arXiv:2301.02193v1 [physics.app-ph] 5 Jan 2023

波速与尺寸之间的普适标度关系，实现基于传播自旋波的纳米尺度高性能储备池计算

Satoshi Iihama, [1,2] Yuya Koike,[2,3,5] Shigemi Mizukami,[2,4] Natsuhiko Yoshinaga[2,5] *

[1]东北大学跨学科前沿研究所（FRIS），日本仙台，980-8578[2]东北大学材料研究高级研究所（AIMR），日本仙台片平2-1-1，980-8577[3]东北大学应用物理系，日本仙台，980-8579[4]东北大学自旋电子学科学与创新中心（CSIS），日本仙台，980-8577[5]日本产业技术综合研究所（AIST）MathAM-OIL，日本仙台，980-8577

*T通信联系人；电子邮箱：yoshinaga@tohoku.ac.jp .

利用自旋波进行神经形态计算，有望应用于高速纳米器件，但目前尚未实现高性能。本文通过微磁模拟以及基于响应函数的简化理论表明，自旋波物理储备池计算能够缩小至纳米尺度，同时保持与其他最先进系统相当的高计算能力。我们还表明，系统尺寸随自旋波传播速度的缩放关系，是实现纳米尺度高性能的关键。

引言

纳米磁体中的非局域磁化动力学——自旋波——可用于节能信息处理，因为自旋波在磁性材料中传递信息时不会产生欧姆损耗（1）。自旋波的波长可短至纳米尺度，其频率可从数吉赫兹达到太赫兹，这些特性使其适用于纳米尺度、高速运行的器件。近年来，利用自旋电子学技术进行神经形态计算，因其有望推动未来低功耗人工智能的发展而备受关注（2）。自旋波可通过多种方式产生，例如施加磁场、利用自旋转移力矩或自旋轨道力矩，以及通过电压诱导磁各向异性变化；同时，可通过磁阻效应对其进行检测（3）。因此，利用自旋波进行神经形态计算有望实现为实际器件。

储备池计算（RC）是一种很有前景的神经形态计算框架。RC 是循环神经网络（RNN）的一种变体，具有一个称为储备池的单层，用于将输入信号转换为输出（4）。与传统循环神经网络不同，RC 不会更新储备池中的权重。因此，若以物理系统（例如磁化动力学）取代人工神经网络中的储备池，便可实现能够执行多种任务的神经网络器件，例如时间序列预测（4，5）、短期记忆（6，7）、模式识别和模式生成。人们已提出多种物理储备池计算方案：自旋电子振荡器（8，9）、光学（10）、光子学（11，12）、流体、软体机器人等（综述见（13–15））。在这些系统中，自旋电子储备池计算的优势在于，有望实现具有纳米尺度、吉赫兹频率高速运行且功耗低的器件，未来或可胜过传统电子计算机。迄今为止，自旋电子储备池计算已采用自旋力矩振荡器（8，9）、磁斯格明子（16）以及石榴石薄膜中的自旋波（17–19）进行研究。然而，目前自旋电子储备池计算的性能仍然

较差，无法与理想化储备池计算系统——回声状态网络（ESN）（6，7）相媲美。最大的问题在于，我们尚未充分理解如何在储备池计算系统中实现高性能。

为了实现高性能，储备池必须具有较大的自由度， N。然而，在实践中，增加物理节点数 N_p并不容易，因为这需要为多个输入布设更多连线。在这方面，连续介质中的基于波的计算具有独特优势。连续介质中的动力学具有大量、甚至可能无限的自由度。事实上，已有研究提出了多种基于波的计算方法（20，21）。面临的挑战是如何兼具基于波的计算与储备池计算的优势，从而实现高性能的时间序列数据计算。迄今为止，对于基于自旋波的储备池计算，只有通过使用大量输入和/或输出节点，才能提取大量自由度（19，22）。在此，我们提出一种可实现的自旋波储备池计算方案，并采用另一条路径：利用少量物理节点从连续介质中提取信息。

沿着这一思路，有人提出利用 N_v 具有延迟的动力学中的虚拟节点来增加 N （23）。这一想法已应用于具有长延迟线的光纤（11）以及具有延迟的振荡器网络（24）。然而，高性能背后的机制仍不清楚，尚未形成统一的认识。增加 $N = N_p N_v$ 与 N_v 并不一定能提升性能。事实上，基于自旋转矩振荡器的储备池计算在实验（9）和仿真（25）中都面临性能不足的问题。由于延迟线较长，光子储备池计算需要使用尺寸较大的器件（11，12）。

本工作表明，基于自旋波传播的纳米尺度、高速储备池计算，即使输入数量较少，也能达到与回声状态网络及其他先进储备池计算系统相当的性能。更重要的是，通过采用简单的理论模型，我们阐明了自旋波储备池计算实现高性能的机制。我们展示了波速与系统尺寸之间的缩放关系，使虚拟节点能够有效发挥作用。

结果

利用波传播进行储备池计算

储备池计算的基本任务是在时间 t_n，将输入信号 U_n 转换为离散步 n =1、2、.....、T 对应的输出 Y_n。例如，在语音识别中，输入是声波，输出是与声音对应的词语。每个词语不仅取决于瞬时输入，也取决于过去的历史。因此，通常而言，输出是所有过去输入 $Y_n = g(\{U_m\}_{m=1}^{n})$的函数，如图1(a)所示。储备池计算也可通过将输出设为 $Y_n = U_{n+1}$ (4)来用于时间序列预测。在这种情况下，根据所有过去的数据预测下一个时间步的状态；也就是说，其中包含了延迟的影响。输入—输出变换 g 的性能可通过 g 包含多少过去信息，以及 g 执行了多少非线性变换来表征。我们将讨论前者以记忆容量（MC）(26)表示，后者则以信息处理能力（IPC）(27)衡量。

我们提出了一种基于传播波的物理计算方法（见图 1(b,c)）。输入信号 U_n 的时间序列可以转换为输出信号 Y_n（图 1(a)）。正如我们将在下文讨论的，这种转换需要较大的线性和非线性记忆；例如，要预测Y_n，我们需要记住 U_{n-2} 和 U_{n-1}的信息。输入信号被注入第一个输入节点，并在器件中传播至输出节点，耗时 τ_1，如图 1(b) 所示。随后，输出可能包含对应于步骤$n - m_1$的时刻 $t_n - \tau_1$ 的过去信息。输出还可能在不同时间 $t_n - \tau_2$接收到来自另一输入的信息。这两部分信息相加后会混合并转换为 $U_{n-m_1}U_{n-m_2}$，转换过程由非线性读出或储备池的非线性动力学实现（另见补充信息中的 B 节）。我们将证明，波传播确实能够提高输入输出关系的记忆容量和学习性能。

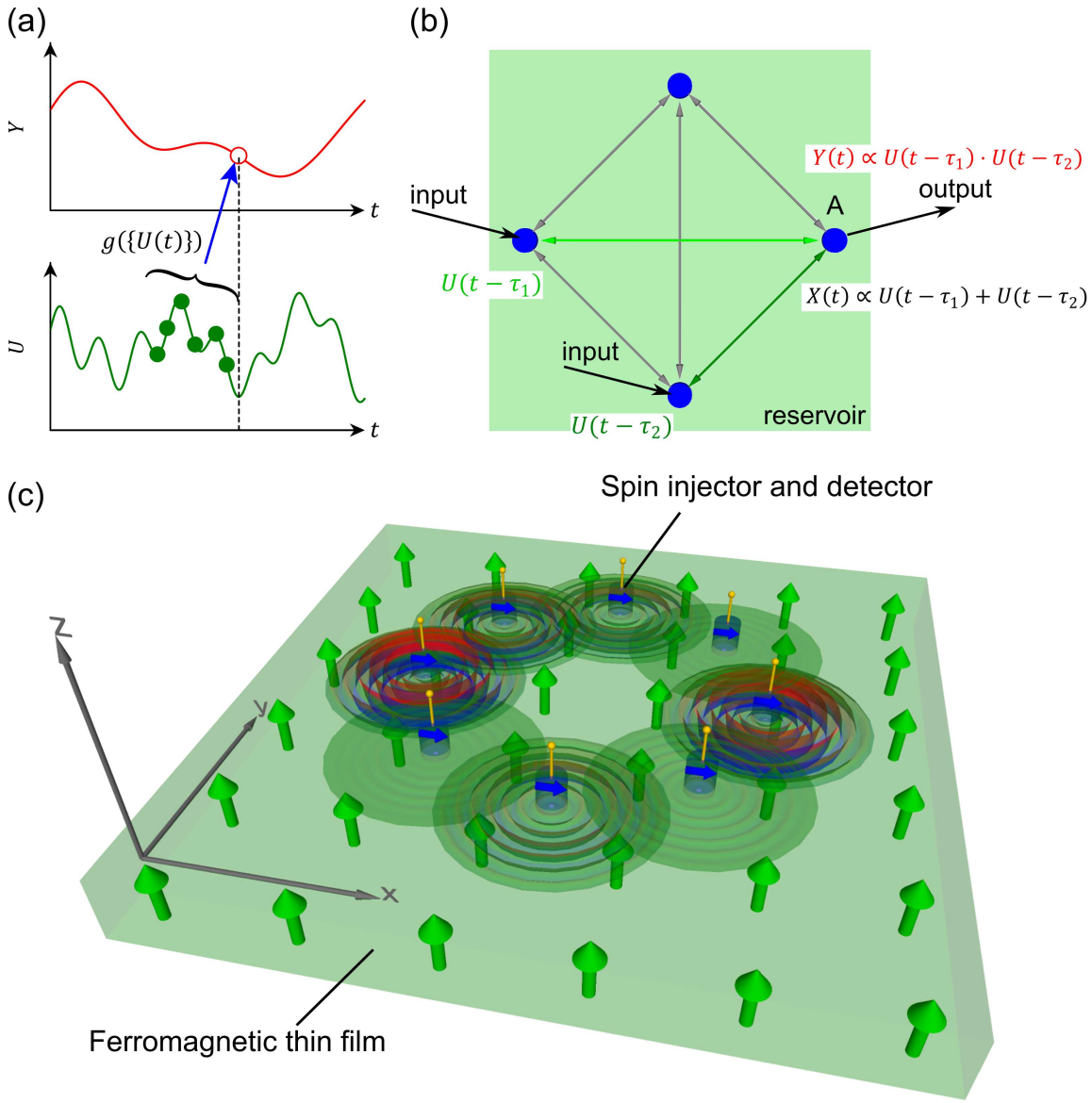


图 1：物理储备池计算以及基于传播自旋波网络的储备池示意图。(a) 利用时间序列数据进行输出函数预测的示意图。输出信号 Y 由输入信号 U 的历史信息转换而来。(b) 多个物理节点构成的储备池计算示意图。物理节点 A 的输出信号包含其他物理节点中的历史输入信号，这些信号由储备池记忆。(c) 基于传播自旋波的储备池计算示意图。铁磁薄膜（$\mathbf{m} \parallel \mathbf{e}_z$）中的传播自旋波由带有参考磁性层（$\mathbf{m} \parallel \mathbf{e}_x$）的多个物理节点处的自旋转移力矩激发。每个物理节点处通过磁阻效应检测磁化强度的 x 分量。

在解释我们的学习策略之前，我们先讨论如何从数据中准确学习输入输出关系 $Y_n = g(\{U_m\}_{m=1}^n)$。这里，输出可能取决于整个输入序列 $\{U_m\}_{m=1}^n = (U_1, \ldots, U_n)$。即使 U_n 和 Y_n 都是单变量时间序列数据，输入输出关系 $g(\cdot)$ 也可能是 T 元多项式，其中 T 是时间序列的长度。形式上，$g(\cdot)$ 可以展开为多项式级数（沃尔泰拉级数），即 $g(\{U_m\}_{m=1}^n) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_t} \beta_{k_1,k_2,\cdots,k_t} U_1^{k_1} U_2^{k_2} \cdots U_n^{k_n}$，其系数为 $\beta_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$。因此，即使对于线性输入输出关系，我们也需要在 $g(\cdot)$ 中使用 T 个系数；随着多项式中幂次的增加，系数的数量会呈指数级增长。这一观察表明，估计输入输出关系需要大量数据。尽管如此，我们仍可期待对 $g(\cdot)$ 进行降维，因为它可能只依赖于接近 t 的时间以及较低次幂。不过，我们的物理计算机仍应具有 $N \gg 1$ 个自由度，即使自由度并未呈指数级增长。

储备池计算框架用于处理输入 U 和输出 Y 的时间序列数据（6）。在该框架中，通过储备池动力学 $X(t)$ 学习输入输出关系；在我们的案例中，储备池动力学是探测器处的磁化强度。时间 t_n 的储备池状态由对应于 t_n 的第 n 步输入驱动，如下所示

$$X(t_{n+1}) = f\left(X(t_n), U_n\right) \tag{1}$$

其中函数 $f(\cdot)$ 是非线性（或可能是线性）的。输出由读出算子 $\psi(\cdot)$ 近似表示，如下所示

$$\hat{Y}_n = \psi\left(X(t_n)\right). \tag{2}$$

我们的研究采用非线性读出 $\psi(X(t)) = W_1 X(t) + W_2 X^2(t)$ (5, 28)。权重矩阵 W_1 和 W_2 由储备池动力学 $X(t)$ 和真实输出 Y_n 的数据估算得出，其中 $X(t)$ 由式 (1) 得到。借助非线性读出，具有线性

动力学的储备池计算可以实现非线性变换，如图 1(b) 所示。我们强调，当储备池计算具有非线性动力学时，该系统也适用于线性读出。我们在 B 节讨论这种情况。

自旋波储备池计算

我们研究一种由带圆柱形注入器的薄矩形系统构成的磁性器件（见图1(c)）。器件尺寸为 $L \times L \times D$。在均匀外磁场作用下，磁化强度沿 z 方向。电流注入半径为 a 、高度与器件相同的 N_p 注入器中。电流产生的自旋转矩驱动磁化强度 $\mathbf{m}(x\ t)$ 和传播自旋波，如图1(c)示意所示。自旋波储备池计算的实际演示如图2所示。我们通过两种方法演示自旋波储备池计算：微磁模拟，以及采用响应函数的理论模型。

在微磁模拟中，我们分析 Landau-Lifshitz-Gilbert（LLG）方程，其有效磁场 $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_{\text{demag}} + \mathbf{H}_{\text{exch}}$ 由外场、退磁场和交换相互作用构成（见方法部分中基于响应函数的理论分析）。自旋波由斯隆切夫斯基自旋转移力矩驱动（29）。驱动项与纳米接触处的直流电流 $j(t)$ 成正比。我们注入与经过预处理滤波器处理的输入时间序列 U 成正比的直流电流。根据所得的空间非均匀磁化强度 $\mathbf{m}(x\ t)$，我们测量第 i个纳米接触处的平均磁化强度 $\mathbf{m}_i(t)$。我们采用具有 N_v 个虚拟节点的时分复用方法（23）。我们选择磁化强度的 x分量$m_{x,\ i}$ 作为储备池状态，即 $X_n = \{m_{x,i}(t_{n,\ k})\}_{i\in[1,N_p],\ k\in[1,N_v]}$（具体形式见方法中的式（14））。对于输出变换，我们使用 $\psi(m_{i,\ x}) = W_{1,\ i}m_{i,\ x} + W_{2,\ i}m_{i,\ x}^2$。因此，我们的储备池维度为 $2N_pN_v$。非线性输出变换能够增强储备池中的非线性变换（5）；研究表明，即使在储备池动力学为线性的情况下，储备池计算也能够学习任意非线性（28, 30）。在第B节中

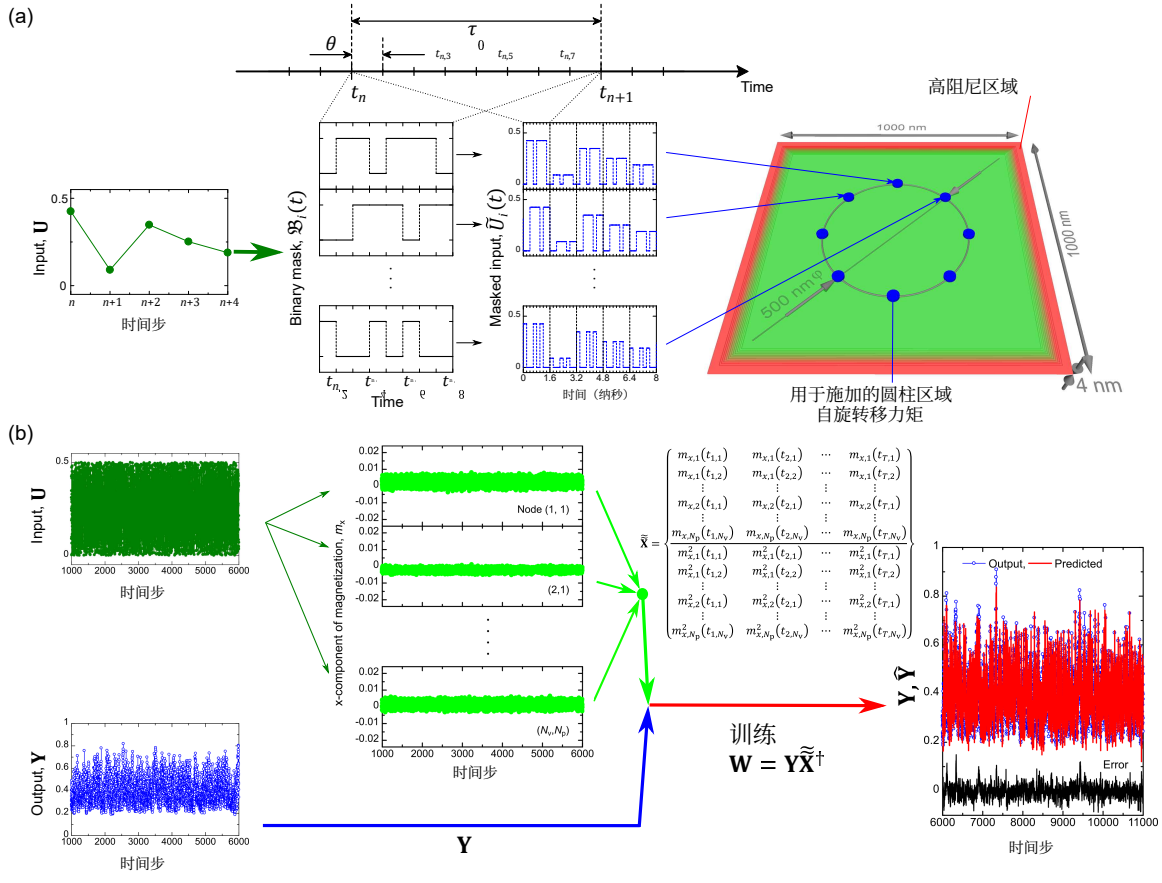


图 2：自旋波储层的维度与 NARMA10任务的预测。(a) 输入信号 U 与二进制掩码 $\mathcal{B}_i(t)$ 相乘，并转换为注入电流 $j(t) = 2j_cU_i(t)$，以输入第 i 个物理节点。电流注入每个物理节点的圆柱区域，以施加自旋转移力矩并激发自旋波。矩形边缘的高阻尼区域用于避免自旋波反射。(b) NARMA10任务的预测。采集每个物理节点和虚拟节点处磁化强度的 x 分量，并通过线性回归训练输出权重。

在补充信息中，我们还讨论了线性读出，但其中包括磁化强度的 z-分量 $\mathbf{X} = (m_x, m_z)$。在这种情况下， m_z 与 m_x^2发挥类似的作用。储备池计算的性能通过三项任务进行测量：记忆容量（MC）、信息处理能力（IPC）和 NARMA10。读出中的权重通过储备池变量 X 和输出 Y 进行训练（图 2(b)，另见方法）。

为了理解自旋波传播实现高性能学习的机制，我们还使用自旋波动力学的响应函数研究了一个简化模型。通过将无输入时的磁化强度在线性化为 $\mathbf{m} = (0,0,1)$ 附近，我们可以将磁化强度对输入的线性响应表示为第 i 个读出 $m_i = m_{x,\,i} + i m_{y,\,i}$（见方法）

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^{N_p} \int dt' G_{ij}(t,t') U^{(j)}(t'). \tag{3}$$

这里， $U^{(j)}(t)$ 是第 j 个纳米接触处的输入时间序列。响应函数包含自项G_{ii}，即输入和读出纳米接触相同；还包含传播项 G_{ij}，其中输入与读出纳米接触之间的距离为 $|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|$。我们使用二次非线性读出，其结构为

$$m_i^2(t) = \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} \int dt_1 \int dt_2 G^{(2)}_{ij_1j_2}(t,t_1,t_2) U^{(j_1)}(t_1) U^{(j_2)}(t_2). \tag{4}$$

非线性读出的响应函数为 $G^{(2)}_{ij_1j_2}(t,t_1,t_2) \propto G_{ij_1}(t,t_1) G_{ij_2}(t,t_2)$。当我们对输入采用二阶微扰时，也会出现与式（4）相同的结构（见方法部分）。一般而言，我们可以纳入输入的三次项及更高阶项。该展开得出输出关于输入时间序列的沃尔泰拉级数，并揭示了自旋波储备池计算的工作原理（更多详情见补充信息中的 A.1 节）。计算出每个纳米接触处的磁化强度后，我们即可估算记忆容量和信息处理能力。

图3展示了三项任务的结果。当虚拟节点的时间尺度 θ 较小且阻尼较小时，自旋波储备池计算的性能较高。如图3(a)所示，我们实现了记忆容量 ≈ 60 和信息处理能力 ≈ 60。相应地，我们在 NARMA10

任务中实现了较小的归一化均方根误差 ≈ 0.2（图3(c)）。这些性能可与节点数为 ~ 100的最先进回声状态网络相媲美。阻尼增强时，记忆容量和信息处理能力都会降低。由于 NARMA10任务需要具有延迟步数 ≈ 10 的记忆，以及具有延迟步数 ≈ 10 的二阶非线性（见补充信息中的 A 节），当记忆容量小于 10 且信息处理能力 $\lesssim 10^2/2$时，归一化均方根误差会增大。

如图 3(b) 所示，利用响应函数的理论模型半定量地再现了微磁模拟的结果。这一结果表明，线性响应函数 $G(t,t')$ 捕捉到了由波传播导致的延迟 $t-t'$ 的基本特征。

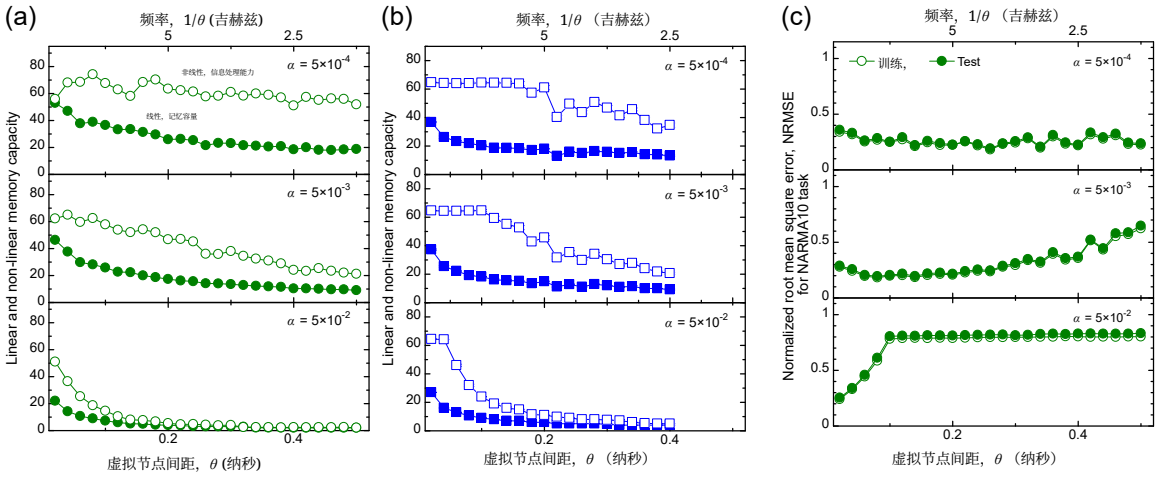


图3：使用8个物理节点和8个虚拟节点获得的虚拟节点间距对自旋波储备池计算性能的影响。通过（a）微磁学模拟和（b）响应函数法获得的记忆容量 MC 和信息处理能力 IPC，绘制为不同阻尼参数 α 下虚拟节点间距 θ 的函数。（c）NARMA10任务的归一化均方根误差 NRMSE，绘制为不同 α 下 θ 的函数。

为确认较高的记忆容量和信息处理能力源于自旋波传播，我们进行了节点间设有阻尼层的微磁仿真（图 4(a)）。阻尼层会抑制自旋波传播。图 4(b) 的结果表明，与未施加阻尼的情况相比，记忆容量显著降低，尤其是在 θ 较小时。NARMA10任务表现出

更大的误差（图 4(d)）。当 θ 较小时，抑制效果较弱。这可能是由于未能完全抑制波传播。

我们还通过忽略两个物理节点之间的相互作用，分析了具有响应函数的理论模型，即 $G_{ij} = 0$ for $i \neq j$。在这种情况下，不允许两个物理节点之间进行信息传输。与存在波传播的系统相比，我们得到的 MC 和 IPC 更小，这支持了我们的观点（见（图 4(c)））。

我们的自旋波储备池计算也适用于时间序列数据的预测。在研究（5）中，ESN 学习了 $t + \Delta t$ 与 t 之前各状态之间的函数关系。训练后的 ESN 可以根据过去的状态估计 $t + \Delta t$，从而无需数据即可预测其动力学。在（5）中，研究展示了对混沌时间序列数据的预测。图5展示了使用我们的自旋波储备池计算对洛伦兹模型进行预测的结果。我们可以证明，该储备池计算能够进行短期预测，更重要的是，还能重构混沌吸引子。

系统尺寸与波速的缩放

为了阐明自旋波储备池计算高性能的机制，我们研究了具有不同特征长度尺度 L 和不同波传播速度 v的系统的记忆容量和信息处理能力。特征长度尺度由输入所在圆的半径控制（见图 2(a)）。我们使用带有响应函数的理论模型，在参数空间（v， R）中计算记忆容量和信息处理能力。之所以能够进行这项计算，是因为与数值微磁模拟相比，我们模型的计算成本低得多。

图 6(a,b) 显示，当 $L \propto v$时，记忆容量和信息处理能力均达到最大值。为了更深入地理解这一结果，我们对进一步简化的模型进行了相同的分析，

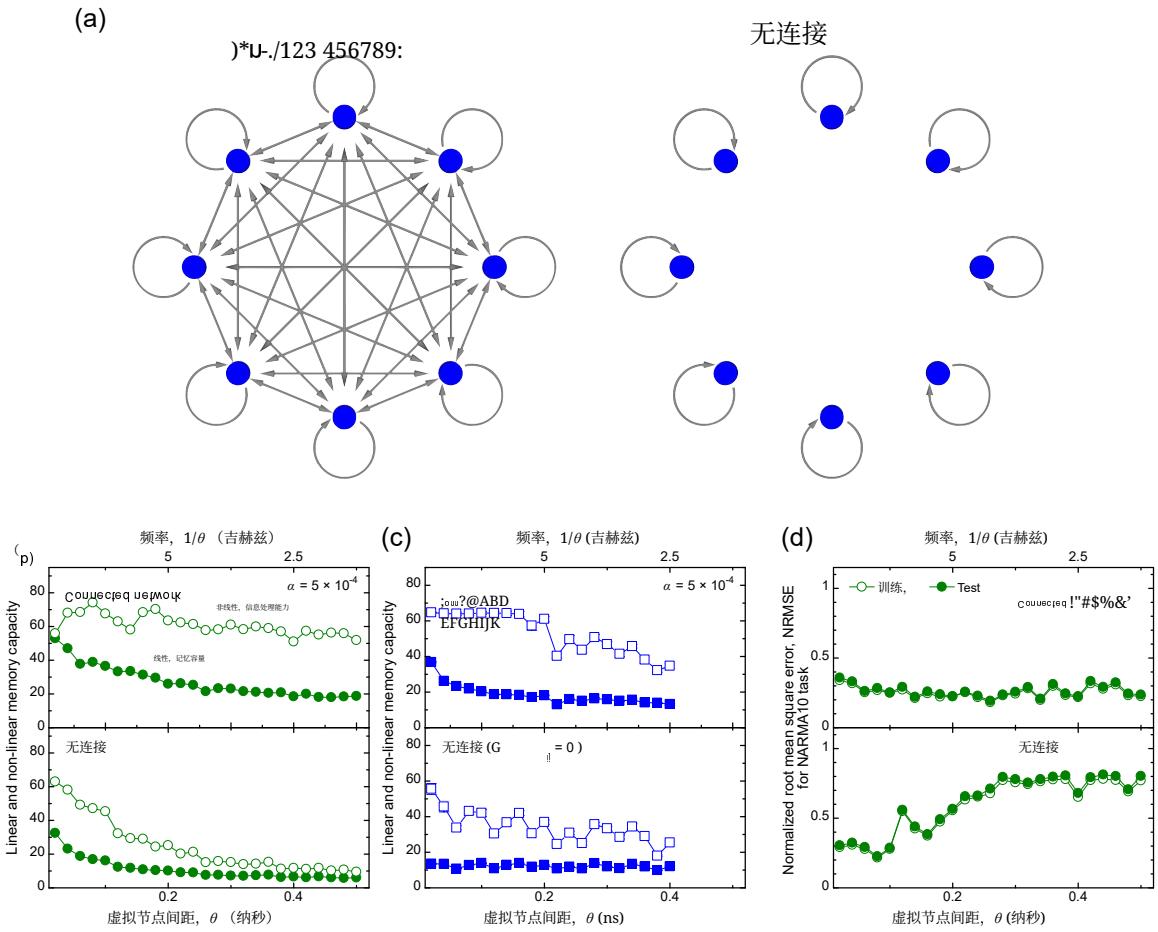


图 4：网络连接对储备池计算性能的影响。(a) 通过传播自旋波连接的物理节点网络示意图 [left] 以及无连接的物理节点 [right]。使用由 8 个物理节点构成的连接网络 [top]和无连接的物理节点 [bottom] 获得的记忆容量 MC 和信息处理能力 IPC，分别通过 (a) 微磁学模拟和 (b) 响应函数法计算，并绘制为虚拟节点间距 θ的函数。使用了 8 个虚拟节点。(c) 微磁学模拟得到的 NARMA10 任务归一化均方根误差 NRMSE，绘制为 θ 的函数，其中连接网络 [top] 和无连接的物理节点 [bottom]。

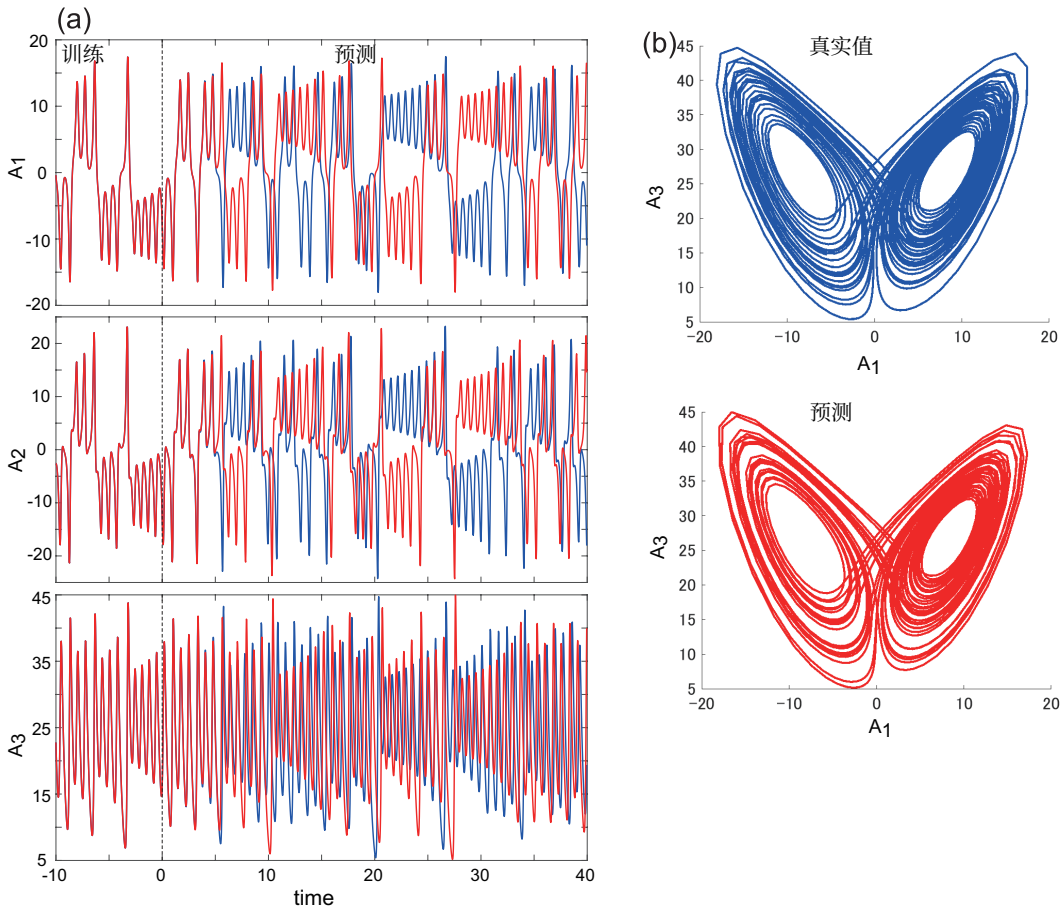


图5：使用基于微磁仿真的储备池计算对洛伦兹系统时间序列数据进行预测。参数为 $\theta = 0.4$ns 和 $\alpha = 5.0 \times 10^{-4}$。(a) 真实值 ˆ ˆ ˆ ($A_1(t)$ $A_2(t)$ $A_3(t)$) 与估计时间序列 ($A_1(t)$ $A_1(t)$ $A_3(t)$) 分别以蓝色和红色显示。训练步骤对应 $t < 0$期间，预测步骤对应$t > 0$期间。(b) 真实值和预测步骤期间的 A_1A_3 平面上的吸引子。

其中响应函数由高斯函数取代

$$G_{ij}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2w^2}\left(t - \frac{R_{ij}}{v}\right)^2\right) \tag{5}$$

其中， R_{ij} 是第 i个与第 j个物理节点之间的距离， w 是函数的宽度。即使在这个简化模型中，我们也得到了 MC≈ 40 和 IPC≈ 60，并且当$L \propto v$ 时还得到了最大值（图 6(c,d)）。这一结果使长度与速度之间最优比值的来源更加清晰：当 $L \ll v$时，不同 R_{ij} 下的响应函数相互重叠，因此不同的物理节点无法承载不同延迟时间的信息。另一方面，当 $L \gg v$时，特征延迟时间 L/v 超过了计算 MC 和 IPC 所需的最大延迟时间，或超过了时间序列的总长度。请注意，我们将最大延迟时间设为 100，这远大于 NARMA10任务所需的值。

结果表明，基于波传播的储备池计算中，系统尺寸与速度之间存在普适标度关系。我们的自旋波系统具有$L \sim 500$ nm的特征长度，速度为 $v \sim 200$ ms^{-1}。事实上，已有报道的光子储备池计算采用了特征长度尺度接近图7所示标度关系的光纤。

讨论

图 7 展示了文献中关于储备池计算的研究结果，其中多个节点分别以节点的长度 L 以及波速与延迟时间的乘积 $v\tau_0$ 为横坐标进行绘制，涵盖光子储备池计算和自旋电子储备池计算。对于自旋电子储备池计算，波传播中考虑了偶极相互作用，此时波速与饱和磁化强度和薄膜厚度均成正比（31）（见补充信息第 C 节）。对于光子储备池计算，特征波速为光速，即 $v \sim 10^8$ $\mathrm{m\ s}^{-1}$。符号大小对应于文献中获取的记忆容量[，绘图详情见补充信息第 D 节]。这些图大致分布在一条宽阔的斜线上

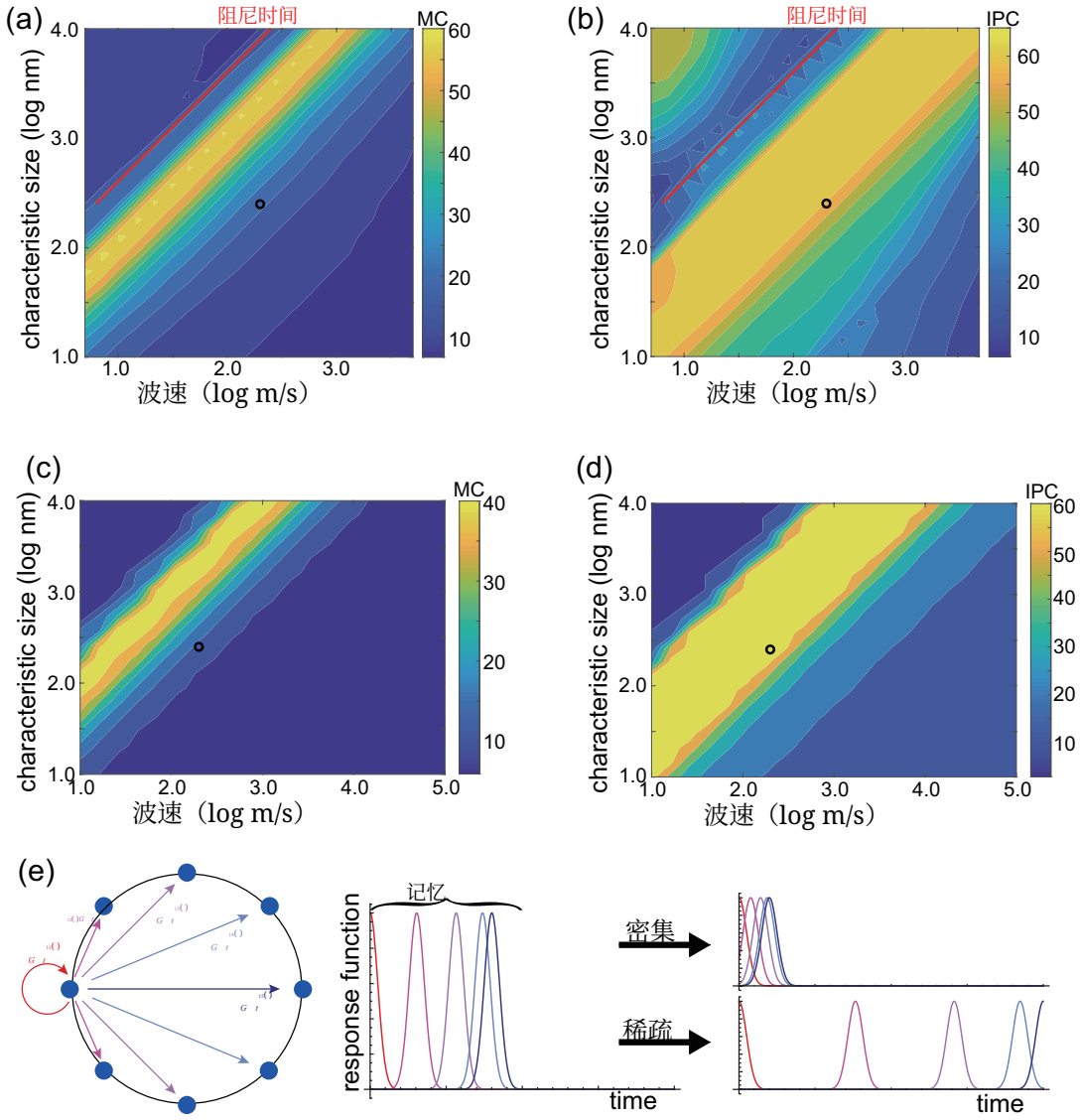


图 6：采用响应函数法获得的特征尺寸与传播波速之间的缩放关系。MC（a、c）和 IPC（b、d）随物理节点之间的特征长度尺度 R 及波传播速度 v的变化。图中展示了偶极相互作用的响应函数（a、b）以及高斯函数（5）的响应函数（c、d）所得结果。（e）响应函数及其与物理节点间波传播关系的示意图。当波速过快时，所有响应函数彼此重叠（密集区间）；而当波速过慢时，响应函数无法覆盖这些时间窗口（稀疏区间）。

带有比例 $L/(v\tau_0) \sim 1$ 的线。因此，只要输入的延迟时间 $\tau_0 = N_v\theta$ 处于相同的量级（在我们的自旋波储备池计算中为 $\tau_0 = 0.3 - 3$ ns），光子储备池计算就需要更大的系统尺寸。如图6所示，若要缩短物理节点的长度，就必须降低波速或缩短延迟时间；否则信息会过于密集，储备池无法记忆许多自由度（见图6(e)）。缩短延迟时间颇具挑战，因为光子储备池的实验演示已经采用了接近仪器极限的短延迟。此外，在光子学系统中降低波速也很困难。另一方面，传播自旋波的波速远低于光速，并且可以通过配置、厚度和材料参数进行调节。如果沿图7中的宽线降低波速或缩短延迟时间，信息就会变得稀疏，无法得到有效利用（见图6(e)）。因此，要实现高性能储备池计算，存在一个最佳条件。

其性能与其他先进技术相当，相关技术总结见图 8。例如，在自旋电子储备池计算中，NARMA10任务的记忆容量 ≈ 30 (19) 和归一化均方根误差 ≈ 0.2 (22) 是使用 $N_p \approx 100$ 个物理节点获得的。仅使用一个物理节点、但配备 $10^1 - 10^2$ 个虚拟节点的自旋电子储备池计算性能并不出色；记忆容量小于 10（图 8 左下方的数据点）。这表明，迄今为止，自旋电子储备池计算尚无法有效利用虚拟节点。另一方面，光子储备池计算仅使用一个物理节点和 $N_v \approx 50$ 个虚拟节点便取得了相当的性能。然而，正如我们所讨论的，光子储备池计算需要毫米级的系统尺寸。我们的系统使用约 10 个物理节点便实现了相当的性能，同时将尺寸缩小至纳米尺度，并保持 $2 - 50$ 吉赫兹的计算速度。我们还展示了自旋波储备池计算能够对混沌数据进行时间序列预测，并重构其吸引子。据我们所知，此前尚无纳米尺度系统实现过这些功能。

我们的结果 微磁模拟表明，我们的系统在物理上可以 -

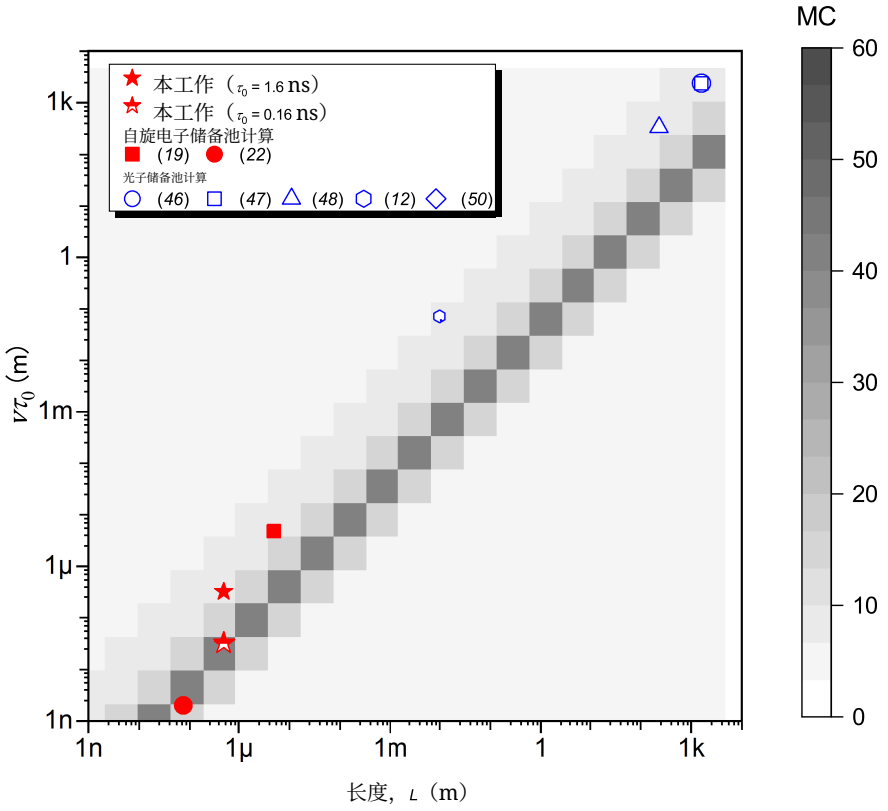


图 7：图中绘出了采用多个节点的储备池计算结果，这些结果以节点间长度和特征波速（v）乘以延迟时间（τ_0）为函数，并分别针对光子学系统（空心符号）和自旋电子学系统（实心符号）展示。符号大小对应记忆容量，数据取自文献（12、19、22、32–35）及本工作。灰度表示使用响应函数法 [式（5）]评估的记忆容量。

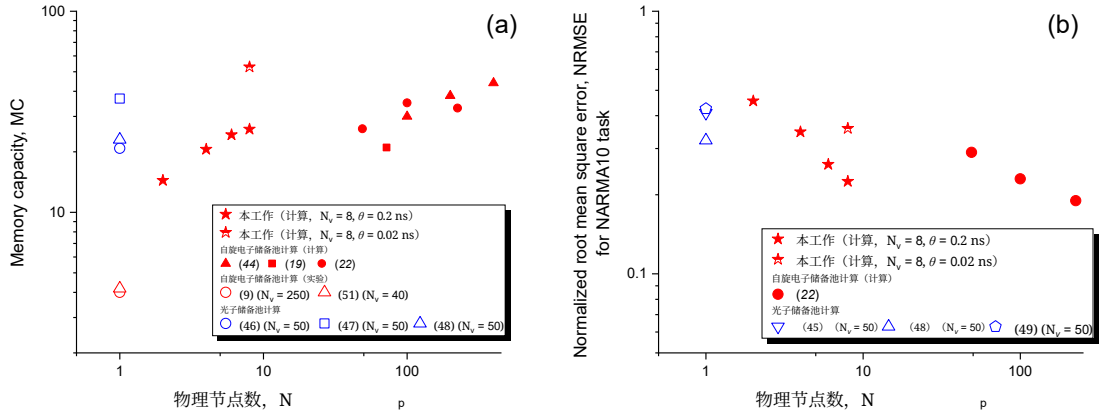


图8：与不同系统相比的储备池计算性能。(a) 记忆容量 MC 随物理节点数 N_{p} 变化的曲线。(b) NARMA10任务的归一化均方根误差 NRMSE 随 N_{p} 变化的曲线。空心蓝色符号表示光子储备池计算报告的数值，实心红色符号表示自旋电子储备池计算报告的数值。自旋电子储备池计算的 MC 和 NARMA10任务的 NRMSE 数据取自文献 (9, 19, 22, 36, 37)，光子储备池计算的数据取自文献 (32–34, 38, 39)。

已实现。本研究中的所有参数均可利用实际材料实现 (40–43)。利用纳米级电接触，通过自旋转移力矩激发铁磁薄膜中的纳米尺度传播自旋波，已被观测到 (44–46)。在磁性薄膜上制备多个电纳米接触，已在相互同步的自旋转矩振荡器中得到演示 (46)。除了在磁性薄膜中激发传播自旋波外，还可以通过每个电接触处的隧道磁阻效应检测其非局域磁化动力学，如图1(c)示意图所示；这些技术广泛用于开发自旋电子存储器和自旋转矩振荡器。此外，本系统通过利用传播自旋波的速度和物理节点之间的距离，有效地使用了虚拟节点；因此，只需少量物理节点即可实现高性能储备池计算，这与此前报道中使用大量物理节点的情况相反。本工作为实现基于铁磁薄膜中传播自旋波的纳米尺度高性能储备池计算提供了一种途径。

我们的研究与近期提出的下一代

储备池计算（28，47）之间存在一个有趣的联系。在该方法中，线性回声状态网络被视为 NVAR（非线性向量自回归）方法，用于根据数据估计动力学方程。我们的响应函数公式（3）得出了具有延迟 $Y_{n+1} = a_n U_n + a_{n-1} U_{n-1} + \ldots$ 的线性输入输出关系（见《补充信息》A 节）。更一般地，通过非线性读出或高阶响应函数，我们可以得到具有延迟和非线性 $Y_{n+1} = a_n U_n + a_{n-1} U_{n-1} + \ldots + a_{n,\ n} U_n Y_n + a_{n,\ n-1} U_n U_{n-1} + \ldots$ 的输入输出关系（见《补充信息》B 节）。这些输入输出关系实际上就是输出关于输入的沃尔泰拉级数，其中包含延迟和非线性（48）。展开式的系数与响应函数相关。因此，储备池计算的性能取决于响应函数矩阵中的独立分量，可根据两个节点之间的响应函数所覆盖的延迟范围是否存在重叠来评估。研究结果有助于设计潜在的物理节点网络。

需要指出的是，本研究中输入输出关系的多项式基源于稳态附近的自旋波激发 $m_z = 1$。当输入数据具有层级结构时，其他基可能比多项式展开更高效。采用不同的磁系统设置可能会产生不同的基。我们认为，本研究对高性能储备池计算的机制给出了简单而清晰的直观解释，这有助于探索其他设置，从而使物理储备池计算更适用于实际应用。

材料与方法

微磁模拟

我们使用微磁模拟器 mumax[3] (49) 分析 LLG方程。磁化强度 M(x t) 的 LLG方程为

$$\partial_t \mathbf{M}(\mathbf{x},t) = -\frac{\gamma\mu_0}{1+\alpha^2}\mathbf{M}\times\mathbf{H}_{\text{eff}} - \frac{\alpha\gamma\mu_0}{M_s(1+\alpha^2)}\mathbf{M}\times(\mathbf{M}\times\mathbf{H}_{\text{eff}}) + \frac{\hbar P\gamma}{4M_s^2 eD}J(\mathbf{x},t)\mathbf{M}\times(\mathbf{M}\times\mathbf{m}_{\text{f}})\,. \tag{6}$$

我们将有效磁场表示为

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_{\text{demag}} + \mathbf{H}_{\text{exch}}, \tag{7}$$

$$\mathbf{H}_{\text{ext}} = H_0\mathbf{e}_z \tag{8}$$

$$\mathbf{H}_{\text{ms}} = -\frac{1}{4\pi}\int \nabla\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}' \tag{9}$$

$$\mathbf{H}_{\text{exch}} = \frac{2A_{\text{ex}}}{\mu_0 M_s}\Delta\mathbf{M}, \tag{10}$$

其中，$\mathbf{H}_{\text{ext}}$ 为外部磁场，$\mathbf{H}_{\text{ms}}$ 为磁静力相互作用，$\mathbf{H}_{\text{exch}}$ 为交换相互作用，其交换参数为 A_{ex}。

我们的系统尺寸为 $L = 1000$ nm和 $D = 4$ nm。网格点数在 x 和 y 方向上均为200，在 z 方向上为1。我们考虑Co_2MnSi赫斯勒合金铁磁体，其吉尔伯特阻尼较低、自旋极化较高，参数为$A_{\text{ex}} = 23.5\,\text{pJ/m}$、 $M_s = 1000\,\text{kA/m}$和 $\alpha = 5\times10^{-4}$(40, 41, 41–43)。施加 $\mu_0 H_0 = 1.5\,\text{T}$的面外磁场，使磁化强度指向面外。自旋极化电流场通过Slonczewski模型（29）引入，其中极化参数为 $P = 1$ ，自旋转矩非对称参数为 $\lambda = 1$ ，约化普朗克常数为 $\hbar$ ，电子电荷为 e。均匀的固定层磁化强度为$\mathbf{m}_f = \mathbf{e}_x$。我们为自旋波设置吸收边界层，以确保系统边界处的磁化强度消失（50）。初始磁化强度设为 $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$。

该系统的参考时间尺度为 $\tau_0 = 1/\gamma\mu_0 M_s \approx 5$ ps，其中 γ 为旋磁比， μ_0 为磁导率，M_s 为饱和磁化强度。参考长度尺度为交换长度 $l_0 \approx 5$ nm。相关参数包括吉尔伯特阻尼 α、输入时间序列的时间尺度 θ，以及输入节点之间的特征长度 R_0。

自旋注入器和探测器以圆柱形纳米接触的形式嵌入该区域，其半径为 a ，高度为 D。除非另有说明，我们取 $a = 20$nm。输入时间序列为均匀随机噪声 $U_n \in \mathcal{U}(0, 0.5)$。注入的密度电流设为 $j(t_n) = 2j_c U_n$ ，其中 $j_c = 2 \times 10^{-4}/(\pi a^2)$A/m^2。给定长度为 T的输入时间序列后，我们在时间 θ内施加电流，然后在下一步更新电流。不同虚拟节点注入相同的输入电流，但使用不同的滤波器（见“基于储备池计算的学习”）。因此，总仿真时间为 $T\theta N_v$。

基于储备池计算的学习

我们的储备池计算架构由储备池状态变量

$$X(t + \Delta t) = f\left(X(t), U(t)\right) \tag{11}$$

和读出组成

$$Y_n = \mathbf{W} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(t_n). \tag{12}$$

在我们的自旋波储备池计算中，储备池状态选为磁化强度的 x分量 n

$$\mathbf{X} = \left(m_{x,1}(t_n), \ldots, m_{x,i}(t_n), \ldots, m_{x,N_p}(t_n)\right)^T, \tag{13}$$

物理节点的索引为 $i = 1$、2、.....、N_p。这里， N_p为物理节点数，每个 $m_{x,i}(t_n)$ 都是一个 T 维行向量，索引为 $n = 1$、2、.....、T。我们在储备池计算中采用虚拟节点的时分复用网络（23），并使用时间间隔为 θ 的 N_v 个虚拟节点。

˜扩展储备池状态表示为矩阵 $N_p N_v \times T$ X（见图 2(b)）

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}} = (&m_{x,1}(t_{n,1}), m_{x,1}(t_{n,2}), \ldots, m_{x,1}(t_{n,k}), \ldots, m_{x,1}(t_{n,N_v}),\\ &\ldots, m_{x,i}(t_{n,1}), m_{x,i}(t_{n,2}), \ldots, m_{x,i}(t_{n,k}), \ldots, m_{x,i}(t_{n,N_v}), \ldots,\\ &m_{x,N_p}(t_{n,1}), m_{x,N_p}(t_{n,2}), \ldots, m_{x,N_p}(t_{n,k}), \ldots, m_{x,N_p}(t_{n,N_v})\Big)^T, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $t_{n,\ k} = ((n-1)N_v - (k-1))\theta$ 表示虚拟节点 $k = 1$、2、.....、N_v的索引。总行数为 $N = N_p N_v$。我们通过扩展储备池状态来使用非线性读出：

$$\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\mathbf{X}} \circ \tilde{\mathbf{X}} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

˜ ˜ ˜其中 X(*t*) ∘ X(*t*) 是 X(*t*) 的 Hadamard 积，即逐分量乘积。读出权重 W 根据输出数据 $Y(t)$ 进行训练。

$$\mathbf{W} = \mathbf{Y} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}^{\dagger} \tag{16}$$

其中，X† 是 X 的伪逆。

在时间复用方法中，输入时间序列 U $= (U_1, U_2, \ldots, U_T) \in \mathbb{R}^T$被˜转换为分段常数时间序列 $U(t) = U_n$，其中 $t = (n-1)N_v\theta + s$ 在$k = 1$、.....、T和 $s = [0, N_v\theta)$ 期间保持不变（见图 2(a)）。这意味着同一输入在时间段 $\tau_0 = N_v\theta$内保持不变。为了利用物理节点和虚拟节点的优势，第 i个物理节点处的实际输入$J_i(t)$为 $U(t)$ 与 τ_0周期性随机二值滤波器 $\mathcal{B}_i(t)$ 的乘积。这里，$\mathcal{B}_i(t) \in \{0, 1\}$ 在时间 θ内为分段常数。在每个物理节点处，我们使用不同的二值滤波器实现，如图 2(a) 所示。

除非另有说明，我们使用输入时间序列的 1000 步作为预热。此后，对于 MC、IPC 和 NARMA10任务，我们使用 5000 步进行训练，使用 5000 步进行测试。

NARMA任务

NARMA10任务基于离散微分方程,

$$Y_{n+1} = \alpha Y_n + \beta Y_n \sum_{p=0}^{9} Y_{n-p} + \gamma U_n U_{n-9} + \delta. \tag{17}$$

这里， U_n 是从均匀随机分布 $\mathcal{U}$(0, 0.5)中取出的输入， y_k 是输出。我们选择参数为 $\alpha = 0.3$、 $\beta = 0.05$、 $\gamma = 1.5$和 $\delta = 0.1$。在储备池计算中，输入为 U $=(U_1, U_2, \ldots,$ $U_T)$，输出为 Y $=(Y_1, Y_2, \ldots, Y_T)$。NARMA10任务的目标是根据给定的输入 U 估计输出时间序列 Y。储备池计算的训练通过调整权重 W 来完成，使估计输出 $Y(t_n)$在平方范数 $|\hat{Y}(t_n) - Y_n|^2$方面接近真实输出 Y_n 。

NARMA10任务的性能通过估计的时间˜ˆ ˜序列 Y $=$ W $\cdot$X 与真实输出 Y 之间的偏差来衡量。归一化均方根误差（NRMSE）为

$$\mathrm{NRMSE} \equiv \sqrt{\frac{\sum_n (\hat{Y}(t_n) - Y_n)^2}{\sum_n Y_n^2}}. \tag{18}$$

当 NRMSE ≈ 0时，任务表现良好。在回声状态网络中，据报道，对于 $N = 50$, NRMSE $\approx$0.4；对于 $N = 200$, NRMSE ≈ 0.2 (51)。节点数量 $N = 200$ 用于语音识别，词错误率为 ≈ 0.02 (51)，以及时空混沌的时间序列预测(5)。因此，NRMSE ≈ 0.2 被认为在实际应用中表现相当出色。我们还强调，我们使用相同数量级的节点（虚拟节点和物理节点） $N = 128$ 来实现 NRMSE ≈ 0.2。

记忆容量与信息处理能力

记忆容量（MC）是衡量储备池计算（RC）短期记忆能力的指标。该指标首次在文献（6）中提出。对于从均匀分布中抽取的随机时间序列输入 U_n , 网络

经过训练后输出 $Y_n = U_{n-k}$。记忆容量的计算方式为

$$\mathrm{MC}_k = \frac{\langle U_{n-k}, \mathbf{W} \cdot \mathbf{X}(t_n) \rangle^2}{\langle U_n^2 \rangle \langle (\mathbf{W} \cdot \mathbf{X}(t_n))^2 \rangle}. \tag{19}$$

该量随延迟 k 的增加而衰减，记忆容量（MC）定义为

$$\mathrm{MC} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \mathrm{MC}_k. \tag{20}$$

这里， $k_{\max}$ 是最大延迟，本研究中设为 $k_{\max} = 100$。记忆容量（MC）的优点在于，当输入为独立同分布（i.i.d.）且输出函数为线性时，MC 的上限为 N，即内部节点的数量。

信息处理能力（IPC）是 MC 的非线性版本（27）。在此任务中，输出设为

$$Y_n = \prod_k \mathcal{P}_{d_k}(U_{n-k}) \tag{21}$$

其中， d_k 是非负整数， $\mathcal{P}_{d_k}(x)$是 x 阶的勒让德多项式。我们可以定义

$$\mathrm{IPC}_{d_0,d_1,\ldots,d_{T-1}} = \frac{\langle Y_n, \mathbf{W} \cdot \mathbf{X}(t_n) \rangle^2}{\langle Y_n^2 \rangle \langle (\mathbf{W} \cdot \mathbf{X}(t_n))^2 \rangle}. \tag{22}$$

然后计算 j 阶信息处理能力（IPC）。我们可以定义

$$\mathrm{IPC}_j = \sum_{d_k \mathrm{s.t.} j = \sum_k d_k} \mathrm{IPC}_{d_1,d_2,\ldots,d_T}. \tag{23}$$

当 $j = 1$ 时，IPC 实际上等同于 MC，因为 $\mathcal{P}_0(x) = 1$ 且 $\mathcal{P}_1(x) = x$。在这种情况下，当 $i = k$ 时， $Y_n = U_{n-k}$ 适用于 $d_i = 1$；否则则为 $d_i = 0$。(23) 对所有可能的延迟 k 求和，这正是 MC。当 $j > 1$ 时，IPC 涵盖了直至 j 阶多项式的所有非线性变换和延迟。例如，当 $j = 2$时，输出可以是 $Y_n = U_{n-k_1} U_{n-k_2}$或 $Y_n = U_{n-k}^2 + \mathrm{const}$。本研究聚焦于 $j = 2$，因为

二阶非线性对于 NARMA10 任务至关重要（参见《补充信息》第 A 节）。

通过考察输入输出关系的沃尔泰拉级数，可以清楚地看出记忆容量和信息处理能力的重要性，

$$Y_n = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_t} \beta_{k_1,k_2,\cdots,k_n} U_1^{k_1} U_2^{k_2} \cdots U_n^{k_n}. \tag{24}$$

除了多项式基之外，我们还可以使用正交归一基，例如勒让德多项式

$$Y_n = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \beta_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \mathcal{P}_{k_1}(U_1)\mathcal{P}_{k_2}(U_2)\cdots\mathcal{P}_{k_n}(U_n). \tag{25}$$

(25) 中的每一项都由非负指标（k_1、k_2、.....、k_n）表征。因此，与 $j = \sum_i k_i = 1$ 在 Y_n 中对应的项包含了关于带时间延迟的线性项的信息。同样，与 $j = \sum_i k_i = 2$ 对应的项包含了关于带时间延迟的二阶非线性的信息。从这个角度看，对输出 $Y(t)$ 的估计，无非就是对系数 $\beta_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ 的估计。在储备池计算中，储备池第 i 个节点（物理节点或虚拟节点）的状态读出也可以展开为沃尔泰拉级数

$$\tilde{\tilde{X}}^{(i)}(t_n) = \sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \tilde{\tilde{\beta}}^{(i)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n} U_1^{k_1} U_2^{k_2} \cdots U_n^{k_n}. \tag{26}$$

因此，记忆容量和信息处理能力本质上是利用 $\tilde{\beta}^{(i)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ 及 $i \in [1, N]$，对 $\beta_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ 进行重构。这可以通过将 $\beta_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ 视为一个 $T + T(T-1)/2 + \cdots$ 维向量，并使用与读出权重相关联的矩阵 M 来实现

$$\beta_{k_1,k_2,\cdots,k_n} = M \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{\beta}}^{(1)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \\ \tilde{\tilde{\beta}}^{(2)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{\beta}}^{(N)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

MC 对应于对 $\beta_{k_1、k_2、\cdots、k_n}$（针对 $\sum_i k_i = 1$）的重构，而二阶 IPC 则对应于对 $\beta_{k_1、k_2、\cdots、k_n}$（针对 $\sum_i k_i = 2$）的重构。如果所有储备池状态彼此独立—

，我们可以在 $\beta_{k_1、k_2、\cdots、k_n}$中重构 N 个分量。在实际情况下，储备池状态并非彼此独立，因此我们只能在 $\beta_{k_1、k_2、\cdots、k_n}$中估计 $< N$ 个分量。

混沌时间序列数据预测

按照（5），我们对洛伦兹模型的时间序列数据进行预测。该模型是一个由（A_1（t） A_2（t） A_3（t））构成的三变量系统，其方程如下

$$\frac{dA_1}{dt} = 10(A_2 - A_1) \tag{28}$$

$$\frac{dA_2}{dt} = A_1(28 - A_3) - A_2 \tag{29}$$

$$\frac{dA_3}{dt} = A_1A_2 - \frac{8}{3}A_3. \tag{30}$$

参数的选择使模型呈现混沌动力学。与其他任务类似，我们为不同的物理节点应用不同的二进制噪声掩码， $\mathcal{B}_i^{(l)}$ （t） $\in\{-1,1\}$。由于输入时间序列是三维的，我们对 A_1、A_2和 A_3使用三个独立的掩码，因此， $l \in \{1,2,3\}$。经过掩码处理后，第 i个物理节点的输入为 $\mathcal{B}_i$（t） $\tilde{U}_i$（t） $= \mathcal{B}_i^{(1)}$（t） A_1（t） $+\mathcal{B}_i^{(2)}$（t） A_2（t） $+\mathcal{B}_i^{(3)}$（t） A_3（t）。然后，对输入进行归一化，使其范围变为 $[0,0.5]$，并将其作为输入电流施加。准备好输入后，我们便可像处理NARMA10任务那样，计算各个物理节点和虚拟节点的磁化动力学。需要指出的是，此处我们使用 $\{-1,1\}$ 的二进制掩码，而非其他任务中使用的 $\{0,1\}$。我们发现， $\{0,1\}$ 不适用于洛伦兹模型的预测，这可能是由于模型的对称性所致。

洛伦兹时间序列的真实数据采用龙格-库塔法生成，时间步为 $\Delta t = 0.025$。时间序列为 $t \in [-60,75]$， $t \in [-60,-50]$ 用于弛豫， $t \in (-50,0]$ 用于训练， $t \in (0,75]$ 用于预测。在训练步骤中，我们将输出设为 $\mathbf{Y} = (A_1(t+\Delta t)\ A_2(t+\Delta t)\ A_3(t+\Delta t))$，并据此计算输出权重。训练完成后，储备池计算学习映射关系 $(A_1(t)\ A_2(t)\ A_3(t)) \to (A_1($ $t+\Delta t)\ A_2(t+$

$\Delta t)$ $A_3(t+\Delta t))$。在预测步骤中，我们不再使用真实输入，而是使用估计数据 ($A_1(t)$ $A_2(t)$ $A_3(t)$)。储备池计算使用训练步骤中计算得到的固定输出权重，计算估计时间序列 ($A_1(t)$ $A_2(t)$ $A_3(t)$) 的时间演化。

基于响应函数的理论分析

我们考虑磁化场 $\mathbf{m}(\mathbf{x}\ t)$ 的朗道-利夫希茨-吉尔伯特方程，

$$\partial_t \mathbf{m}(\mathbf{x},t) = -\mathbf{m}\times\mathbf{h}_{\text{eff}} - \mathbf{m}\times(\mathbf{m}\times\mathbf{h}_{\text{eff}}) + \sigma(\mathbf{x},t)\mathbf{m}\times(\mathbf{m}\times\mathbf{m}_{\text{f}}) \tag{31}$$

我们将磁场和有效场均按饱和磁化强度归一化，记作 $\mathbf{m}\ =\mathbf{M}/M_s$ 和 $\mathbf{h}_{\text{eff}}\ =\mathbf{H}_{\text{eff}}/M_s$。此归一化适用于所有场，包括外场和各向异性场。我们还将电流密度归一化为 $\sigma(\mathbf{x}\ t)\ = J(\mathbf{x}\ t)/j_0$，其中电流密度为 $J(\mathbf{x})$，电流密度单位为 $j_0 = \frac{4M_s^2 e\pi a^2 D\mu_0}{\hbar P}$。我们在纳米接触处施加电流密度，

$$J(\mathbf{x},t) = 2j_c\tilde{U}(t)\sum_{i=1}^{N_p}\chi_a(|\mathbf{x}-\mathbf{R}_i|) \tag{32}$$

这里，$\chi_a(x)$ 是特征函数 $\chi_a(x)$：当 $x \le a$ 时为 $=1$，否则为 $\chi_a(x)\ =0$。

我们将式（31）的解展开为围绕均匀磁化 $\mathbf{m}(\mathbf{x}\ t)\ =(0,0,1)$ 的形式，其中不存在电流注入：

$$\mathbf{m}(\mathbf{x},t) = \mathbf{m}^0(\mathbf{x},t) + \epsilon\mathbf{m}^{(1)}(\mathbf{x},t) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{33}$$

此处，$\mathbf{m}^0(\mathbf{x}\ t)\ =(0,0,1)$，而 $\epsilon \ll 1$ 是一个小参数，对应于输入 $\sigma(\mathbf{x}\ t)$的幅值。一阶项对应于磁化强度对输入 σ的线性响应，而高阶项则描述非线性响应，例如 $\mathbf{m}^{(2)}(\mathbf{x}\ t)\ \sim\sigma(\mathbf{x}_1,t_1)\sigma(\mathbf{x}_2,t_2)$。由于我们的输入由自旋转矩驱动，且固定层磁化强度沿 x方向，$\mathbf{m}_f = \mathbf{e}_x$，因此一阶项 $\mathcal{O}(\epsilon)$中仅出现 m_x 和 m_y。偏离

m_z 相对于 $m_z = 1$ 的偏离出现在 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$中。因此，对于一阶项 $\mathbf{m}^{(1)}$，我们可以定义复磁化强度

$$m = m_x + im_y. \tag{34}$$

这里，我们将展示磁化强度可表示为响应函数 $G_{ij}(t)$。第 j 个物理节点的输入会影响第 i 个物理节点处的磁化强度，表示为

$$m_i(t) \ = \int d\tau G_{ii}(t-\tau)\sigma_i(\tau) + \sum_{i\neq j}\int d\tau G_{ij}(t-\tau)\sigma_j(\tau). \tag{35}$$

~第 j 个物理节点的输入表示为 $\sigma_j(t) = 2j_c\mathcal{B}_j(t)U_j(t)$。由于不同物理节点具有不同的掩码，这一点已在方法部分的"基于储备池计算的学习"中讨论。当波传播由交换相互作用主导时，同一节点的响应函数为

$$G_{ii}(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}e^{-\tilde{h}(\alpha+i)(t-\tau)}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{4(\alpha+i)(t-\tau)}}\right) \tag{36}$$

对于不同节点，则为

$$G_{ij}(t-\tau) = \frac{a^2}{2\pi}e^{-\tilde{h}(\alpha+i)(t-\tau)}e^{-\frac{|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|^2}{4(\alpha+i)(t-\tau)}}\frac{1}{2(\alpha+i)(t-\tau)}. \tag{37}$$

当波传播由偶极相互作用主导时，同一节点的响应函数为

$$G_{ii}(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}e^{-\tilde{h}(\alpha+i)(t-\tau)}\frac{-1+\sqrt{1+\frac{a^2}{(d/4)^2(\alpha+i)^2(t-\tau)^2}}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{(d/4)^2(\alpha+i)^2(t-\tau)^2}}} \tag{38}$$

而对于不同的节点，它变为

$$\begin{aligned} G_{ij}(t-\tau) =& \frac{a^2}{2\pi}e^{-\tilde{h}(\alpha+i)(t-\tau)} \\ &\times \frac{1}{(d/4)^2(\alpha+i)^2(t-\tau)^2\left(1+\frac{|\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j|^2}{(d/4)^2(\alpha+i)^2(t-\tau)^2}\right)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{39}$$

显然， $G_{ii}(0) \to 1$和 $G_{ij}(0) \to 0$，而 $G_{ii}(\infty) \to 0$和 $G_{ij}(\infty) \to 0$。

将磁化强度表示为式（35）的形式后，我们便可在输入 U 下计算储备池状态 X。随后，我们可以采用与“基于储备池计算的学习”中相同的方法估算输出 Y。与微磁模拟类似，我们通过 MC、IPC 和 NARMA10任务评估性能。

我们可以将分析扩展到式（33）展开中的高阶项。在补充材料的 B 节中，我们表明二阶项 $\mathbf{m}^{(2)}(\mathbf{x}\ t)$ 仅有 z 分量，而且只依赖于一阶项。因此，二阶项可表示为

$$m_z^{(2)}(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{2}\left((m_x^{(1)})^2 + (m_y^{(1)})^2\right). \tag{40}$$

为计算响应函数，我们对复磁化 $m(\mathbf{x}\ t)$ 的式（31）进行线性化，得到

$$\partial_t m(\mathbf{x},t) = \mathcal{L}m + \sigma(\mathbf{x},t), \tag{41}$$

其中，线性算子表示为

$$\mathcal{L} = \left(-\tilde{h} + \Delta\right)(\alpha + i). \tag{42}$$

在傅里叶空间中，线性化方程变为

$$\partial_t m_{\mathbf{k}}(t) = \mathcal{L}_k m_{\mathbf{k}} + \sigma_{\mathbf{k}}(t), \tag{43}$$

with

$$\mathcal{L}_k = -\left(\tilde{h} + k^2\right)(\alpha + i). \tag{44}$$

((43)) 的解为

$$m_{\mathbf{k}}(t) = \int d\tau e^{\mathcal{L}_k(t-\tau)}\sigma_k(\tau). \tag{45}$$

我们有半径为 a 的圆柱形输入 N_p，第 i 个输入位于 $\mathbf{R}_i$。输入函数表示为

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} \chi_a \left(|\mathbf{x} - \mathbf{R}_i| \right). \tag{46}$$

我们关注输入处的磁化强度 $m_i(t) = m(\mathbf{x} = \mathbf{R}_i, t)$，其为

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i =& \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_j \int d\tau e^{-\tilde{h}(\alpha+i)(t-\tau)} \int dk e^{-k^2(\alpha+i)(t-\tau)} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)} 2\pi a J_1(ka) \sigma_j(t) \\ =& \frac{a}{2\pi} \sum_j \int d\tau e^{-\tilde{h}(\alpha+i)(t-\tau)} \int dk e^{-k^2(\alpha+i)(t-\tau)} J_0\left(k|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|\right) J_1(ka) \sigma_j(t) \end{aligned} \tag{47}$$

对于同一节点，$|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| = 0$，我们可以将积分显式计算为式（36）。当$ka \ll 1$时，我们可以假设 $J_1(ka) \approx ka/2$，最终得到式（37）。

当材料厚度 d 较薄时，色散关系变为

$$\mathcal{L}_k = -\tilde{h}(\alpha + i) \sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{\tilde{h}}\right)\left(1 + \frac{k^2}{\tilde{h}} + \frac{\beta k}{\tilde{h}}\right)} \tag{48}$$

其中

$$\beta = \frac{d}{2}. \tag{49}$$

我们假设对于 $k \ll \beta\sqrt{\tilde{h}}$，则线性化算子变为

$$\mathcal{L}_k = -(\alpha + i)\left(\tilde{h} + \frac{kd}{4}\right) \tag{50}$$

从而得到式（38）和式（39）。

致谢：

S. M. 感谢东北大学的 CSRN。本工作中的数值仿真部分由日本产业技术综合研究所（AIST）的 AI Bridging Cloud Infrastructure（ABCI）以及信息

倡议中心（北海道大学，日本札幌）的超级计算机系统完成。

经费支持：

本工作获得了以下经费支持：S.M. 获得 JSPS 科研费项目（编号：21H04648、21H05000）资助；S.I. 获得 JST 的 PRESTO 项目（编号：JPMJPR22B2）资助；S.M. 获得 X-NICS 和日本文部科学省项目（编号：JPJ011438）资助；N.Y. 获得 JST FOREST 计划项目（编号：JPMJFR2140）资助。

作者贡献

S.M.、N.Y. 和 S.I. 构思了这项研究。S.I.、Y.K. 和 N.Y. 进行了仿真。N.Y. 和 S.I. 分析了结果。N.Y.、S.I. 和 S.M. 撰写了论文。所有作者均讨论了研究结果和分析。

利益冲突

作者声明，他们不存在任何竞争性财务利益。

数据和材料的可用性：

所有数据均可在正文或补充材料中获取。

NARMA10任务与MC/IPC之间的联系

在本节中，我们将讨论实现 NARMA10任务高性能所需的储备池计算特性。简而言之，NARMA10任务主要取决于对前九步数据的记忆以及

二阶非线性。我们通过两种方法讨论这些特性。第一种方法基于扩展动态模态分解（DMD）（52）和高阶动态模态分解（53）。第二种方法是对输入输出关系进行回归。我们将讨论这两种方法的细节。我们的结果与先前的研究一致；文献（54）讨论了记忆需求，文献（55）讨论了带时间延迟的二阶非线性项。

NARMA10任务基于以下离散微分方程，

$$Y_{n+1} = \alpha Y_n + \beta Y_n \sum_{i=0}^{9} Y_{n-i} + \gamma U_n U_{n-9} + \delta. \tag{51}$$

这里， U_n 是从均匀随机分布 $\mathcal{U}$(0, 0.5)中取出的时间步 n 的输入，而 Y_n 是输出。我们选择参数为 $\alpha = 0.3$、 $\beta = 0.05$、 $\gamma = 1.5$和 $\delta = 0.1$。

在第一种方法中，我们估计从状态变量$\mathbf{Y}_n$ =($Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$)到$\mathbf{Y}_{n+1}$ = ($Y_2, Y_3, \ldots, Y_{n+1}$)的转移矩阵A，得到

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_n. \tag{52}$$

我们可以扩展状态变量的概念，使其包含延迟数据以及带有时间延迟的输出多项式，如下所示

$$\mathbf{Y}_n = (Y_n, Y_{n-1}, \ldots, Y_1, Y_n Y_n, Y_n Y_{n-1}, \ldots, Y_1 Y_1)\,. \tag{53}$$

包含高阶动态模态分解（53）所引出的延迟项，同时将多项式非线性项用作扩展动态模态分解（52）中的多项式字典。这里，（53）包含所有带时间延迟的二阶项组合，$Y_{n-i_1} Y_{n-i_2}$ 其中整数 i_1 和 i_2 位于 $0 \leq i_1 \leq l_2 \leq n-1$中。我们可以直接在（53）中加入幂次更高的项。在 NARMA10任务中，输出 $\mathbf{Y}_{n+1}$ 也受到输入 $\mathbf{U}_n$的影响。因此，将扩展动态模态分解推广为包含控制项的形式，如（56）所示

$$\mathbf{Y}_{n+1} = (\mathbf{A}\ \mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_n \\ \mathbf{U}_n \end{pmatrix}, \tag{54}$$

其中，与输入对应的状态变量包含时间延迟和非线性，其表达式为

$$\mathbf{U}_n = (U_n, U_{n-1}, \ldots, U_1, U_n U_n, U_n U_{n-1}, \ldots, U_1 U_1)\,. \tag{55}$$

我们将广义转移矩阵表示为

$$\boldsymbol{\Xi} = (\mathbf{A}\ \mathbf{B})\,. \tag{56}$$

DMD 的思想是根据数据估计转移矩阵。具体做法是对状态变量取伪逆，如下所示：

$$\hat{\boldsymbol{\Xi}} = \mathbf{Y}_{k+1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{U}_k \end{pmatrix}^{\dagger}. \tag{57}$$

这里，$\mathrm{M}^{\dagger}$ 是矩阵 M 的伪逆。这实际上就是对式（54）左侧减去右侧所构成的代价函数进行最小二乘估计。我们可以加入蒂霍诺夫正则化项。

请注意，对于扩展动态模态分解（52）和高阶动态模态分解（53），转移矩阵$\boldsymbol{\Xi}$会进一步分解为与其特征值相关联的特征模态。这种分解实现了系统的降维。转移矩阵的估计也称为非线性系统辨识，特别是带外生输入的非线性自回归（NARX）。在本工作中，我们重点关注输入输出关系，而不讨论降维。对于时间序列预测，我们估计函数 $Y_{n+1} = f(Y_n, Y_{n-1}, \ldots, Y_1)$，因此不需要式（54）中的输入 U_n。即使在这种情况下，我们也可以对 $\boldsymbol{\Xi}$ （实际上是 A）进行类似的估计。这种估计方法用于下一代储备池计算（47）。

第二种方法基于状态变量 Y_n 关于输入 U_n的沃尔泰拉级数。在这种方法中，我们假设状态变量与其初始条件无关。于是，

我们可以将状态变量表示为

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}_n. \tag{58}$$

注意，$\mathbf{U}_n$ 包含输入及其带有时间延迟的多项式，如式（55）所示。与第一种方法类似，我们通过以下方式估计 G:

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{Y}_t \cdot \mathbf{U}_t^{\dagger}. \tag{59}$$

ˆ估计得到的 G 能告诉我们哪种时间延迟和非线性主导状态变量。

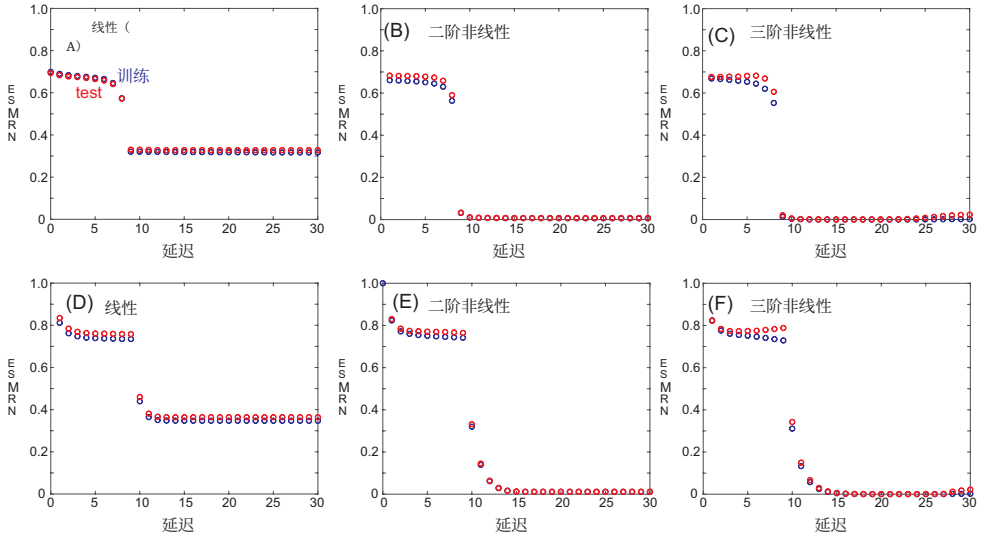


图 9：基于扩展动态模态分解的估计（A-C），以及基于沃尔泰拉级数的估计（D-F）。各案例的字典分别为：（A、D）一阶（线性）延迟项，（B、E）最高至二阶延迟项，以及（C、F）最高至三阶延迟项。

两种估计方法的结果如图 9 所示。两种方法都表明，$\approx$ 10 步记忆就足以实现高性能，增加记忆长度并不会进一步降低误差。二阶非线性项的归一化均方根误差较小，为 $\approx$0.01。加入三阶非线性后，误差有所降低，但在较长延迟下

会出现过拟合迹象，因为状态变量的数量过多。还应注意，即使加入线性项，归一化均方根误差也会变为 ≈ 0.35。这一结果表明，尽管归一化均方根误差为 ≈ 0.35 通常被认为代表良好的性能，但在这一误差水平下仍未学到数据的非线性特征。

A.1 作为线性和非线性读出沃尔泰拉级数的记忆容量和信息处理能力任务

在正文中的 (3) 和 (4) 式中，我们表明，输入区域的磁化强度可用响应函数表示。与第 n 步的输入 U_n 相对应的时间 t_n 处的磁化强度表示为

$$m(t_n) = a_n U_n + a_{n-1} U_{n-1} + \cdots, \tag{60}$$

其中，系数 a_n 可根据响应函数计算。我们首先考虑线性情形，随后将该表达式推广到非线性情形。由于我们使用虚拟节点，第 n 步的输入 U_n 会在时间段 $t \in [t_n, t_{n+1})$ 内持续，该时间段以 N_v 步离散化为（$t_{n,\,1}$，$t_{n,\,2}$，...，$t_{n,\,N_v}$），并乘以二进制噪声的滤波器（见图 2 和正文中的方法）。因此，磁化强度可由响应函数表示，$G(t-t')$ 的形式表达为

$$\begin{aligned} m(t_n) = \sum_i^{N_p} \big[& \left(G(0) + G(\theta) + \cdots G(\theta(N_v - 1))\right) \sigma_i(t_n) \\ & + \left(G(\theta N_v) + G(\theta(N_v + 1)) + \cdots G(\theta(2N_v - 1))\right) \sigma_i(t_{n-1}) \\ & + \cdots \big], \end{aligned} \tag{61}$$

其中，$\sigma_i(t_n) \propto U_n$ 是在时间 t_n 时第 i 个物理节点处的无量纲电流注入，与 U_n 成正比。因此，（61）得出（60）的表达式。我们的输入取自均匀随机分布。因此，储备池状态与

也就是磁化强度，以及用于学习记忆容量的（延迟）输入的内积为

$$\langle m(t_n), U_n \rangle = \sum_{n=1}^{T} m(t_n) U_n = a_n \langle U_n^2 \rangle + \mathcal{O}(1/T). \tag{62}$$

同样，磁化强度的方差等于输入的方差乘以与 $m(t_n)$相关的系数。

我们可以将记忆容量和信息处理能力任务写成矩阵形式:

$$\tilde{\mathbf{S}} \approx \mathbf{W} \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{S} \circ \mathbf{W}_{\text{in}}) \,. \tag{63}$$

˜这里，S 是与原始输入相关的矩阵，S 是延迟输入对应的矩阵。输出权重记为 W，而 W_{in} 是与二进制噪声掩码相关的矩阵。记忆容量和信息处理能力任务的˜目标是利用储备池状态 G · S 近似延迟输入 S。这里，储备池状态由响应函数 G 和记为 S 的输入表示。我们将延迟输入定义为 ˜S $\in \mathbb{R}^{K \times T}$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} U_n & U_{n+1} & U_{n+2} & \cdots \\ U_{n-1} & U_n & U_{n+1} & \cdots \\ U_{n-2} & U_{n-1} & U_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{64}$$

这里， T是时间序列的数量， K 是我们考虑的延迟总长度。第 i行表示 $i-1$ 延迟时间序列。用于计算储备池状态的输入 S $\in \mathbb{R}^{TN_v \times T}$表示为:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma(t_n) & \sigma(t_{n+1}) & \sigma(t_{n+2}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma(t_n) & \sigma(t_{n+1}) & \sigma(t_{n+2}) & \cdots \\ \sigma(t_{n-1}) & \sigma(t_n) & \sigma(t_{n+1}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma(t_{n-2}) & \sigma(t_{n-1}) & \sigma(t_n) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{65}$$

注意， $\sigma(t_n) \propto U_n$ 为常数。由于采用时分复用，每一行重复 N_v 次，然后在下一行对时间序列进行延迟。与输入滤波器 W_{in}相乘后，

输入被馈入响应函数。输入滤波器 $\mathbf{W}_{\text{in}} \in \mathbb{R}^{TN_v \times T}$ 由长度为 T 的常数行向量堆叠而成。N_v 种不同的行向量取自二进制噪声，然后将所得矩阵沿行方向重复 T 次。该输入与沃尔泰拉级数 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times TN_v}$ 的系数相乘

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G^{(1)}(0) & \cdots & G^{(1)}(\theta(N_v-1)) & G^{(1)}(\theta N_v) & \cdots & G^{(1)}(\theta(2N_v-1)) & \cdots \\ G^{(2)}(0) & \cdots & G^{(2)}(\theta(N_v-1)) & G^{(2)}(\theta N_v) & \cdots & G^{(2)}(\theta(2N_v-1)) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G^{(N)}(0) & \cdots & G^{(N)}(\theta(N_v-1)) & G^{(N)}(\theta N_v) & \cdots & G^{(N)}(\theta(2N_v-1)) & \cdots \end{pmatrix} \tag{66}$$

(63)表明，通过选择合适的 $\mathbf{W}$，我们可以得到 $\mathbf{G}$ 的规范形式。如果规范形式中 $\mathbf{W} \cdot \mathbf{G}$ 的左侧部分包含 $N \times N$ 单位矩阵，那么储备池就能重现延迟至 $N-1$ 的时间序列。这意味着矩阵 G 的秩，也就是线性无关的行数，是延迟步数的最大值。这与已知事实一致：记忆容量受储备池变量的独立分量数量限制（6）。

接下来，我们将磁化强度的沃尔泰拉级数扩展至包含非线性项的情形。磁化强度表示为

$$m(t_n) = a_n\sigma(t_n) + a_{n-1}\sigma(t_{n-1}) + \cdots + a_{n,n}\sigma(t_n)\sigma(t_n) + a_{n,n-1}\sigma(t_n)\sigma(t_{n-1}) + \cdots . \tag{67}$$

~延迟输入 $\mathbf{S}$ 改写为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} U_n & U_{n+1} & U_{n+2} & \cdots \\ U_{n-1} & U_n & U_{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_nU_n & U_{n+1}U_{n+1} & U_{n+2}U_{n+2} & \cdots \\ U_nU_{n-1} & U_{n+1}U_n & U_{n+2}U_{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{68}$$

~矩阵 $\mathbf{S}$ 包含输入序列的所有非线性组合（$U_n, U_{n+1}, \cdots$）。因此，我们应修改 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{G}$，以纳入非线性响应函数。注意，为了保证正交性，应使用勒让德多项式（或其他正交多项式）

而非幂多项式。不过，对于考察 NARMA10 的性能而言相关的二阶非线性（见 A 节），差异仅在于常数项（$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$）。由于我们减去了所有输入、输出和储备池状态的时间序列均值，这些常数项不会改变我们的结论。加入非线性项后，式（66）扩展为 $\mathsf{G} = (\mathsf{G}_{\mathrm{lin}}, \mathsf{G}_{\mathrm{nonl}})$。尽管如此，矩阵的秩仍至多为 N。这就是为什么 IPC 总和（包括所有线性和非线性延迟）的上限为独立储备池变量的数量。当 $\mathsf{G}_{\mathrm{nonl}} = \mathbf{0}$ 时，储备池只能记忆线性延迟项，但记忆容量 MC 可达到最大值 N。另一方面，当 $\mathsf{G}_{\mathrm{nonl}} \neq \mathbf{0}$ 时，MC 可能小于 N，但储备池仍可能具有有限的信息处理能力。

当读出为非线性时，我们将储备池状态变量用作

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{M} \circ \mathbf{M} \end{pmatrix}, \tag{69}$$

其中 $\circ$ 表示 Hadamard 积。如果 M 关于输入是线性的，则 G 具有如下结构：

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\mathrm{lin}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\mathrm{nonlin}} \end{pmatrix}. \tag{70}$$

在这种情况下，$\mathrm{rank}(\mathsf{G}) = \mathrm{rank}(\mathsf{G}_{\mathrm{lin}}) + \mathrm{rank}(\mathsf{G}_{\mathrm{nonlin}})$。

B 多变量学习

在正文中，我们仅使用 m_x 进行读出，如式 (13)-(15) 所示。读出是非线性的，同时包含 m_x 和 m_x^2的信息。在本节中，我们考虑线性读出，但在微磁模拟中使用 m_x 和 m_z 作为输出。我们先从仅使用 m_x的线性读出开始。MC 和信息处理能力任务的结果如图 10(a,b) 所示。对于 MC 任务，我们得到的性能与正文中的结果（图 3）相似。另一方面，图 10(a) 中信息处理能力任务的性能明显差于图 3(a) 中的结果

。这一结果表明，仅使用 m_x 的线性读出无法有效地学习非线性。请注意，在采用响应函数的理论模型中，仅使用 m_x进行线性读出时，信息处理能力恰好为零。差异源于正文中围绕 $\mathbf{m}^0 = (0, 0, 1)$ 进行的展开 (33)。严格来说，展开应围绕恒定输入 $\langle\sigma\rangle$ 下的 $\mathbf{m}^0$ 进行，其中输入纳米接触处的输入值是对时间取平均得到的。该参考态在空间上并不均匀，难以通过解析方法计算。由于这一影响，微磁模拟中的 m_x 包含微弱的非线性。

接下来，我们考虑包含 m_x 和 m_z的线性读出。如图 10(c,d) 所示，与仅包含 m_x 的线性读出相比（图 10(a,b)），m_z 携带非线性信息，并提升了 IPC 和 NARMA10 的学习性能。在$\alpha = 5 \times 10^{-4}$条件下，性能为 IPC ≈ 60，与正文中的结果（图 3(a,c)）相当，其中读出变量为（m_x, m_x^2）。此外，使用变量（m_x, m_z）也可在 NARMA10 任务中获得较高性能，NRMSE 为 ≈ 0.2。这些结果表明，在读出中加入 m_z 的效果与加入 m_x^2相似。

利用正文中包含响应函数的理论公式，可以理解m_x^2 和 m_z 之间的相似性。我们将展开式 (33) 推进到二阶，得到

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{m}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = &- \mathbf{m}^{(1)} \times \Delta\mathbf{m}^{(1)} - \alpha\mathbf{m}^{(1)} \times \left(\left(\tilde{h}\mathbf{m}^{(1)} - \Delta\mathbf{m}^{(1)}\right) \times \mathbf{e}_z\right) \\ &+ \sigma(\mathbf{x}, t)\mathbf{m}^{(1)} \times \mathbf{e}_y. \end{aligned} \tag{71}$$

这一结果表明，$\mathbf{m}^{(2)}$ 仅包含 z 分量，并受 $\mathbf{m}^{(1)}$支配；后者不含 z 分量。因此，$m_z^{(2)}$可计算为

$$m_z^{(2)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2}\left((m_x^{(1)})^2 + (m_y^{(1)})^2\right). \tag{72}$$

由于 m_x 和 m_y 携带相似的信息，因此读出中的 m_z 与读出中的 m_x^2具有相似的效果。

C 偶极相互作用下传播自旋波的速度

当磁化强度沿薄膜法线方向时，传播的自旋波称为磁静态前向体模，其色散关系可由以下方程（31）描述。

$$\omega(k) = \gamma\mu_0\sqrt{(H_0 - M_s)\left(H_0 - M_s\frac{1 - e^{-kd}}{kd}\right)}. \tag{73}$$

于是，可以得到 $k \sim 0$ 处的群速度，

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k = 0) = \frac{\gamma\mu_0 M_s d}{4}. \tag{74}$$

在由偶极相互作用驱动的静磁自旋波中，群速度与 M_s 和 d 均成正比。采用以下参数时，得到的结果为 $v_g \sim 200$ m/s：$\mu_0 H$ = 1.5 T、M_s = 1.0 $\times$ 10^6 A/m、d = 4 nm。参考文献（19）和（22）也采用了相同的估算方法来计算自旋储备池中信息传播的速度，并据此绘制了正文中的图7。

D 与文献相比的储备池计算缩放详情

本节介绍正文中图7的详细内容。文献（12、32–35、38、39）报告了光子储备池计算的 NARMA10 任务的 MC 和 NRMSE，文献（9、19、22、25、36、37、57、58）报告了自旋电子储备池计算的相关结果。表1和表2展示了不同长度尺度下光子储备池计算和自旋电子储备池计算的 MC 报告结果，这些结果绘于正文中的图7。

表1： 正文图7中不同长度尺度光子储备池计算的报告 t

报告	长度， L	时间间隔， τ_0	$v\tau_0$	N	MC
Duport 等人（32）	1.6 千米	8 μs	2.4 千米	50	21
Dejonckheere 等人 (33)	1.6 千米	8 μs	2.4 千米	50	37
Vincker 等人 (34)	230 米	1.1 μ秒	340 米	50	21
Takano 等人（12）	11 毫米	200 皮秒	60 毫米	31	1.5
Sugano 等人 (35)	10 毫米	240 皮秒	72 毫米	240	10

注：使用光速， $v = 3 \times 10^8$ 米/秒。

表2：报告 正文图7中使用的不同长度尺度自旋储库报告

报告	L	τ_0	v	$v\tau_0$	N	MC
Nakane 等人 (19)	5 μm	2 ns	2.4 km/s	4.8 μ米	72	21
Dale 等人 (22)	50 纳米	10 皮秒	200 米/秒	2 nm	100	35
本工作	500 纳米	1.6 纳秒	200 米/秒	320 纳米	64	26

注： v 是基于静磁自旋波并使用公式 74 计算得出的。

E 其他数据

E.1 N_v 和 N_p 对性能的影响

图 11 展示了 NARMA10 任务中 MC、信息处理能力和 NRMSE 对 N_v 和 N_p 的依赖关系。随着 N_v 和 N_p 增大，MC 和信息处理能力随之提高。随后，随着 N_v 和 N_p 增大，NARMA10 预测任务的表现也会变好。图 11 将固定 N_v= 8 时，不同 N_p 下 NARMA10 的 MC 和 NRMSE 与正文图 8 所示的其他储备池进行了比较。

E.2 交换相互作用

在正文中，我们使用偶极相互作用计算响应函数，如式 (38) 和 (39) 所示。本节展示使用式 (36) 和 (37) 所示的交换相互作用得到的结果。图 12 展示了结果。

参考文献

1. A. V. Chumak, V. I. Vasyuchka, A. A. Serga, B. Hillebrands, 《磁振子自旋电子学》。《自然·物理》11，453–461（2015）。

2. J. Grollier, D. Querlioz, K. Camsari, K. Everschor-Sitte, S. Fukami, M. D. Stiles，神经形态自旋电子学。《自然·电子学》3，360–370（2020年）。

3. A. Barman, G. Gubbiotti, S. Ladak, A. O. Adeyeye, M. Krawczyk, J. Gr¨afe, C. Adelmann, S. Cotofana, A. Naeemi, V. I. Vasyuchka 等，2021年磁振子学路线图。《物理学杂志：凝聚态》33，413001（2021年）。

4. H. Jaeger, H. Haas，驾驭非线性：预测混沌系统并节省无线通信中的能耗。《科学》304，78–80（2004年）。

5. J. Pathak, B. Hunt, M. Girvan, Z. Lu, E. Ott，基于数据对大规模时空混沌系统进行无模型预测：一种储备池计算方法。Phys. Rev. Lett. 120，024102（2018年）。

6. H. Jaeger, 《回声状态网络中的短期记忆》，技术报告《GMD第152号技术报告》，德国国家信息技术研究中心（2002年）。

7. W. Maass，T. Natschl¨ager，H. Markram, 《无需稳定状态的实时计算：一种基于扰动的神经计算新框架》。《神经计算》14，2531–2560（2002年）。

8. J. Torrejon, M. Riou, F. A. Araujo, S. Tsunegi, G. Khalsa, D. Querlioz, P. Bortolotti, V. Cros, K. Yakushiji, A. Fukushima, H. Kubota, S. Yuasa, M. D. Stiles, J. Grollier，利用纳米尺度自旋电子振荡器进行神经形态计算。《自然》547，428（2017年）。

9. S. Tsunegi, T. Taniguchi, K. Nakajima, S. Miwa, K. Yakushiji, A. Fukushima, S. Yuasa, H. Kubota，基于强制同步自旋转矩振荡器的物理储备池计算。《应用物理快报》114，164101（2019年）。

10. M. Rafayelyan, J. Dong, Y. Tan, F. Krzakala, S. Gigan，面向时空混沌系统预测的大规模光学储备池计算。《物理评论X》10, 041037（2020年）。

11. L. Larger, M. C. Soriano, D. Brunner, L. Appeltant, J. M. Gutierrez, L. Pesquera, C. R. Mirasso, I. Fischer，超越图灵的光子信息处理：储备池计算的光电实现。《光学快报》20, 3241–3249（2012年）。

12. K. Takano, C. Sugano, M. Inubushi, K. Yoshimura, S. Sunada, K. Kanno, A. Uchida，基于光子集成电路的紧凑型储备池计算。《光学快报》26, 29424–29439（2018年）。

13. M. Lukoˇseviˇcius, H. Jaeger，《循环神经网络训练的储备池计算方法》。《计算机科学评论》3，127-149（2009年）。

14. G. Van der Sande, D. Brunner, M. C. Soriano，《光子储备池计算的进展》。《纳米光子学》6，561–576（2017年）。

15. G. Tanaka, T. Yamane, J. B. H´eroux, R. Nakane, N. Kanazawa, S. Takeda, H. Numata, D. Nakano, A. Hirose，《物理储备池计算的最新进展：综述》。《神经网络》115，100 - 123（2019年）。

16. D. Prychynenko, M. Sitte, K. Litzius, B. Kr¨uger, G. Bourianoff, M. Kl¨aui, J. Sinova, K. Everschor-Sitte，磁斯格明子作为非线性电阻元件：储备池计算的一种潜在构建模块。《物理评论应用》9，014034（2018年）。

17. R. Nakane, G. Tanaka, A. Hirose，利用石榴石薄膜中激发的自旋波进行储备池计算。IEEE Access 6，4462-4469（2018年）。

18. T. Ichimura, R. Nakane, G. Tanaka, A. Hirose，关于自旋波储备池计算器件中信号检测器排列的数值探索。《IEEE Access》9，72637–72646（2021年）。

19. R. Nakane, A. Hirose, G. Tanaka，沿条带磁畴结构传播的自旋波及其在储备池计算中的应用。Phys. Rev. Research 3，033243（2021年）。

20. T. W. Hughes, I. A. D. Williamson, M. Minkov, S. Fan，作为模拟循环神经网络的波物理。《科学进展》5，eaay6946（2019年）。

21. G. Marcucci, D. Pierangeli, C. Conti，波的神经形态计算理论：利用怪波、色散激波和孤子进行机器学习。Phys. Rev. Lett. 125，093901（2020年）。

22. M. Dale, R. F. L. Evans, S. Jenkins, S. O'Keefe, A. Sebald, S. Stepney, F. Torre, M. Trefzer，利用薄膜铁磁器件进行储备池计算。arXiv:2101.12700（2021）。

23. L. Appeltant, M. C. Soriano, G. Van der Sande, J. Danckaert, S. Massar, J. Dambre, B. Schrauwen, C. R. Mirasso, I. Fischer，利用单个动态节点作为复杂系统进行信息处理。Nature Communications 2, 468（2011）。

24. A. R¨ohm, K. L¨udge，《多路复用网络：利用虚拟节点和真实节点进行储备池计算》。Journal of Physics Communications 2, 085007（2018年）。

25. T. Furuta, K. Fujii, K. Nakajima, S. Tsunegi, H. Kubota, Y. Suzuki, S. Miwa, 《利用磁性隧道结中的自旋动力学进行储备池计算的宏观磁仿真》。《物理评论应用》10, 034063（2018年）。

26. F. Stelzer, A. R¨ohm, K. L¨udge, S. Yanchuk，非共振时钟周期提升时延储备池计算的性能。《神经网络》124，158-169（2020年）。

27. J. Dambre, D. Verstraeten, B. Schrauwen, S. Massar，动力系统的信息处理能力。《科学报告》2，514（2012年）。

28. E. Bollt，如何解释储备池计算预测混沌这一令人惊讶的成功？与 VAR 和动态模态分解形成对照的通用机器学习动力系统。《混沌：非线性科学跨学科期刊》31，013108（2021）。

29. J. Slonczewski，电流激发自旋波。《磁学与磁性材料杂志》195，L261-L268（1999）。

30. L. Gonon, J.-P. Ortega，随机输入下储备池计算的通用性。《IEEE神经网络与学习系统汇刊》31，100–112（2019年）。

31. B. Hillebrands、J. Hamrle，《通过光学技术研究自旋波和自旋动力学》（约翰·威立父子有限公司，2007年）。

32. F. Duport、B. Schneider、A. Smerieri、M. Haelterman、S. Massar，全光储备池计算。《光学快报》20，1958–1964（2012年）。

33. A. Dejonckheere, F. Duport, A. Smerieri, L. Fang, J.-L. Oudar, M. Haelterman, S. Massar，基于吸收饱和的全光储备池计算机。《光学快报》22，10868（2014）。

34. Q. Vinckier, F. Duport, A. Smerieri, K. Vandoorne, P. Bienstman, M. Haelterman, S. Massar，基于相干驱动被动腔的高性能光子储备池计算机。Optica 2，438（2015）。

35. C. Sugano, K. Kanno, A. Uchida，基于光子集成电路并利用反馈的多台激光器储备池计算。《IEEE量子电子学精选主题期刊》26, 1500409（2020年）。

36. T. Kanao, H. Suto, K. Mizushima, H. Goto, T. Tanamoto, T. Nagasawa，自旋转矩振荡器阵列上的储备池计算。《物理评论应用》12, 042052（2019年）。

37. S. Watt, M. Kostylev, A. B. Ustinov, B. A. Kalinikos，基于时延复用的磁振子储备池计算机模型的实现。《物理评论应用》15, 064060（2021）。

38. F. Duport, A. Smerieri, A. Akrout, M. Haelterman, S. Massar，全模拟光子储备池计算机。《科学报告》6, 22381（2016）。

39. Y. Paquot, F. Duport, A. Smerieri, J. Dambre, B. Schrauwen, M. Haelterman, S. Massar，光电子储备池计算。《科学报告》2，287（2012年）。

40. J. Hamrle, O. Gaier, S. G. Min, B. Hillebrands, Y. Sakuraba, Y. Ando，通过布里渊光散射光谱学测定赫斯勒化合物的交换常数：以 Co2MnSi 为例。《物理学杂志D：应用物理》42，084005（2009年）。

41. T. Kubota, J. Hamrle, Y. Sakuraba, O. Gaier, M. Oogane, A. Sakuma, B. Hillebrands, K. Takanashi, Y. Ando，《$Co_2MnAl_xSi_{1-x}$ 赫斯勒化合物的结构、交换刚度和磁各向异性》。《应用物理学杂志》106，113907（2009年）。

42. C. Guillemard, S. Petit-Watelot, L. Pasquier, D. Pierre, J. Ghanbaja, J. C. Rojas-S´anchez, A. Bataille, J. Rault, P. Le F`evre, F. Bertran, S. Andrieu, 《Co_2 Mn基赫斯勒化合物的超低磁阻尼：自旋电子学的潜力材料》。《物理评论应用》11, 064009（2019年）。

43. C. Guillemard, W. Zhang, G. Malinowski, C. de Melo, J. Gorchon, S. Petit-Watelot, J. Ghanbaja, S. Mangin, P. Le F`evre, F. Bertran, S. Andrieu，通过设计 $Co_2MnAl_xSi_{1-x}$赫斯勒化合物这一模型体系，关联自旋极化、本征吉尔伯特阻尼与超快退磁。Advanced Materials 32, 1908357（2020年）。

44. V. E. Demidov, S. Urazhdin, S. O. Demokritov，直接观测并绘制自旋转矩纳米振荡器发射的自旋波。Nature Materials 9, 984–988（2010）。

45. M. Madami, S. Bonetti, G. Consolo, S. Tacchi, G. Carlotti, G. Gubbiotti, F. Mancoff, M. A. Yar, J. ˚Akerman，直接观测由自旋转移力矩诱导的传播自旋波。Nature Nanotechnology 6, 635–638（2011）。

46. S. Sani、J. Persson、S. M. Mohseni、Y. Pogoryelov、P. Muduli、A. Eklund、G. Malm、M. K¨all、A. Dmitriev、J. ˚Akerman，底部向上构建的多个纳米接触自旋转矩振荡器相互同步。《自然》通讯 4，2731（2013）。

47. D. J. Gauthier、E. Bollt、A. Griffith、W. A. Barbosa，下一代储备池计算。《自然》通讯 12，1–8（2021）。

48. S. A. Billings，《非线性系统辨识：时间、频率及时空域中的 NARMAX方法》（Wiley，2013）。

49. A. Vansteenkiste、J. Leliaert、M. Dvornik、M. Helsen、F. Garcia-Sanchez、B. Van Waeyen- berge，《mumax3 的设计与验证》。AIP Advances 4, 107133（2014年）。

50. G. Venkat、H. Fangohr、A. Prabhakar，《自旋波微磁学的吸收边界层》。《磁学与磁性材料杂志》450, 34 - 39（2018年）。磁振子自旋电子学展望。

51. A. Rodan, P. Tino，最小复杂度回声状态网络。《IEEE神经网络汇刊》22, 131-144（2011）。

52. Q. Li, F. Dietrich, E. M. Bollt, I. G. Kevrekidis，结合字典学习的扩展动态模态分解：Koopman算子的 data-driven adaptive spectral decomposition。《混沌：非线性科学跨学科期刊》27，103111（2017年）。

53. S. Le Clainche, J. Vega，高阶动态模态分解。《SIAM应用动力系统杂志》16, 882-925（2017年）。

54. T. L. Carroll，优化储备池计算机中的记忆。《混沌：非线性科学跨学科期刊》32, 023123（2022）。

55. T. Kubota, H. Takahashi, K. Nakajima，随机驱动动力系统信息处理的统一框架。Phys. Rev. Research 3，043135（2021）。

56. S. L. Brunton, J. N. Kutz，《数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制》（剑桥大学出版社，2019年）。

57. N. Akashi, T. Yamaguchi, S. Tsunegi, T. Taniguchi, M. Nishida, R. Sakurai, Y. Wakao, K. Nakajima，自旋电子学储备池中的输入驱动分岔与信息处理能力。Phys. Rev. Research 2, 043303（2020年）。

58. M. K. Lee, M. Mochizuki，斯格明子晶体中的自旋波储备池计算。《物理评论应用》18, 014074（2022年）。

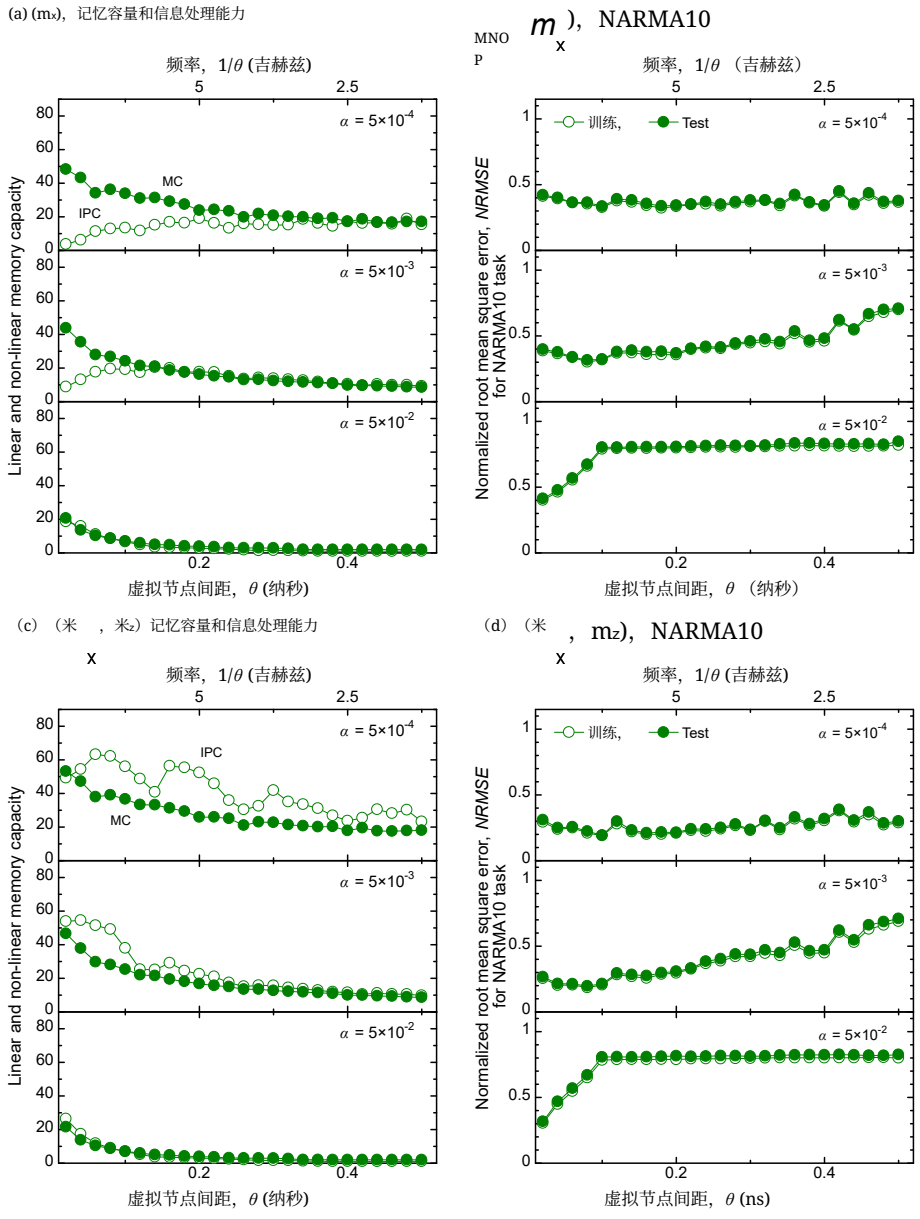


图10：使用微磁 Mumax3 仿真得到的不同参数组合下的储备池计算。线性记忆容量 MC 和非线性记忆容量 IPC 随 θ 的变化曲线，分别为仅使用线性 m_x 输出的情况 (a)，以及使用 m_x、m_z 的情况 (c)。NARMA10 任务的归一化均方根误差 NRMSE 随 θ 的变化曲线，分别为仅使用线性 m_x 输出的情况 (b)，以及使用 m_x、m_z 的情况 (d)。

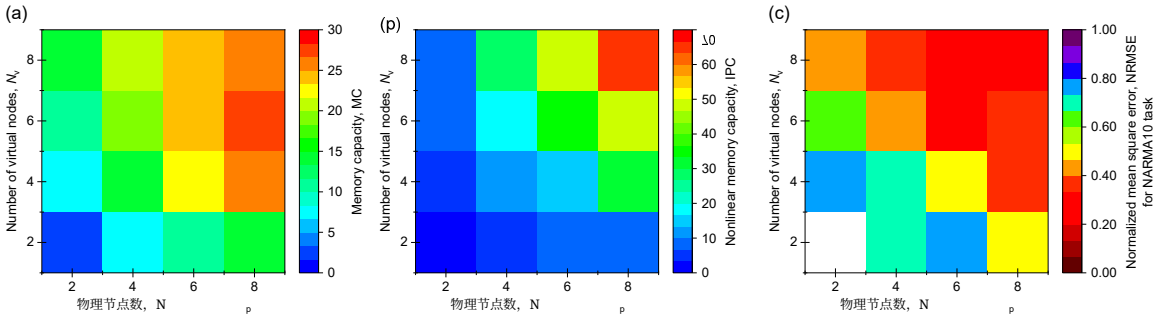


图 11：（a）记忆容量，MC；（b）非线性记忆容量，信息处理能力；（c）NARMA10任务的归一化均方根误差，NRMSE，随虚拟节点数和物理节点数变化的曲线。仿真中使用的参数为 $\alpha = 5 \times 10^{-4}, \theta = 0.2$ns。

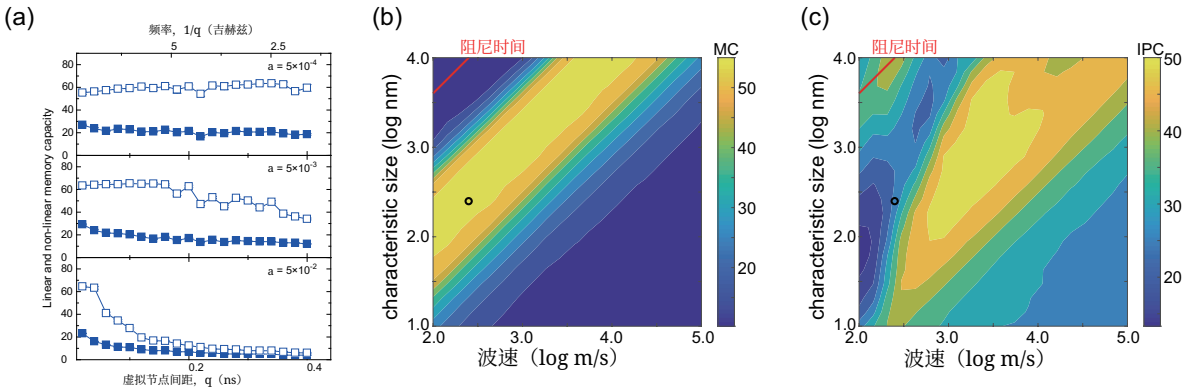


图 12：（a）采用响应函数法计算得到的交换相互作用的记忆容量 MC（实心符号）和非线性记忆容量 IPC（空心符号），随 θ 变化的函数关系，其中阻尼参数为不同的 α。（b）MC 和（c）IPC 随特征尺寸和波速变化的函数关系。