有限群的互相可置换积的广义Fitting高度与非可解长度*

Viachaslau I. Murashka[1,2] 和 Alexander F. Vasil'ev[3,2]

arXiv:2301.02199v1 [math.GR] 5 Jan 2023

摘要

有限群 G 的广义Fitting高度 $h^*(G)$ 是满足 $F_h^*(G) = G$ 的最小数 h，其中 $F_{(0)}^*(G) = 1$，而 $F_{(i+1)}^*(G)$ 是广义菲廷子群 $F^*(G/F_{(i)}^*(G))$ 的原像。设 p 是一个素数，$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{2h+1} = G$ 是最短的正规列；当 i 为奇数时，其因子 G_{i+1}/G_i 是 p-可解的（可能为平凡群）；当 i 为偶数时，其因子 G_{i+1}/G_i 是非阿贝尔单群的（非空）直积。于是，$h = \lambda_p(G)$ 称为群 G 的非-p-可解长度。我们证明，若有限群 G 是子群 A 和 B 的相互可置换积，则 $\max\{h^*(A)\ h^*(B)\} \leq h^*(G) \leq \max\{h^*(A)\ h^*(B)\} + 1$ 且 $\max\{\lambda_p(A)\ \lambda_p(B)\} = \lambda_p(G)$。此外，我们引入并研究了非 Frattini 长度。

关键词：有限群；广义菲廷子群；群的互相可置换积；广义Fitting高度；非-p-可解长度；Plotkin 根。

1 引言与主要结果

本文讨论的群均为有限群。E.I. Khukhro 和 P. Shumyatsky 引入并研究了群的两个有趣不变量：广义Fitting高度和非可解长度 [11–13]。前者是将众所周知的 Fitting 高度推广到所有群的类，后者则隐含地出现在 [8, 20] 中。

定义 1.1 (Khukhro, Shumyatsky)。(1) 有限群 G 的广义*Fitting*高度 $h^*(G)$ 是满足 $F_h^*(G) = G$ 的最小数 h，其中 $F_{(0)}^*(G) = 1$，而 $F_{(i+1)}^*(G)$ 是广义菲廷子群 $F^*(G/F_{(i)}^*(G))$ 的逆像。

(2) 设 p 为素数，$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{2h+1} = G$ 为最短的正规列，其中当 i 为奇数时，因子 G_{i+1}/G_i 是 p-可解的(可能是平凡的)；当 i 为偶数时，因子G_{i+1}/G_i 是非空(非空) 非阿贝尔单群的直积。于是，$h = \lambda_p(G)$ 称为群 G的非-p-可解长度。

(3) 回顾一下，$\lambda_2(G) = \lambda(G)$ 是群 G的非可解长度。

在 [12] E.I. Khukhro 和 P. Shumyatsky 的研究中，他们证明了一般情况下，因子化群的广义Fitting高度无法用其因子的广义Fitting高度来界定。非可解长度也存在同样的情况。

回顾一下，[1, 定义 4.1.1]若群 G 是其子群 A 和 B 的互相可置换积，即 $G = AB$与 B 的每个子群都可置换，且 A 与

[1]电子邮件：mvimath@yandex.ru[2]弗朗西斯克·斯科里纳戈梅利国立大学，白俄罗斯戈梅利[3]电子邮件：formation56@mail.ru

*由 BFFR Ф23РНФ-237 资助

A的每个子群都可置换。互相可置换子群的积是群论中一个非常有趣的课题（例如，参见 [1, 第 4]章）。

本文的主要结果是

定理1.1。 设群 G 是相互可置换子群 A 和 B的乘积。那么

(1) $\max\{h^*(A)\ h^*(B)\} \leq h^*(G) \leq \max\{h^*(A)\ h^*(B)\}+1$。(2) $\max\{\lambda_p(A)\ \lambda_p(B)\} = \lambda_p(G)$ 对任意素数 p。特别地，$\max\{\lambda(A)\ \lambda(B)\} = \lambda(G)$。

如果群 G 是可解的，那么 $h^*(G) = h(G)$是群 G的Fitting高度。

推论1.2 ([10])。 如果可解群 G 是相互可置换子群A 和 B的乘积，那么 $\max\{h(A)\ h(B)\} \leq h(G) \leq \max\{h(A)\ h(B)\}+1$。

例1.1。 注意， $\mathbb{S}_3$ 阶为3 的对称群是由阶分别为2 和3 的循环群 Z_2 和 Z_3 构成的互相可置换积。因此 $h^*(\mathbb{S}_3) = \max\{h^*(Z_2)\ h^*(Z_3)\}+1 = \max\{h(Z_2)\ h(Z_3)\}+1$。

2 函子方法

根据 B.I. Plotkin， [15]函子是一个函数 γ，它为每个群 G 指定其特征子群 $\gamma（G）$，并且对于任意同构 $f：\ G \to G^*$，都满足 $f（\gamma（G））= \gamma（f（G））$。

我们关注具有某些性质的函子：（$F1$）对于每个满同态 $f：\ G \to G^*$，均有 $f（\gamma（G））\subseteq \gamma（f（G））$。（$F2$）对于每个 $N \trianglelefteq G$，均有 $\gamma（N）\subseteq \gamma（G）$。（$F3$）对于每个 $N \trianglelefteq G$，均有 $\gamma（G）\cap N \subseteq \gamma（N）$。

注2.1。 (0) 函数F* 和 R_p 分别将每个群映射到其广义菲廷子群和 p-可解根，它们是函子的例子。众所周知，它们满足$(F1)$，$(F2)$，$(F3)$。

(1) 回顾一下，若一个函子 γ 满足$(F1)$、幂等(即$(\gamma(G)) = \gamma(G)$) 以及 $N \subseteq \gamma(G)$，则称其为 ***Plotkin*** 根；对每个 $\gamma(N) = N \trianglelefteq G$ *[5,* ***p.*** *28].*

(2) 满足$(F3)$ 的函子通常称为遗传的(不过，在群类理论中，同一个词的含义有所不同)。

(3) 函子 γ是遗传 ***Plotkin*** 根，当且仅当它满足（$F1$）、（$F2$）、（$F3$）。下面证明这一点。假设 γ 是遗传 ***Plotkin*** 根。我们只需证明它满足（$F2$）。若 $N \trianglelefteq G$，则 $\gamma(N)$ ***char*** $N \trianglelefteq G$。因此 $\gamma(N) \trianglelefteq G$。现在 $\gamma(N) = \gamma(\gamma(N)) \subseteq \gamma(G)$。由此，遗传 ***Plotkin*** 根满足（$F1$）、（$F2$）、（$F3$）。假设 γ满足（$F1$）、（$F2$）、（$F3$）。我们只需证明它是幂等的。由（$F3$）可得 $\gamma(G) = \gamma(G) \cap G \subseteq \gamma(\gamma(G)) \subseteq \gamma(G)$。因此 $\gamma(\gamma(G)) = \gamma(G)$。

(4) 将每个群 G 映射到其 ***Frattini*** 子群 $\Phi(G)$ 的函子 Φ 满足$(F1)$和 $(F2)$，但不满足 $(F3)$。(5) 如果 γ满足$(F2)$和$(F3)$，那么对于任意群 G和 $N \trianglelefteq G$， $\gamma(G) \cap N = \gamma(N)$。

引理 2.1. 如果 γ满足$(F1)$和$(F2)$，那么对于任意群G_1 和 G_2， $\gamma(G_1 \times G_2) = \gamma(G_1) \times \gamma(G_2)$。

证明。 由 $G_i \trianglelefteq G_1 \times G_2$可知，对于 $i \in \{1,2\}$，根据 $(F2)$ 有 $\gamma(G_i) \subseteq \gamma(G_1 \times G_2)$。注意，对于 $i \in \{1,2\}$，根据 $(F1)$ 有 $\gamma(G_1 \times G_2)G_i/G_i \subseteq \gamma((G_1 \times G_2)/G_i) = (\gamma(G_i) \times G_i)/G_i$。现在

$$\gamma(G_1 \times G_2) \subseteq (\gamma(G_1 \times G_2)G_2) \cap (\gamma(G_1 \times G_2)G_1) \subseteq$$
$$(\gamma(G_1) \times G_2) \cap (G_1 \times \gamma(G_2)) = \gamma(G_1) \times \gamma(G_2).$$

因此 $\gamma(G_1 \times G_2) = \gamma(G_1) \times \gamma(G_2)$。 □

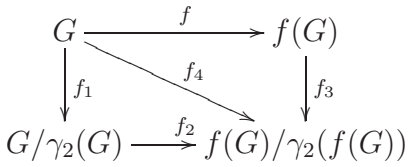
回顾一下， [15] 对于函子 γ_1 和 γ_2，上积 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 定义为

$$(\gamma_2 \star \gamma_1)(G)/\gamma_2(G) = \gamma_1(G/\gamma_2(G)).$$

命题 2.2。设 γ_1 和 γ_2 为函子。若 γ_1 和 γ_2 满足 $(F1)$ 和 $(F2)$，则 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足 $(F1)$ 和 $(F2)$。此外，若 γ_1 和 γ_2 还满足 $(F3)$，则 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足 $(F3)$。

证明。(1) $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足 $(F1)$。

设 $f\colon G \to f(G)$ 为一个满同态。由 $f(\gamma_2(G)) \subseteq \gamma_2(f(G))$ 可知，下图是交换图。



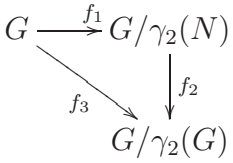
设 $X = \gamma_1(G/\gamma_2(G))$ 和 $Y = \gamma_1(f(G)/\gamma_2(f(G)))$。注意，根据 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 的定义，$(\gamma_2 \star \gamma_1)(G) = f_1^{-1}(X)$ 以及 $(\gamma_2 \star \gamma_1)(f(G)) = f_3^{-1}(Y)$。由于 γ_1 满足 $(F1)$，我们看到 $f_2(X) \subseteq Y$。因此 $X \subseteq f_2^{-1}(Y)$。现在 $(\gamma_2 \star \gamma_1)(G) \subseteq f_1^{-1}(f_2^{-1}(Y)) = f_4^{-1}(Y)$。所以

$$f((\gamma_2 \star \gamma_1)(G)) \subseteq f(f_4^{-1}(Y)) = f_3^{-1}(Y) = (\gamma_2 \star \gamma_1)(f(G)).$$

因此 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足（$F1$）。

(2) $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足 $(F2)$。

令 $N \trianglelefteq G$。由 $\gamma_2(N)$ char $N \trianglelefteq G$ 可得 $\gamma_2(N) \trianglelefteq G$。由于 γ_2 满足（$F2$），我们得出 $\gamma_2(N) \subseteq \gamma_2(G)$。因此，下图是交换图。



令 $X = \gamma_1(G/\gamma_2(N))$、$Y = \gamma_1(N/\gamma_2(N))$ 和 $Z = \gamma_1(G/\gamma_2(G))$。注意到 $(\gamma_2 \star \gamma_1)(G) = f_3^{-1}(Z)$ 且 $(\gamma_1 \star \gamma_2)(N) \subseteq f_1^{-1}(Y)$。由于 γ_1 满足（$F1$）和（$F2$），我们得出 $f_2(X) \subseteq Z$ 且 $Y \subseteq X$。现在

$$(\gamma_2 \star \gamma_1)(N) \subseteq f_1^{-1}(Y) \subseteq f_1^{-1}(X) \subseteq f_1^{-1}(f_2^{-1}(Z)) = f_3^{-1}(Z) = (\gamma_2 \star \gamma_1)(G).$$

因此 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足（$F2$）。

(3) 如果 γ_1 和 γ_2 也满足 $(F3)$，那么 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足 $(F3)$。

假设 γ_1 和 γ_2 满足 $(F2)$ 和 $(F3)$。令 $N \trianglelefteq G$。

由于 $N\gamma_2(G)/\gamma_2(G) \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G)/\gamma_2(G) \trianglelefteq (\gamma_2 \star \gamma_1)(G)/\gamma_2(G) = \gamma_1(G/\gamma_2(G))$，由注2.1中的 (5) 可知

$$\gamma_1((N\gamma_2(G) \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G))/\gamma_2(G)) = (N\gamma_2(G) \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G))/\gamma_2(G).$$

注意

$$\begin{aligned}(N\gamma_2(G) \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G))/\gamma_2(G) = \\ (N \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G))\gamma_2(G)/\gamma_2(G) \simeq (N \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G))/(N \cap \gamma_2(G)) \\ = (N \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G))/\gamma_2(N) \trianglelefteq N/\gamma_2(N).\end{aligned}$$

这意味着 $(N \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G))/\gamma_2(N) \subseteq \gamma_1(N/\gamma_2(N))$。因此 $N \cap (\gamma_2 \star \gamma_1)(G) \subseteq (\gamma_2 \star \gamma_1)(N)$，即 $\gamma_2 \star \gamma_1$ 满足 $(F3)$。 □

这里我们引入群 G 的高度 $h_\gamma(G)$，它对应于给定的函子 γ。

定义 *2.1.* 设 γ 是一个函子。γ-级数 G 定义如下：从 $\gamma_{(0)}(G) = 1$ 开始，然后递归地定义，$\gamma_{(i+1)}(G) = (\gamma_{(i)} \star \gamma)(G)$ 为 $\gamma(G/\gamma_{(i)}(G))$ 的原像。使 $\gamma_{(h)}(G) = G$ 成立的最小数 h 定义为 G 的 γ-高度 $h_\gamma(G)$。若不存在这样的数，则 $h_\gamma(G) = \infty$。

下面的引理可直接由命题 2.2 得出。

引理 2.3. 设 γ 是一个函子。若 γ 满足 $(F1)$ 和 $(F2)$，则对所有自然数 n，$\gamma_{(n)}$ 满足 $(F1)$ 和 $(F2)$。此外，若 γ 满足 $(F3)$，则对所有自然数 n，$\gamma_{(n)}$ 满足 $(F3)$。

引理 2.4. 设 γ 是一个函子。若 γ 满足 $(F1)$ 和 $(F2)$，则对于每个 $N \trianglelefteq G$，$h_\gamma(G/N) \leq h_\gamma(G) \leq h_\gamma(N) + h_\gamma(G/N)$。此外，若 γ 也满足 $(F3)$，则 $h_\gamma(N) \leq h_\gamma(G)$。

证明。注意，根据引理 2.3，$\gamma_{(n)}$ 对每个 n 都满足 $(F1)$ 和 $(F2)$。

由于 $\gamma_{(n)}$ 满足 $(F1)$，$G/N = \gamma_{h_\gamma(G)}(G)/N \leq \gamma_{(h_\gamma(G))}(G/N) \leq G/N$。因此，$\gamma_{(h_\gamma(G))}(G/N) = G/N$。于是 $h_\gamma(G/N) \leq h_\gamma(G)$。

由于 $\gamma_{(n)}$ 满足 $(F2)$，我们看到 $N = \gamma_{(h_\gamma(N))}(N) \subseteq \gamma_{(h_\gamma(N))}(G)$。注意，$h_\gamma(G/\gamma_{(h_\gamma(N))}(G)) \leq h_\gamma(G/N)$。因此，$h_\gamma(G) \leq h_\gamma(N) + h_\gamma(G/N)$。

假设 γ 也满足 $(F3)$。那么，根据引理 2.3，$\gamma_{(n)}$ 满足 $(F3)$。现在 $N = G \cap N = \gamma_{(h_\gamma(G))}(G) \cap N \subseteq \gamma_{(h_\gamma(G))}(N) \leq N$。因此，$\gamma_{(h_\gamma(G))}(N) = N$。于是 $h_\gamma(N) \leq h_\gamma(G)$。□

如果 $\gamma = \mathrm{F}^*$，那么对于任意群 G，$h_\gamma(G) = h^*(G)$。非-p-可解长度也可以借助函子来定义。这里，我们用 $R_p(G)$ 表示群G的 p-可解根。

引理2.5。设 $\mathrm{F}_{\mathrm{p}} = \overline{R_p \star \mathrm{F}^* \star R_p}$ 且 G 是一个非-p-可解群。那么，$\lambda_p(G)$ 是满足 $\mathrm{F}^{\mathrm{p}(i)}(G) = G$ 的最小自然 i。

证明。设 $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{2h+1} = G$ 是最短的正规列，其中对于奇数 i，因子 G_{i+1}/G_i 是 p- 可解的（可能为平凡群）；对于偶数 i，因子 G_{i+1}/G_i 是非空的非阿贝尔单群的直积。

注意到 $G_1 \leq R_p(G)$ 和 G_2/G_1 是拟幂零的。因此，$G_2R_p(G)/R_p(G)$ 是拟幂零的。这意味着 $G_2R_p(G)/R_p(G) \leq \mathrm{F}^*(G/R_p(G))$。因此，$G_2 \leq (R_p \star \mathrm{F}^*)(G)$。由于 G_3/G_2是 p-可解的，我们看到 $G_3(R_p \star \mathrm{F}^*)(G)/(R_p \star \mathrm{F}^*)(G)$ 是 p-可解的。因此，$G_3(R_p \star \mathrm{F}^*)(G)/(R_p \star \mathrm{F}^*)(G) \leq R_p(G/(R_p \star \mathrm{F}^*)(G))$。这意味着 $G_3 \leq \mathrm{F}_{\mathrm{p}}(G) = \mathrm{F}^{\mathrm{p}(1)}(G)$。

假设我们已经证明了 $G_{2i+1} \leq \mathrm{F}^{\overline{\mathrm{p}(i)}}(G)$。证明 $G_{2(i+1)+1} \leq \mathrm{F}^{\mathrm{p}(i+1)}(G)$。

由 $G_{2i+1} \leq \mathrm{F}^{\overline{\mathrm{p}(i)}}(G)$ 可得 $G_{2i+1} \leq \overline{(\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p)(G)}$。注意，$G_{2i+2}/G_{2i+1}$是拟幂零的。这意味着 $G_{2i+2}(\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p)(G)/(\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p)(G)$ 是拟幂零的。因此，$G_{2i+2} \leq ((\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p) \star \mathrm{F}^*)(G)$。由于 $G_{2(i+1)+1}/G_{2i+2}$是 p-可解的，我们可知 $G_{2(i+1)+1}(\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p \star \mathrm{F}^*)(G)/(\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p \star \mathrm{F}^*)(G)$ 是 p-可解的。因此，$G_{2(i+1)+1}(\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p \star \mathrm{F}^*)(G)/((\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p \star \mathrm{F}^*)(G) \leq R_p(G/(\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p \star \mathrm{F}^*)(G))$。这意味着 $G_{2(i+1)+1} \leq (\mathrm{F}_{\mathrm{p}(i)} \star R_p \star \mathrm{F}^* \star R_p)(G) = \mathrm{F}^{\mathrm{p}(i+1)}(G)$。

因此 $\lambda_p(G) \geq n$，其中 n是使 $\mathrm{F}^{\mathrm{p}(n)}(G) = n$成立的最小整数。由于 $R_p \star R_p = R_p$，我们看到 $\mathrm{F}^{\mathrm{p}(n)}(G)$ 有一个正规列 $1 \leq F_1 \leq F_2 \leq \cdots \leq F_{2n+1}$，其中当 i 为奇数时，因子 F_{i+1}/F_i 是 p-可解的（可能为平凡群）；当 i 为偶数时，因子 F_{i+1}/F_i 是非阿贝尔单群的一个（非空）直积。因此 $\lambda_p(G) \leq n$。故 $\lambda_p(G) = n$。□

现在我们可以估计直积子群以及次正规子群生成的 γ-高度：

定理 2.6。 设 γ 是一个函子，且对每个满足$(F1)$和$(F2)$的群 H ，都有 $\gamma(H) > 1$ 。

(1) 如果 $G = \times_{i=1}^{n} A_i$ 是其正规子群 A_i的直积，那么 $h_\gamma(G) =$最大$\{h_\gamma(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$。

(2) 设 $G = \langle A_i \mid 1 \le i \le n\rangle$ 由其正规子群 A_i生成。则 $h_\gamma(G) \le$最大$\{h_\gamma(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$。如果 γ满足 $(F3)$，那么 $h_\gamma(G) =$最大$\{h_\gamma(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$。

证明。 注意，根据命题 2.2，对于每个 n，$\gamma_{(n)}$ 都满足 $(F1)$ 和 $(F2)$。

(1) 根据引理 2.1，如果 $G = \times_{i=1}^{n} A_i$，则可推出 $\gamma_{(n)}(G) = \times_{i=1}^{n}\gamma_{(n)}(A_i)$。这意味着 $h_\gamma(G) =$最大$\{h_\gamma(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$。

(2) 假设 $G = \langle A_i \mid 1 \le i \le n\rangle$ 由其次正规子群 A_i, $h_1 =$max$\{h_\gamma(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$和 $h_2 = h_\gamma(G)$生成。由于 $\gamma_{(n)}$满足 $(F2)$，我们看到，对于 G 的每个次正规子群 N 以及每个 n，都有 $\gamma_{(n)}(N) \subseteq \gamma_{(n)}(G)$。现在

$$G = \langle A_i \mid 1 \le i \le n\rangle = \langle \gamma_{(h_1)}(A_i) \mid 1 \le i \le n\rangle \subseteq \gamma_{(h_1)}(G) \subseteq G.$$

因此 $\gamma_{(h_1)}(G) = G$。这意味着 $h_2 \le h_1$。

假设 γ满足 $(F3)$。根据命题 2.2，对于每个 n，$\gamma_{(n)}$ 满足 $(F3)$。由注2.1的 (5) 可得，对于 G的每个次正规子群 N，都有 $\gamma_{(n)}(G) \cap N = \gamma_{(n)}(N)$。现在 $A_i = A_i \cap G = A_i \cap \gamma_{(h_2)}(G) = \gamma_{(h_2)}(A_i)$。这意味着，对于每个 i，都有 $h_\gamma(A_i) \le h_2$。因此$h_1 \le h_2$。由此可得 $h_1 = h_2$。□

推论 2.7. 设群 $G = \langle A_i \mid 1 \le i \le n\rangle$ 由其次正规子群 A_i生成。那么 $h^*(G) = \max\{h^*(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$ 且 $\lambda_p(G) = \max\{\lambda_p(A_i) \mid 1 \le i \le n\}$。

3 群类方法

回顾一下，形成 是满足以下性质的群类 $\mathfrak{F}$ ： (a) 任一 $\mathfrak{F}$-群的同态像都是 $\mathfrak{F}$-群，并且 (b) 若 G/M 和 G/N 是 $\mathfrak{F}$-群，则 $G/(M \cap N) \in \mathfrak{F}$也成立。回顾一下，群 G 的 $\mathfrak{F}$-残余 是满足 $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$的 G 的最小正规子群$G^{\mathfrak{F}}$ 。

若一个形成满足 (a) 从 $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$ 可推出 $N \in \mathfrak{F}$ ，并且 (b) 群$G \in \mathfrak{F}$ 只要是正规 $\mathfrak{F}$-子群的乘积，则也满足该性质，则称其为 Fitting。回顾一下，群G的 $\mathfrak{F}$-根 $G_{\mathfrak{F}}$ 是最大的正规 $\mathfrak{F}$-子群。

所有拟幂零群的类 $\mathfrak{N}^*$ 和所有 p-可解群的类 $\mathfrak{S}^p$ 都是 Fitting 形成。

由 [3, IX、注 1.11 和定理 1.12] ， 以及 [3, IV、定理 1.8] ， 可得

引理 3.1. 设 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{H}$ 是非空的 *Fitting* 形成。则

$$\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}) = (G \mid G/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$$

是一个 *Fitting* 形成。

推论 3.2. 类 $\mathfrak{H}_p = (G \mid \mathrm{F}_p(G) = G)$ 是一个 *Fitting* 形成。

不难验证，对于一个 Fitting 形成 $\mathfrak{F}$， $\mathfrak{F}$-根可以视为一个满足 $(F1)$、$(F2)$ 和 $(F3)$ 的函子 γ。为方便起见，在此情形下记 h_γ为$h_{\mathfrak{F}}$。现在 $h^*(G) = h_{\mathrm{F}^*}(G) = h_{\mathfrak{N}^*}(G)$，并且对于一个非$p$-可解群 $\lambda_p(G) = h_{\overline{\mathrm{F}}_p}(G) = h_{\mathfrak{H}_p}(G)$。

引理 3.3。 设 $\mathfrak{F}$ 是一个 *Fitting* 形成。如果 $H \ne 1$ 和 $h_{\mathfrak{F}}(H) < \infty$，那么 $h_{\mathfrak{F}}(H^{\mathfrak{F}}) = h_{\mathfrak{F}}(H) - 1$。

证明。 我们证明：如果 $H \ne 1$ 和 $h_{\mathfrak{F}}(H) < \infty$，那么 $h_{\mathfrak{F}}(H^{\mathfrak{F}}) = h_{\mathfrak{F}}(H) - 1$。设 $h_{\mathfrak{F}}(H) = n$ 和 $h_{\mathfrak{F}}(H^{\mathfrak{F}}) = k$。则 $H_{\mathfrak{F}(n-1)}(H) < H$ 和 $H/H_{\mathfrak{F}(n-1)} \in \mathfrak{F}$。这意味着 $H^{\mathfrak{F}} \le H_{\mathfrak{F}(n-1)}$。由于 $H_{\mathfrak{F}(n-1)}$ 满足（$F3$），我们看到（$H^{\mathfrak{F}}$）$_{\mathfrak{F}(n-1)} = H^{\mathfrak{F}}$。因此 $k \le n-1$。

注意， $H^{\mathfrak{F}} = (H^{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{F}(k)} \le H_{\mathfrak{F}(k)}$。这意味着 $H/H_{\mathfrak{F}(k)} \in \mathfrak{F}$。因此 $k \ge n-1$。由此$k = n-1$。□

如果 $\mathfrak{F}$、$\mathfrak{H}$、$\mathfrak{K} \neq \emptyset$ 都是形成，那么根据 [3, IV，定理 1.8]，$(\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{K} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H}\mathfrak{K})$。这就是类 $\mathfrak{F}^n = \underbrace{\mathfrak{F}\ldots\mathfrak{F}}_{n}$ 是一个定义良好的形成。

引理 3.4. 对于自然数 n 和 *Fitting* 形成 $\mathfrak{F}$，有 $\mathfrak{F}^n = (G \mid h_{\mathfrak{F}}(G) \leq n)$。

证明。由引理 3.3 可知，若 $G \in (G \mid h_{\mathfrak{F}}(G) \leq n)$，则 $G^{\mathfrak{F}^n} = 1$。这意味着 $(G \mid h_{\mathfrak{F}}(G) \leq n) \subseteq \mathfrak{F}^n$。假设存在一个群 $G \in \mathfrak{F}^n$，使得 $h_{\mathfrak{F}}(G) > n$。注意，对于 G 的每个商群 $\overline{G} \neq 1$，都有 $\overline{G}^{\mathfrak{F}} \neq \overline{G}$。于是，由引理 3.3 得 $h_{\mathfrak{F}}(G^{\mathfrak{F}^n}) > 0$。这意味着 $G^{\mathfrak{F}^n} \neq 1$，矛盾。因此 $\mathfrak{F}^n \subseteq (G \mid h_{\mathfrak{F}}(G) \leq n)$。于是 $\mathfrak{F}^n = (G \mid h(G) \leq n)$。 □

In 在下一个引理中，我们回顾相互可置换积的关键性质

引理 3.5. 设群 $G = AB$ 是子群 A 和 B 的互相可置换积。那么

(1) *[1,* 引理 ***4.1.****10]* $G/N = (AN/N)(BN/N)$ 对于 G 的每个正规子群 N，都是子群 AN/N 和 BN/N 的相互可置换积。

(2) *[1,* 引理 ***4.3.3(4)****]* 若 N 是群 G 的极小正规子群，则 $\{N \cap A, N \cap B\} \subseteq \{1, N\}$。(3) *[1,* 引理 ***4.3.3(5)****]* 若 N 是 G 的极小正规子群，且包含于 A，并且 $B \cap N = 1$，则 $N \leq C_G(A)$ 或 $N \leq C_G(B)$。此外，若 N 不是循环群，则 $N \leq C_G(B)$。(4) *[1,* 定理 ***4.3.****11]* $A_G B_G \neq 1$。(5) *[1,* 推论 ***4.1.****26]* A' 和 B' 在 G 中是次正规子群。

回顾一下，$\pi(G)$ 是 $|G|$ 的所有素因子的集合，$\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$，而 $\mathfrak{N}_\pi$ 表示所有幂零 π-群组成的类。

引理 3.6。设 $\mathfrak{F}$ 是一个 *Fitting* 形成。假设对于每个由两个 $\mathfrak{F}$-子群构成的相互可置换积 G，都有 $h_{\mathfrak{F}}(G) \leq h + 1$。那么

$$\max\{h_{\mathfrak{F}}(A), h_{\mathfrak{F}}(B)\} - 1 \leq h_{\mathfrak{F}}(G) \leq \max\{h_{\mathfrak{F}}(A), h_{\mathfrak{F}}(B)\} + h$$

对于每个由子群 A 和 B 构成的相互可置换积 G，若 $h_{\mathfrak{F}}(A)\ h_{\mathfrak{F}}(B) < \infty$，则

证明。若 $A = 1$ 或 $B = 1$，则无需证明。设 $A, B \neq 1$。设群 $G = AB$ 是相互可置换子群 A 和 B 的积。由 $h_{\mathfrak{F}}(A)\ h_{\mathfrak{F}}(B) < \infty$ 可得 $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$。根据 IX，第 1.8] $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$ 引理。注意，由引理 3.5 的 (5)，A' 和 B' 在 G 中是次正规的。由于 $H^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq H^{\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}} \trianglelefteq H'$ 对每个 $\pi(\mathfrak{F})$-群 H 都成立，子群 $A^{\mathfrak{F}}$ 和 $B^{\mathfrak{F}}$ 在 G 中是次正规的。设 $C = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle^G = \langle \{(A^{\mathfrak{F}})^x \mid x \in G\} \cup \{(B^{\mathfrak{F}})^x \mid x \in G\} \rangle$。那么，根据定理 2.6 的 (2) 和引理 3.3

$$\begin{aligned} h_{\mathfrak{F}}(C) &= \max\left\{\{(h_{\mathfrak{F}}(A^{\mathfrak{F}})^x) \mid x \in G\} \cup \{(h_{\mathfrak{F}}(B^{\mathfrak{F}})^x) \mid x \in G\}\right\} \\ &= \max\{h_{\mathfrak{F}}(A^{\mathfrak{F}}), h_{\mathfrak{F}}(B^{\mathfrak{F}})\} = \max\{h_{\mathfrak{F}}(A), h_{\mathfrak{F}}(B)\} - 1. \end{aligned}$$

现在，根据引理 3.5 的 (1)，$G/C = (AC/C)(BC/C)$ 是 $\mathfrak{F}$-子群 AC/C 和 BC/C 的相互可置换积。这意味着，按照我们的假设，$h_{\mathfrak{F}}(G/C) \leq h + 1$。借助引理 2.4，我们看到

$$h_{\mathfrak{F}}(G) \leq h_{\mathfrak{F}}(C) + h_{\mathfrak{F}}(G/C) \leq \max\{h_{\mathfrak{F}}(A), h_{\mathfrak{F}}(B)\} - 1 + 1 + h = \max\{h_{\mathfrak{F}}(A), h_{\mathfrak{F}}(B)\} + h.$$

另一方面，根据定理 2.6 的 (2)，$h_{\mathfrak{F}}(G) \geq h_{\mathfrak{F}}(C) = \max\{h_{\mathfrak{F}}(A)\ h_{\mathfrak{F}}(B)\} - 1$。 □

引理 3.7。设 $\mathfrak{F}$ 是一个 *Fitting* 形成。假设群 G 是满足以下条件的最小阶群

(1) G 是由两个子群 A 和 B 构成的相互可置换积，且满足 $h_{\mathfrak{F}}(A) \geq h_{\mathfrak{F}}(B)$；(2) $h_{\mathfrak{F}}(G) = h_{\mathfrak{F}}(A) - 1$。则 G 有唯一极小正规子群 N，$N \leq A$ 且 $h_{\mathfrak{F}}(A/N) = h_{\mathfrak{F}}(A) - 1$。

证明。设 N是 G的一个极小正规子群。则由引理 3.5 的 (2) 得 $N \cap A \in \{N, 1\}$。

假设 $N \cap A = 1$。现在，根据引理 3.5 的 (1)， $G/N = (AN/N)(BN/N)$ 是群 AN/N 和 BN/N 的互相可置换积。根据我们的假设以及 $h_{\mathfrak{F}}(G) \geq h_{\mathfrak{F}}(G/N) \geq h_{\mathfrak{F}}(AN/N) = h_{\mathfrak{F}}(A)$, 得到矛盾。因此，对于 G的每个极小正规子群 N， $N \cap A = N$。

现在 $h_{\mathfrak{F}}(G) + 1 = h_{\mathfrak{F}}(A) > h_{\mathfrak{F}}(G) \geq h_{\mathfrak{F}}(G/N) \geq h_{\mathfrak{F}}(A/N) \geq h_{\mathfrak{F}}(A) - 1$。这意味着$h_{\mathfrak{F}}(G) = h_{\mathfrak{F}}(A/N) = h_{\mathfrak{F}}(A) - 1$。

如果 G 有两个极小正规子群 N_1 和 N_2，那么 $h_{\mathfrak{F}}(A/N_1) = h_{\mathfrak{F}}(A/N_2) = h_{\mathfrak{F}}(A) - 1$。这意味着，根据引理 3.4， $h_{\mathfrak{F}}(A) < h_{\mathfrak{F}}(A) - 1$，矛盾。因此， G 有一个唯一极小正规子群 N。□

4 定理 1.1(1)的证明

我们的证明依赖于 $\mathfrak{X}$-超中心的概念。若群 G 的主因子 H/K 在 G 中是 $\mathfrak{X}$-中心的，则

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}$$

（见 [18, 第 127–128] 页或 [7, 1, 定义 2.2]）。若正规子群 N 是群 G 的子群，则称其在 G 中是 $\mathfrak{X}$- 超中心的，如果 $N = 1$ 或 $N \neq 1$，且 G 中位于 N 以下的每个主因子都是 $\mathfrak{X}$-中心的。符号 $\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ 表示 G 的 $\mathfrak{X}$-超中心，即所有在 G 中 $\mathfrak{X}$-超中心的正规子群之积。根据 [18, 引理 14.1] 或 [7, 1, 定理 2.6]，$\mathrm{Z}_{\mathfrak{X}}(G)$ 是 G 的最大正规 $\mathfrak{X}$-超中心子群。若 $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ 是所有幂零群构成的类，则 $\mathrm{Z}_{\mathfrak{N}}(G) = \mathrm{Z}_{\infty}(G)$ 是 G 的超中心。

引理 4.1. 设 n为一个自然数。则 $(\mathfrak{N}^*)^n = (G \mid h^*(G) \leq n) = (G \mid G = \mathrm{Z}_{(\mathfrak{N}^*)^n}(G))$。

证明。 第一部分由引理 3.4 得出。众所周知，所有拟幂零群构成的类是一个组成（或 Baer-局部，或可解饱和的）形成（见 [2, 例 2.2.17]）。根据 [18,定理 7.9] $(\mathfrak{N}^*)^n$ 是一个组成形成。现在，由 [7, 1, 定理 2.6]可得 $(\mathfrak{N}^*)^n = (G \mid G = \mathrm{Z}_{(\mathfrak{N}^*)^n}(G))$。□

对于 G 的正规截面 H/K，子群 $C_G^*(H/K) = HC_G(H/K)$ 称为内自同构诱导子（见 [2, 定义 1.2.2]）。它是 G 中所有在 H/K上诱导内自同构的元素组成的集合。由广义菲廷子群的定义可知，它是所有主因子的内自同构诱导子的交。

引理 4.2. 设 N 是群 G的正规子群。若 N 是由同构的单群构成的直积，且 $h^*(G/C_G^*(N)) \leq k - 1$，则 $\mathrm{F}_{(k)}^*(G/N) = \mathrm{F}_{(k)}^*(G)/N$。

证明. 假设 $h^*(G/C_G^*(N)) \leq k - 1$。令 $F/N = \mathrm{F}_{(k)}^*(G/N)$。则 $\mathrm{F}_{(k)}^*(G) \subseteq F$。现在 $F/C_F^*(N) \simeq FC_G^*(N)/C_G^*(N) \trianglelefteq G/C_G^*(N)$。因此 $h^*(F/C_F^*(N)) \leq k - 1$。这意味着，对于 F中位于 N以下的每个主因子 H/K，都有 $h^*(F/C_F^*(H/K)) \leq k - 1$。因此，对于 F中位于 N以下的每个主因子 H/K，都有 $(H/K) \rtimes (F/C_F(H/K)) \in (\mathfrak{N}^*)^k$。这意味着 $N \leq \mathrm{Z}_{(\mathfrak{N}^*)^k}(F)$。由引理 4.1， $F \in (\mathfrak{N}^*)^k$。所以 $F \subseteq \mathrm{F}_{(k)}^*(G)$。因此 $\mathrm{F}_{(k)}^*(G) = F$。□

引理 4.3. 如果群 $G = AB$ 是由相互可置换的拟幂零子群A 和 B构成的乘积，那么 $h^*(G) \leq 2$。

证明. 根据引理 4.1，要证明此引理，只需证明：如果群 $G = AB$ 是由相互可置换的拟幂零子群 A 和 B构成的乘积，那么 $G \in (\mathfrak{N}^*)^2$。反设不然。设 G 是一个最小阶反例。

(1) G 有唯一极小正规子群 N，且 $G/N \in (\mathfrak{N}^*)^2$。

注意，根据引理 3.5 的 (1)， G/N 是拟幂零子群（AN/N）与（BN/N）的互相可置换积。因此，根据我们的假设， $G/N \in (\mathfrak{N}^*)^2$。由于 $(\mathfrak{N}^*)^2$ 是一个形成，我们可知 G 有唯一极小正规子群。根据引理 3.5 $A_G B_G \neq 1$ 的 (4)，不失一般性，我们可以假设 G 有一个极小正规子群 $N \leq A$。

(2) $N \leq A \cap B$。

假设 $N \cap B = 1$。根据引理 3.5 的 (3)，则 $A \leq C_G(N)$ 或 $B \leq C_G(N)$。若 $A \leq C_G(N)$，则 $N \rtimes G/C_G(N) \simeq N \rtimes B/C_B(N) \in (\mathfrak{N}^*)^2$。若 $B \leq C_G(N)$，则 $N \rtimes G/C_G(N) \simeq N \rtimes A/C_A(N) \in (\mathfrak{N}^*) \subseteq (\mathfrak{N}^*)^2$ 根据 [2, 推论 2.2.5]。两种情况下 $N \leq Z_{(\mathfrak{N}^*)^2}(G)$。这意味着 $G \in (\mathfrak{N}^*)^2$, , 矛盾。现在 $N \cap B \neq 1$。因此，根据引理 3.5 的 (2)，$N \leq A \cap B$。

(3) N 是非阿贝尔的。

假设 N 是阿贝尔群。由于 A 是拟幂零群，我们可知 $A/C_A(N)$ 是一个 p-群。类似地，$B/C_B(N)$ 是一个 p-群。注意， $A/C_A(N) \simeq AC_G(N)/C_G(N)$，且 $B/C_B(N) \simeq BC_G(N)/C_G(N)$。由 $G = AB$ 可得， $G/C_G(N)$ 是一个 p-群。由于 N 是 G 的一个主因子，我们可知 $G/C_G(N) \simeq 1$。因此， $N \leq Z_\infty(G) \leq Z_{(\mathfrak{N}^*)^2}(G)$。于是， $G \in (\mathfrak{N}^*)^2$, , 矛盾。这意味着 N 是非阿贝尔群。

(4) 最终矛盾。

现在， N 是 A 的极小正规子群的直积。由于 A 是拟幂零群，我们可知 A 的每个元素在 A 的每个极小正规子群上诱导一个内自同构。因此， A 的每个元素在 N 上诱导一个内自同构。类似地， B 的每个元素在 N 上诱导一个内自同构。由 $G = AB$ 可得， G 的每个元素在 N 上诱导一个内自同构。因此， $NC_G(N) = G$ 或 $G/C_G(N) \simeq N$。现在 $N \rtimes (G/C_G(N)) \in (\mathfrak{N}^*)^2$。这意味着 $N \leq Z_{(\mathfrak{N}^*)^2}(G)$。因此， $G \in (\mathfrak{N}^*)^2$ 且 $h^*(G) \leq 2$，最终得出矛盾。

□

定理 *1.1(1)* 的证明。 设群 G 是子群 A 和 B 的互相可置换积。由定理 2.6 和引理 4.3 可得

$$\max\{h^*(A), h^*(B)\} - 1 \leq h^*(G) \leq \max\{h^*(A), h^*(B)\} + 1.$$

假设 $\max\{h^*(A)\ h^*(B)\} - 1 = h^*(G)$。不失一般性，设 $h^*(A) = h^*(G) - 1$。我们可以假设群 G 是具有这些性质的最小阶群。那么，由引理 3.7， G 有唯一极小正规子群 N， $N \leq A$ 且 $h^*(A/N) = h^*(A) - 1$。

假设 $h^*(A/C_A^*(N)) < h^*(A) - 1$。那么

$$F^*_{(h^*(A)-1)}(A/N) = F^*_{(h^*(A)-1)}(A)/N < A/N$$

由引理 4.2。也就是说， $h^*(A) = h^*(A/N)$，这与假设矛盾。因此， $h^*(A/C_A^*(N)) = h^*(A) - 1$。

由引理 3.5 的 (1) 以及 $A/C_A^*(N) \simeq AC_G^*(N)/C_A^*(N)$， $G/C_G^*(N) = (AC_G^*(N)/C_G^*(N))(BC_G^*(N)/C_G^*(N))$ 是子群 $AC_G^*(N)/C_G^*(N)$ 和 $BC_G^*(N)/C_G^*(N)$ 的互相可置换积。由我们的假设可知， $h^*(G/C_G^*(N)) \geq h^*(A/C_A^*(N)) = h^*(A) - 1$。注意， $F^*(G) \leq C_G^*(N)$。现在， $h^*(G) - 1 = h^*(G/F^*(G)) \geq h^*(G/C_G^*(N)) \geq h^*(A/C_A^*(N)) = h^*(A) - 1$。这意味着 $h^*(G) \geq h^*(A)$，从而得出最终矛盾。

□

5 定理 1.1(2) 的证明

引理 5.1。 设 p 是一个素数，且 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p$。若群 $G = AB$ 是相互可置换的 $\mathfrak{H}$-子群 A 和 B 的乘积，则 $G \in \mathfrak{H}$。

证明。 反设结论不成立。设 G 是一个最小阶反例。

(1) G 有唯一极小正规子群 N， $G/N \in \mathfrak{H}$，且 N 不是 p-可解的。

注意到，根据引理 3.5 的 (1)， G/N 是由 $\mathfrak{H}$-子群 (AN/N) 和 (BN/N) 构成的互相可置换积。因此，根据我们的假设， $G/N \in \mathfrak{H}$。由于 $\mathfrak{H}$ 是一个形成，我们可知 G

有唯一极小正规子群。根据引理 3.5 $A_GB_G \neq 1$ 的 (4)，不失一般性，我们可以假设 G 有一个极小正规子群 $N \leq A$。

若 N 是 p-可解的，则 $\mathbf{F}_p(G)/N = \mathbf{F}_p(\overline{G}/N) = G$，即 $\mathbf{So}\,\mathbf{F}_p(G) = G$。因此 $G \in \mathfrak{H}$，矛盾。

(2) $N \leq A \cap B$。

假设 $N \cap B = 1$。注意，由 (1) 可知 N 不是循环的。由引理 3.5 的 (3) 得 $B \leq C_G(N)$。因此，根据推论 2.2，$N \rtimes G/C_G(N) \simeq N \rtimes A/C_A(N) \in \mathfrak{H}$ [2,。5]。这意味着$N \leq \mathbf{Z}_{\mathfrak{H}}(G)$。因此 $G \in \mathfrak{H}$，矛盾。现在 $N \cap B \neq 1$。因此，由引理 3.5 的 (2) 得 $N \leq A \cap B$。

(4)最终矛盾。

由于 N 是 G 的唯一极小正规子群且为非阿贝尔群，我们看到 $C_G(N) =$1。因此 $C_A(N) = C_B(N) = 1$。于是 $R_p(A) = R_p(B) = 1$。特别地，$\mathbf{F}(A) = \mathbf{F}(B) = 1$。注意，$A$ 的所有极小正规子群都包含在 N中。对于 B，情况相同。因此$N =\mathbf{F}^*(A) = \mathbf{F}^*(B)$。所以 G/N 是若干 p-可解群的互相可置换积。由于所有 p-可解群组成的类在以 p-可解群扩张时封闭，根据引理 3.5 的 (1) 和 (4)，G/N 是 p-可解的。由 $N \leq \mathbf{F}^*(G)$ 可得 $G \in \mathfrak{H}$，矛盾。□

定理 *1.1(2)* 的证明。设 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p$ 和群 G 是子群 A 与 B 的互相可置换积。首先，我们将证明 $\max\{h_{\mathfrak{H}}(A)\ h_{\mathfrak{H}}(B)\} = h_{\mathfrak{H}}(G)$。

由引理 3.6 和 4.3 可得

$$\max\{h_{\mathfrak{H}}(A), h_{\mathfrak{H}}(B)\} - 1 \leq h_{\mathfrak{H}}(G) \leq \max\{h_{\mathfrak{H}}(A), h_{\mathfrak{H}}(B)\}.$$

假设对于某个互相可置换积 G，其中 A 和 B，有 $\max\{h_{\mathfrak{H}}(A)\ h_{\mathfrak{H}}(B)\} - 1 = h_{\mathfrak{H}}(G)$。假设 G 是具有此性质的阶最小的群。不失一般性，设 $h_{\mathfrak{H}}(A) =h_{\mathfrak{H}}(G) - 1$。于是，由引理 3.7，$G$ 有唯一极小正规子群 N，$N \leq A$ 和 $h_{\mathfrak{H}}(A/N) =h_{\mathfrak{H}}(A) - 1$。

若 N 是 p-可解的，则 $R_p(A/N) = R_p(A)/N$。这意味着 $\mathbf{F}_p(A/N) =\mathbf{F}_p(A)/N$。因此$h_{\mathfrak{H}}(A/N) = h_{\mathfrak{H}}(A)$，矛盾。

这意味着 $R_p(G) = 1$。注意到现在 N 是一个单非阿贝尔群。由于 N 是 G的唯一极小正规子群，我们看到 $N = \mathbf{F}^*(G)$。现在 $h_{\mathfrak{H}}(G/N) = h_{\mathfrak{H}}(G) - 1$。因此

$$h_{\mathfrak{H}}(G) - 1 = h_{\mathfrak{H}}(G/N) \geq h_{\mathfrak{H}}(A/N) = h_{\mathfrak{H}}(A) - 1.$$

因此 $h_{\mathfrak{H}}(G) \geq h_{\mathfrak{H}}(A)$，矛盾。

我们证明了 $\max\{h_{\mathfrak{H}}(A)\ h_{\mathfrak{H}}(B)\} = h_{\mathfrak{H}}(G)$。

设 G 是群 A 和 B的互相可置换积。若 A、B 是 p-可解的，则由引理 3.5 的(1)和(4)，G 是 p-可解的。因此 $\lambda_p(G) = \lambda_p(A) = \lambda_p(B) = 0$。现在假设子群 A、B 中至少有一个不是 p-可解的。则由引理 3.5 的(1)和(4)，G 不是 p-可解的。不失一般性，设 $h_{\mathfrak{H}}(A) \geq h_{\mathfrak{H}}(B)$。因此 A 不是 p-可解的。我们证明了 $h_{\mathfrak{H}}(A) = h_{\mathfrak{H}}(G)$。注意到，如果 B 不是 p-可解的，则由引理 2.5，$h_{\mathfrak{H}}(G) = \lambda_p(G)$，$h_{\mathfrak{H}}(A) = \lambda_p(A)$，$h_{\mathfrak{H}}(B) = \lambda_p(B)$；否则 $0 = \lambda_p(B) < 1 = h_{\mathfrak{H}}(B) \leq h_{\mathfrak{H}}(A) = \lambda_p(A)$。因此 $\max\{\lambda_p(A)\ \lambda_p(B)\} = \lambda_p(G)$。□

6 非 Frattini 长度

Frattini 子群 $\Phi(G)$ 在群类理论中发挥着重要作用。可解群的菲廷子群的一个有用性质是，它严格大于同一群的 Frattini 子群。请注意，广义菲廷子群在每个群中都非平凡，但有些群的广义菲廷子群与 Frattini 子群重合。因此，下面定义的长度似乎颇有意义。

定义 6.1. 设 $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_{2h} = G$ 是最短的正规列，其中对偶数 i，即使 $G_{i+1}/G_i \leq \Phi(G/G_i)$，而对奇数 i，因子 G_{i+1}/G_i 是单群˜的（非空）直积。则 $h = h(G)$ 称为群 G 的非 *Frattini* 长度。

˜注意，如果 G 是可解群，那么 $h(G) = h(G)$。促使我们研究这一˜长度的另一个原因，是 P. Schmid [16] 和 L.A. Shemetkov [17, 在定义 7.5] 中引入的 Fitting 子群 F(*G*) 的推广，其定义如下：

$$\Phi(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G) \text{ and } \tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G)).$$

˜P. F¨orster [4] 证明，F(*G*) 可定义为：

$$\Phi(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G) \text{ and } \tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G) = \mathrm{F}^*(G/\Phi(G)).$$

˜ ˜ ˜设 Φ 和 F 是两个函子，它们分别将 Φ(*G*)和 F(*G*)赋予每个群 G。那么 F $= \Phi \star \mathrm{F}^*$。众所周知， Φ满足（$F1$）和（$F2$）。因此，由命题 2.2 可知，F 满足（$F1$）和（$F2$）。

注意， Φ(G/Φ(G)) $\simeq 1$。类比引理2.5的证明可以证明，对于每个群 G，群 G 的˜非 Frattini 长度 $h(G)$与$h_{\tilde{\mathrm{F}}}(G)$相同。下一个定理揭示了非 Frattini 长度与广义Fitting高度之间的联系。

˜ ˜**定理6.1.** 对于任意群 G，有 $h(G) \leq h^*(G) \leq 2h(G)$。存在一个群 H，使得$h(H) = n$，且对于任意自然数 n， $h^*(H) = 2n$。

˜证明. 由于 Φ(G) 和 Soc(G/Φ(G)) 是拟幂零的，我们得到 F*(G) $\leq$ F(G) $\leq \mathrm{F}^*_{(2)}(G)$。

˜ ˜现在 $\mathrm{F}^*_{(n)}(G) \leq \mathrm{F}^{(n)}(G) \leq \mathrm{F}^*_{(2n)}(G)$。因此，如果 $\mathrm{F}^{(n)}(G) = G$，那么 $\mathrm{F}^*_{(n)}(G) \leq G$ 且 $\mathrm{F}^*_{(2n)}(G) = G$。˜ ˜这意味着 $h(G) \leq h^*(G) \leq 2h(G)$。

设 K 是一个群， K_1 同构于 $\mathbb{A}_5$ 与 K 的正则花环积。注意，它的基底 B 是 K_1 的唯一极小正规子群，并且是非阿贝尔的。根据 [6], ，存在一个 Frattini $\mathbb{F}_3K_1$-模 A，它对 K_1 是忠实的；并且存在一个 Frattini扩张$A \rightarrowtail K_2 \twoheadrightarrow K_1$，使得 $A \overset{K_1}{\simeq} \Phi(K_2)$ 且 $K_2/\Phi(K_2) \simeq K_1$。

˜ ˜令 K_2表示为 f(K)。现在 f(K)/F(f (K)) $\simeq K$。根据 $h_{\tilde{\mathrm{F}}} = h$的定义可得˜ ˜， $h(\mathrm{f}(K)) = h(K) + 1$。

注意， Φ(f(K)) $\subseteq$F*(f(K))。假设 Φ(f (K)) $\neq$F*(f (K))。这意味着˜F*(f (K)) =F(f(K))是拟幂零的。根据 [9,X 定理 13.8]，可得 Φ(f (K)) $\subseteq$Z(F*(f (K)))。这意味着$1 < B \leq C_{K_1}(A)$。因此 A 不是忠实的，矛盾。

因此 Φ(f(K)) =F*(f(K))，且 f (K)/F*(f (K)) $\simeq K_1$。由于 K_1有唯一的极小正规子群 B，且它是非阿贝尔的，我们看到 F*(K_1) $= B$。这意味着 f (K)/$\mathrm{F}^*_{(2)}$(f(K)) $\simeq K$。根据 h^*的定义可得 h^*(f (K)) $= h^*(K) + 2$。

按照惯例，设 f $^{(1)}(K)$ =f (K)，且 f$^{(i+1)}(K)$ =f (f$^{(i)}(K)$)。那么，对于任意自然数 n， $\tilde{h}$(f $^{(n)}$(1)) $= n$且h^*(f$^{(n)}$(1)) $= 2n$。 □

以下命题可由定理 2.6 直接推出。

命题6.2。 设群 $G = \langle A_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ 由其所有次正规子群 A_i˜ ˜生成。则 $h(G) \leq$ 最大值$\{h(A_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$。

非 Frattini 长度与广义Fitting高度的一个主要区别是，正规子群的非 Frattini 长度可能大于群的非 Frattini 长度。

例6.1. 设 $E \simeq \mathbb{A}_5$。存在一个 $\mathbb{F}_5E$-模 V，使得 $R = Rad(V)$ 是忠实不可约 $\mathbb{F}_5E$-模，而 V/R 是不可约平凡 $\mathbb{F}_5E$-模（关于如何构造这样的模，例如参见 *[14]*）。设 $G = V \rtimes E$。现在，根据 *[3, B* 引理 *3.14]*， $\Phi(G) = R$。注意

$G/\Phi(G) = G/R \simeq Z_5 \times E$。因此，$F(G) = G$，且 $h(G) = 1$。注意，$G = V(RE)$，其中 V 和 RE 是 G 的正规子群。由于 V 是阿贝尔群，我们可知 $h(V) = 1$。注意，R 是 RE 的唯一极小正规子群，且 $\Phi(RE) = 1$。这意味着 $F(RE) = R$，并且 $h(RE) = 2$。因此，$h(G) < \max\{h(V), h(RE)\}$，且 F 不满足 $(F3)$。

回顾一下，[1, 定义 4.1.1] 若群 G 满足 $G = AB$，且 A 的每个子群都与 B的每个子群可置换，则称该群为其子群 A 和 B 的全可置换积。

定理 6.3. 设群 $G = AB$ 是其子群 A 和 B的全可置换积。那么

$$\max\{\tilde{h}(A), \tilde{h}(B)\} - 1 \leq \tilde{h}(G) \leq \max\{\tilde{h}(A), \tilde{h}(B)\} + 1.$$

Pro 的。若 $A = 1$ 或 $B = 1$，则 $\max\{h(A), h(B)\} = h(G)$。假设 $A, B \neq 1$。

根据 [1, 命题 4.1.16] $A \cap B \leq \mathrm{F}(G)$。因此 $A \cap B \leq \mathrm{F}^*(G)$。现在，由 [1, 推论 4.1.11], $\overline{G} = G/\mathrm{F}^*(G)$ 是 $\overline{A} = A\mathrm{F}^*(G)/\mathrm{F}^*(G)$ 与 $\overline{B} = B\mathrm{F}^*(G)/\mathrm{F}^*(G)$ 的全可置换积。注意 $\overline{A} \cap \overline{B} \simeq 1$。根据 [1, 引理 4.2.2] $[\overline{A}, \overline{B}] \leq \mathrm{F}(\overline{G})$。因此 $[\overline{A}, \overline{B}] \leq \mathrm{F}^*(\overline{G})$。这意味着

$$\overline{G}/\mathrm{F}^*(\overline{G}) = (\overline{A}\mathrm{F}^*(\overline{G})/\mathrm{F}^*(\overline{G})) \times (\overline{B}\mathrm{F}^*(\overline{G})/\mathrm{F}^*(\overline{G})).$$

注意，对于由所有超可解群构成的形成 $\mathfrak{U}$，有 $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{N}^2 \subset (\mathfrak{N}^*)^2$。因此，若 $H = H_1H_2$ 是由完全可置换的（$\mathfrak{N}^*$）^{2}- 子群 H_1 和 H_2 的乘积，则根据 [1, 定理 5.2.1]，有 $H \in (\mathfrak{N}^*)^2$。分析 [1, 定理 5.2.2] 的证明可知，该定理不仅对饱和形成成立，对形成 $\mathfrak{F} = (G \mid G = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G))$ 也成立。特别地，它对（$\mathfrak{N}^*$）^{2}成立。因此，若 $H = H_1H_2 \in (\mathfrak{N}^*)^2$ 是完全可置换子群 H_1 和 H_2 的乘积，则 $H_1, H_2 \in (\mathfrak{N}^*)^2$。现在，（$\mathfrak{N}^*$）^{2} 满足 [1, 命题 5.3.9] 的条件。

因此 $A \cap \mathrm{F}^*_{(2)}(G) = \mathrm{F}^*_{(2)}(A)$ 且 $B \cap \mathrm{F}^*_{(2)}(G) = \mathrm{F}^*_{(2)}(B)$。注意到

$$\overline{A}\mathrm{F}^*(\overline{G})/\mathrm{F}^*(\overline{G}) \simeq A\mathrm{F}^*_{(2)}(G)/\mathrm{F}^*_{(2)}(G) \simeq A/\mathrm{F}^*_{(2)}(A).$$

类比可得 $\overline{B}\mathrm{F}^*(\overline{G})/\mathrm{F}^*(\overline{G}) \simeq B/\mathrm{F}^*_{(2)}(B)$。因此

$$G/\mathrm{F}^*_{(2)}(G) \simeq (A/\mathrm{F}^*_{(2)}(A)) \times (B/\mathrm{F}^*_{(2)}(B)).$$

根据定理 m 2.6，且 $h = h_{\tilde{\mathrm{F}}}$ 我们有 $h(G/\mathrm{F}^*_{(2)}(G)) = \max\{h(A/\mathrm{F}^*_{(2)}(A)), h(B/\mathrm{F}^*_{(2)}(B))\}$.

由 $\mathrm{F}(H) \leq \mathrm{F}^*_{(2)}(H) \leq \mathrm{F}_{(2)}(H)$ 和引理 2.4 可知，对于任意群 $H \neq 1$ 成立

$$\tilde{h}(H) - 1 = \tilde{h}(H/\tilde{\mathrm{F}}(H)) \geq \tilde{h}(H/\mathrm{F}^*_{(2)}(H)) \geq \tilde{h}(H/\tilde{\mathrm{F}}_{(2)}(H)) \geq \tilde{h}(H) - 2.$$

因此

$$\{\tilde{h}(G) - \tilde{h}(G/\mathrm{F}^*_{(2)}(G)), \tilde{h}(A) - \tilde{h}(A/\mathrm{F}^*_{(2)}(A)), \tilde{h}(B) - \tilde{h}(B/\mathrm{F}^*_{(2)}(B))\} \subseteq \{1, 2\}.$$

因此 $\max\{h(A), h(B)\} - 1 \leq h(G) \leq \max\{h(A), h(B)\} + 1$。 □

在证明定理 6.3 时，我们未能回答以下问题：

问题 6.1。 设群 $G = AB$ 是子群 A 和 B的全可置换积。是否有 $\max\{h(A), h(B)\} \leq h(G)$?

以下问题似乎很有趣

问题 6.2。 是否存在一个常数 h，使得对于任意互相可置换积 $G = AB$（由子群 A 和 B构成），都有 $|\max\{h(A), h(B)\} - h(G)| \leq h$？

D.A. Towers [19] 为李代数定义并研究了 $\mathrm{F}^*(G)$ 和 $\mathrm{F}(G)$ 的类似概念。利用这些子群和（李代数的）根，可以引入（有限维）李代数的广义Fitting高度、非可解长度和非 Frattini 长度。

问题 6.3. 估计由两个子代数(理想、子理想、相互或全置换子代数)之和构成的(有限维) 李代数的广义*Fitting*高度、非可解长度和非 *Frattini* 长度。

参考文献

[1] A. Ballester-Bolinches、R. Esteban-Romero 和 M. Asaad。《有限群的乘积》。De Gruyter，2010 年。[2] A. Ballester-Bollinches 和 L. M. Ezquerro。《有限群类》，《数学及其应用》第 584 卷。Springer Netherlands，2006 年。[3] K. Doerk 和 T. O. Hawkes。《有限可解群》，《De Gruyter 数学研究》第 4 卷。De Gruyter，柏林、纽约，1992 年。[4] P. F¨orster。《有限群的射影类：IIa. 饱和形成：Gasch¨utz-Lubeseder-Baer 型的一般定理》。Pub. Mat. UAB，29(2/3):39–76，1985 年。[5] B. J. Gardner 和 R. Wiegandt。《环的根基理论》。Marcel Dekker，纽约，2003 年。[6] R. L. Griess 和 P. Schmid。《Frattini 模》。Arch. Math.，30(1):256–266，1978 年。[7] W. Guo。《有限群典范类的结构理论》。Springer-Verlag，柏林、海德堡，2015 年。[8] P. Hall 和 G. Higman。《关于可解群的 p-长度及 Burnside 问题的约化定理》。Proc. London Math. Soc.，s3-6(1):1–42，1956 年。[9] B. Huppert 和 N. Blackburn。《有限群 III》，《数学科学基础》第 243 卷。Springer-Verlag，柏林、海德堡，1982 年。[10] E. Jabara。《互相可置换的有限群乘积的 Fitting 长度》。Acta Math. Hung.，159(1):206–210，2019 年。[11] E. I. Khukhro 和 P. Shumyatsky。《有限群的非可解长度和非 p-可解长度》。Isr. J. Math.，207(2):507–525，2015 年。[12] E. I. Khukhro 和 P. Shumyatsky。《有限分解群的长度》。Ann. Mat. Pura Appl.，194(6):1775–1780，2015 年。[13] E. I. Khukhro 和 P. Shumyatsky。《有限群及其不动点的长度》。Proc. Amer. Math. Soc.，143(9):3781–3790，2015 年。[14] V.I. Murashka。《关于超可解群的一个猜想》。Publ. Math. Debrecen，100(3-4):399–404，2022 年。[15] B. I. Plotkin。《群中的根基、群类上的运算与根基类》。载于《代数与逻辑选题》，第 205–244 页。Nauka，新西伯利亚，1973 年。俄文。.[16] P. Schmid。《关于有限群的自同构群》。Arch. Math.，23(1):236–242，1972 年。[17] L. A. Shemetkov。《有限群的形成》。Nauka，莫斯科，1978 年。俄文。[18] L. A. Shemetkov 和 A. N. Skiba。《代数系统的形成》。Nauka，莫斯科，1989 年。俄文。[19] D. A. Towers。《李代数的广义幂零根》。J. Algebra，470:197–218，2017 年。[20] J. S. Wilson。《关于紧挠群的结构》。Monatsh. Math.，96(1):57–66，

1983
年。