arXiv:2301.02178v1 [math.CO] 5 Jan 2023

最大度为二的图的和标号

Henning Fernau（特里尔大学，Universit¨at Trier, Universit¨atsring 15，特里尔，德国）[1],Kshitij Gajjar（焦特布尔印度理工学院，拉贾斯坦邦，印度）[1]

摘要

Harary 于 1990年 引入了和标号的概念。如果一个图的顶点可以用互不相同的正整数标记，使得当且仅当两个顶点的标号之和等于图中另一个顶点的标号时，这两个顶点之间才有边相连，那么该图就是和图。显然，每个和图都至少有一个孤立顶点，而且通过添加至多 n^2 个孤立顶点，可以使任意图成为和图。使一个图成为和图所需添加的孤立顶点的最小数量，称为该图的和数。

若干重要图类（如圈、树和完全图）的和数已广为人知。我们研究图的不交并对和数的影响。特别地，我们完整刻画了最大度为二的图的和数，因为每个这样的图都是路径与圈的不交并。

关键词：和标号、和数、圈、路径、图的并

1. 引言

图标号是图论的一个特定分支，相关文献浩如烟海，Gallian 的动态综述 [1] 提及了 3000 多篇研究论文。其中一种标号是和标号，由 Harary 引入 [2] ，作为表示图的一种形式。已知[3] 每个 n顶点图 G 都可以通过和标号来表示，这意味着最多可以添加 n^2 个孤立顶点（简称孤立点）到 G，使其成为和图。这使得和

电子邮箱：fernau@uni-trier.de（Henning Fernau（特里尔大学，Universit¨at Trier, Universit¨atsring 15，特里尔，德国）），kshitij@iitj.ac.in（Kshitij Gajjar（焦特布尔印度理工学院，拉贾斯坦邦，印度））预印本提交至《离散数学》，20年1月6日

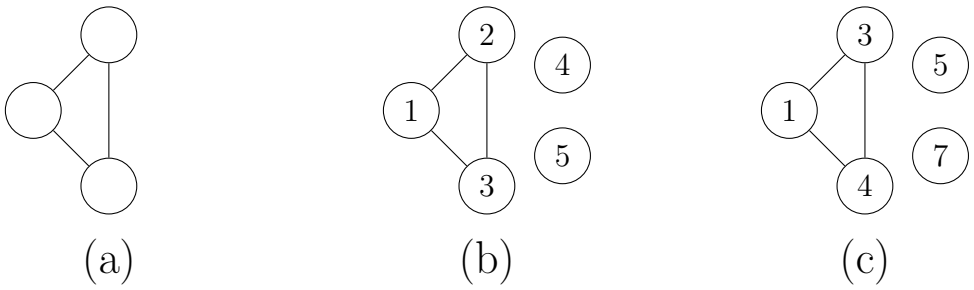

图 1：（a）该图不是和图，因为它没有孤立顶点；（b）这是对和图的不正确和标号，因为 (1, 4) 不是一条边，但图中却有一个标号为 $1+4=5$ 的顶点；（c）这是对和图的正确和标号。

标号从计算机科学的角度来看也是一个引人注目的概念，因为某些图可能可以用和标号编码，比用更传统的图存储方式简洁得多。

现在我们先约定一些记号。我们讨论简单无向图，通常记作 $G=(V, E)$，其中 V 是 G 的（有限）顶点集，E 是其边集。如果 v 是边 e 的一个端点，那么我们称 v 和 e 关联。与某个顶点关联的边数称为该顶点的度。令 $\mathbb{N}$ 表示所有自然数（正整数）的集合。接下来，如果存在一个单射 $\lambda\colon V \to \mathbb{N}$（称为 G 各顶点的和标号），使得

$$E = \{xy \mid \exists z \in V : \lambda(z) = \lambda(x) + \lambda(y)\}.$$

因此，在同构意义下，数集 $\lambda(V)$ 决定了 G。换言之，λ 编码了 G。由于孤立顶点（即度为零的顶点）在应用中通常无关紧要，$\lambda(V)$ 可以视为对 $G \setminus I$ 的描述，其中 I 是 G 的所有孤立顶点组成的集合。于是，$\lambda(V)$ 称为 $G \setminus I$ 的和数编码。反过来，给定一个没有孤立点的图 G，为了使其成为和图而需要添加到 G 的最少孤立点数，称为 G 的和数，记作 $\sigma(G)$。因此，$G + N_{\sigma(G)}$ 是一个和图。（这里，$+$ 表示图的不交并。此外，N_i 表示以 i 个顶点为顶点集的空图（无边图），或等价地，表示由 i 个孤立顶点组成的集合。）图 1 给出了和图和和标号的一些示例与反例。

根据可求和条件，标记函数 λ 也可以视为作用于边上。边 $e = xy \in E$ 的 $e(\lambda)$ 定义为 $\lambda(x)+\lambda(y)$。因此，虽然和标记只标记顶点，我们有时

也会说边是以其两个端点之和标记的（不同的边可以具有相同的边标号）。

使用图的和数编码，能否大幅节省空间？文献中已有一些部分答案。例如，$\sigma(K_n) = 2n-3$ 对于 $n \geq 4$是已知的，也就是说，$3n-3$ 个数就足以存储完全图 K_n的信息，而传统方法则需要 $\mathcal{O}(n^2)$ 比特。如[4], 所述，可以通过将顶点 x_i 标记为$4i-3$来实现，其中 $1 \leq i \leq n$，从而得到 $4j+2$ 个 $1 \leq j \leq 2n-3$的孤立点标记。因此，标号的大小实际上与 n呈线性关系。

我们的研究聚焦于某些图的和数。这延续了文献中的许多研究传统，相关综述可见 [1, 5]。更准确地说，我们证明了一个主要结果：完全刻画了每个最大度为二的图的和数。因此，若 G 的最大度为二，则 $\sigma(G) \leq 3$。这一结果并非完全出人意料，因为已知一般图的和数会随着边数增加而增长 [6]。事实上，即使对于稀疏图，这种情况也可能发生 [7, 8]。

在讨论对整个无限图族 $\mathcal{G}$ 进行和标号时，通常还要求：对于每个正整数 n，其中至多有一个阶为 n 的图 G_n $\mathcal{G}$；此时我们也称之为标号方案λ： $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，它将我们建议用于 $\mathcal{G}$ 的标号策略形式化，具体如下。对于 G_n，若要标记 i 个孤立点，我们取 $\{1, \ldots, n\}$ 作为 G_n 的顶点集，并将数集 $\{\lambda(1) \ldots, \lambda(n+i)\}$ 作为和图 $G_n + N_i$ 的标号。推广这一概念，一般标号方案由三个函数 $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和$\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 指定；它们可解释为一种标号策略，用于标记阶为 n、有 i 个孤立点的 $G_n \in \mathcal{G}$，具体如下。我们将 $G_n + N_i$的顶点集取为$V_{n+i} = \{\sigma(n)$ $\sigma(n) + 1, \ldots, \sigma(n) + n - 1, \iota(n)$ $\iota(n) + 1, \ldots, \iota(n) + i - 1\}$，其中前 n 个数表示 G_n 的顶点；标号则取为$\lambda(j)$，其中 $j \in V_{n+i}$。若 $\sigma(n)$ 恒为 1，且 $\iota(n) = n+1$，则这就归结为一个标号方案。对于图族 $\mathcal{G}$ 中有 n 个顶点的图，还可以采用更一般的标号策略，本文稍后将对此进行讨论。

我们的主要结果是对所有最大度为二的图 G给出了完整而精确的刻画：

定理 1. 设 G 是一个最大度为二的图。那么，$\sigma(G) = \delta(G)$，但有两个例外图，即 C_4和 $C_4 + P_2$，对于它们，$\sigma(G) = \delta(G) + 1$。

Harary[2] 已经证明了 $\sigma(C_4) = 3$，并且图的最小度始终是其和数的下界（即 $\sigma(G) \geq \delta(G)$

最大度为二的图的和标记：一种策略

1. 首先，我们按长度降序处理所有长度不等于四的圈（如果有）。2. 其次，我们处理所有长度为四的圈（如果有）。3. 最后，我们按长度降序处理路径（如果有）。

图 2：我们提出的用于对图 G with $1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq 2$进行和标记的策略。

对于所有图 G）。因此，要证明主定理，只需证明对于所有最大度为二的图 G （除了 C_4和 $C_4 + P_2$）， $\sigma(G) \leq \delta(G)$。还需要额外证明 $\sigma(C_4 + P_2) = 2$。除了得到一个组合结果外，我们还可以将证明理解为给出了一种算法，能够针对任何最大度为二的图，根据其和数对其进行最优标号。

出于高效存储图的考虑，这并不完全令人满意，因为根据我们的构造，标号的大小可能随图的顶点数呈指数增长，这意味着我们可能需要多达 $\mathcal{O}(n^2$ 个比特来存储一个 n 顶点图。原则上，一般而言，我们可以更高效地控制标号大小 [9], ，但 [9] 中给出的算法并非旨在尽可能减少孤立点的数量；换言之，它没有遵循图的和数，而这正是本研究的重点。

注意，任何最大度为二的图都是若干圈和路径的不交并（换言之，图的每个连通分支要么是路径，要么是圈）。为证明主定理，我们将按照特定顺序处理各个连通分支。这自然会导出一种算法，能够为所有最大度为二的图赋予最优标号（就和数而言）。我们在图 2中概述了我们的策略。

图 2 还说明了我们将按何种顺序处理所有最大度为二的图。例如，如果图 G 是

$$G = 5C_3 + 2C_4 + C_6 + 2C_7 + 3C_9 + 4P_2 + P_5 + 2P_8 + P_9,$$

接下来，我们将按以下顺序处理 G 的各个连通分量：

$$3C_9, 2C_7, C_6, 5C_3, 2C_4, P_9, 2P_8, P_5, 4P_2.$$

2. 和标号的空间复杂度

我们重新研究和标号的动机之一，是认为可以利用它们高效地存储图。这一想法已在 [3] 中提出。在那里，他们考虑了标号 $r(\lambda)$ 的范围，定义为 $\max \lambda(V)$ 与 $\min \lambda(V)$ 之差，[1] 其中

$$r(\lambda) = \max_{v,v' \in V} \lambda(v) - \lambda(v') \,.$$

为了明确区分我们所说的范围与脚注 1中提到的范围，我们引入图 的和范围数 $r_\sigma(G)$，即对于某个 G，其和图 $G + N_k$ 的某种 k标记所对应的最小范围。由于范围最终会随着顶点数增加而扩大，我们在此提出两种不同的方法，以确保所涉及的数值不会增长得过快。

为了更好地说明引入这些新图参数的动机，我们先分析使用和标号编码在数据库中存储图所需的空间。一个有 n 个顶点的图 $G = (V, E)$ 可以按如下方式存储：需要 $\mathcal{O}(\log n)$ 比特来存储图本身，另需 $\mathcal{O}(\log \log(\max \lambda(V)))$ 比特来存储 $\log_2(\max \lambda(V))$，再用 $\mathcal{O}(\log \sigma(G))$ 比特存储孤立点的数量，然后还需要 $\log_2(2 \max \lambda(V)) \cdot (n + \sigma(G))$ 比特，用于存储数值列表（顶点标号和孤立点标记；至多按序排列）。最后，我们需要存储一个包含 $n + \sigma(G)$ 个整数的列表，每个整数占用 $\log_2(2k)$ 比特，因为边标号（例如孤立点的标号）的值至多为 $2k$。

另一种做法是先存储最小标签，这样每个数只需要 $_2(r)$ 比特，其中 r 是标记的范围。更准确地说，如果我们想估算存储带有标记 λ 的图 $G = (V, E)$ 所需的比特数，可以使用以下公式。

$$2(\log_2 n + \min_{v \in V} \log_2(\lambda(v))) + |\lambda(V \cup E)| \cdot \log_2(r(\lambda)) \tag{1}$$

请注意，尽管通过选择一个能达到 $\sigma(G)$ 的标记 λ_σ，即满足 $|\lambda_\sigma(V \cup E)| = |V| + \sigma(G)$ 的标记，看起来可以有利地最小化 $|\lambda(V \cup E)|$，但也可能存在另一个标记 λ，使得 $|\lambda(V \cup E)| > |V| + \sigma(G)$，而 $r(\lambda)$ 可能远小于 $r(\lambda_\sigma)$，从而可能抵消需要更多孤立点这一缺点。当 r 取关于 n 的指数级值时，尤其如此，例如树 [11] 的 Ellingham 标号。

[1] 在 [3] 中以及在 [10], 中（称为 spum），所提到的差异仅针对达到和数的标号进行考量。5

进一步扩展我们的记号，我们还将考虑标号策略 λ 的 r_λ；也就是说，对于上述为整个稀疏图族进行标记的方法，可以将 r_λ 视为一个映射，它将 n 关联到按此策略标记的 n 阶图的最大范围。因此，我们可以分析某些标号策略下 r_λ 的增长情况。

图数据库的主要用途是什么？显然，我们需要访问图。一个基本操作是回答两个顶点之间是否存在一条边。现在，如果 $\max \lambda(V)$ 关于 $n = |V|$ 是多项式级的，我们就可以在 $\mathcal{O}(\log(n))$ 时间内回答这个查询。也就是说，假设标号大小有多项式上界，那么我们需要 $\mathcal{O}(\log(n))$ 时间来相加两个顶点的标号；此外，还需要 $\mathcal{O}(\log(n))$ 时间，使用二分查找在有序数列中查找它们的和。否则，额外的 $\mathcal{O}(\log(\max \lambda(V)))$ 时间开销将相当大，很可能使得在数据库中将大型图存储为和图的想法失去吸引力。因此，也应考虑标号的范围。

文献 [9] 中讨论了其他参数，它们能够更精确地衡量存储图所需的空间消耗。不过，对于本文的讨论而言，两个参数 λ 和 $r(\lambda)$ 已经足够；此外，从本文所采用的组合观点来看，这两个参数也更易于处理。

处理和标号组合性质时遇到的主要困难，在这些经过修改的定义中同样存在，那就是如何证明下界。唯一可用的一般性结论是：图的和数至少等于其最小度。还有一些基于度序列对这一观察的推广（见 [12, 4]），但这与我们无关，因为我们考虑的是有界度图。例如，这意味着一个圈集的和数至少为二。但是，正如下文所示，即使要证明某些圈集的和数为二，也绝非易事。目前并没有真正系统化的工具可用。

关于和范围数这一概念，值得注意的是，[10] 中关于图的 spum 的定理 2.1 的证明在我们的情形下同样成立（如上所述，我们的情形是 spum 在定义上的一种变体），因此我们可以不加证明地陈述以下结果。

命题 1. 设 G 是一个阶为 n、最小度为 $\delta(G)$、最大度为 $\Delta(G)$ 的图。那么，$r_\sigma(G) \geq 2n - (\Delta(G) - \delta(G)) - 2$。

请注意，对于正则图，上一命题给出的下界可简化为 $2n - 2$。遗憾的是，即使对于我们这些简单的图族，也只有在少数情况下才能达到这个下界。

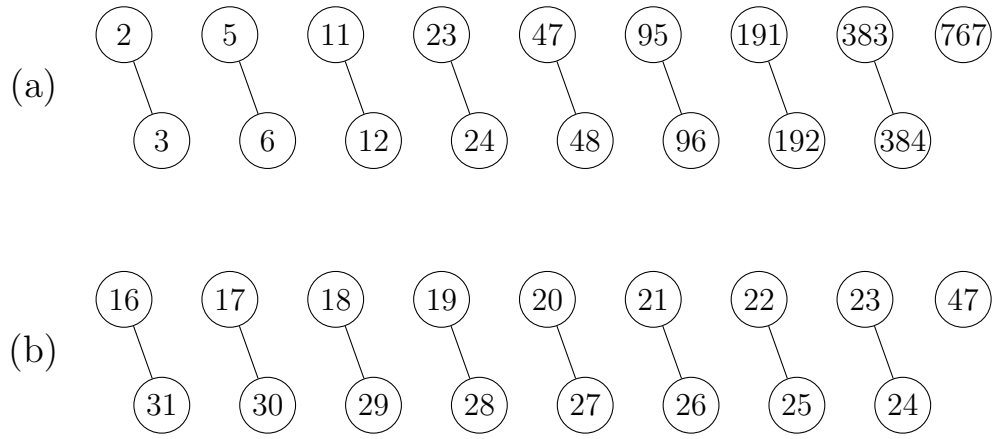

图 3：（a）指数标号方案；（b）线性标号方案。

3. 一个初步示例：为不相交的边集标记

本节可作为和标号复杂性的入门示例。此前也有人研究过这一问题 [9, 10]。此外，本节还涵盖了主定理的一个重要特例，即 1-正则图，或（最大）度为一且没有孤立点的图。此外，还可以看到一些涉及两个图的并的示例，其中每个图的和数均为一。

已知所有树的和数都是 1；根据定理 5.1 后的一条评注，[11], 所有森林的和数也都是 1。不过，这些构造中的标号大小增长得有多快，并不十分清楚。另外，请记住，对于和数为 1 的一般图，它们的图并是否仍有和数 1，目前仍是一个开放问题 [3]。因此，我们将给出两种不同的构造，为不相交的边集标记。更准确地说，我们将为 1-正则图这一族展示两种标号方案：一种指数标号方案和一种线性标号方案。

3.1. 指数解

如果你有 n 个顶点（即 $n/2$ 条边），则将第一条边标记为 (2,3)。第二条边以第一条边的边标号开头（$2+3=5$，因此第二条边标记为 (5,6）。第三条边以第二条边的边标号开头（$5+6=11$，因此第三条边标记为 (11,12)，依此类推（示例见 图 3 (a)，其中 $n=16$）。

将其推广，以下标号方案 $\lambda:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 适用于

每个 1-正则图：

$$\lambda(n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n = 1 \\ \lambda(n-1) + 1 & \text{if } n \text{ is even} \\ \lambda(n-2) + \lambda(n-1) & \text{if } n \text{ is odd and } n > 1 \end{cases}$$

《整数数列在线百科全书》指出，如果我们将起点设为$\lambda(0) = 1$，那么这可以看作是乌拉姆数的另一种变体。于是，$\lambda(n)$（对于 $n > 1$）可以看作是大于 $\lambda(n-1)$的数中最小的（当 n为偶数时）或最大的（当 n为奇数时）一个，且它是该数列中两个不同的较早项之和的唯一表示。这一联系还给出了以下闭式：

$$\lambda(n) = \begin{cases} 3 \cdot 2^{k-1} & \text{if } n \text{ is even, i.e., } n = 2k \\ 3 \cdot 2^k - 1 & \text{if } n \text{ is odd, i.e., } n = 2k+1 \end{cases}$$

换句话说，我们有 $\lambda(n) \in \Theta\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right)$，这意味着它关于 n呈指数增长。尽管所建议的标记 λ 在和数 σ方面是最优的，但我们看到：$r(\lambda_n) \in \Theta\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right)$。在和范围数方面，我们能做得更好吗?

3.2. 线性解

考虑以下适用于 1-正则图的一般标号方案（注意，n 必为偶数）。我们先用一种更直观的方式描述它，同时标出各条边。

$$(n, 2n-1), (n+1, 2n-2), \ldots, \left(\frac{3n}{2} - 1, \frac{3n}{2}\right).$$

这里，写作 $(\lambda(u)\ \lambda(v))$ 表示由一条边连接的两个顶点 u、v（见图 3 (b)，其中给出了 $n = 16$ 的示例）。注意，所有边标号之和为 $3n-1$（即孤立点），而且两个最小标号之和，即 $n + (n+1) = 2n+1$，小于 $3n-1$，但大于图中的任何其他标号。更正式地说，我们考虑函数λ、σ、ι，满足 $\lambda(n) = \sigma(n) = n$ 且 $\iota(n) = 3n-1$。由此得到一个阶为 n 的 1- 正则图的顶点名称 $\{n, n+1, \ldots, 2n-1\}$。

通过使用参数（x、y、d、k），并令 $x < y$（在我们的例子中，$x = n$、$y = 2n-1$、$d =$1、$k = n/2-1$），可以进一步推广这一一般标号方案，方法是设置

$$(x, y), (x+d, y-d), \ldots, (x+kd, y-kd).$$

所有标号相加之和为 $x+y$，即孤立点。只要两个最小标号之和（即 $2x+d$）小于 $x+y$ 但大于 y，这样的和标号就是有效的。由于该方案由一个递增等差数列与一个递减等差数列（斜率相同）交错组成，我们称这类方案为等差数列方案。

我们最初提出的具体等差数列方案，其范围是数值 n 到 $2n-1$，因此（几乎）是最优的，因为命题 1 给出了 $2n-2$ 作为下界。Singla, Tiwari & Tripathi [10]给出的上界是 $2n-1$。因此，我们知道最优答案要么是 $2n-2$，要么是 $2n-1$，但我们不知道究竟是哪一个。

3.3. 路径标号

针对 1-正则图提出的思路同样适用于路径。由于下文将明确用到指数标号方案，现在我们只介绍这一种方案。关于线性解，请参见 [9, 10]。

一种方案可以先固定两个正整数 x, y 作为参数，再定义标号方案 $\lambda^{\phi}_{x,\,y}$：$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 如下。

$$\lambda^{\phi}_{x,y}(n) = \begin{cases} x & \text{if } n = 1 \\ y & \text{if } n = 2 \\ \lambda^{\phi}_{x,y}(n-2) + \lambda^{\phi}_{x,y}(n-1) & \text{if } n > 2 \end{cases} \tag{2}$$

由于它与斐波那契数相似，显然 $\lambda^{\phi}_{x,\,y}(n) = \mathcal{O}(\phi^n)$，其中 ϕ 是黄金比例数，无论初始值 x、y为何皆如此。因此，我们可以通过这一斐波那契方案推导出以下众所周知的事实。

引理 1. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$\sigma(P_n) = 1$。

4. 若干圈集合的标号策略

回想一下，根据图 2中概述的算法策略，我们首先处理所有长度为五及以上的圈，然后处理所有三角形，最后处理所有长度为四的圈。这一组最棘手，因为它可能会留下三个中间孤立顶点。除这一特殊情况外，我们总会遇到这样的情形：处理完个圈后，有两个孤立点，我们将它们并入第个圈，作为新斐波那契型标号的起点。以下小节将对此进行详细讨论。

对于归纳论证，关键在于知道我们的标记中包含一个非平凡等差数列，简称 NTAP。这意味着，在所提出的标记中，我们找到三个标号 x、$x+d$、$x+2d$，使得偏移量 d 不是一个标号。

4.1. 4-圈集合

在本小节中，我们实际上提出了两种标号策略。第一种可以称为“线性—指数”，因为所提出的标号策略在每个圈上都是线性的（一个等差数列），但从一个圈到下一个圈，我们会观察到指数增长。它始终使用三个孤立点，但与第二种策略相比，其范围更小；第二种策略只使用两个孤立点（从两个 C_4 开始），但需要更大的范围。

4.1.1. 线性—指数标号方案

考虑一个 C_4 的标号 (2, 5, 8, 11)。注意，这个数列是公差为 3 的等差数列。所有数字模 3 同余于 2。

三个孤立点的标号为：(7, 13, 19)。这个公差为 6 的等差数列还可以再次扩展为第二个 C_4 的标号，即 (7, 13, 19, 25)。所有数字模 3 同余于 1。

现在有三个孤立点：(20,32,44)。这个公差为 12 的等差数列可以再次提升为第三个 C_4 的标记，即 (20,32,44,56)。所有数字模 3 同余于 2，与第一个 C_4 一样。

显然，我们可以继续这种构造，添加第四个 C_4，其标号为 (52,76,100,124)。所有数字模 3 同余于 1。

最后，编号为奇数的圈对应的数字模 3 同余于 1，而编号为偶数的圈对应的数字模 3 同余于 2。关于模 3 的这些观察表明，后续圈中的顶点之间绝不可能有边。由于第 i 个圈的所有边标号都可以在第 $(i+1)$ 个圈中找到，我们可以看出（因为第 i 个圈上的差值具有 $3 \cdot 2^{i-1}$ 的形式），第 i 个圈上的非边（对角线）无法由第 $(i+1)$ 个圈上的顶点表示。由于标号从一个圈到下一个圈呈指数增长，其他非边也无法由所提议的数字表示。由此可证：

引理 2. 如果 G 是若干个 C_4 的不交并，那么 $\sigma(G) \leq 3$。

此外，我们还可以表述如下：

引理 3. 对于一个由 C_4 个 C_4 组成的、阶为 n 的图 G，在我们上文描述的特定标号方案 λ 下，$r_\lambda(G) \in \mathcal{O}(2^{n/4})$。

4.1.2. 向最优和标号迈进

我们知道 $\sigma(kC_4) \in \{2, 3\}$ (引理 2)，并且已知 $\sigma(C_4)$ =3。我们是否也可以证明 $\sigma(2C_4) = 2$，甚至 $\sigma(3C_4) = 2$? 让我们进行一些代数运算，假设所考虑的两个 C_4's 采用等差数列标号。

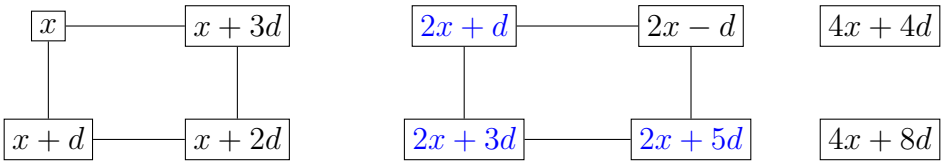

图 4：针对 C_4 问题的代数方法。

图 4 的思路是在第一个环的标号中找出第二个环的三个孤立点之一。要实现这一点，唯一可能的方式是孤立点 $4x = (2x + d) + (2x - d)$。显然，$4x \neq x$。如果 $4x = x + d$，那么$3x = d$。这与标号 $2x - d$ 矛盾，这意味着 $2x > d$。如果$4x = x + 2d$，我们得出 $3x = 2d$，因此 x 为偶数，且 d 可被 3 整除。满足这些条件的最小数是 $x = 2$ 和 $d = 3$；见图 5。这些整除条件还表明，所有其他具有这种形式的标号都必须是这一最小标号乘以某个常数因子的缩放。最后，如果 $4x = x+3d$，那么 $x = d$。因此，数 $2x+d = x+2d$ 会作为顶点标号出现两次。所以，在我们的第一个环按照图 4 所示进行标记的条件下，图 5 基本展示了唯一的可能性。注意，这个标记包含 NTAP $2 - 5 - 8$。

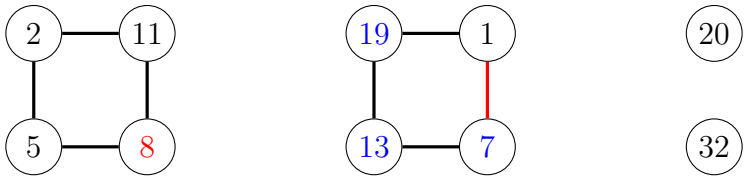

图 5：为一个含有两个孤立点的 $2C_4$ 标注的最简方式。

缩放能否也帮助我们用这种策略为 $3C_4$ 标号? 答案有些出人意料：可以。首先，我们来看一个具体例子，见 图 6。诀窍在于以下步骤：

1. 将目前使用的所有标号乘以一个足够大的常数 $z > 2$；在我们的例子中，这个常数是 4。实际上，我们需要满足（模 z）$z - 1 \neq z + 1$。为了简化归纳论证，我们始终选取$z = 4$。

2. 选取第一个圈中最小的三个标号，在我们的例子中即为 $x = 8$, $x + d$ =20, $x + 2d = 32$，再选取数字 a, b, c, e 来标记第三个圈。为避免出现非预期边，选择 $a = x/2 + 1$（请记住， x 必须是偶数）、$b = x/2 - 1$, $c =$ $(x + 2d)$ $/2 + 1$,$e =$ $(x + 2d)$ $/2 - 1$。

3. 注意， $2C_4$-构造中的孤立点保持不变。

4. 此外，由于我们对 $2C_4$ 的标记包含一个 NTAP，所提出的 $3C_4$ 标记也包含一个 NTAP。

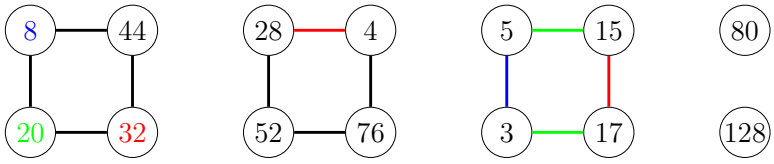

图 6：一种为含有两个孤立点的 $3C_4$ 标记的方法。

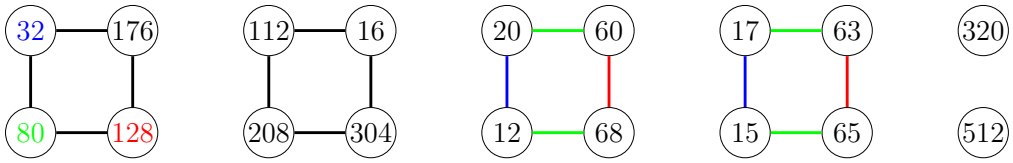

图7：一种为含有两个孤立点的 $4C_4$ 标记的方法。

由于 $2C_4$-构造在缩放之前保持不变，我们实际上可以重复这一论证，从而得到一个 $4C_4$ 如图7所示的标记，而这类论证还可以继续通过对 k进行归纳法来证明：

引理4. $\sigma(kC_4) = 2$ 对所有 $k \geq 2$ 均成立。此外，相应的标记包含一个 NTAP。

Proof. 我们来说明归纳法中的一些细节。为了使归纳论证成立，我们额外提出如下断言：最小的三个

数 x, y, z 是第一个圈的标号，且构成一个等差数列；也就是说，存在一个数 d，使得 $y = x + d$ 且 $z = x + 2d$。此外，d 不是任何顶点的标号，因此该标记满足 NTAP。上文已给出 $k = 2$ 的归纳基，且它满足 NTAP。假设对于某个特定的 $k = K \geq 2$，标号策略成立。将前 K 个圈的所有标号乘以四后，由这些数描述的仍然恰好是 K 个圈的边，此外，剩下的两个孤立点在整体标号中仍是孤立点。乘以四修改后也能找到一些 NTAP。第 $(K + 1)$ 个圈的标记以第一个圈中最小的三个标号 $x, x + d, x + 2d$ 为基础，选取 $a = x/2 + 1, b = x/2 - 1$，以及 $c = a + d$ 和 $e = b + d$ 作为最后一个圈的标号。由于我们将所有原始数都乘以了四，x 是偶数。此外，$a + b = x, a + e = b + c = x + d$ 和 $c + e = x + 2d$，因此所有期望的边标号都可以在第一个圈的顶点标号中找到。相反，与 $a + c = 2a + d = x + d + 2$ 和 $b + e = 2b + d = x + d - 2$ 对应的非预期边无法作为顶点标号找到，因为前 K 个圈的所有顶点标号（以及孤立点的标号）都能被四整除，包括标号 $x + d$。最后，由于所有“新标号”都是奇数，而所有“旧标号”都是偶数，因此连接“旧顶点”和“新顶点”的边必须标记为“新标号”，这也意味着只有两个较大的“新标号” c 和 e 可能作为边标号。此外，由于 c 模四余一，它必须与另一个模四余一的唯一标号 a 相匹配，因为所有“旧标号”都能被四整除。因此，问题在于 $c - a = d$ 是否是一个“旧标号”；根据归纳假设，显然不是。同理，b 和 e 模四余三，但 $e - b = d$，因此同样的论证也适用。□

请注意，在前一个证明中隐含的递归标号算法里，假设 d 不会作为顶点标号出现至关重要；否则，由于我们有顶点标号 $a + d$，a 和 d之间就会出现一条不希望有的边。

与上一小节所述的标号策略（尤其是引理 3中分析的策略）相比，对于这种新的标号策略，我们得到的取值范围增长关系更差。

引理 5. 对于一个由 $n/4$ 个 C_4 构成、阶为 n 的图，存在一种标号策略 λ，适用于 C_4 的不交并，使得 $r_\lambda(G) \in \mathcal{O}(2^{n/2})$。

Proof. 尽管最小标签的大小也以这种幅度增长，但只需估算最大标签的大小。对于 $2C_4$，其大小为$32 = 2 \cdot 2^{8/2}$，如图 5所示。由于最大标签总是乘以 $4 = 2^{4/2}$，根据归纳法，考虑一个 $2 \cdot 2^{n/2} = 2 \cdot 2^{(n-4)/2} \cdot 2^{4/2}$ 顶点图，它由 n个 $n/4$ 构成，每个都是 C_4。□

我们可以推广引理4 的构造，得到以下结果。

命题2. 设 G 是一个图，满足 $\delta(G) = \sigma(G) = 2$，且存在其和图 $H = G + N_2$的一个和最优标记 λ，使得 $\lambda(V(H))$ 包含一个 NTAP，那么存在和图 $H' = G + C_4 + N_2$ 的一个和最优标记 λ'，使得 $\lambda(V(H'))$ 包含一个 NTAP。

例如，考虑 $C_3 + C_4$，从 C_3的一个标记 $1 - 3 - 4$ 开始。此时，孤立点为 5 和 7。注意，1、3、5 构成一个等差数列，其偏移量 2 不是顶点标号。因此，我们可以将这些数乘以 4，得到 C_3的一个标记 $4 - 12 - 16$，其中孤立点标记为 20 和 28。最后，我们将 C_4 标记为 $1 - 3 - 9 - 11$。显然，孤立点标记 20 和 28 仍然适用。

在最终将本小节的结果与下一小节的结果结合时，这个命题会很有用。重新审视引理 12时，等差数列的重要性也会变得显而易见。不幸的是，正如引理 5中已经说明的那样，如果反复应用这个命题，范围将以$\sqrt{2}$ 为底数呈指数增长。

4.2. 不含 4-圈的圈的集合

我们首先讨论不含 C_4的圈集合的标号策略，不过命题2 立即给出了一种之后添加 C_4 的方法，下面将对此加以说明。

4.2.1. 处理长环

我们将考虑圈 C_n 的斐波那契标记，其中 $n > 4$,[2]，三角形的情形留待稍后处理。

$$\lambda_n(x, y) : (x, x + y, 2x + y, 3x + 2y, \ldots, F(n)x + F(n - 1)y)$$

带有孤立点（$F(n) + 1)x + F(n - 1)y$和 $F(n + 1)x + F(n)y$，并使用斐波那契数列 F：(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .)，为方便起见令 $F(0) = 0$。

[2]此类更长环的集合已在[13] 以类似的方式处理。

引理 6. 对于任意 $n \geq 3$、 $n > 4$，以及任意 $1 \leq x \leq y$， $\lambda_n(x, y)$ 给出了 C_n 的一个和标号。

事实上，我们可以考虑标号方案 $\lambda(x, y)(k) = F(k)x + F(k-1)y$。请注意，对应的值域函数在 C_n 时按 φ^n 增长，其中 φ 是黄金比例数。

参数 x 和 y $(x < y)$ 为我们提供了很大的灵活性。我们可以从若干个更长的环中的第一个开始标记，从 $x_1 = 1$ 和 $y_1 = 1$ 开始。如果第一个环的长度为 n_1，那么它的最后一个顶点将标记为 $F(n_1)x_1 + F(n_1 - 1)y = F(n_1) + F(n_1 - 1) = F(n_1 + 1)$。两个孤立点 $(F(n_1)+1)+F(n_1-1) = F(n_1+1)+1, F(n_1+1)+F(n_1) = F(n_1+2)$，从而得到一组新的数对 (x_2, y_2)。如果第二个环的长度为 n_2，那么它的最后一个顶点将标记为 $F(n_2)x_2 + F(n_2 - 1)y_2 = F(n_2)(F(n_1 + 1) +1) + F(n_2 - 1)F(n_1 + 2)$。孤立点也有类似的表达式，它们将再次构成标记下一个环的起始数对 (x_3, y_3)，以此类推。

我们通过一个例子来说明这一标号策略：图 8 中由三个C_5 组成的集合。这一策略的缺点在于，我们看不出其中存在一个偏移量不是顶点标号的等差数列。特别是，我们该如何标记 $C_5 + C_4$?

不过，这个问题有解决办法：Singla, Tiwari & Tripathi [10] 证明了，对于 r_σ（即 spum 数）， $r_\sigma(C_n) \in [2n - 2, 2n - 1]$ 适用于 $n \geq 4$，而$r_\sigma(C_n) = 2n - 1$ 适用于 $n \geq 13$。具体而言，对于奇数 $n \geq 5$，他们提出了如下标号集：

$$L(C_n) = [n - 3, 2n - 4] \cup \{3n - 6, 3n - 4\} \qquad \text{ordered as}$$

$$(n - 3, n - 1, 2n - 5, n + 1, 2n - 7, n + 3, 2n - 9, \ldots, 2n - 4, n - 2, n - 3)$$

例如，这会为一个 C_5 生成标记 (2, 4, 5, 6, 3)，并有孤立点 9、11。遗憾的是，这并非论文所称的有效标记，因为我们发现标号为 2 和 9 的顶点之间出现了一条多余的边，其标号和为 11。不过，对于 $n = 7$，这种标记是可行的：我们得到 (4, 6, 9, 8, 7, 10, 5)，并有孤立点 15、17。也就是说，我们发现，两个孤立点标记之差 $3n-6-(3n-4) = 2$ 仅在 $[n-3, 2n-4]$ 中当 $n = 5$ 时才出现。在 [10], 中，有人提出了另一种适用于偶数 $n \geq 4$ 的标记：[3]

$$L(C_n) = [n - 2, 2n - 3] \cup \{3n - 5, 3n - 3\} \qquad \text{ordered like}$$

$$(n - 2, 2n - 3, n, 2n - 5, n + 2, 2n - 7, \ldots, 2n - 4, n - 1, n - 2)$$

[3]与所声称的不同，这种标记方法实际上对 $n = 4$ 并不适用。

因此，对于 $n = 6$， C_6 可以标记为 (4,9,6,7,8,5)，并有孤立点 13、15。在所有情况下，我们显然都能找到一个 NTAP；例如，对于所提出的 C_6- 标记 4,5,6，其偏移量为 1。

由于这对我们的算法很重要，让我们证明确实存在一种 C_5 的和标号，满足我们所需的条件。

引理 7。标记为 (1, 2, 7, 9, 3)，并带有孤立点 4、12、16 的标记包含等差数列 $2 - 7 - 12$，其偏移量 5 并非任何顶点的标号。

这看起来比斐波那契标号所能达到的结果更差，因为我们需要三个孤立点；但实际上它更好，因为 4、12、16 可以看作第二个环上斐波那契标号的起始部分。这证明了$\sigma(C_5 + C_n) = 2$，若 $n \neq 4$，因此可以给出一种包含 NTAP 的最优标号。例如， $C_5 + C_3$ 可以标记为$\{1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 16\}$，并带有孤立点 $\{20, 28\}$。只有对接下来的圈，我们才采用斐波那契方案。这样便保留了具有 NTAP 的性质。

引理 8. 将 $C_5 + C_4$ 标记为 (2, 4, 6, 10, 16)，将 C_5 标记为 (1, 9, 18, 26)（孤立点为 27、44）的标记包含 NTAP$10 - 27 - 44$。

Proof. C_5 标记遵循斐波那契方案。由于 $1 + 9 = 10$，一条C_4 边标号位于 C_5 中，而其余边标号位于孤立点中。 □

这个标号方案可以推广如下：

$$\begin{aligned} C_5 &: (a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b); \\ C_4 &: (c, 2b + c, 3a + 3b, 3a + 5b); \\ \text{isolates} &: 3a + 5b + c, 6a + 8b. \end{aligned}$$

上述标记要求 $a = 2c$（以确保 $a + 2b = 2b + 2c$ 对于连接 $2b + c$ 和 c 的边成立），并且 $b \neq 3c$（以避免不希望出现的边 $a + (a + b) = b + 4c$ 被表示为 $2b + c$）。

最后，为结束本节，我们展示两种不同的 $3C_5$ 标记方法。图 8 展示了严格遵循斐波那契方案进行标记的结果。若一开始就使用引理 7（这样可以按需展示等差数列），则得到图 9。

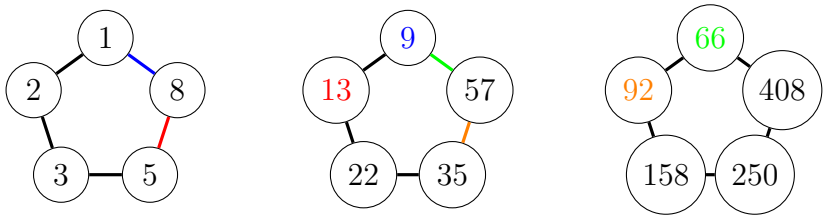

图 8：如何为圈集标号，此处为三个 C_5，并带有孤立点 474、658。

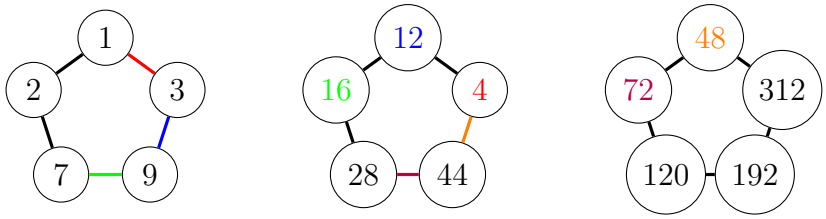

图 9：如何为圈集标号，此处为三个 C_5，并带有孤立点 360、504 和 NTAP $2-7-12$。

4.2.2. 处理三角形

我们将证明关于三角形圈集（C_3）的以下断言。

引理 9. 任意非空三角形圈集的斐波那契标号方案，都会给出一个包含 NTAP 的有效和标号。

更确切地说，考虑

$$\lambda'_n(x,y) : (x, x+y, 2x+y;\ 3x+y, 3x+2y, 6x+3y;\ 9x+4y, 9x+5y, 18x+9y;\ \dots)$$

作为一种标号方案，可用于 ℓ 多个 C_3，并包含孤立点

$$3^\ell x + \lfloor 3^\ell/2 \rfloor y, \quad 3^\ell x + \lceil 3^\ell/2 \rceil y\,.$$

与此前为更长的环设定的方案相比，这种方案在增长方式上有所不同。不过，它可以嵌入一种归纳构造中，用于标记任意数量的不含 C_4的圈。

为了最终将这种标记与随后对一组 C_4 的标记协调起来，我们需要满足一个 NTAP。首先，注意到如果 $y \neq x$，那么 y (在 $\lambda'_n(x,y)$ 中) 不是任何顶点的标号。接着，为了得到一个等差数列，我们可以找到 $x+2y = 3x+y$，或 $y = 2x$。换言之，我们提出以下标号方案

$$\lambda^{(3)}_n(z) = \lambda'_n(z, 2z) : (z, 3z, 4z; 5z, 7z, 12z; 17z, 19z, 36z; 53z, 55z, \dots)$$

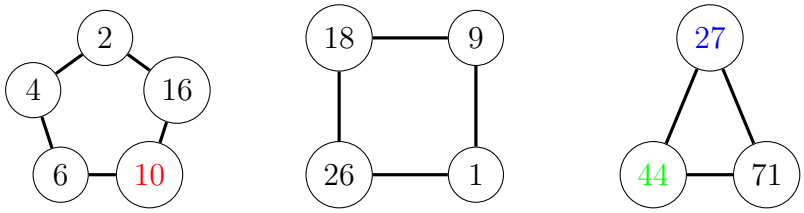

图10：如何标记 $C_5 + C_4 + C_3$，其中包含孤立点 98、115 和 NTAP $10 - 18 - 26$。

适用于三角形集合。例如，对于单个 C_3，我们可以采用标记 (1, 3, 4; 5, 7)，其中 $z = 1$。如果考虑这一标号序列中每个圈的最小标签序列 $g(n)$，并假设 $z = 1$，我们得到递推关系 $g(1) = 1$ 以及 $g(k) = 3g(k-1) + 2$。这证明 $g(k) \in \Omega(3^k)$。因此，标号方案 $\lambda_n^{(3)}(z)$ 的范围会随着顶点数 n 呈指数增长，与 $(\sqrt[3]{3})^n$ 类似。

因此，我们可以利用这些方案来标记任意圈集，而无需C_4，只需将标记一个圈集所需的两个孤立点 ι_1 和 ι_2 （根据归纳假设）视为下一个圈的前两个顶点，例如 $\ell \quad x$ 和 $x + y$。此外，显然，任何包含至少一个三角形且以这种方式标记的圈集都有一个 NTAP。因此，我们可以应用命题 2，在其上添加一个 C_4 圈集。每次我们只需要为这个圈集准备两个孤立点，只有一种例外：整个圈集只包含一个 C_5，对此引理 8中描述了一种特殊标记方法。由此证明了我们的二正则图主定理。

尽管我们针对二正则图的标号策略 λ 达到了 G （ σ），但可以看出，在最坏情况下， r_σ（λ） $\in \mathcal{O}$（φ^n），其中 φ 是黄金比例数。不过，如果环集合只包含较短的圈，增长率就会降低。尽管如此，增长仍然是指数级的，目前尚不清楚是否存在范围保持多项式级别的二正则图标号策略。

最后需要说明的是，我们提出的标号序列，即我们的标号策略，并非唯一可行的方案，如图10所示，其中 $C_5 + C_4$ 的标号（如引理 8 所示）最终与对一个 C_3进行标号相结合。我们的标准标号策略会稍差一些，如图 11所示。

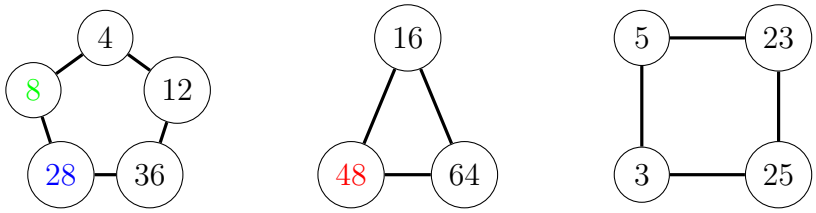

图 11：标记 $C_5 + C_3 + C_4$，其中孤立点为 124、140，NTAP 为 $8 - 28 - 48$。

5. 将路径纳入讨论

首先讨论一种一般情况：处理完所有圈之后，我们会遇到这种情况。在这里，我们必须区分两种情形：这个环集合的和数为二，或者其和数为三，这意味着它是一个单独的 C_4。

5.1. 处理和数为二的环集合

命题 3. 设 $G = (V, E)$ 是一个图，其 $\sigma(G) = 2$，由标记 λ 证明，并具有孤立点标记 ι_1 和 ι_2。若对于任意两个顶点 $u, v \in V$，都有 $\iota_1 + \iota_2 \neq \lambda(u) + \lambda(v)$，则对于任意 $k \geq 2$，都有 $\sigma(G + P_k) = 1$。

Proof. 假设 $\iota_1 < \iota_2$。回顾路径的斐波那契标号方案（公式（2））。我们提议使用 $\lambda^{\phi}_{\iota_1,\, \iota_2}$ 来标记 P_k。显然，ι_2 和 $\iota_1 + \iota_2$ 是两个最大的标号，分别标记路径上的第二个和第三个顶点（或者在 $k = 2$ 时标记孤立点）。这是斐波那契方案保持不变的性质：路径上的 ℓ^{th} 和 $(\ell + 1)^{\text{th}}$ 个顶点的标号始终大于此前的任何标号。由此，且由于假设对于任意两个顶点 $u, v \in V$，都有 $\iota_1 + \iota_2 \neq \lambda(u) + \lambda(v)$，这种标记不会引入非预期边，因此对 $G + P$ 有效。此外，它只会留下一个孤立点。由于 $\delta(G + P) = 1$，该标记是最优的。 □

注意，如果 $\sigma(G) > 2$，这一论证同样成立；只需取最大的孤立点标号，再加上任意另一个孤立点标号，即可得到标号 λ_3（如果添加的路径长度为二，则得到 ι）。这证明了以下事实：

推论 1. 设 $G = (V, E)$ 是一个具有 $\sigma(G) \geq 2$ 的图，由一个标记 λ 证明，其最大的孤立点标记为 ι_1 和 ι_2。若对于任意两个顶点 $u, v \in V$，都有 $\iota_1 + \iota_2 \neq \lambda(u) + \lambda(v)$，则对于任意 $k \geq 2$，都有 $\sigma(G + P_k) \leq \sigma(G) - 1$。

请注意，这一论证不同于 [14] 中提出的（更一般的）论证；该论证在假设存在 G_1 的最优标号 λ_1 和 G_2 的最优标号 λ_2，且 $\lambda_i(V(G_i))$ 中有一个元素与 $\lambda_{3-i}(V(G_{3-i}))$ 的最大元素互质（对于 $i=1$ 或 $i=2$）的条件下，证明了 $\sigma(G_1+G_2) \leq \sigma(G_1)+\sigma(G_2)-1$。此外，请注意，采用斐波那契标号方案时，标号会呈指数级增长。

5.2. 将一个4-圈与路径组合

结合引理4 的思路和目前为止的结果，人们可能会认为，每个 G 最大度为2且包含一个与 C_4 不相交的副本的图，其和数等于 G的最小度。我们的下一个结果表明，事实并非如此。

命题 4. $\sigma(C_4+P_2)=2$。

在证明命题 4之前，我们需要对 C_4作一些观察。这些观察也说明了为什么 C_4 与其他所有圈不同（至少就和数而言）。

Harary [2] 已经证明了 $\sigma(C_4)=3$。下面我们给出其中的一个原因，因为这说明了当最小度判据（证明每个 $r\geq 3$都有 $\sigma(C_r)\geq\delta(C_r)=2$）不足以奏效时，如何证明 σ 的下界。

引理 10. 设 C_4+G 是一个无孤立点图，并且 H 是 C_4+G的和图。那么，与 C_4的边和对应的所有顶点都位于 $H-C_4$中。

特别是，这意味着任意一个 C_4 的和标号都是唯一的，[4]因此 $\sigma(C_4)=3$ 由下一个引理（引理 11）可知成立。

Proof (Proof of Lemma 10). 我们将用反证法证明这一点。设 C_4 的顶点标号按循环顺序为 (a,b,c,d)。反设 $a+b=c$（由于 C_4的对称性，其他情况类似）。那么，我们断言以下各项均成立。

(i) 存在一个标号为 b 的顶点，位于 H 中。
(ii) 存在一个标号为 $a+d$ 的顶点，位于 H 中。

[4]这意味着边标号属于孤立点标记。

(iii) 在 H 中存在一个标号为 $a+b+d$ 的顶点。

由于 b 位于 C_4 中，(i) 成立。由于 (a,d) 是一条边，且 H 是一个和图，(ii) 成立。最后，由于 (c,d) 是一条边，H 是一个和图，且 $c+d=a+b+d$，(iii) 也成立。现在，由于 H 是一个和图，(i)、(ii)、(iii) 合起来意味着标号为 b 的顶点与标号为 $a+d$ 的顶点之间必定有一条边。但是，b 恰好有两个邻点，标号分别为 a 和 c，所以 $a+d$ 必定是其中之一。我们将证明，这两种情况都会导致矛盾。

如果 $a=a+d$，那么 $d=0$，这是不可能的，因为 H 是一个和图。如果 $c=a+d$，那么 $c=a+b$ 蕴含 $b=d$，这是不可能的，因为 H 是一个和图。□

引理 11. 设 C_4+G 是一个无孤立点图，并设 H 是由 C_4+G 得到的和图。设 S 是与 C_4 的四条边和相对应的数集。那么，$|S|\geq 3$。

Proof. 我们将证明 $|S|\leq 2$ 会导致矛盾。也就是说，C_4 的四条边必须至少有三个不同的边和。设 C_4 的顶点标号按循环顺序为 $(a、b、c、d)$。共享一个顶点的两条边不能具有相同的边和，因为否则会有两个顶点具有相同的标号。因此，C_4 只有两个不同边和的唯一可能是以下两点同时成立。

$$a+b=c+d$$
$$a+d=c+b.$$

将第一个方程从第二个方程中相减，得到 $b-d=d-b$，或 $b=d$，这在和图中是不可能的。证明完毕。 □

引理 12. 设 C_4+G 是一个无孤立点图，且 H 是 C_4+G 的和图。设 S 是与 C_4 的四个边和对应的数集。若 $|S|=3$，则 S 中的三个数构成等差数列。

Proof. 设（a,b,c,d）是 C_4 的一个标记，使得 $a+b=c+d$。设

$$\mathsf{sum}=a+b=c+d;$$
$$\mathsf{diff}=c-a=b-d.$$

我们将证明，三个孤立点的标号为

$$\begin{aligned}\mathsf{iso}_1 &= \mathsf{sum} - \mathsf{diff};\\ \mathsf{iso}_2 &= \mathsf{sum};\\ \mathsf{iso}_3 &= \mathsf{sum} + \mathsf{diff}.\end{aligned}$$

根据和的定义，边 (a, b) 和 (c, d) 的标号均为 iso_2,。至于边 (a, d) 和 (b, c) 的标号，我们有如下结论。

$$\begin{aligned}a + d = (c + d) - (c - a) &= \mathsf{sum} - \mathsf{diff} = \mathsf{iso}_1;\\ b + c = (a + b) + (c - a) &= \mathsf{sum} + \mathsf{diff} = \mathsf{iso}_3.\end{aligned}$$

由于iso_1, iso_2, iso_3 显然构成等差数列，因此引理 12 的证明到此完成。引理 12。□

最后，我们可以证明命题 4。

Proof (Proof of Proposition 4). 将 C_4 标记为 (1, 7, 13, 19)，将 P_2标记为 (20, 32)，并将两个孤立点标记为 8 和 44。容易验证这是一个和图，因此 $\sigma(C_4 + P_2) \leq 2$。

为了证明 $\sigma(C_4 + P_2) \geq 2$，反设 $\sigma(C_4 + P_2) = 1$。设 P_2 的顶点标号为 (b_1, b_2)（假设 $b_1 < b_2$），孤立点的标号为 b_3。回想一下，每个 C_4 至少有三个不同的边标号（引理 11），且这些标号均不能出现在C_4 本身的顶点上（引理 10）。因此，唯一的可能是 C_4的边标号为 b_1、b_2、b_3。此外，我们知道，只要 C_4 恰有三个边标号，这三个数就构成等差数列（引理 12）。

现在注意到，P_2 的最大标签（即 b_2）必定是图 $G = C_4 + P_2$的最大标签，因为 G 只有一个孤立点。因此，对于 P_2的边标号 $b_1 + b_2$，我们有：

$$b_1 + b_2 = b_3. \tag{3}$$

如上一段所述，由于 $b_1 < b_2 < b_3$ 是 C_4的三个边标号，因此它们构成等差数列，这意味着

$$b_3 - b_2 = b_2 - b_1. \tag{4}$$

根据方程（3）和方程（4），我们得到 $b_2 = 2b_1$ 和 $b_3 = 3b_1$，或者

$$b_i = ib_1 \qquad \forall\, i \in \{1, 2, 3\}. \tag{5}$$

考虑图 C_4 的一个 P_3 子图，其中图 P_3 的两条边之一标记为 b_2。更准确地说，设 P_3 为 (a_1, a_2, a_3)，使得 $a_1 + a_2 = b_2$。由于 $a_1 \neq a_3$，边 (a_2, a_3) 也不能标记为 b_2。因此，(a_2, a_3) 标记为 b_1 或 b_3。也就是说，$a_2 + a_3$ 等于 b_1 或 b_3。如果 $a_2 + a_3 = b_1$，那么

$$\begin{aligned} a_1 - a_3 &= (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) \\ &= b_2 - b_1 \\ &= 2b_1 - b_1 && \text{Using (5)} \\ &= b_1. \end{aligned}$$

如果 $a_2 + a_3 = b_3$，那么

$$\begin{aligned} a_3 - a_1 &= (a_2 + a_3) - (a_1 + a_2) \\ &= b_3 - b_2 \\ &= 3b_1 - 2b_1 && \text{Using (5)} \\ &= b_1. \end{aligned}$$

因此，要么 $a_1 = b_1 + a_3$，要么 $a_3 = b_1 + a_1$。换言之，要么 (b_1, a_3) 是一条边，要么 (b_1, a_1) 是一条边。无论哪种情况，C_4 与 P_2之间都有一条边，这就产生了矛盾，因为它们理应互不相交。□

另一方面，我们可以证明：

引理 13. 对所有 $k \geq 3$，$\sigma(C_4 + P_k) = 1$。

Proof. 如果 $k = 3$，则将 C_4 标为 $\{1, 3, 9, 11\}$，将 P_3 标为 $\{12, 4, 16\}$，孤立点标为 20。如果 $k \geq 4$，则路径 $P_k = (v_1, v_2 \ldots, v_k)$ 的前四个标号为 $\lambda(v_1) = 12, \lambda(v_2) = 4, \lambda(v_3) = 16, \lambda(v_4) = 20$。之后，我们只需按照斐波那契方式继续，即 $\lambda(v_{i+1}) = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i-1})$，孤立点的标号为 $\lambda(v_k) + \lambda(v_{k-1})$。不难验证，不会引入任何非预期边。□

通过用 $\{1, 3, 9, 11\}$ 标记 C_4，并令 $a < b$ 为最小的数，可以最清楚地看出这一通用代数策略。我们假设$a + d = b + c$，即 $d = b + c - a$。此外，我们将三个路径顶点标记为 $\{a+d, a+b, (a+d) + (a+b) = a+2b+c\}$。为减少孤立点，我们还要求 $c+d = b+2c-a$ 等于 $(a+2b+c) + (a+b) = 2a+3b+c$,

这意味着 $c = 3a + 2b$。总之，给定较小的数 $a < b$，我们将 C_4 的其余标号构造为 $3a + 2b$ 和 $2a + 3b$。那么，路径上的标号将是 3（$a + b$）、 $a + b$、4（$a + b$），孤立点的标号为 5（$a + b$）。

如果我们想用 $k \geq 4$ 标记 $C_4 + P_k$，可以先用 $\{1, 2, 6, 11\}$ 标记 C_4，再用 $\{17, 3, 8, 12\}$ 标记 P_4，并额外设置一个标号为 20 的孤立点，从而减少标号的大小。按照本文的一贯做法，用 $\{2, 5, 8, 11\}$ 标记 C_4 还能进一步节省。于是，路径 $P_k, k \geq 5$ 上顶点 $v_1, \ldots, v_k$ 的前五个标号为： $\lambda(v_1) = 26$, $\lambda(v_2) = 13$, $\lambda(v_3) = 7$, $\lambda(v_4) = 19$, $\lambda(v_5) = 20$。如果 $k = 5$，那么孤立点的标号将为 39。否则，我们只需继续采用斐波那契式，即 $\lambda(v_{i+1}) = \lambda(v_i) + \lambda(v_{i-1})$，其中 $\lambda(v_k) + \lambda(v_{k-1})$ 是孤立点。同样，不会引入非预期边。

只剩下一种情况需要补全整个图景：

引理 14. $\sigma(C_4 + 2P_2) = 1$。

Proof. 根据 命题 4， $\sigma(C_4 + P_2) = 2$。该标记满足命题 3的要求，从而证明了这一结论。□

5.3. 将圈与多个路径组合 以下命题也涵盖了纯路径集合的情形。

命题 5. 设 G 是一个具有 $\sigma(G) = 1$的图。那么，对于任意 $k \geq 2$， $\sigma(G + P_k) = 1$。

Proof. 设 ι 是标记 λ 中孤立点的标号，其中 G 的和数为 1。则， ι大于 G的任意顶点标号。因此，标记 P_k 采用斐波那契标号方案 λ_ι^ϕ，$_{2\iota}$按公式（2）的一般形式标记 $G + P_k$（以及 λ），仅产生一个孤立点且不会造成冲突，因为 G 的所有边标号都小于 2ι。□

我们已经看到（或者很快就会看到），环集合加上一条路径的和数为 1，只有一个例外，即 $C_4 + P_2$。由于我们将在 $C_4 + 2P_2$ 的唯一剩余情形另行处理，见引理 14，因此可以得出结论：

命题 6. 设 C 为一个圈集， P 为至少包含两条路径的集合。那么， $\sigma(C + P) = 1$。

Proof. 除了 $C_4 + P_2$的情况外，我们知道 $\sigma(C + P_k) = 1$对于任意圈集 C 和任意 $k \geq 3$。由于我们按照长度递减的顺序考虑路径，如果存在长度至少为三的圈，我们会优先选取这样的圈进行考虑。因此，如果 P 是一个至少包含两条路径的集合，那么我们可以得出 $\sigma(C + P) = 1$，要么直接通过 命题 5 得出，要么先应用引理 14。□

6. 结论与开放问题

我们已经说明，按照 C_5 中提出的方式对 [10] 进行标号并不能正常工作。这使得该特定小图的 spum 最小化问题仍悬而未决。不过，正如本文所讨论的，这个问题很容易推广到几乎所有最大度不超过二的图。在大多数情况下，我们只能找到使用指数级大小标号的标号方案。这可能是必要的，但对于此类结论，我们没有任何证明思路。

我们的主要结果涉及（所有）最大度为二的图的和数。Kratochv´ıl、Miller 和 Nguyen 提出了[3] 两个与本文密切相关的猜想；下文将把它们表述为问题。

- 给定两个图 G_1, G_2，满足 $\sigma(G_1) = \sigma(G_2) = 1$，它们的不交并的和数是否总是为一？
- 更一般地，给定两个图 G_1, G_2，是否有 $\sigma(G_1 + G_2) \leq \sigma(G_1) + \sigma(G_2) - 1$？

注意，如果 G_2 是一条路径（命题 5），我们确实解决了第一个问题，但一般情形仍未解决。仔细思考便可发现，这个一般问题与以下自然的组合问题有关：刻画所有和数为一的图，这类图在文献中也称为单位图。我们还提及一篇近期研究这一问题各种变体的论文 [15]。最后，一种略弱但结构更清晰的和标号概念（称为算术图）或许能提供一些思路，帮助解决这一问题（更乐观地说，也有助于解决第二个问题）[16]。

除了这些组合问题之外，关于图参数 σ 和 r_σ 的基本复杂性问题仍未解决。例如，给定一个图 G 和一个数 k，判断 $\sigma(G) \leq k$ 是否成立，这个问题是 NP-hard 吗？我们研究最大度为二的图的动机之一，是想看看能否利用图的并这一操作，将构件拼接起来，以处理这个问题及类似问题。但我们离这个目标仍很遥远，因为即便是这些关于最大度为二的图、看似简单的问题，也并不容易解决。

参考文献

[1] J. A. Gallian，图标号动态综述，版本23，The Electronic Journal of Co mbinatorics DS 6（2020）。

[2] F. Harary，和图与差图，Congressus Numerantium 72（1990年）101–108。[3] J. Kratochv´ıl，M. Miller，H. M. Nguyen，和图标记——一个上界及相关问题，载于：第12届澳大拉西亚组合算法研讨会（AWOCA），万隆理工学院，印度尼西亚，2001年，第126–131页。[4] W. F. Smyth，关于较小和数的和图，Colloquia mathematica Societatis J´anos Bolyai 60（1991）669–678。[5] J. Ryan，图的互异和标记：综述，AKCE国际图论与组合学杂志 6（1）（2009）113–136。[6] H. Nagamochi，M. Miller，Slamin，图标号中孤立点的数量，《离散数学》243（2001）175–185。[7] N. Hartsfield，W. F. Smyth，一族和数较大的稀疏图，《离散数学》141（1-3）（1995）163–171。[8] M. Sutton，M. Miller，轮图的和数，《离散数学》232（2001）185–188。[9] H. Fernau，K. Gajjar，和标记的空间复杂度，载于：E. Bampis，A. Pagourtzis（编），计算理论基础——第23届国际研讨会（FCT），LNCS第12867卷，Springer，2021年，第230–244页。[10] S. Singla，A. Tiwari，A. Tripathi，关于图的spum和整数spum的一些结果，《离散数学》344（5）（2021）112311。[11] M. N. Ellingham，由树构成的和图，Ars Combinatoria 35（1993）335–349。[12] T. Hao，关于和图，Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 6（1989）207–212。[13] H. Burhan，R. Rusin，K. A. Sugeng，和图有限并的最优和标记，Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing 65（2008）133–138。[14] M. Miller，J. Ryan，W. F. Smyth，图的不交并的和数，载于：第14届澳大拉西亚组合算法研讨会（AWOCA），首尔国立大学，韩国，2003年，第120–124页。[15] M. Kone˘cn´y，S. Ku˘cera，J. Novotn´a，J. Pek´arek，˘S. ˘Simsa，M. T¨opfer，图的最小和标记，离散算法杂志 52-53（2018）29–37。[16] B. D. Acharya，S. M. Hegde，算术图，J GTh 14（3）（1989）275–299。