arXiv:2301.02180v1 [math.DS] 5 Jan 2023

同伦类中鲁棒非一致双曲自同态的存在性

Victor Janeiro

victorgjaneiro@gmail.com，ICEx-UFMG，米纳斯吉拉斯州贝洛奥里藏特，巴西。

摘要

我们通过证明以下结论，拓展了 [1] 的研究成果：只要其度至少为 5^2，$\mathbb{T}^2$ 中的任意伸缩变换都同伦于一个非一致双曲的遍历保面积映射。我们还讨论了上一篇文章未涉及的其他低拓扑度情形。这证明了存在一个 C^1 非一致双曲系统开集，它与 $\mathbb{T}^2$ 中几乎每个同伦类都有交集，并且其中的李雅普诺夫指数连续变化。

1 引言

我们从光滑遍历理论的角度研究二维环面 $\mathbb{T}^2$ 上的保测映射。我们关注这些系统的李雅普诺夫指数，尤其是将 [1] 中得到的结果推广到伸缩变换情形以及拓扑度较低的某些情形；这些情形并未包含在先前的结果中。有鉴于此，了解 [1] 中的结果会有所帮助。

对于可微覆盖映射 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 和一对 $(x, v) \in T\mathbb{T}^2$，数

$$\tilde{\chi}(x, v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \|D_x f^n(v)\|}{n}$$

是 f 在 (x, v) 处的李雅普诺夫指数。关于光滑遍历理论的背景，请参见 [2] 。根据奥塞莱代茨定理 [3] , , 在 $\mathbb{T}^2$ 上存在一个全面积集 M_0 , 在该集合上，对每个 v，前述极限都存在；并且存在一个定义在M_0 上的可测丛 E^- , 使得对于 $x \in M_0$, $v \neq 0 \in E^-(x)$:

$$\chi(x, v) := \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|D_x f^n(v)\|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log m(D_x f^n)}{n} := \chi^-(x),$$

而对于 $v \in \mathbb{R}^2 \setminus E^-(x)$:

$$\chi(x, v) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \|D_x f^n\|}{n} := \chi^+(x),$$

此外，如果 μ 表示 $\mathbb{T}^2$上的勒贝格（哈尔）测度，那么:

$$\int (\chi^+(x) + \chi^-(x)) d\mu(x) = \int \log |\det D_x f| d\mu(x) > 0, \tag{1}$$

因此， $\mathcal{X}^+(x) > 0$ 几乎处处成立。最后，如果 $\mathcal{X}^-(x) < 0 < \mathcal{X}^+(x)$ 几乎处处成立，我们就称 f 是非一致双曲（NUH）的。

非一致双曲系统是经典阿诺索夫曲面映射的一种推广 [4]。本文将仅关注非可逆情形，旨在帮助理解其统计性质，而这方面的研究仍在发展中。关于端同态的一般遍历理论，请读者参阅 [5]。

任意映射 $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 都同伦于一个线性自同态 $E : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$，该自同态由一个整数矩阵诱导，我们用同一个字母表示该矩阵。在 [1], 中，研究证明了存在一个 C^1 非一致双曲系统的开集；只要度不太小，该开集就与每个不包含伸缩变换的同伦类相交。随后，作者猜想，对于伸缩变换也同样成立。本文证明了这一猜想，条件是度至少为 5^2。此外，Andersson、Carrasco 和 Saghin 未涉及的其他低拓扑度情形，我们也在此进行了探讨。

令 $\mathrm{End}^r_\mu(\mathbb{T}^2)$ 为保持勒贝格测度 μ且不可逆的 $\mathbb{T}^2$ 局部微分同胚 C^r 的集合。对于 $f \in \mathrm{End}^r_\mu(\mathbb{T}^2)$, $(x, v) \in T^1\mathbb{T}^2$ 定义：

$$I(x, v; f^n) = \sum_{y \in f^{-n}(x)} \frac{\log \|(D_y f^n)^{-1} v\|}{\det(D_y f^n)},$$

and

$$C_{\mathcal{X}}(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \inf_{(x,v) \in T^1\mathbb{T}^2} I(x, v; f^n).$$

定义集合

$$\mathcal{U}^* := \{f \in \mathrm{End}^r_\mu(\mathbb{T}^2) \ : \ C_{\mathcal{X}}(f) > 0\},$$

该集合在 C^1拓扑下是开集。在主要参考文献 [1], 的第2.3小节中，证明了：

定理1。 若 $f \in \mathcal{U}^*$，则 f 是非一致双曲的。

我们的主要结果如下：

定理A。 对于 $E = k \cdot Id \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$，若 $|k| \geq 5$，则交集 $[E] \cap \mathcal{U}^*$非空，事实上其中包含与 E 实解析同伦的映射。

定理B。 如果 $E \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ 不是伸缩变换且 $det(E) > 4$，则交集 $[E] \cap \mathcal{U}^*$非空，事实上还包含与E实解析同伦的映射。

我们的定理B等价于 [1] 的定理A，但还包括其中未证明的三种情形。我们的结果面临的主要困难在于，在

伸缩变换的情况下，诱导出的射影作用是平凡的；而射影作用的非平凡性是 Andersson 等人方法的核心部分。

最后，通过检查 [1], 中定理 B 和定理 C 的证明，我们可以看到这些结果适用于此处包含的所有情形。因此，定义：

$$C_{\det}(f) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \inf_{x\in\mathbb{T}^2} \log(\det(D_x f^n)) > 0,$$

以及开集：

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ f \in \mathrm{End}^r_\mu(\mathbb{T}^2) \ : \ C_{\mathcal{X}}(f) > -\frac{1}{2} C_{\det}(f) \right\},$$

由定理 A 和定理 B 可知，若线性自同态 E 满足其中任一定理的条件，则 $[E] \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset$。因此，根据 [1], 的定理 B，映射 $\mathcal{U}_1 \ni f \mapsto \int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{X}^{\pm}(f) d\mu$ 在 C^1 拓扑下具有连续性。

由 [1], 的定理 C 可得，对于定理 A 或定理 B 中的任意线性自同态 E，若 ± 1 不是 E 的特征值，则 $[E] \cap \mathcal{U}$ 包含稳定遍历自同态。事实上，它包含稳定伯努利自同态，尤其是全阶混合的映射。

致谢

本文呈现的结果由 Martin Andersson、Pablo D. Carrasco 和 Radu Saghin 在 [1], 中提出猜想。我感谢 Pablo D. Carrasco（他也是我的硕士导师）提出这个问题，并感谢他与我就此主题进行的长时间讨论，这些讨论对本文至关重要。

本研究得到巴西科研机构 CAPES 和 CNPq 的资助。

2 预备知识

为了证明定理 A 和定理 B，我们需要一个关于计算 $I(x, v; f^n)$ 的结果，其证明见 [1]:

命题 2.1. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，有：

$$I(x, v; f^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{y \in f^{-i}(x)} \frac{I(y, F_y^{-i} v; f)}{\det(D_y f^i)}, \tag{2}$$

其中 $F_y^{-i} v = \frac{(D_y f^i)^{-1} v}{\|(D_y f^i)^{-i} v\|}$。

2.1 剪切

按顺序取定点 z_1、z_2、z_3、$z_4 \in \mathbb{T}^1$，取闭区间 $I_1 = [z_1, z_2]$、$I_3 = [z_3, z_4]$，以及开区间 $I_2 = (z_2, z_3)$ 和 $I_4 = (z_4, z_1)$。

定义 2.1. 我们将 $\mathbb{T}^2$ 中的水平和垂直临界区域分别定义为 $C_h = (I_1 \cup I_3) \times \mathbb{T}^1$、$C_v = \mathbb{T}^1 \times (I_1 \cup I_3)$，其补集 $\mathcal{G}_h = \mathbb{T}^2 \setminus C_h$、$\mathcal{G}_v = \mathbb{T}^2 \setminus C_v$ 分别为水平和垂直良好区域。

然后，我们将良好区域划分为 $\mathcal{G}_h^+ = I_4 \times \mathbb{T}^1$、$\mathcal{G}_h^- = I_2 \times \mathbb{T}^1$、$\mathcal{G}_v^+ = \mathbb{T}^1 \times I_4$ 和 $\mathcal{G}_v^- = \mathbb{T}^1 \times I_2$。

对于固定数值 $0 < a < b$，我们取 $s : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ 作为满足以下条件的解析映射：

1. 若 $z \in I_4$，则 $a < s'(z) < b$；
2. 若 $z \in I_2$，则 $-b < s'(z) < -a$；
3. 若 $z \in I_1 \cup I_3$，则 $|s'(z)| < b$。

考虑环面上的两族保守微分同胚：

$$h_t(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + ts(x_1)), \quad v_r(x_1, x_2) = (x_1 + rs(x_2), x_2), \quad t, r \in \mathbb{R}.$$

注意：

$$D_{(x_1,x_2)}h_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ts'(x_1) & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{(x_1,x_2)}v_r = \begin{pmatrix} 1 & rs'(x_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

为简化计算，我们将 $T\mathbb{T}^2$ 上的最大范数定义为 $\|(u_1, u_2)\| = \max\{|u_1|, |u_2|\}$，从现在起所有计算均采用此范数。这样，对于任意 $x \in \mathbb{T}^2$，有：

$$\|D_x h_t\| < bt + 1, \text{ and } \|D_x v_r\| < bt + 1.$$

定义 2.2. 给定 $\alpha > 0$，对应的水平锥为 $\Delta_\alpha^h = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |u_2| \le \alpha |u_1|\}$，而对应的垂直锥为其补集 $\Delta_\alpha^v = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta_\alpha^h$，

引理 2.1. 对于 $\alpha > 1$，设 Δ_α^h和 Δ_α^v分别为对应的水平锥和垂直锥。那么，对于每个 t，$r > \frac{2\alpha}{a}$，以及每个单位向量 $u \in T_x\mathbb{T}^2$，以下结论成立：

1. 如果 $u \in \Delta_\alpha^v$，并且：

(a) $x \in \mathcal{G}_v$, *then*

- $(D_x v_r)^{-1} u \in \Delta_\alpha^h$ $(D_x v_r^{-1} \Delta_\alpha^v \subset \Delta_\alpha^h)$;
- $\|(D_x v_r)^{-1} u\| > \frac{ar-\alpha}{\alpha} = r\frac{a-\frac{\alpha}{r}}{\alpha}$;

(b) $x \in \mathcal{C}_v$, *then* $\|(D_x v_r)^{-1} u\| > \frac{1}{\alpha}$.

2. 如果 $u = \pm(1, u_2) \in \Delta_\alpha^h$，那么：

(a) 对每个 $x \in \mathcal{G}_v^+$（如果 $u_2 \le 0$），或对每个 $x \in \mathcal{G}_v^-$（如果 $u_2 \ge 0$），均有：

- $(D_x v_r)^{-1} u \in \Delta_\alpha^h$;
- $\|(D_x v_r)^{-1} u\| > 1$;

(b) 对所有其他 x，有 $\|(D_x v_r)^{-1} u\| > \frac{1}{br+1}$。

3. 如果 $u \in \Delta_\alpha^h$，并且：

(a) $x \in \mathcal{G}_h$, *then*

- $(D_x h_t)^{-1} u \in \Delta_\alpha^v$ $(D_x h_t^{-1} \Delta_\alpha^h \subset \Delta_\alpha^v)$;
- $\|(D_x h_t)^{-1} u\| > \frac{at-\alpha}{\alpha} = t\frac{a-\frac{\alpha}{t}}{\alpha}$;

(b) $x \in \mathcal{C}_h$, *then* $\|(D_x h_t)^{-1} u\| > \frac{1}{\alpha}$.

4. 如果 $u = \pm(u_1, 1) \in \Delta_\alpha^v$，则：

(a) 对每个 $x \in \mathcal{G}_h^+$（如果 $u_1 \le 0$），或对每个 $x \in \mathcal{G}_h^-$（如果 $u_1 \ge 0$），均有：

- $(D_x h_t)^{-1} u \in \Delta_\alpha^v$;
- $\|(D_x h_t)^{-1} u\| > 1$;

(b) 对所有其他 x，有 $\|(D_x h_t)^{-1} u\| > \frac{1}{bt+1}$。

证明。 我们证明第1项和第2项， h_t 的情形类似。令 $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{G}_v$，并且 $u^\pm = (1, \pm\alpha)$，则：

$$(D_x v_r)^{-1} u^\pm = \begin{pmatrix} 1 & -rs'(x_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \mp rs'(x_2)\alpha \\ \pm\alpha \end{pmatrix},$$

此外，由于 $x \in \mathcal{G}_v$、 $a < |s'(x_2)| < b$，我们还有 $\alpha > 1$ 和$r > \frac{2\alpha}{a}$，因此：

$$|1 \mp rs'(x_2)\alpha| \ge r\alpha a - 1 > 2\alpha^2 - 1 > \alpha > 1,$$

这表明 $(D_x v_r)^{-1} \Delta_\alpha^v \subset \Delta_\alpha^h$。 此外， $\|(D_x v_r)^{-1} u\| = |1 \mp rs'(x_2)\alpha| > ra\alpha - 1$。现在注意到， Δ_α^v中向量的最小膨胀发生在 $(1, \pm\alpha)$之一上，因此对于每个单位向量 $u \in \Delta_\alpha^v$:

$$\|(D_x v_r)^{-1} u\| \ge \frac{\|(D_x v_r)^{-1}(1, \pm\alpha)\|}{\|(1, \pm\alpha)\|} > \frac{r\alpha - 1}{\alpha}.$$

对于第 2 部分 (a)，对 x $\in \mathcal{G}_v^+$ $s'(x_2) > a > 0$，且对 $x \in \mathcal{G}_v^-$, $s'(x_2) < -a < 0$，因此，通过与上一个类似的简单计算，我们得到结果。最后，对于 (b)，我们只需对每个 $x \in \mathbb{T}^2$ 使用 $m((D_x v_r)^{-1}) = \frac{1}{\|D_x v_r\|} > \frac{1}{br+1}$。 □

3 端同态与剪切：定理A的证明

固定 $E = k \cdot Id$，取某个 $k \in \mathbb{N}$（为简化记号，我们将在 $k \in \mathbb{N}$ 上给出完整论证；需要时将 k 替换为 $|k|$，整个论证同样适用于 $k \in \mathbb{Z}$）。固定一个 $\delta < \frac{1}{4k}$，并按照定义 2.1，为满足以下条件的点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{T}^1$ 定义临界区域和良好区域：

- $I_1 = [z_1, z_2]$ 和 $I_3 = [z_3, z_4]$ 的大小为 2δ；
- I_1 平移若干个 $\frac{1}{k}$ 后不会与 I_3 相交。
- $I_2 = (z_2, z_3)$ 和 $I_4 = (z_4, z_1)$ 的大小严格大于 $\frac{1}{k}\left[\frac{k-1}{2}\right]$，其中 $[p]$ 表示 p 的下取整。

根据定义可以直接得到：

命题 3.1。对于每个 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$，$E^{-1}(x)$ 有 k^2 个点，由下式给出：

$$E^{-1}(x_1, x_2) = \left\{ \left(\frac{x_1 + i}{k}, \frac{x_2 + j}{k} \right) \ : \ i, j = 0, \cdots, k-1 \right\}.$$

每个 $\mathcal{G}_v^+$、$\mathcal{G}_v^-$、$\mathcal{G}_h^+$ 和 $\mathcal{G}_h^-$ 内至少有 $k\left[\frac{k-1}{2}\right]$ 个，而它们中至多有 k 个位于每个 $\mathcal{C}_v$、$\mathcal{C}_h$ 内。

从现在起，在本章节中，我们固定任意一个 $\alpha > 1$，并取定义 2.2 中相应的锥。我们考虑以下解析映射：

$$f_{(t,r)} = E \circ v_r \circ h_t,$$

我们将其简记为 $f = f_{(t,r)}$。显然，f 是一个与 E 同伦的保面积端同态。注意，给定 $x \in \mathbb{T}^2$ 和 $y \in f^{-1}(x)$，有：

$$(D_y f)^{-1} = (D_y h_t)^{-1} (D_{h_t(y)} v_r)^{-1} E^{-1}.$$

目标是让 $(D_{h_t(y)} v_r)^{-1}$ 将垂直锥中的向量沿水平方向扩张，然后由 $(D_y h_t)^{-1}$ 取其像并沿垂直方向扩张，从而使 $(D_y f)^{-1}$ 在 $f^{-1}(x)$ 中的大多数点处沿垂直方向扩张。因此，为了追踪这个导数，我们必须根据点 $y \in f^{-1}(x)$ 属于 $\mathcal{G}_h$ 还是 $\mathcal{C}_h$，以及 $\{h_t(y) : y \in f^{-1}(x)\} = (E \circ v_r)^{-1}(x)$ 属于 $\mathcal{G}_v$ 还是 $\mathcal{C}_v$，对它们进行定位。

引理 3.1。对于每个 $x \in \mathbb{T}^2$，我们有：

1. $(v_r \circ E)^{-1}(x)$ 有 k^2 个点，其中至少有 $k\left[\frac{k-1}{2}\right]$ 个分别位于 $\mathcal{G}_v^+$ 和 $\mathcal{G}_v^-$ 中，而至多有 k 个位于 $\mathcal{C}_v$ 中；

2. $f^{-1}(x)$ 有 k^2 个点，其中至少有 $k\left[\frac{k-1}{2}\right]$ 个分别位于 $\mathcal{G}_h^+$ 和 $\mathcal{G}_h^-$ 中，而至多有 k 个位于 $\mathcal{C}_h$ 中。

证明。 1. 这是命题 3.1 的直接推论，同时也利用了区域$\mathcal{G}_v^+$、 $\mathcal{G}_v^-$ 和 $\mathcal{C}_v$ 在 v_r作用下保持不变这一事实。

2. 注意，对于固定的 $j_0 \in \{0,\cdots,k-1\}$，由$\left\{\left(\frac{x_1+i}{k},\frac{x_2+j_0}{k}\right) : i=0,\cdots,k-1\right\}$ 给出的点 $x=(x_1,x_2)$ 在 E 下的每一行原像，都是圆$\mathbb{T}^1\times\left\{\frac{x_2+j_0}{k}\right\}$上的一个旋转，旋转角为 $-rs\left(\frac{x_2+j_0}{k}\right)$。因此，这一行的 k个点中，至少有 $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ 个落在 $\mathcal{G}_h^+$ 和 $\mathcal{G}_h^-$各自的内部，至多有 1 个落在 $\mathcal{C}_h$中。

由于对 E 下的所有 k 行原像，这一点也成立，因此至少有 $k\left[\frac{k-1}{2}\right]$个由 $E\circ v_r$ 得到的原像分别位于 $\mathcal{G}_h^+$ 和 $\mathcal{G}_h^-$的内部，而至多有 k 个由 $E\circ v_r$ 得到的原像位于 $\mathcal{C}_h$中。最后，由于这些集合在 h_t作用下保持不变，我们便得到所需结果。

□

注 3.1. 即使知道点 $y\in(E\circ v_r)^{-1}(x)$ 所属的区域，我们也无法确定 $h_t^{-1}(y)$ 位于哪个区域，因为 t 会发生变化。也就是说，可能存在点 $y\in f^{-1}(x)$，它们属于 $\mathcal{G}_h$，使得 $h_t(y)\in\mathcal{C}_v$，反之亦然。

定义 3.1. 为了跟踪这些向量，定义：

- 对于满足 $u_2\neq 0$ 的 $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$：

$$*(u)=\begin{cases}-sgn\left(\frac{u_1}{u_2}\right), & if\ u_1\neq 0,\\ -sgn(u_2), & if\ u_1=0.\end{cases}$$

注意，对每个 $u\in\mathbb{R}^2$，都有 $*(u)=*(E^{-1}u)$。

- 对于 $x\in\mathbb{T}^2$、 $y\in f^{-1}(x)$ 和 $u\in\mathbb{R}^2$，令 $(w_1,w_2)=(D_{h_t(y)}v_r)^{-1}E^{-1}u$：

$$*_y(u)=\begin{cases}-sgn\left(\frac{w_1}{w_2}\right), & if\ w_1,w_2\neq 0,\\ -sgn(w_2), & if\ w_2\neq 0,\ w_1=0,\\ -sgn(w_1), & if\ w_1\neq 0,\ w_2=0.\end{cases}$$

鉴于引理 2.1 的第 4 条，尽管当 $h_t(y)\in\mathcal{C}_v$ 时， $(D_{h_t(y)}v_r)^{-1}$ 可能不会将向量 $u\in\Delta_\alpha^v$ 映入水平锥，但根据 $y\in\mathcal{G}_h^{*_y(u)}$ 是否成立，我们仍可能在垂直方向上得到扩张。对此，根据引理 3.1，存在 k 个点 $y\in f^{-1}(x)$，使得 $h_t(y)$ 位于 $\mathcal{C}_v$ 中；这些点（$h_t(y)$）都位于同一个圆 $\mathbb{T}^1\times\left\{\frac{x_2+j_0}{k}\right\}$ 上，因此这些点处的导数 $(D_{h_t(y)}v_r)^{-1}$ 相同。于是得到：

命题 3.2. 对于每个 $u \in \mathbb{R}^2$、 $x \in \mathbb{T}^2$，满足 $h_t(y) \in \mathcal{C}_v$ 的所有点 $y \in f^{-1}(x)$ 的符号 ${}_{*y}(u) = sg\left(\frac{w_1}{w_2}\right)$ 都相同，其中 ${}_{*y}(u)$ 如定义 *3.1* 所述。

定义 3.2。对于固定的 $x \in \mathbb{T}^2$ 以及：

- $u \in \Delta_\alpha^v$, *define:* $\begin{cases} A = \{y \in f^{-1}(x) : y \in \mathcal{G}_h, h_t(y) \in \mathcal{G}_v\}. \\ B = \{y \in f^{-1}(x) : y \in \mathcal{G}_h^{*y(u)}, h_t(y) \in \mathcal{C}_v\}, \\ \mathcal{V}_v = A \cup B, \\ \mathcal{V}_h = f^{-1}(x) \setminus \mathcal{V}_v. \end{cases}$
- $u \in \Delta_\alpha^h$, *define:* $\begin{cases} C = \{y \in f^{-1}(x) : y \in \mathcal{G}_h, h_t(y) \in \mathcal{G}_v^{*(u)}\}. \\ D = \{y \in f^{-1}(x) : y \in \mathcal{G}_h^{*y(u)}, h_t(y) \in \mathcal{C}_v \cup \mathcal{G}_v^{-*(u)}\}, \\ \mathcal{H}_v = C \cup D, \\ \mathcal{H}_h = f^{-1}(x) \setminus \mathcal{H}_v. \end{cases}$

考虑到注记 3.1，定理 3.2 和命题 3.2 的一个直接推论如下：

引理 3.2。对于固定的 $(x, u) \in T\mathbb{T}^2$, $f^{-1}(x)$ 有 k^2 个点，其中：

1. 对于 $u \in \Delta_\alpha^v$，其中至多有 $2k - 1 - \left[\frac{k-1}{2}\right]$ 个属于 $\mathcal{V}_h$，且至少有 $(k-1)^2 + \left[\frac{k-1}{2}\right]$ 个在 $\mathcal{V}_v$内部，因为：

- 至少有 $(k-1)^2$ 个属于 A，并且，
- 至少有 $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ 个属于 B。

2. 对于 $u \in \Delta_\alpha^h$，至多有 $k^2 - \left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right)$ 属于 $\mathcal{H}_h$，且至少有 $\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right)$属于 $\mathcal{H}_v$，因为：

- 至少有 $(k-1)\left[\frac{k-1}{2}\right]$ 属于 C，且，
- 至少有 $\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(1 + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right)$ 属于 D。

已知对于每个单位向量 $u \in \mathbb{R}^2$，我们有 $\|E^{-1}u\| = \frac{1}{k}$（最大范数），由引理 2.1 可得：

引理 3.3。对于 t， $r > \frac{2\alpha}{a}$ 且对于固定的 $x \in \mathbb{T}^2$，有：

1. 如果 $u \in \Delta_\alpha^v$，那么对于所有 $y \in \mathcal{V}_v$，我们有 $(D_y f)^{-1}u \in \Delta_\alpha^v$；

2. 如果 $u \in \Delta_\alpha^v$ 是一个单位向量，则：

$$\|(D_y f)^{-1}u\| > \begin{cases} \left(\frac{a-\frac{\alpha}{t}}{\alpha}\right)\left(\frac{a-\frac{\alpha}{r}}{\alpha}\right)\frac{tr}{k}, & y \in A, \\ \frac{1}{\alpha k}, & y \in B, \\ \frac{1}{(bt+1)\alpha k}, & y \in \mathcal{V}_h; \end{cases}$$

3. 如果 $u \in \Delta_\alpha^h$，则对所有 $y \in \mathcal{H}_v$，我们都有 $(D_y f)^{-1} u \in \Delta_\alpha^v$；

4. 若 $u \in \Delta_\alpha^h$ 是单位向量，则：

$$\|(D_y f)^{-1} u\| > \begin{cases} \left(\frac{a-\frac{\alpha}{t}}{\alpha}\right)\frac{t}{k}, & y \in C, \\ \frac{1}{(br+1)k}, & y \in D, \\ \frac{1}{(bt+1)(br+1)k}, & y \in \mathcal{H}_h. \end{cases}$$

3.1 非一致双曲性

对于满足 $u \neq 0$ 的 $(x,u) \in T\mathbb{T}^2$，以及 $n \in \mathbb{N}$，记为

$$Df^{-n}(x,u) = \{(y,w) \in T\mathbb{T}^2 : f^n(y) = x, D_y f^n w = u\}.$$

对于任意非零切向量 (x,u) 和 $n \geq 0$，定义：

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}_n = \{(z,w) \in Df^{-n}(x,u) : w \in \Delta_\alpha^v\}, \\ &\mathcal{B}_n = Df^{-n}(x,u) \setminus \mathcal{G}_n, \\ &g_n = \#\mathcal{G}_n, \\ &b_n = \#\mathcal{B}_n = k^{2n} - g_n. \end{aligned}$$

由引理 3.2、3.3可推得：

引理 3.4。令 $(x,u) \in T\mathbb{T}^2$。

1. 若 $u \in \Delta_\alpha^v$，则其在 Δ_α^v 中的 Df 原像至少有 $(k-1)^2 + \left[\frac{k-1}{2}\right]$；*2.* 若 $u \in \Delta_\alpha^h$，则其在 Δ_α^v 中的 Df 原像至少有 $\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right)$。

由上述引理可得：

$$\begin{aligned} g_{n+1} &\geq \left((k-1)^2 + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right) g_n + \left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right) b_n \\ &= \left((k-1)^2 - \left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k-1 + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right)\right) g_n + \left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right) k^{2n}, \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} \frac{g_{n+1}}{k^{2(n+1)}} \geq \frac{1}{k^2}\left((k-1)^2 - \left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k-1 + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right)\right)\frac{g_n}{k^{2n}} \\ + \frac{1}{k^2}\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k + \left[\frac{k-1}{2}\right]\right). \end{aligned}$$

记 $a_n = \frac{g_n}{k^{2n}}$ 和

$$c = \frac{1}{k^2}\left((k-1)^2 - \left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)\right),$$
$$e = \frac{1}{k^2}\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right),$$

上面的不等式变为:

$$a_{n+1} \geq c \cdot a_n + e.$$

引理 3.5. 对于每个 $(x,u) \in T\mathbb{T}^2$、 $u \neq 0$ 和 $n \geq 0$， 都有:

$$\begin{aligned} a_n &\geq \frac{e}{1-c}(1-c^n) \\ &= \frac{\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}{2k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}(1-c^n) \end{aligned}$$

特别地,

$$\liminf a_n \geq \frac{\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}{2k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)} := L(k),$$

对 $(x,u) \in \mathbb{T}^2$ 一致。

从现在起，我们用 $L(k) = \frac{\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}{2k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}$ 表示。作为引理 3.2 和引理 3.3 的另一条直接推论，我们有:

引理 3.6. 如果 r， $t > \frac{2\alpha}{a}$，那么对于所有 $(x,u) \in T\mathbb{T}^2$，都有:

1. 若 $u \in \Delta_\alpha^v$，则:

$$\begin{aligned} I(x,u;f) \geq & \frac{(k-1)^2}{k^2}\log r + \left(\frac{k^2-4k+2+\left[\frac{k-1}{2}\right]}{k^2}\right)\log t \\ & + \log\left(\frac{1}{\alpha k}\left(\left(a-\frac{\alpha}{t}\right)\left(a-\frac{\alpha}{r}\right)\right)^{\frac{(k-1)^2}{k^2}}\left(b+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{k^2}\left(2k-1-\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}\right). \end{aligned}$$

2. 若 $u \in \Delta_\alpha^h$，则:

$$\begin{aligned} I(x,u;f) \geq & -\left(\frac{k^2-(k-1)\left[\frac{k-1}{2}\right]}{k^2}\right)\log r - \left(\frac{k^2-\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(2k-1+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}{k^2}\right)\log t \\ & + \log\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\alpha}\left(a-\frac{\alpha}{t}\right)\right)^{\frac{k-1}{k^2}\left[\frac{k-1}{2}\right]-1}\left(b+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{k^2}\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)-1}\right). \end{aligned}$$

现在，为了计算 $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}(f)$，我们使用命题 2.1 进行计算：

$$I(x,u;f^n)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{y\in f^{-i}(x)}\frac{I(y,(D_yf^i)^{-1}u;f)}{k^{2i}}:=\sum_{i=0}^{n-1}J_i,$$

并且，若 $t,r>\frac{2\alpha}{a}$，则对每个 i，我们得到：

$$\begin{aligned}J_i&=\frac{1}{k^{2i}}\sum_{y\in f^{-1}(x)}I(y,(D_yf^i)^{-1}u;f)=\frac{1}{k^{2i}}\sum_{(y,w)\in\mathcal{G}_i}I(y,w;f)+\frac{1}{k^{2i}}\sum_{(y,w)\in\mathcal{B}_i}I(y,w;f)\\&\geq a_iV(t,r,k)+(1-a_i)H(t,r,k),\end{aligned}$$

其中，V 和 H 分别是引理 3.6 中针对 $u\in\Delta_\alpha^v$ 和 $u\in\Delta_\alpha^h$ 得到的不等式右端。由引理 3.5，取上述的 $L(k)$ 和 $c_k=\left[\frac{k-1}{2}\right]$，为简化记号，可得：

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}J_i&\geq L(k)V(t,r,k)+(1-L(k))H(t,r,k)\\&=C(t,r,k)+\frac{1}{k^2}\left(L(k)\left((k-1)(2k-c_k)+1\right)-\left(k^2-(k-1)c_k\right)\right)\log r+\\&\quad\frac{1}{k^2}\left(L(k)\left(2(k-1)^2-c_k(2(k-1)+c_k)\right)-\left(k^2-c_k(2k-1+c_k)\right)\right)\log t\quad,\end{aligned}$$

其中

$$C(t,r,k)=L(k)C_1(t,r,k)+(1-L(k))C_2(t,r,k),$$

with

$$\begin{aligned}C_1(t,r,k)&=\log\left(\frac{1}{\alpha k}\left(\left(a-\frac{\alpha}{t}\right)\left(a-\frac{\alpha}{r}\right)\right)^{\frac{(k-1)^2}{k^2}}\left(b+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{k^2}\left(2k-1-\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)}\right)\\C_2(t,r,k)&=\log\left(\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\alpha}\left(a-\frac{\alpha}{t}\right)\right)^{\frac{k-1}{k^2}\left[\frac{k-1}{2}\right]-1}\left(b+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{k^2}\left[\frac{k-1}{2}\right]\left(k+\left[\frac{k-1}{2}\right]\right)-1}\right),\end{aligned}$$

如引理 3.6 所示。由此可知，对于任意 k，若 $C(t,r,k)$ 随着 t 和 r 的增大而增大，则当 t、$r>\frac{2\alpha}{a}$ 时，$C(t,r,k)>C$ 从下方一致地被某个常数 C 所界。

现在，为了得到 $\lim_{i\to\infty}J_i>0$，我们可以增大 t 或 r，具体取决于乘在 $\log t$ 或 $\log r$ 前的常数（它取决于 k）是正还是负。然而，对这两种情况，只有当 $k\geq 5$ 时，我们才能确保该常数为正。

因此，对于 $k\geq 5$，由于上述所有界对所有非零切向量 (x,u) 都是一致的，我们得到：当 t（或 r）充分大时，对于所有大于某个 i_0 的 i，以及所有非零切向量 (x,u)，$J_i(x,u)>N>0$ 对某个常数 N 成立。因此，存在某个 n_0，使得

$$\frac{1}{n_0}I(x,u;f^{n_0})=\frac{1}{n_0}\sum_{i=0}^{n_0-1}J_i(x,u)>\frac{N}{2}>0,$$

对所有非零切向量 (x,u) 都成立。因此， $C_{\mathcal{X}}(f) > 0$ ，由定理1可得定理A的证明完成。

我们通过给出一些示例来结束本节，以便更好地可视化：对于固定的 $k \in \mathbb{N}$，本节得到的界相当简单。为此，我们固定$k = 5$，得到$L(5) = \frac{2}{3}$，最后计算所得的限制为：

$$\lim_{i\to\infty} J_i \geq C(t,r,5) + 5\log r + 5\log t,$$

with

$$C(t,r,5) = \log\left(\frac{1}{5}\frac{\alpha^{\frac{17}{25}}}{a^{2/3}}\left(a-\frac{\alpha}{t}\right)^{\frac{1}{5}}\left(a-\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{32}{75}}\left(b+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{18}{25}}\right)$$

因此，取映射 $s : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$为 $s(u) = \sin(2\pi u)$， $\delta = \frac{1}{20}$， $a = 2\pi\sin(\frac{\pi}{10})$， $b = 2\pi$和 $\alpha = 1.1$，可得对于每个 t， $r \gtrapprox \frac{2a}{\alpha} \approx 1.77$，数值 $C(t,r,5) + 5\log r + 5\log t$均为正。因此，映射 $f_(t,r) = E\circ v_r \circ h_t$满足定理A的结论。

4 定理B的证明

对于 $k \cdot Id \neq E \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$， 令 $\tau_1(E)$ 为E的元素 $\tau_2(E) = \det(E)/\tau_1(E)$的最大公约数，因此 $d = \tau_1 \cdot \tau_2$ 与诱导自同态 $E : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$的拓扑度一致。

我们希望对 [1] 中使用的论证稍作修改，使得对于每个 $x \in \mathbb{T}^2$， $f^{-1}(x)$ 在临界区域中至多有一个点。这样便解决了配对 (τ_1,τ_2) 为 $(2,4)$、$(3,3)$ 或 $(4,4)$ 的情形。对于其余四种情形 $(1,2)$、$(1,3)$、$(1,4)$ 和 $(2,2)$，即便改进了论证，我们得到的良好区域中向量所占的比例（就本文所述论证而言，这些情形下该比例已是最优）仍不足以在原像数量较少的情况下获得垂直方向上的扩张。

数 τ_1、 τ_2 是 E 的初等因子，并且如 [1], 的第 2.4 节所示，存在 $P \in GL_2(\mathbb{Z})$，使得矩阵 $G = P^{-1}\cdot E \cdot P$ 满足：

$$G^{-1}(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix}\frac{i}{\tau_2}\\ \frac{j}{\tau_1}\end{pmatrix} : i,j \in \mathbb{Z}\right\}$$

此外，由于 E 不是伸缩变换，必要时经过另一次坐标变换后，我们可以假设 E 不以 $(0,1)$ 为特征向量。

有鉴于此，我们假设 $\mathbb{P}E$ 不固定 $[(0,1)]$，且 $E^{-1}\mathbb{Z}^2 = \frac{1}{\tau_2}\mathbb{Z}\times\frac{1}{\tau_1}\mathbb{Z}$。因此，存在一个 $\alpha > \tau_2 > 1$，使得若 Δ^h_α 和 Δ^v_α 是定义 2.2 中相应的水平锥和垂直锥，则 $\overline{E^{-1}\Delta^v_\alpha} \subset Int(\Delta^h_\alpha)$。从现在起，我们固定这样的 $\alpha > \tau_2$。

设 $L < \max\left\{\frac{1}{4\tau_2}, \frac{\tau_2^{-1}-\alpha^{-1}}{2}\right\}$，依次选取点 z_1、 z_2、 z_2、 $z_4 \in \mathbb{T}^1$，使得：

- $I_1 = [z_1, z_2]$ 和 $I_3 = [z_3, z_4]$ 的大小为 L；
- I_1 的平移若沿 $1/\tau_2$ 的整数倍进行，则不会与 I_3相交；
- $I_2 = (z_2, z_3)$ 和 $I_4 = (z_4, z_1)$ 的大小严格大于 $\frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$,

并按照定义 2.1 定义临界区域和良好区域 C_h、 G_h 及 $G_h^{\pm}$。根据定义可立即得到:

命题 4.1. 对于每个 $x \in \mathbb{T}^2$， $E^{-1}(x)$ 都有 d 个点，其中至少 $\frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$ 个位于 G_h^+ 和 G_h^-各自内部，且至多 τ_1 个位于 C_h内部。

为了使剪切映射 $h_t(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + ts(x_1)$的临界区域内每个点至多有一个原像（该剪切映射如前所定义），我们定义环面 $v(x_1, x_2) = (x_1 + \tilde{s}(x_2), x_2)$上的保面积微分同胚，其中 $\tilde{s}: \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ 是一个解析映射，稍后我们将对其施加限制。接着研究如下族:

$$f_t = E \circ v \circ h_t,$$

与 E 同伦的环面保面积端同态。为简化记号，我们将 $f = f_t$ 记作.....

给定 $x \in \mathbb{T}^2$，集合 $f^{-1}(x) = h_t^{-1} \circ v^{-1} \circ E^{-1}(x)$ 由 d 个点组成；给定$y \in f^{-1}(x)$，我们有 $(D_y f)^{-1} = (D_y h_t)^{-1} \circ (D_{h_t(y)} v)^{-1} \circ E^{-1}$。

为了以一种使 x 在 f 下仅有一个原像留在临界区域中的方式定义 v，我们注意到 $E^{-1}(x)$ 由 d 个点组成。由于最初进行的坐标变换，这些点在一个高为 τ_1 、长为 τ_2的格点阵列中排列。我们还注意到，映射 h_t^{-1}使竖直线保持不变。因此，映射 v^{-1} 需要以足够大的幅度移动竖直线上的点，使得只有一个点留在临界区域中；同时，移动幅度又不能过大，以免有新的点进入临界区域。

这样，我们取满足以下条件的解析映射 $\tilde{s}: \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$：

1. 若 L 是区间 I_1、 I_3 的长度，则对所有 $u \in \mathbb{T}^1$， 有 $|\tilde{s}(u)| < \frac{1}{\tau_2} - L$。

2. 对所有 $u \in \mathbb{T}^1$，除至多一个指标外，对所有 $j \in \{0, 1, \cdots, \tau_1 - 1\}$ 均有 $\left|\tilde{s}\left(u + \frac{j}{\tau_1}\right)\right| > L$。

3. 对所有 $u \in \mathbb{T}^1$，有 $|\tilde{s}'(u)| < (2\alpha)^{-1}$，其中 α是上一小节中固定的锥的大小。

请注意，由于上一小节中对 α 和 L 施加的条件，条件 2 和 3 并非互斥。现在，条件 1 和 2 给出:

引理 4.1. 对于所有 $x \in \mathbb{T}^2$，$f^{-1}(x)$ 由 d 个点组成，其中至多一个位于C_h内部。至少 $d-1$ 个原像位于 $\mathcal{G}$ 内部，其中至少 $\tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$ 个分别位于 $\mathcal{G}_h^+$ 和 $\mathcal{G}_h^-$内部。

证明。若 $E^{-1}(x)$ 在临界区域内没有点，那么根据条件 1 以及 h_t 保持竖直线不变这一事实，映射 $h_t^{-1}\circ v^{-1}$ 不会将这些点中的任何一个映到临界区域内。

若 $E^{-1}(x)$ 在临界区域内有一个点，则意味着那里恰好有 τ_1 个点。根据条件 2，这些点中只有一个能够留在那里；根据条件 1，其他点都不会进入其中。

对于 $\mathcal{G}_h^+$ 和 $\mathcal{G}_h^-$ 中点数的最小值，我们注意到，根据命题 4.1，$E^{-1}(x)$ 在每个集合内部至少已有 $\tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$ 个点；又根据条件 1，这些点必定留在那里。 □

最后，条件 3 给出了下面这个引理，这是整个构造得以成立所必需的：

引理 4.2. 存在 $\beta > \alpha$，使得对于所有 $y \in \mathbb{T}^2$、$\overline{(D_y v)^{-1}\circ E^{-1}\Delta_\beta^v} \subset \Delta_\beta^h$，其中 Δ_β^v 和 Δ_β^h 是定义 *2.2* 中所述大小为 β 的对应垂直锥和水平锥。

证明. 对于 $y = (y_1, y_2)$、$D_y v = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{s}'(y_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。于是，由于条件 3，对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$、$D_y v \cdot \lambda e_2 = \lambda(\tilde{s}'(y_2), 1) \in \Delta_{2\alpha}^v$。由于根据 α 的定义，我们有 $E^{-1}\cdot \lambda e_2 \in int(\Delta_\alpha^h)$，因此可以得出，对于所有 $y \in \mathbb{T}^2$，$\mathbb{P}((D_y v)^{-1}\circ E^{-1})\cdot[e_2]$ 都一致地远离 $[e_2]$，故存在我们所需的 β。 □

注记 4.1. 引理 *2.1* 的第 *3* 和第 *4* 项在此情形下对 Δ_β^v和 Δ_β^h也成立。

作为引理 2.1 的第 3 和第 4 项、注记 4.1 以及引理 4.2 的推论，我们给出此情形下对应于引理 3.3 的结论。从现在起，我们固定引理 4.2 中的 $\beta > \alpha$，并令：

$$e_v = \inf\left\{\|(D_x v)^{-1}\circ E^{-1}u\| : (x,u) \in T^1\mathbb{T}^2,\ u \in \Delta_\beta^v\right\},$$

$$e_h = \inf\left\{\|(D_x v)^{-1}\circ E^{-1}u\| : (x,u) \in T^1\mathbb{T}^2,\ u \in \Delta_\beta^h\right\}.$$

引理 4.3. 对于 $t > \frac{2\beta}{}$，有：$_a$

1. *if $y \in \mathcal{G}_h$ then $\overline{(D_y f)^{-1}\Delta_\beta^v} \subset \Delta_\beta^v$, it is strictly invariant.*
2. 若 $u \in \Delta_\beta^v$ 是单位向量，则

$$\|(D_y f)^{-1}u\| > \begin{cases} \frac{e_v(a-\beta/t))}{\beta}t, & y \in \mathcal{G}_h, \\ \frac{e_v}{\beta}, & y \in \mathcal{C}_h. \end{cases}$$

3. 若 $u \in \Delta_\beta^h$，且令 $(D_{h_t(y)}v)^{-1}\circ E^{-1}\cdot u = (w_1, w_2)$ 中的 $*_y(u)$ 如定义 *3.1* 所述，则若 $y \in \mathcal{G}_h^{*_y(u)}$，我们有 $(D_y f)^{-1}(u) \in \Delta_\beta^v$。

4. 若 $u \in \Delta_\beta^h$ 是单位向量，则

$$\|(D_y f)^{-1}u\| > \begin{cases} e_h, & y \in \mathcal{G}_h^{*_y(u)}, \\ \frac{e_h}{b+\frac{1}{t}}t^{-1}, & y \notin \mathcal{G}_h^{*_y(u)}. \end{cases}$$

我们注意到，与伸缩变换的情形类似，这里也存在一个问题：$*_y(u)$ 取决于 $y \in f^{-1}(x)$。因此，尽管每个 $\mathcal{G}_h^{\pm}$ 中至少有 $\tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$ 个点，仍可能存在一个向量 $u \in \mathbb{R}^2$，使得对所有 $y \in \mathcal{G}_h^+$，$*_y(u) = -$，反之亦然。然而，我们可以看到，情况并非如此：

命题 4.2. 对于每个 $x \in \mathbb{T}^2$、$u \in \mathbb{R}^2$，至少存在 $\tau_2\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$ 个点 $y \in f^{-1}(x)$，使得 $y \in \mathcal{G}_h^{*_y(u)}$；其中 $*_y(u)$ 与定义 *3.1* 中相同，只需将 v_r 替换为 v。

证明。沿用命题 3.2 中的相同论证，可知，对于满足 $h_t(y)$ 位于同一条水平线上的点 $y \in f^{-1}(x)$，$*_y(u)$ 是常数。恰有τ_2 个原像 y' 满足 $h_t(y)$ 和 $h_t(y')$ 位于同一条水平线上，因此其中至少有 $\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$ 个位于 $\mathcal{G}_h^{*_y(u)}$ 中。由于 $v^{-1}\circ E^{-1}(x)$ 有 τ_1 条不同的竖直线，故得到结论。 □

4.1 非一致双曲性

最后的计算与第 3.1 小节中的计算完全类似，因此我们略去细节。对于满足 $u \neq 0$ 的 $(x,u) \in T\mathbb{T}^2$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们像之前一样定义集合 $Df^{-n}(x,u)$、$\mathcal{G}_n$、$\mathcal{B}_n$以及数值 g_n、$b_n = d^n - g_n$。由引理 4.1、4.3 和命题 4.2可得：

引理 4.4。设 $(x,u) \in T\mathbb{T}^2$。

1. 若 $u \in \Delta_\beta^v$，则其在 Df下的原像中，至少有 $d-1$ 也属于 Δ_β^v。

2. 若 $u \in \Delta_\beta^h$，则其在 Df下的原像中，至少有 $\tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]$ 属于 Δ_β^h。

因此，对所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$g_{n+1} \geq \left(d - 1 - \tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]\right)g_n + \tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]d^n,$$

因此，令 $a_n = \frac{g_n}{d^n}$：

$$a_{n+1} \geq \left(\frac{d-1}{d} - \frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]\right)a_n + \frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right].$$

因此，我们得到：

引理 4.5。 对于任意的 $(x,u)\in T\mathbb{T}^2$、 $u\neq 0$ 和 $n\geq 0$，均有：

$$\liminf a_n \geq \frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]\frac{d}{1+\tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]} := L(\tau_1,\tau_2).$$

注 4.2。 在这里，我们能够验证，对于(τ_1,τ_2)作为 $(2,4)$， $(3,3)$和 $(4,4)$的情形，这一论证是成立的；此时，我们分别得到 $L(\tau_1,\tau_2)$作为 2/3、 3/4 和 4/5。而对于其他情形 $(1,2)$, $(1,3)$， $(1,4)$和 $(2,2)$，这一论证则不成立，因为我们分别会得到 $L(\tau_1,\tau_2)$作为0、 1/2、 1/2和0。正如我们将看到的，要使论证的其余部分成立，这个下界必须严格大于 1/2。

作为引理 4.1、4.3 和命题 4.2 的另一推论，我们得到：

引理 4.6。 若 $t>\frac{2\beta}{a}$，则对所有 $(x,u)\in T\mathbb{T}^2$，均有：

1. 若 $u\in\Delta_\beta^v$，则：

$$I(x,u;f)\geq\frac{d-1}{d}\log t+\log\left(\frac{e_v}{\beta}\left(a-\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{d-1}{d}}\right).$$

2. 若 $u\in\Delta_\beta^h$，则：

$$I(x,u;f)\geq-\left(1-\frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]\right)\log t+\log\left(e_h\left(b+\frac{1}{t}\right)^{-\left(1-\frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]\right)}\right).$$

再次根据命题 2.1，我们有：

$$I(x,u;f^n)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{y\in f^{-i}(x)}\frac{I(y,(D_yf^i)^{-1}u;f)}{k^{2i}} := \sum_{i=0}^{n-1}J_i,$$

对于 $t>\frac{2\beta}{a}$，我们对所有 $i\geq 0$进行计算：

$$\begin{aligned}J_i&=\frac{1}{d}\sum_{(y,w)\in\mathcal{G}_i}I(y,w;f)+\frac{1}{d}\sum_{(y,w)\in\mathcal{B}_i}I(y,w;f)\\&\geq a_iV(t,\tau_1,\tau_2)+(1-a_i)H(t,\tau_1,\tau_2),\end{aligned}$$

其中， a_i与引理 4.5 中相同， V和 H分别是引理 4.6 中针对 $u\in\Delta_\beta^v$和 $u\in\Delta_\beta^h$所得不等式的右侧。由此可得：

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}J_i&\geq L(\tau_1,\tau_2)V(t,\tau_1,\tau_2)+(1-L(\tau_1,\tau_2))H(t,\tau_1,\tau_2)\\&=\frac{\left(\tau_1-\frac{2}{\tau_2}\right)\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]-1}{1+\tau_1\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]}\log t+C(t,\tau_1,\tau_2),\end{aligned}$$

其中：

$$C(t,\tau_1,\tau_2) = L(\tau_1,\tau_2)\log\left(\frac{e_v}{\beta}\left(a-\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{d-1}{d}}\right) + (1-L(\tau_1,\tau_2))\log\left(e_h\left(b+\frac{1}{t}\right)^{-\left(1-\frac{1}{\tau_2}\left[\frac{\tau_2-1}{2}\right]\right)}\right) > C,$$

对所有 $t > \frac{2\beta}{a}$，也就是说， $C(t,\tau_1,\tau_2)$ 有一个常数 C 作为统一的正下界。

由于 $d = \tau_1 \cdot \tau_2 > 4$，乘在 $\log t$ 前的常数为正。因此，由于上述所有界对所有非零切向量 (x,u)均一致，与齐次情形一样，我们可以得到：当 t 充分大时，对于所有大于某个 n_0的 n，以及所有非零切向量 (x,u)：

$$\frac{1}{n}I(x,u;f^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} J_i(x,u) > 0,$$

因此， $C_{\mathcal{X}}(f) > 0$，由定理1即可完成定理B的证明。

参考文献

[1] M. Andersson、P. D. Carrasco 和 R. Saghin，《非一致双曲端同态》，2022年。[2] L. Barreira 和 Y. Pesin，《光滑遍历理论导论》。数学研究生系列，美国数学学会，2013年。[3] V. I. Oseledets，《动力系统的乘法遍历定理：特征李雅普诺夫指数》，莫斯科数学会会刊，第19卷，第179–210页，1968年。[4] D. V. Anosov，《负曲率闭黎曼流形上的测地流》，斯捷克洛夫数学研究所会刊，第90卷，第3–210页，1967年。[5] M. Qian、J.-S. Xie 和 S. Zhu，《内自映射的光滑遍历理论》，数学讲义第1978卷。2009年1月。