi \in C^1([0,\infty),\mathrm{Dom}(L^*))$。在 (2.15) 中取 $z=\psi(x,s)$，对于任意固定的 $t\in[0,T]$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle v(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\rangle_D &= \langle v(\cdot,0),\psi(\cdot,0)\rangle_D + \int_0^t \left\langle v(\cdot,s),\frac{d}{ds}\psi(\cdot,s) + \frac{1}{2}k^2(s)L^*\psi(\cdot,s)\right\rangle_D ds \\ &+ \int_0^t \langle G(\cdot,s),\psi(\cdot,s)\rangle_D\,ds.\end{aligned} \tag{2.16}$$

现在我们来计算上述各项:

$$\begin{aligned}\langle v(\cdot,0),\psi(\cdot,0)\rangle_D &= \int_D v(x,0)\int_D p^{D^*}(0,x;t,y)f(y)\,dy\,dx \\ &= \int_D f(y)\int_D p^{D^*}(0,x;t,y)v(x,0)\,dx\,dy \;=\; \left\langle U^D(t,0)v(\cdot,0),f(\cdot)\right\rangle_D.\end{aligned}$$

将柯尔莫哥洛夫后向方程应用于 $(x,s) \to (U^D)^*(t,s)f(x)$，可得

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\psi(x,s) &= -\frac{\partial}{\partial s}\left\langle (p^D)^*(s,x;t,\cdot), f(\cdot)\right\rangle_D \\ &= \frac{1}{2}k^2(s)L^*\left\langle (p^D)^*(s,x;t,\cdot), f(\cdot)\right\rangle_D = \frac{1}{2}k^2(s)L^*\psi(x,s). \end{aligned}$$

此外，由富比尼定理和 (1.4)

$$\begin{aligned} \langle G(\cdot,s), \psi(\cdot,s)\rangle_D &= \int_D G(x,s)\int_D p^{D^*}(s,x;t,y)f(y)\,dy\,dx \\ &= \int_D f(y)\int_D p^D(s,y;t,x)G(x,s)\,dx\,dy \;=\; \left\langle U^D(t,s)G(\cdot,s), f(\cdot)\right\rangle_D. \end{aligned}$$

因此，由 (2.16)，$\langle v(\cdot,t)\ f(\cdot)\rangle_D = \left\langle U^D(t,0)v(\cdot,0)\ f(\cdot)\right\rangle_D + \int_0^t \langle U^D(t,s)G(\cdot,s)\ f(\cdot)\rangle_D\,ds$ 对所有 $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$ 均成立。由于 $\mathrm{Dom}(L^*)$ 在 $L^2(D)$ 中稠密，我们得到 v 是 (2.5) 在 $[0,T]$. 上的温和解。为证明逆命题，设 v 是 (2.5) 在 $[0,T]$. 上的温和解。对于 $f \in \mathrm{Dom}(L^*)$,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left\langle v(\cdot,s), \frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot)\right\rangle_D ds \\ &= \int_0^t \left\langle U^D(s,0)v(\cdot,0), \frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot)\right\rangle_D ds \\ &\quad + \int_0^t \left\langle \int_0^s \chi_{[0,s]}(r)U^D(s,r)G(\cdot,r)\,dr, \frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot)\right\rangle_D ds \\ &= \int_0^t \left\langle v(\cdot,0), (U^D)^*(s,0)\frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot)\right\rangle_D ds \\ &\quad + \int_0^t\int_r^t \left\langle U^D(s,r)G(\cdot,r), \frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot)\right\rangle_D ds\,dr. \end{aligned} \tag{2.17}$$

将柯尔莫哥洛夫前向方程应用于 $(U^D)^*$，得到 (2.17) 右侧的第一个积分:

$$\begin{aligned} &(U^D)^*(s,0)(\frac{1}{2}k^2(s)L^*f)(x) = \int_D p^{D^*}(0,x;s,y)\frac{1}{2}k^2(s)L^*f(y)\,dy \\ &= \int_D (\frac{1}{2}k^2(s)L)p^{D^*}(0,x;s,y)f(y)\,dy = \int_D \frac{\partial}{\partial s}p^{D^*}(0,x;s,y)f(y)\,dy, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left\langle v(\cdot,0), (U^D)^*(s,0)(\frac{1}{2}k^2(s)L^*)f(\cdot)\right\rangle_D ds \\ &= \int_0^t \left\langle v(\cdot,0), \int_D \frac{\partial}{\partial s}p^{D^*}(0,\cdot;s,y)f(y)\,dy\right\rangle_D ds \;=\; \left\langle v(\cdot,0), \int_D p^{D^*}(0,\cdot;t,y)f(y)dy - f(\cdot)\right\rangle_D \\ &= \left\langle v(\cdot,0), (U^D)^*(t,0)f(\cdot)\right\rangle_D - \langle v(\cdot,0), f(\cdot)\rangle_D. \end{aligned}$$

同理，我们得到 (2.17) 右侧的第二个积分

$$\begin{aligned}\left\langle U^D(s,r)G(\cdot,r),\frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot))\right\rangle_D &= \left\langle G(\cdot,r),(U^D)^*(s,r)(\frac{1}{2}k^2(s)L^*f)(\cdot)\right\rangle_D \\ &= \left\langle G(\cdot,r),\int_D\frac{\partial}{\partial s}p^{D^*}(r,\cdot;s,y)f(y)dy\right\rangle_D,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_r^t\left\langle U^D(s,r)G(\cdot,r),\frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot)\right\rangle_D ds=\int_r^t\left\langle G(\cdot,r),\int_D\frac{\partial}{\partial s}p^{D^*}(r,\cdot;s,y)f(y)dy\right\rangle_D ds\\ &= \left\langle G(\cdot,r),\int_D p^{D^*}(r,\cdot;t,y)f(y)dy-f(\cdot)\right\rangle_D=\left\langle G(\cdot,r),(U^D)^*(t,r)f(\cdot)-f(\cdot)\right\rangle_D\\ &= \left\langle U^D(t,r)G(\cdot,r),f(\cdot)\right\rangle_D-\left\langle G(\cdot,r),f(\cdot)\right\rangle_D.\end{aligned}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\langle v(\cdot,s),\frac{1}{2}k^2(s)L^*f(\cdot)\rangle_D\,ds\\ &= \left\langle U^D(t,0)v(\cdot,0)+\int_0^t U^D(t,r)G(\cdot,r)dr,f(\cdot)\rangle_D-\langle v(\cdot,0),f(\cdot)\right\rangle_D-\int_0^t\langle G(\cdot,r),f(\cdot)\rangle_D\,dr\\ &= \left\langle v(\cdot,t),f(\cdot)\right\rangle_D-\left\langle v(\cdot,0),f(\cdot)\right\rangle_D-\int_0^t\langle G(\cdot,r),f(\cdot)\rangle_D\,dr,\end{aligned}$$

由于 v 是 $[0,T]$上的温和解。因此， v 是 $[0,T]$.上的弱解 □

推论1。方程 (1.1) 和 (2.5) 存在唯一的弱解。

证明。定理 2 和命题 1 表明，(2.5) 存在局部弱解和温和解，且具有存在唯一性；命题 1 表明，(1.1) 的弱解具有唯一性。 □

备注 3。关于具有非自治二阶微分算子且由分数布朗运动驱动的随机偏微分方程的变分解存在唯一性定理，参见 *[23]* ；关于温和解的存在唯一性，参见 *[26]* 。 *[20]* 证明了具有相同微分算子且由混合噪声驱动的方程存在唯一的温和解。

3 爆破时间和概率估计的上界

3.1 爆破时间的上界

在本文余下部分中，我们将假设 L 和 L^* 存在严格正特征函数：存在一个正特征值 λ_0 以及严格正特征函数 $\psi_0\in$ Dom(L)，对应于 P_t^D和

$\varphi_0 \in \mathrm{Dom}(L^*)$，对应于 $(P^D)_t^*$，且 $\int_D \psi_0(x)dx = \int_D \varphi_0(x)dx = 1$ 满足

$$(P_t^D - e^{-\lambda_0 t})\psi_0 = ((P^D)_t^* - e^{-\lambda_0 t})\varphi_0 = 0, \tag{3.18}$$

因此

$$(L + \lambda_0)\psi_0 = (L^* + \lambda_0)\phi_0 = 0. \tag{3.19}$$

对于一大类 L´évy 过程的生成元，性质 (3.18) 和 (3.19) 可由 [14, 2] 得出。另一个例子是扩散过程：对于 $f \in C_0^2(D)$，在 D 中具有紧支撑的二次连续可微函数集合，我们定义微分算子

$$Lf = \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}f\right) + \sum_{j=1}^{d} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}f - cf,$$

其中 $a_{j,k}, b_j, j, k = 1, ..., d$ 是 D 上的有界光滑函数，且 c 有界连续。我们假设矩阵 $(a_{j,k}, j, k = 1, ..., d)$ 对称且一致椭圆。在这种情况下，性质 (3.18) 和 (3.19) 可由 [12, 第 11 章定理 2] 得出。

定理3。假设 (3.19) 成立，并且对所有 $z > 0$， $g(z) \geq Cz^{1+\beta}$，其中 $C > 0, \beta > 0$ 是给定的常数。定义

$$\tau^* = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t \exp\left[-\beta(\lambda_0 K(r) + A(r)) + \beta N_r\right] dr \geq \frac{1}{C\beta}\langle\varphi, \phi_0\rangle_D^{-\beta}\right\}, \tag{3.20}$$

其中，函数 K 和 A 定义于 (2.9) 中。于是，在事件 $\{\tau^* < \infty\}$ 上，(2.5) 的解 v 和 (1.1) 的解 u 将在有限时间 τ 内爆破，且几乎必然成立 $\tau \leq \tau^*$ $\mathbb{P}$。

证明。利用关于 g 的假设以及詹森不等式，我们得到 (2.6) 中各项满足：

$$\begin{aligned}
\langle v(\cdot, s), L^*\phi_0\rangle_D &= -\lambda_0\langle v(\cdot, s), \phi_0\rangle_D, \\
\exp(-N_s)\left\langle g(\exp(N_s)v(\cdot, s)), \phi_0\right\rangle_D &\geqq C\exp(\beta N_s)\left\langle v^{1+\beta}(\cdot, s), \phi_0\right\rangle_D, \\
&\geqq C\exp(\beta N_s)\langle v(\cdot, s), \phi_0\rangle_D^{1+\beta}.
\end{aligned}$$

应用 下界于 $(\langle v(\cdot, t+\varepsilon)\ \phi_0\rangle_D - \langle v(\cdot, t)\ \phi_0\rangle_D)/\varepsilon$，并令 $\varepsilon \to 0$，我们得到 t

$$\frac{d}{dt}\langle v(\cdot, t), \phi_0\rangle_D \geqq -\frac{1}{2}(\lambda_0 k^2(t) + a^2(t))\langle v(\cdot, t), \phi_0\rangle_D + C\exp(\beta N_t)\langle v(\cdot, t), \phi_0\rangle_D^{1+\beta}. \tag{3.21}$$

相应的微分等式为

$$\frac{d}{dt}I(t) = -\frac{1}{2}(\lambda_0 k^2(t) + a^2(t))I(t) + C\exp(\beta N_t)I(t)^{1+\beta},$$

并且 $I(t)$ 是方程 (3.21) 的下解，即 $\langle v(\cdot, t)\ \phi_0\rangle_D \geqq I(t)$。那么

$$I(t) = \exp[-(\lambda_0 K(t) + A(t))]\left(\langle\varphi, \phi_0\rangle_D^{-\beta} - \beta C\int_0^t \exp\left[-\beta(\lambda_0 K(s) + A(s)) + \beta N_s\right] ds\right)^{-1/\beta}$$

对所有 $t \in [0, \tau^*)$，其中 τ^* 由 (3.20) 给出。因此， τ^* 是 $\langle v(\cdot, t)\ \phi_0 \rangle_D$ 的爆破时间上界，并且函数 $t \mapsto \|v(\cdot, t)\|_\infty = \exp(-N_t)\|u(\cdot, t)\|_\infty$ 在 $[0, \tau^*]$ 上不能保持有限，若$\tau^* < \infty$。因此，若 $\tau^* < \infty$， u 和 v会在 τ^* 之前爆破。 □

注4. 注意， τ^* 仅通过正特征值 λ_0 及其对应的特征函数 ϕ_0. 依赖于 L 。此外， τ^* 是关于 φ、 ϕ_0 和 C的递减函数，是关于 $\lambda_0 K$.的递增函数。因此，较小的函数 φ、 ϕ_0 和较小的常数 C，以及 $\lambda_0 K$ 的较大取值，都会推迟 I 的爆破；从这个意义上说，它们也倾向于推迟 v 和 u.的爆破。

3.2 爆破时间上界的尾概率估计

在下面的定理中，我们应用 N.T. Dung [8] 研究的分数布朗运动指数泛函尾概率估计，来估计 τ^* 在固定时间 T之前发生的概率。这里假设过程 B^H 由下式给出

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t, s)\, dB_s, \tag{3.22}$$

其中，核 K^H 在 $H > 1/2$ 时由下式给出

$$K^H(t, s) = \begin{cases} C_H s^{1/2-H} \int_s^t (\sigma - s)^{H-3/2} \sigma^{H-1/2} d\sigma & \text{if } t > s, \\ 0 & \text{if } t \leqq s, \end{cases} \tag{3.23}$$

其中 $C_H = [\ \frac{H}{(2H-1)\mathcal{B}(2-2H, H-1/2)}]^{\frac{1}{2}}$，且 $\mathcal{B}$是通常的贝塔函数（关于分数布朗运动 $H > 1/2$的一般表示公式，见 [21]第 5.1.3 节）。注意，在这种情况下， B^H 和 B 是相关的。

定理4. 在假设 (3.19) 和 (3.22) 下，设对所有 $z > 0$， $g(z) \geq Cz^{1+\beta}$ ，其中 $C > 0$、$\beta > 0$ 为给定常数，并设 $\mu(T) = \int_0^T \exp[-\beta(\lambda_0 K(t) + A(t))]\mathbb{E}\left[\exp(\beta N_t)\right] dt$。那么，对于任意满足$\frac{1}{C\beta}\langle \varphi$ 的 $T > 0$，$\phi_0 \rangle_D^{-\beta} > \mu(T)$,

$$\mathbb{P}\left\{\tau^* \leq T\right\} \leq 2 \exp\left(-\frac{\ln^2 \left[C\beta \langle \varphi, \phi_0 \rangle_D^\beta\, \mu(T) \right]}{2M(T)} \right),$$

其中

$$M(T) = 2\beta^2 \int_0^T a^2(r)\, dr + 4\beta^2 H T^{2H-1} \int_0^T b^2(u)\, du.$$

证明。对于 $t \geq 0$，利用 (3.22)，我们得到如下表示:

$$\begin{aligned} X_t &:= -\beta(\lambda_0 K(t) + A(t)) + \beta N_t \\ &= -\beta(\lambda_0 K(t) + A(t)) + \beta \left(\int_0^t a(s)\, dB_s + \int_0^t \int_s^t b(r) \frac{\partial}{\partial r} K^H(r, s)\, dr\, dB_s \right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

由 [8, 定理3.1] 可知，对于任意 $T \geq 0$ 和任意 $x > \mu(T)$，均有

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T e^{X_t} dt \geq x\right) \leq 2\exp\left[-\frac{(\ln x - \ln \mu(T))^2}{2M(T)}\right], \tag{3.25}$$

其中 $\mu(T) = \int_0^T \mathbb{E}\left[e^{X_t}\right] dt$ 和 $M(T)$ 满足

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^T |D_r X_t|^2 \, dr \leq M(T) \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{3.26}$$

这里，$D_r X_t$ 表示 X_t 的 Malliavin 导数。接下来，我们将求出一个上界 $M(T)$，使得式 (3.26) 成立。对于 $r < t$，利用表示式 (3.25)，有：

$$D_r X_t = \beta\left(a(r) + \int_r^t b(s)\frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\, ds\right).$$

因此，$\int_0^t |D_r X_t|^2 \, dr \leq 2\beta^2 \int_0^t a^2(r)\, dr + 2\beta^2 \int_0^t (\int_r^t b(s) \frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\ ds)^2 \, dr$ 并且

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\int_r^t b(s)\frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\, ds\right)^2 dr \\
&= \int_0^t \left(\int_r^t b(s)\frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\, ds\right)\left(\int_r^t b(s')\frac{\partial}{\partial s'}K(s',r)\, ds'\right) dr \\
&= \int_0^t b(s)\, ds \int_0^s \frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\, dr \int_r^t b(s')\frac{\partial}{\partial s'}K(s',r)\, ds' \\
&= \int_0^t ds\, b(s) \int_0^t dr 1_{[0,s]}(r)\frac{\partial}{\partial s}K(s,r) \int_r^t b(s')\frac{\partial}{\partial s'}K(s',r)\, ds' \\
&= \int_0^t ds\, b(s) \int_0^t ds' b(s') \int_0^{s'} 1_{[0,s]}(r)\frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\frac{\partial}{\partial s'}K(s',r)\, dr \\
&= \int_0^t ds \int_0^t ds'\, b(s)b(s') \int_0^{s\wedge s'} \frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\frac{\partial}{\partial s'}K(s',r)\, dr \\
&= \int_0^t ds \int_0^t ds'\, b(s)b(s')\Phi(s,s') \\
&= \int_0^t ds \int_0^s ds'\, b(s)b(s')\Phi(s,s') + \int_0^t ds \int_s^t ds'\, b(s)b(s')\Phi(s,s') \\
&= 2\int_0^t ds \int_0^s ds'\, b(s)b(s')\Phi(s,s'),
\end{aligned}$$

其中 $\Phi(s,s') = \int_0^{s\wedge s'} \frac{\partial}{\partial s}K(s,r)\frac{\partial}{\partial s'}K(s',r)\ dr$. 由于 $\frac{\partial}{\partial s}K(s,r) = C_H r^{1/2-H}(s-r)^{H-3/2}s^{H-1/2}$，在 [21] 中使用 (5.7) 可得

$$\Phi(s,s') = C_H^2 (ss')^{H-1/2} \int_0^{s\wedge s'} r^{1-2H}(s-r)^{H-3/2}(s'-r)^{H-3/2}\, dr = H(2H-1)(s-s')^{2H-2}$$

对于 $s' < s$，因此

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\int_r^t b(s) \frac{\partial}{\partial s} K(s,r)\, ds \right)^2 dr \\
&\leq\ 2H(2H-1) \int_0^t ds \int_0^s |b(s)b(s')| (s-s')^{2H-2}\, ds' \\
&\leq\ H(2H-1) \left[\int_0^t b(s)^2 \int_0^s (s-s')^{2H-2}\, ds'\, ds + \int_0^t \int_0^s b(s')^2 (s-s')^{2H-2}\, ds'\, ds \right] \\
&=\ H \int_0^t b(s)^2 s^{2H-1}\, ds + H(2H-1) \int_0^t b(s')^2 \int_{s'}^t (s-s')^{2H-2}\, ds\, ds' \\
&=\ H \int_0^t b(s)^2 (s^{2H-1} + (t-s)^{2H-1})\, ds \\
&\leq\ 2Ht^{2H-1} \int_0^t b(s)^2\, ds. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

由上述不等式可得

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^T |D_r X_t|^2 dr \leq 2\beta^2 \int_0^T a^2(r) dr + 4\beta^2 H T^{2H-1} \int_0^T b^2(u) du := M(T). \qquad (3.28)$$

现在，由 (3.20)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau^* \leqq T) &= \mathbb{P}\left\{ \int_0^T \exp[-\beta(\lambda_0 K(t) + A(t)) + \beta N_t]\, dt \geqq \frac{1}{C\beta} \langle \varphi, \phi_0 \rangle_D^{-\beta} \right\} \\
&= \mathbb{P}\left\{ \int_0^T \exp[X(t)]\, dt \geq x \right\}, \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

其中 $x = \frac{1}{C\beta} \langle \varphi, \phi_0 \rangle_D^{-\beta}$.。结论由 (3.25) 和 (3.28) 得出。 □

在下面的定理中，我们将在布朗运动 B 与分数布朗运动 B^H 具有一般依赖结构的情况下，得到 τ^* 尾部的上界。

定理5. 假设 (3.19) 成立，并且对所有 $z > 0$，有 $g(z) \geq Cz^{1+\beta}$，其中 $C > 0$, $\beta > 0$ 是给定的常数。

1. 假设 $B_t^H = \int_0^t K^H(t,s)\, dW_s$，其中 W 是定义在同一概率空间上、且与布朗运动 B 适应于同一滤过的布朗运动。那么

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau^* \leq T) \\
&\leq\ C\beta \langle \varphi, \phi_0 \rangle_D^{\beta} \int_0^T \left[e^{-\beta\lambda_0 \int_0^t k^2(s)\, ds + 2\beta^2 \int_0^t a^2(s)\, ds} + e^{-\beta \int_0^t a^2(s)\, ds + 4\beta^2 H t^{2H-1} \int_0^t b^2(s)\, ds} \right] dt.
\end{aligned}$$

2. 如果 B 和 B^H 相互独立，那么

$$\mathbb{P}(\tau^* \le T) \;\le\; C\beta\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{\beta}\int_0^T e^{-\beta\lambda_0 K(t)+\frac{\beta^2-\beta}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds+\beta^2 Ht^{2H-1}\int_0^t b^2(s)\,ds}.$$

证明。1. 利用 H¨older 不等式和切比雪夫不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau^* \le T) &= \mathbb{P}\left[\int_0^T e^{-\beta\lambda_0 K(t)+\beta\int_0^t a(s)\,dB_s-\beta A(t)+\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\,dt \ge \frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}\right]\\
&\le \mathbb{P}\left[\left(\int_0^T e^{-2\beta\lambda_0 K(t)+2\beta\int_0^t a(s)\,dB_s}\,dt\right)^{\frac12}\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\int_0^T e^{-2\beta A(t)+2\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\,dt\right)^{\frac12} \ge \frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}\right]\\
&\le \mathbb{P}\left[\int_0^T e^{-2\beta\lambda_0 K(t)+2\beta\int_0^t a(s)\,dB_s}\,dt \ge \frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}\right]\\
&\quad+\mathbb{P}\left[\int_0^T e^{-2\beta A(t)+2\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\,dt \ge \frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}\right]\\
&\le \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-2\beta\lambda_0 K(t)+2\beta\int_0^t a(s)\,dB_s}\,dt\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-2\beta A(t)+2\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\,dt\right]}{\frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}}\\
&\le \frac{\int_0^T\left[e^{-2\beta\lambda_0 K(t)+2\beta^2\int_0^t a^2(s)\,ds}\right]dt+\int_0^T e^{-2\beta A(t)}\mathbb{E}\left[e^{2\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\right]dt}{\frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}},
\end{aligned}\tag{3.30}$$

其中，我们利用了 $\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_0^t f(s)\,dB(s)\right\}\right)=\exp\left\{\frac12\int_0^t f^2(s)\,ds\right\}$ 这一事实，得到了最后一个不等式。此外，

$$\mathbb{E}\left[e^{2\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\right]=\mathbb{E}\left[e^{2\beta\int_0^t\int_s^t b(r)\frac{\partial}{\partial r}K^H(r,s)\,dr\,dW_s}\right]=e^{2\beta^2\int_0^t\left[\int_s^t b(r)\frac{\partial}{\partial r}K^H(r,s)\,dr\right]^2 ds},$$

其中，最后一个等式由 [13, 定理4.12]得出。因此，利用（3.27）可得

$$\mathbb{E}\left[e^{2\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\right]\le\exp\left\{4\beta^2 Ht^{2H-1}\int_0^t b^2(s)\,ds\right\}.\tag{3.31}$$

将 (3.31) 代入 (3.30)，即可得到所需的界。

2. 利用切比雪夫不等式、 B 与 B^H 的独立性以及 (3.31) 的证明,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau^* \le T) \\
&= \mathbb{P}\left[\int_0^T e^{-\beta\lambda_0 K(t)+\beta\int_0^t a(s)\,dB_s-\beta A(t)+\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H)}\,dt \ge \frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}\right] \\
&\le C\beta\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{\beta}\int_0^T \mathbb{E}\left[e^{-\beta\lambda_0 K(t)+\beta\int_0^t a(s)\,dB_s}\right]\mathbb{E}\left[e^{-\beta A(t)+\beta\int_0^t b(s)\,dB_s^H}\right]\,dt \\
&\le C\beta\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{\beta}\int_0^T \exp\left\{-\beta\lambda_0 K(t)+\frac{\beta^2-\beta}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds+\beta^2 H t^{2H-1}\int_0^t b^2(s)\,ds\right\}\,dt.
\end{aligned}$$

□

4 爆破时间及有限时爆破概率的下界

4.1 有限时爆破概率的下界

在下面的定理中，我们给出方程 (1.1) 的弱解发生有限时爆破的概率下界。若 f， g是非负函数，且 c 是一个常数，我们记 $f(t) \sim cg(t)$ 为 $t \to \infty$当 $\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = c$。

定理 6. 假设 (3.19) 和 (3.22) 成立。令 $g(z) \ge Cz^{1+\beta}$ 且

$$\int_0^t a^2(r)\,dr \sim C_1 t^{2l}, \quad \int_0^t b^2(r)\,dr \sim C_2 t^{2m}, \quad \int_0^t k^2(r)\,dr \sim C_3 t^{2p}$$

满足 $t \to \infty$ ，其中 l、 m、 p 为非负常数， C、 β、 C_1、 C_2 和 C_3. 为正常数。另假设

1. 若 $\beta \in (0, 1/2)$, 则 $\max\{p, l\} > H + m - \frac{1}{2}$;
2. 若 $\beta = 1/2$, 则 $H+m-\frac{1}{2} < p$; 3. 若 $\beta > 1/2$, 则 $p > \max\{l, H+m-\frac{1}{2}\}$.

在这些假设下，方程 (1.1) 的解以正概率在有限时间内爆破。此外,

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) \ \ge\ \mathbb{P}(\tau^* < \infty) \ \ge\ 1 - \exp\left(-\frac{(m_\xi - 1)^2}{2L_\xi}\right), \tag{4.32}$$

其中

$$\xi = \frac{1}{C\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^{-\beta}, \quad L_\xi = \sup_{t\ge 0}\frac{M(t)}{(\ln(\xi+1)+f(t))^2}, \tag{4.33}$$

其中 $f(t) = t^{\max\{H+m-1/2,\, l\}}$ 和

$$m_\xi = E\left[\sup_{t\geqq 0}\frac{\ln\left(\int_0^t \exp\left(-\beta(\lambda_0 K(s)+A(s))+\beta N_s\right)\,ds+1\right)+f(t)}{\ln(\xi+1)+f(t)}\right]. \tag{4.34}$$

证明。由 (3.29) 可得 $\mathbb{P}(\tau^*<\infty) = \mathbb{P}(\int_0^\infty e^{X_t}\,dt \geq \xi)$。为了估计 $\mathbb{P}(\int_0^\infty e^{X_t}\,dt \geq \xi)$，我们将 [9, 定理 3.1], 与 $a=0$ 和 $\sigma=1$ 一起使用：

命题 3（[9]）。假设随机过程 X 是适应的，且满足

a) $\int_0^\infty Ee^{X_s}\,ds<\infty$，b) 对每个 $t\geq 0$，$X_t\in D^{1,2}$，c) 存在函数 $f\colon R_+\to R_+$，使得 $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$，且对每个 $x>0$,

$$\sup_{t\geqq 0}\frac{\sup_{s\in[0,t]}\int_0^t |D_r X_s|^2 dr}{(\ln(x+1)+f(t))^2} \leq L_x<\infty \quad a.s. \tag{4.35}$$

Then

$$\mathbb{P}\left(\int_0^\infty e^{X_t}\,dt<x\right)\leq \exp\left\{-\frac{(m_x-1)^2}{2L_x}\right\},$$

其中

$$m_x = E\left[\sup_{t\geq 0}\frac{\ln(\int_0^t e^{X_s}\,ds+1)+f(t)}{\ln(x+1)+f(t)}\right].$$

现在我们验证上述命题的条件 a)–c) 均成立。

对于条件 a)，由 (3.25) 可得,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathbb{E}\exp[X_t]\,dt\\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\exp\left[-\frac{\beta\lambda_0}{2}\int_0^t k^2(s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds\right.\\
&\qquad\left.+\beta\left(\int_0^t a(s)\,dB_s+\int_0^t\int_s^t b(r)\frac{\partial}{\partial r}K^H(r,s)\,dr\,dB_s\right)\right]dt\\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\exp\left[-\frac{\beta\lambda_0}{2}\int_0^t k^2(s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds+\beta\int_0^t\left(a(s)+\int_s^t b(r)\frac{\partial}{\partial r}K^H(r,s)\,dr\right)\,dB_s\right]dt\\
&= \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\beta\lambda_0}{2}\int_0^t k^2(s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds+\frac{\beta^2}{2}\int_0^t\left(a(s)+\int_s^t b(r)\frac{\partial}{\partial r}K^H(r,s)\,dr\right)^2\,ds\right]dt,
\end{aligned}$$

这里我们再次利用 [13, 定理4。12] 得到了最后一个等式。因此，利用（3.27），

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{E}\exp[X_t]\,dt \;\leq\; &\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\beta\lambda_0}{2}\int_0^t k^2(s)\,ds-\frac{\beta}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds+\frac{\beta^2}{2}\int_0^t 2a^2(s)\,ds\right.\\
&\left.+2\beta^2 H t^{2H-1}\int_0^t b^2(s)\,ds\right]dt.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

积分（4.36）有限，当且仅当 t 该项中的最高次幂

$$-\frac{\beta\lambda_0}{2}\int_0^t k^2(s)\,ds+\frac{2\beta^2-\beta}{2}\int_0^t a^2(s)\,ds+2\beta^2Ht^{2H-1}\int_0^t b^2(s)\,ds$$

具有负系数，这由我们的假设可知。

条件 b) 是 (3.28) 的推论。

对于条件 c)，我们使用不等式 (3.28)，它意味着对于任意 $x>0$ 及任意固定函数 f，

$$\sup_{t\geqq 0}\frac{\sup_{s\in[0,t]}\int_0^t|D_rX_s|^2dr}{(\ln(x+1)+f(t))^2}\leq\sup_{t\geq 0}\frac{M(t)}{(\ln(x+1)+f(t))^2}. \tag{4.37}$$

根据我们的假设，当 t 足够大时， t 在分子中的最高次幂为 $\max\{2l,2H+2m-1\}$.由此可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{\left(\ln(x+1)+t^{\max\{l,H+m-1/2\}}\right)^2}<\infty,$$

和 t 因此，(4.37) 中的上确界是有限的。结论由命题得出 3. □

当 $a=0$ （仅存在分数布朗运动）或 $b=0$ （仅存在布朗运动）时，情形较为简单：

推论 2. 在定理 6 的假设下，

1. 当 $a(t)\equiv 0$ 且 $p>H+m-1/2$ 时，对于所有 $\beta>0$，方程 (1.1) 的解都以正概率在有限时间内爆炸。2. 若 $a(t)\equiv 0$ 且 $p=H+m-1/2$，则对于所有满足 $\beta<\frac{C_3\lambda_0}{4C_2H}$. 的 $\beta>0$，方程 (1.1) 的解都以正概率在有限时间内爆炸。3. 当 $b(t)\equiv 0$ 且 $0<\beta\leq\frac{1}{2}$ 时，对于 p 和 l 的所有取值，方程 (1.1) 的解都以正概率在有限时间内爆炸。4. 若 $b(t)\equiv 0$且 $\beta>1/2$，则当 $p>l$ 或者当 $p=l$ 且 $C_3\lambda_0>C_1(2\beta-1)$ 时，方程 (1.1) 的解会以正概率在有限时间内爆炸。

注意，由于 [9] 中的定理 3.1，(4.34) 中给出的 m_ξ 满足 $m_\xi>1$ 。m_ξ 的公式展示了 φ 与 K 之间的相互作用，这会影响 (4.32) 中的下界。 K 的值增大时，(4.32) 中的下界会降低。从这个意义上说，较大的 K 值有利于避免有限时爆破。

4.2 $H > 3/4$ 且 B 和 B^H相互独立的情形

为了求得 $\mathbb{P}(\tau < +\infty)$ 更明确的下界，本小节考虑 $H \in (3/4, 1)$ 的情形，并假设 B 与 B^H 相互独立，且对所有 $s \geq 0$， $b(s) = ca(s)$，其中 c 为常数。于是， $N_t = \int_0^t a(s)dM_s$，其中 $M_s = B_s + cB_s^H$。根据 [3] M，它等价于布朗运动 $\widetilde{B}$，因此 N_t 等价于 $\tilde{N}_t := \int_0^t a(s)\, d\widetilde{B}_s$。这里的等价是指这些过程在 $(\mathcal{C}[0,T], \mathcal{B})$ 上的分布相同；该空间由定义在 $[0,T]$ 上的连续函数构成，并赋予由柱集生成的 $\sigma-$ 代数~。此外，$(N_t)_{t\geq 0}$ 是连续鞅，因而~ ~是一个经过时间变换的布朗运动：$N_t = B_{2A(t)}$。

定理 7. 假设 (3.19) 成立。设 $H \in (3/4, 1)$、 B 和 B^H 相互独立，且对所有$s \geq 0$， $b(s) = ca(s)$，其中 c 为常数。我们还假设 $g(z) \geq Cz^{1+\beta}$，函数 k 和 a 在 $\mathbb{R}_+$ 上均为正连续函数，并且存在常数 $\eta \in (0, +\infty]$ 和 $c_1 > 0$，使得

$$\frac{1}{a^2(t)} \exp(-\beta\lambda_0 K(t)) \geq c_1 \exp\left(-2\beta \frac{A(t)}{\eta}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.38}$$

Then

$$\mathbb{P}(\tau < +\infty) \;\geq\; \mathbb{P}(Z_\mu \leq \theta), \tag{4.39}$$

其中 τ 为 (1.1) 的爆破时间， Z_μ 为参数为 μ 的伽马分布随机变量：$=\frac{2}{\beta}(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{2})$ $\theta := \frac{2c_1}{\beta^2\xi}$且 ξ：$= \frac{1}{C\beta}\langle\varphi, \phi_0\rangle_D^{-\beta}$。

证明。 由定理3,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau^* = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\int_0^t dr\, \exp\left[-\beta(\lambda_0 K(r) + A(r)) + \beta\tilde{N}_r\right] < \xi \text{ for all } t > 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty dr \exp\left[-\beta(\lambda_0 K(r) + A(r)) + \beta\tilde{N}_r\right] \leq \xi\right).
\end{aligned}$$

通过变量替换 $q = 2A(r)$，得到

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau^* = +\infty) = \mathbb{P}\left(\int_0^\infty dr\, \exp\left[-\beta(\lambda_0 K(r) + A(r)) + \beta\tilde{B}_{2A(r)}\right] \leq \xi\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty \frac{dq}{a^2(A^{-1}(q/2))} \exp\left[-\beta(\lambda_0 K(A^{-1}(q/2)) + \frac{1}{2}q) + \beta\tilde{B}_q\right] \leq \xi\right).
\end{aligned}$$

将 (4.38) 应用于 $t = A^{-1}(q/2)$ 得到

$$\frac{1}{a^2(A^{-1}(q/2))} \exp\left[-\beta(\lambda_0 K(A^{-1}(q/2))\right] \geq c_1 \exp\left(-\frac{\beta}{\eta}q\right), \quad q \in \mathbb{R}_+.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau^*=+\infty) &\leq \mathbb{P}\left(c_1\int_0^\infty dq\exp\left[-\beta q\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{2}\right)+\beta\tilde{B}_q\right]\leq\xi\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\int_0^\infty dq\,\exp\left[\beta(\tilde{B}_q-\tilde{\mu}q)\right]\leq\frac{\xi}{c_1}\right),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\mu}:=\frac{1}{\eta}+\frac{1}{2}$。再作一次变量替换 $q=\frac{4s}{\beta^2}$，得到

$$\mathbb{P}(\tau^*=+\infty)\leq\mathbb{P}\left(\int_0^\infty ds\,\exp\left[2(\tilde{B}_s-\mu s)\right]\leq\frac{\beta^2\xi}{4c_1}\right),$$

其中 $\mu:=\tilde{\mu}\frac{2}{\beta}$。由 [27, 推论 1.2（第 95], 页）可知

$$\int_0^\infty e^{2(\tilde{B}_s-\mu s)}\,ds\overset{\mathcal{L}}{=}\frac{1}{2Z_\mu},$$

其中 Z_μ 是参数为 μ 的伽马分布随机变量。因此

$$\mathbb{P}(\tau=+\infty)\leq\ \mathbb{P}(\tau^*=+\infty)\leq\mathbb{P}\left(\frac{1}{2Z_\mu}\leq\frac{\beta^2\xi}{4c_1}\right)=\mathbb{P}\left(Z_\mu\geq\frac{2c_1}{\beta^2\xi}\right).$$

这就得到了定理的结论。 □

注 5. 若 k、a 和 b 为常数，则无需假设（4.38），即可得到 $\mathbb{P}$（$\tau<+\infty$）的一个更明确的下界。事实上，从（3.20）出发，经过直接计算可得一个关于伽马分布随机变量 Z 的下界，不过这次参数为 $\widehat{\mu}:=(\lambda_0k^2+a^2)\ /\ (a^2\beta)$。更准确地说，

$$\mathbb{P}(\tau<\infty)\ \geqq\ \mathbb{P}(\tau^*<\infty)\ =\ \mathbb{P}\left(Z_{\widehat{\mu}}\leqq\frac{2C}{a^2\beta}\langle\varphi,\phi_0\rangle_D^\beta\right).$$

4.3 爆破时间的下界

我们的下一个目标是为爆破时间 τ. 获得一个下界。由于以下结果的证明与 [1]（其中 $b=0$）中的证明相近，此处省略。

定理 8. 设函数 g 满足 $g(0)=0$，$z\to g(z)/z$ 递增，且对于某个正常数 $\Lambda.$，$g(z)\leq\Lambda z^{1+\beta}$。则 $\tau\geq\tau_*$，其中

$$\tau_*=\inf\left\{t>0:\ \int_0^t\exp(\beta(N_r-A(r)))\left\|U^D(r,0)\varphi\right\|_\infty^\beta dr\geqq\frac{1}{\Lambda\beta}\right\}.\tag{4.40}$$

令 $0\leqq t<\tau_*$,

$$J(t)=\left(1-\Lambda\beta\int_0^t\exp(\beta(N_r-A(r)))\left\|U^D(r,0)\varphi\right\|_\infty^\beta dr\right)^{-1/\beta}.$$

则方程 (1.1) 的解 u 满足：对于 $x \in D$、$0 \leqq t < \tau_*$、$\mathbb{P}$-几乎处处成立。

$$0 \leqq u(x,t) \leqq J(t)\exp(N_t - A(t))U^D(t,0)\varphi(x). \tag{4.41}$$

注6. 更准确地说，该定理的证明表明，方程 (2.5) 的温和解 v 满足 (4.41)，且不含因子 $exp(N_t)$。根据定理 2，v 也是方程 (2.5) 的弱解，因此方程 (1.1) 的弱解 $u(\cdot,t) = \exp(N_t)v(\cdot,t)$ 满足 (4.41)。

推论3. 假设

$$\Lambda\beta\int_0^\infty \exp[\beta(N_r - A(r))]\left\|U^D(r,0)\varphi\right\|_\infty^\beta dr < 1.$$

则方程 (1.1) 的解 u 对所有 $t.$ 均满足 (4.41) $\mathbb{P}$-几乎必然

注7. 对于 $\varphi = p\psi_0$、$p > 0$ 的特殊选择，(3.20) 和 (4.40) 中出现的积分是关于 $N.$ 的同一个指数泛函。事实上，$U^D(r,0)\psi_0 = \exp(-\lambda_0 K(r))\psi_0$，而 τ_* 变为

$$\tau_* = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t \exp\left[\beta(N_r - \lambda_0 K(r) - A(r))\right] dr \geqq \frac{p^{-\beta}}{\Lambda\beta}\left\|\psi_0\right\|_\infty^{-\beta}\right\}, \tag{4.42}$$

而

$$\tau^* = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t \exp\left[\beta(N_r - \lambda_0 K(r) - A(r))\right] dr \geq \frac{p^{-\beta}}{C\beta}\langle\psi_0,\phi_0\rangle_D^{-\beta}\right\}. \tag{4.43}$$

事实上，$\tau_* \leqq \tau^*$ 若 $C \leqq \Lambda$，因为 $\langle\psi_0,\phi_0\rangle_D \leqq \|\psi_0\|_\infty \int_D \phi_0(x)dx = \|\psi_0\|_\infty .$。为了同时应用这两个界，我们必须假设 $Cz^{1+\beta} \leqq g(z) \leqq \Lambda z^{1+\beta}$, $z > 0.$。因此，了解 (4.42) 和 (4.43) 中出现的积分的分布很有意义。这似乎只有在 $b^H = 0$ 的情况下才有可能，因为据我们所知，分数布朗运动的指数泛函分布仍然未知。目前看来，只有第3.2节中这类估计可用。关于 $H > 3/4.$，另见定理 7。

5 有限时爆破的一个充分条件

现在我们考虑命题 2 中得到的（2.5）的温和形式，并给出有限时爆破的一个充分条件。

定理9. 假设 $g(z) \geq Cz^{1+\beta}$，并且存在 $w^* > 0$ 使得

$$\exp(\beta A(w^*)) \parallel U^D(w^*,0)\varphi \parallel_\infty^{-\beta} < \beta C\int_0^{w^*} \exp(\beta N_s)\, ds\ . \tag{5.44}$$

那么，对于方程 (1.1) 的爆炸时间 τ，有 $\tau \leq w^*.$

注 8. 不等式 (5.44) 是逐轨道地理解的。因此， w^* 是随机的。当初始条件 φ 较小且 $C.$ 的值较小时，(5.44) 更难满足。由于 N 中积分的解释不同， B 和 B^H 对爆破的影响也不同。若 $N = 0$，则 (5.44) 可写为 $\| U^D(w^*, 0)\varphi \|_\infty^{-\beta} < \beta C w^*$；此时 w^* 是确定性的；若进一步有 $\varphi = \psi_0$，则 (5.44) 可写为 $\exp(\lambda_0 \beta K(w^*)) \| \psi_0 \|_\infty^{-\beta} < \beta C w^*.$

证明。我们采用 [25, 引理 15.6] 中的方法；另见 [15]。假设 $v(x,t)$ $x \in D$, $t \geq 0$ 是方程 (2.5) 的整体解，并令 $0 < t < t'.$ 。利用演化系统 $(U^D(t,r))_{0 \leqq r < t}$ 的半群性质，我们得到

$$
\begin{aligned}
& \exp\Big(-A(t',t)\Big) U^D(t',t) v(\cdot,t)(x) \\
= \; & \exp\Big(-A(t',t)\Big) U^D(t',t) \left[\exp\Big(-A(t)\Big) U^D(t,0)\varphi(\cdot)\right](x) \\
& + \exp\Big(-A(t',t)\Big) U^D(t',t) \left[\int_0^t \exp(-N_r) \exp\Big(-A(t,r)\Big) U^D(t,r) g(\exp(N_r) v(\cdot,r))(x)\, dr\right](x) \\
= \; & \exp\Big(-A(t')\Big) U^D(t',0)\varphi(\cdot)(x) \\
& + \int_0^t \exp(-N_r) \exp\Big(-A(t',r)\Big) U^D(t',r) g(\exp(N_r) v(\cdot,r))(x)\, dr \\
\geqq \; & \exp\Big(-A(t')\Big) U^D(t',0)\varphi(\cdot)(x) \\
& + C \int_0^t \exp(\beta N_r) \exp\Big(-A(t',r)\Big) U^D(t',r) v(\cdot,r)^{1+\beta}(x)\, dr.
\end{aligned}
$$

由詹森不等式

$$
\begin{aligned}
U^D(t',r) v(\cdot,r)^{1+\beta}(x) &= \int_D p^D(r,x;t',y) v(y,r)^{1+\beta}\, dy \\
&\geqq \left(\int_D p^D(r,x;t',y) v(y,r)\, dy\right)^{1+\beta} = \Big(U^D(t',r) v(\cdot,r)(x)\Big)^{1+\beta}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& \exp\Big(-A(t',t)\Big) U^D(t',t) v(\cdot,t)(x) \geqq \exp\Big(-A(t')\Big) U^D(t',0)\varphi(x) \\
& + C \int_0^t \exp(\beta N_r) \left(\exp\Big(-A(t',r)\Big) U^D(t',r) v(\cdot,r)(x)\right)^{1+\beta} dr. \qquad (5.45)
\end{aligned}
$$

设 $\psi(t)$ 为 (5.45) 中的最后一项。那么，由上述不等式可得，

$$
\psi'(t) = C \exp(\beta N_t) \left(\exp(-A(t',t)) U^D(t',t) v(\cdot,t)(x)\right)^{1+\beta} \geqq C \exp(\beta N_t) (\psi(t))^{1+\beta}
$$

现在设 $\Psi(t) := \int_t^\infty dz/z^{1+\beta} = \frac{1}{\beta}t^{-\beta}$, $t > 0$. 那么

$$\frac{d}{dt}\Psi(\psi(t)) = -\frac{\psi'(t)}{(\psi(t))^{1+\beta}} \leqq -C\exp(\beta N_t).$$

因此

$$C\int_0^{t'} \exp(\beta N_s)\, ds \leqq \Psi(\psi(0)) - \Psi(\psi(t')) = \int_{\psi(0)}^{\psi(t')} dz/z^{1+\beta} < \int_{\exp(-A(t'))U^D(t',0)\varphi(\cdot)(x)}^{\infty} dz/z^{1+\beta}$$

对所有 $x \in D$ 和所有 $t' > 0.$，因此 $\beta C\int_0^{t'} \exp(\beta N_s)\ ds \leqq \exp(\beta A(t'))\|U^D(t',0)\varphi\|_\infty^{-\beta}$ 对所有 $t' > 0$。这与（5.44）矛盾。

□

致谢 作者感谢两位匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见大大改善了本文。第二和第三作者感谢洛林埃利·嘉当研究所的热情接待，本文的部分工作即在该所完成。第二作者的研究部分受到墨西哥国家科学技术委员会（墨西哥）第652255号资助。第四作者谨向IECL全体工作人员致以谢意，感谢他们在她于该所完成博士学位论文期间给予的热情接待和大力支持。

参考文献

[1] A. Alvarez，J.A. L´opez-Mimbela，N. Privault。具有时变系数的一类半线性随机偏微分方程的爆破估计。《微分方程与应用》2（2015），201–219。[2] X. Chen，J. Wang。有界开集上一般Lévy 过程的内在超压缩性。《伊利诺伊数学杂志》58（2014），1117–1144。[3] P. Cheridito。混合分数布朗运动。《伯努利》7（2001），913–934。[4] P.L. Chow。随机反应扩散方程在平均Lp范数下的爆炸解。《微分方程杂志》250（2011），2567–2580。[5] M. Dozzi，E.T. Kolkovska，J.A. L´opez-Mimbela。受分数噪声驱动的半线性随机偏微分方程的有限时爆破与全局正解的存在性。载于：《现代随机学及其应用》，V. Korolyuk、N. Limnios、Y. Mishura、L. Sakhno、G. Shevchenko（编），施普林格，2014，95–108。[6] M. Dozzi，E.T. Kolkovska，J.A. L´opez-Mimbela。受分数噪声扰动的分数阶反应扩散方程的整体解与非整体解。《随机分析与应用》38（2020），第6期，959–978。

[7] M. Dozzi, J.A. L´opez-Mimbela. 有限时爆破与半线性随机偏微分方程全局正解的存在性。《随机过程应用》120（2010年），767-776。

[8] N.T. Dung. 指数泛函的尾部估计及其在随机微分方程中的应用。《随机过程应用》128，第12期，（2018年），4154-4170。[9] N.T. Dung. 分数噪声驱动的半线性随机偏微分方程发生有限时爆破的概率。《统计与概率快报》149（2019年），86-92。[10] H. Fujita. 关于非线性抛物型方程的若干不存在性与非唯一性定理，载于《非线性泛函分析》，普罗维登斯，罗得岛州，1970年，《纯数学研讨会论文集》18(1)（1968年），105-113。[11] M.J. Garrido-Atienza, B. Maslowski, J. ˇSnup´arkov´a. 双线性分数阶噪声驱动的半线性随机方程。《离散与连续动力系统B辑》21（2016年），第9期，3075-3094。[12] A. Friedman. 抛物型偏微分方程。Prentice-Hall，1964年。[13] F.C. Klebaner. 随机微积分导论及其应用。第二版。帝国理工学院出版社，伦敦，2005年。[14] P. Kim, R. Song. 非对称 L´evy 过程的内在超压缩性。《数学论坛》21（2009年），43-66。[15] M. Loayza, C.S. Da Paixˆao. 一般区域上半线性热方程全局解的存在与不存在。《电子微分方程杂志》2014（2014年），第168号，1-9。[16] J.A. L´opez-Mimbela, A. P´erez. 具有超压缩 L´evy 生成元的非自治半线性方程组的整体解与非整体解。《数学分析与应用杂志》423（2015年），720-733。[17] S.V. Lototsky, B.L. Rozovsky. 随机偏微分方程。施普林格，2017年。[18] Y. Mishura. 分数布朗运动及相关过程的随机微积分。《数学讲义》1929，施普林格，2008年。[19] Y. Mishura, G. M. Shevchenko. 涉及维纳过程和赫斯特指数 $H > 1/2$的分数布朗运动的随机微分方程解的存在唯一性。《通讯：统计学——理论与方法》40（2011年），3492-3508。[20] Y. Mishura, K. Ralchenko, G. Shevchenko. 白噪声和分数阶噪声驱动的随机热方程温和解的存在唯一性。《概率论与数理统计》98（2019年），149-170。[21] D. Nualart. Malliavin 微积分及相关主题。施普林格出版社，2006年。[22] D. Nualart, N. Rˇa̧scanu. 分数布朗运动驱动的微分方程。《数学文集》53（2002年），55-81。

[23] D. Nualart, P.-A. Vuillermot. 分数噪声驱动的偏微分方程的变分解。《泛函分析杂志》232（2006年），390-454。[24] S. Peszat, J. Zabczyk. 带有 L´évy 噪声的随机偏微分方程。剑桥大学出版社，2007年。[25] P. Quittner; P. Souplet. 超线性抛物型问题：爆破、整体存在性与稳态。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，2007年。[26] K. Ralchenko, G. Shevchenko. 分数阶随机热方程温和解的存在唯一性。《现代随机理论与应用》6（2019年），57-79。[27] M. Yor. 布朗运动及相关过程的指数泛函。施普林格出版社，2001年。[28] M. Z¨ahle. 关于分数函数的积分与随机微积分 I。《概率论及其相关领域》111（1998年），333-374。