arXiv:2301.02203v1 [math.CO] 5 Jan 2023

对称群特征标值被素数幂整除

SARAH PELUSE 和 KANNAN SOUNDARARAJAN

谨以此文纪念 Chandra Sekhar Raju

Abstract. 设 k 为正整数。我们证明，当 n 趋于无穷大时，特征标表中几乎所有项都能被 k 整除。这证明了 Miller 的一个猜想。

1. Introduction

众所周知，对于每个自然数 n， S_n 的不可约特征只取整数值。2017年，Miller [11] 计算了所有 $n \leq 38$对应的 S_n 的特征表，并考察了这些整数随 n 增大时的各种统计性质。他的计算结果表明

(1) 偶数项的密度似乎趋于 1；(2) 能被 3、5 和 7 整除的项的密度似乎随着 n 增大而上升；(3) 非零项中约有一半为正数；(4) 特征表中零项的密度似乎随着 n增大而下降，但下降得并不快。

根据这一初步观察，Miller [11, 13] 猜想，当 n 趋于无穷时，对称群 S_n 的特征表中几乎所有项都是偶数。在 McKay [10], 、Gluck [5], 和 Morotti [14], 取得部分进展之后，第一作者于 [15]证明了这一猜想。根据第二项观察，Miller [11, 13] 还提出了更一般的猜想：对于任意固定的素数 p，当 n趋于无穷时， S_n 的特征表中几乎所有项都是 p 的倍数。我们于 [16], 证明了这一猜想，并给出了固定素数不能整除的项数的一致上界。最近，Miller [12] 提出了更一般的猜想：对于任意固定的素数幂 q，当 n 趋于无穷时， S_n 的特征表中几乎所有项都是 q 的倍数。本文证明了 Miller 猜想中最一般的这一条。

定理 1.1. 设 n 足够大，且 $q \leq 10^{-3} \log n/(\log \log n)^2$ 是一个素数幂。特征标表中不能被 q 整除的项数至多为

$$O\left(p(n)^2 \exp(-(\log \log n)^2)\right).$$

由定理 1.1 和并集界立即可知，当 n 趋于无穷时，特征标表中几乎每一项都能被任意给定的整数整除。

推论 1.2. 设 k 是任意正整数。那么，当 n 趋于无穷时，特征标表中不能被 k 整除的项所占比例趋于 0。

我们的方法似乎无法解释 Miller 的第三和第四项观察。我们最感兴趣的是特征标表中有多大比例的表项为零，

而从 Miller 的数据中并不清楚这一比例是趋于零，还是趋于某个正数。结合 Murnaghan–Nakayama 规则与 Erd˝os 和 Lehner [2] 关于均匀随机分拆的最大部分分布的一项早期结果，可以得出 S_n的特征标表中有 $\frac{1}{\log n}$ 比例的零；目前似乎还没有已知的、量级更大的下界。在相关的李型有限单群情形下，Larsen和Miller [7] 证明，随着秩趋于无穷，几乎所有特征标表项都为零。

致谢。第一作者部分由美国国家科学基金会数学科学博士后研究奖学金计划（资助编号 DMS-1903038）和 Oswald Veblen基金提供资助。第二作者部分由美国国家科学基金会的资助以及 Simons基金会的 Simons研究员资助提供支持。我们感谢 David Speyer 提请我们注意引理 2.1。

2. Proof outline

对于 n 的任意分拆 λ 和 μ，令 χ_μ^λ 表示与 λ 对应的 S_n 的不可约特征，在循环类型对应于 μ 的元素共轭类上的取值。在 [16], 中，我们的论证结合了两个关键事实：(i) 如果 μ 含有一个远大于随机分拆通常最大部分的部分，那么对于几乎所有 λ, $\chi_\mu^\lambda = 0$；(ii) 若 ν 是 n 的另一个分拆，由 μ 将 p 个大小相同的部分合并为一个大小为 pm 的部分而得到，则对每个 λ，都有 $\chi_\mu^\lambda \equiv \chi_\nu^\lambda$（模 p）。我们证明，对于几乎所有 μ，反复以这种方式合并 p 个大小相同的部分，会得到一个含有极大部分的分拆 $\widetilde{\mu}$；该部分足够大，因此对于几乎所有 λ, $\chi_{\widetilde{\mu}}^\lambda$ 必为零。关于特征标值被素数整除的主要结果，随即由以下事实得出：对每个 λ，都有 $\chi_\mu^\lambda \equiv \chi_{\widetilde{\mu}}^\lambda$（模 p）。

第二个关键事实可以直接推广为模素数幂的特征标值同余。

引理 2.1. 设 p^r 是素数 p的幂。假设 μ 是 n的一个分拆，且 ν 是从 μ 出发，将 p^r 个大小相同为 m 的部分替换为 p^{r-1}个大小为 pm的部分后得到的另一个 n 的分拆。那么对于 n的所有分拆 λ，我们有

$$\chi_\mu^\lambda \equiv \chi_\nu^\lambda \pmod{p^r}.$$

然而，当 $r > 1$时，从一个典型分拆 μ（它是 n的分拆）出发，反复将 p^r 个大小相同为 m 的部分合并为 p^{r-1} 个大小为 pm 的部分，所得分拆 $\widetilde{\mu}$ 不再必然包含一个显著大于 n的典型分拆的最大部分的部分。因此，对于素数有效的 [16] 中的论证，对所有其他素数幂都不再成立。

克服这一障碍的关键思路，是为对称群的特征标值能被固定素数幂整除给出一个新的条件。我们通过利用多次应用 Murnaghan–Nakayama 规则后出现的某些对称性，证明了这一条件。

定理 2.2. 设 $n, m_1, \ldots, m_r$ 是互不相同的正整数。设 μ 是 n 的一个分拆，其中大小为 $m_1, \ldots, m_r$ 的部分各至少出现 p^{r-1} 次。若对于满足某个 $k_i = p^{r-1}$ 的所有整数 $0 \le k_1, \ldots, k_r \le p^{r-1}$ 的 $(\sum_{i=1}^r k_i m_i)$-元组 $(k_1, \ldots, k_r)$，λ 都是 n 的一个 $(\sum_{i=1}^r k_i m_i)$-核分拆，那么

$$p^r \mid \chi_\mu^\lambda.$$

从 n 的一个分拆 μ 开始，反复将 m 个大小相同的部分合并为 p^{r-1} 个大小为 pm 的部分，直到最终得到一个分拆 $\widetilde{\mu}$，其中任何部分出现的次数都不超过 p^r-1。作为应用定理 2.2 的准备，我们证明，对于典型的分拆 μ，所得分拆 $\widetilde{\mu}$ 将包含 r 个大小适当的部分，且每个部分至少出现 p^{r-1} 次。

命题 2.3. 从一个 μ 的 n 分拆开始，反复将每组大小相同的 m 个 p^r 部分替换为 p^{r-1} 个大小为 pm 的部分，直到得到一个分拆 $\tilde{\mu}$，其中任何部分出现的次数都不超过 p^r-1。那么，除去

$$O\left(p(n)\exp\left(-n^{1/20p^r}\right)\right)$$

初始分拆 μ，分拆 $\widetilde{\mu}$ 至少包含 r 个不同的部分 m_1、……、m_r，每个部分至少出现 p^{r-1} 次，并且满足

$$p^{r-1}m_j>\left(1+\frac{1}{6p^r}\right)\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n.$$

这对 $p^r\leq 10^{-3}\log n/(\log\log n)^2$ 一致成立。

命题 2.3 中 $p^{r-1}m_j$ 的下界之所以重要，是因为它超过了阈值 t：对于该阈值，几乎每个 n 的分拆都是一个 t-核。

引理 2.4. 设 $1\leq L\leq \log n/\log\log n$ 是一个实数。那么，对于任意给定的满足以下条件的整数 t

$$t\geq\left(1+\frac{1}{L}\right)\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n,$$

除了

$$O\left(p(n)\frac{\log n}{n^{1/2L}}\right)$$

n 的分拆是 t-核。

我们可以迅速利用上述结果推导出主要结果定理 1.1。

定理 1.1 的推导。设 μ 是 n的一个分拆，并假设 $\widetilde{\mu}$ 如命题 2.3 中所述。那么，对于至多

$$O\left(p(n)\exp\left(-n^{1/20p^r}\right)\right)$$

个 μ的选择，分拆 $\widetilde{\mu}$至少包含 r个不同的部分 m_1、……、m_r，每个部分至少出现 p^{r-1} 次，并满足

$$p^{r-1}m_j>\left(1+\frac{1}{6p^r}\right)\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n. \tag{2.1}$$

考虑任意一个 r-元组 $(k_1$、……、$k_r)$，其中 $0\leq k_1$、……、$k_r\leq p^{r-1}$ 以及某个 i满足 $k_i=p^{r-1}$。那么 $k_1m_1+\ldots+k_rm_r$ 也超过 (2.1) 中的界，因此根据引理 2.4，除了至多$O(p(n)(\log n)/n^{\frac{1}{2L}})$ 个分拆 λ（共 n 个）之外，其余都是 $(k_1m_1+\ldots+k_rm_r)$-核。由于这样的 r-元组 $(k_1$、……、$k_r)$ 至多有 $r(p^{r-1}+1)^{r-1}$ 个，根据并集界可知，至多

$$O\left(p(n)\frac{\log n}{n^{1/12p^r}}r\left(p^{r-1}+1\right)^{r-1}\right)$$

分拆 λ　　对于所有的 r 元组 $(k_1,\ldots,k,$　n 都是 $(k_1m_1+\ldots+k_rm_r)$-核　　$_r)$.

由此，定理 2.2 表明 p^r 整除 $\chi^\lambda_{\widetilde{\mu}}$；又由引理 2.1 可知 $\chi^\lambda_\mu \equiv \chi^\lambda_{\widetilde{\mu}} \pmod{p^r}$，因此也可推出 p^r 整除 χ^λ_μ。综合以上结果，我们得出，满足 $p^r \nmid \chi^\lambda_\mu$ 的 λ 与 μ 的分拆数至多为

$$O\Big(p(n)^2\Big(\exp(-n^{1/(20p^r)}) + \frac{1}{n^{1/13p^r}} r\left(p^{r-1}+1\right)^{r-1}\Big)\Big) = O\Big(p(n)^2 \exp(-(\log\log n)^2)\Big),$$

在 $p^r \le 10^{-3}\log n/(\log\log n)^2$ 的范围内。 □

本文其余部分安排如下：我们将在第 3 节证明引理 2.1 和 2.4，在第 4、5、6 和 7 节证明定理 2.2，并在第 8 和 9 节证明命题 2.3。

3. Proofs of Lemmas 2.1 and 2.4

我们先证明上一节陈述的两个引理。

引理 2.1 的证明。我们断言，如果 $Q \in \mathbf{Z}[x_1,\dots,x_k]$ 是一个系数为整数的多项式，那么

$$Q(x_1,\dots,x_k)^{p^r} \equiv Q(x_1^p,\dots,x_k^p)^{p^{r-1}} \pmod{p^r}.$$

众所周知，我们可以写成

$$Q(x_1,\dots,x_k)^p = Q(x_1^p,\dots,x_k^p) + p\cdot R(x_1,\dots,x_k) \tag{3.1}$$

对于某个 $R \in \mathbf{Z}[x_1,\dots,x_k]$，由此可知当 $r=1$ 时结论成立。对于 $r>1$，将 (3.1) 两边提升到 p^{r-1} 次方，并利用二项式定理展开：

$$\begin{aligned} Q(x_1,\dots,x_k)^{p^r} &= \left(Q(x_1^p,\dots,x_k^p) + p\cdot R(x_1,\dots,x_k)\right)^{p^{r-1}} \\ &= Q(x_1^p,\dots,x_k^p)^{p^{r-1}} + \sum_{\ell=1}^{p^{r-1}} \binom{p^{r-1}}{\ell} Q(x_1^p,\dots,x_k^p)^{p^{r-1}-\ell}(pR(x_1,\dots,x_k))^\ell. \end{aligned}$$

注意，对于 $1 \le \ell \le p^{r-1}$

$$p^\ell \binom{p^{r-1}}{\ell} = p^\ell \frac{p^{r-1}}{\ell}\binom{p^{r-1}-1}{\ell-1} \equiv 0 \pmod{p^r},$$

因为整除 ℓ 的 p 的幂显然至多为 $\ell-1$。由此便得证。

将这一观察应用于 Frobenius 公式中出现的多项式，即可得到关于特征标值 χ^λ_μ 和 χ^λ_ν 的引理（参见 [4] 的第 4 章）。□

引理 2.4 的证明。证明与 [16], 中命题 1 的证明基本相同，但为完整起见，我们仍简要说明。由于 n 的每个分拆都是 $t>n$ 的 t-核，我们不妨自然地假设 $t \le n$。由 [14], 的引理 5 可知， n 的分拆中至多有 $(t+1)p(n-t)$ 个不是 t-核。根据渐近公式

$$p(m) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}m}\exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{m}\right)$$

对于分拆函数，我们有

$$(t+1)p(n-t) \ll \frac{t+1}{n-t+1}\exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n-t}\right) \le \frac{t+1}{n-t+1}\exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n} - \frac{\pi t}{\sqrt{6n}}\right).$$

在范围 $n \geq t \geq (1+1/L)\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n$ 内，上式右侧在下端点 $t=(1+1/L)\frac{\sqrt{6}}{2\pi}\sqrt{n}\log n$ 处取最大值。因此，不是 t-核的 n 的分拆数为

$$\ll \frac{\log n}{\sqrt{n}} n^{-(1+1/L)/2} \exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}\right) \ll p(n)\frac{\log n}{n^{1/2L}},$$

其中，最后一步再次用到了分拆函数的渐近公式 n. □

4. Partitions and Abaci

定理 2.2 的证明需要用到与分拆相关的 $abacus$ 理论。关于这一理论的一个很好的参考资料是 [6]，的第 2.7 节，下面我们回顾其中一些重要事实。

4.1. 算盘的概念。算盘是一个双无限序列，由无限个 1 开始，并以无限个 0 结束。

更形式化地说，设

$$\mathcal{S} := \{s : \mathbb{Z} \to \{0,1\} : \text{存在一个 } k \geq 0 \text{ 使得 } s(-i) = 1 \text{ 且 } s(i) = 0 \text{ 对所有 } i \geq k\}$$

表示所有以整数为索引、由 0 和 1 构成的序列的集合，这些序列以无限个 1 开始，并以无限个 0 结束。例如，

$$\ldots, 1, \ldots, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

属于 $\mathcal{S}$。我们认为 s和 s' 在 $\mathcal{S}$ 中等价，当且仅当存在某个整数 j，使得对所有 i， $s(i) = s'(i-j)$；也就是说，只需将 s 中的各项平移 j，即可得到 s'。这是一个等价关系，而算盘指的是 $\mathcal{S}$ 中关于此关系的一个等价类。我们用 $\mathcal{A}$ 表示这类算盘的集合，因此，$\mathcal{A}$ 中的一个元素 a 指由某个序列 $s \in \mathcal{S}$ 及其所有平移所构成的等价类。

4.2. 与分拆相关的算盘。现在说明算盘与整数的分拆一一对应。从整数分拆 λ 出发，我们按如下方式构造算盘 $a_\lambda \in \mathcal{A}$。画出 λ 的杨图，并沿着图形边界从左下角描至右上角，每向右移动一次写一个 0，每向上移动一次写一个 1。然后在前面加上无限串的 1，在后面加上无限串的 0，从而得到相应元素 a_λ （属于 $\mathcal{A}$）的一个代表元。

反过来很容易执行这一过程：从 $\mathcal{A}$ 中的一个算盘 a 出发，可以得到一个杨图，它对应于一个分拆 λ。若 a 的一个代表元是 $s \in \mathcal{S}$，那么分拆 λ 是整数 n 的一个分拆，其中 $n(a)$ 统计满足 $i<j$ 的指标对 (i,j) 的数量，使得 $s(i) = 0$ 且 $s(j) = 1$。

举例来说，考虑分拆 (6, 5, 3, 1, 1, 1)，其杨图如图1所示。如果我们从该图的左下角出发，沿着边界移至右上角，则依次向右、向上三次、向右两次、向上、向右两次、向上、向右，再向上。上述对应关系生成的字符串为

$$0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \tag{4.1}$$

我们可以在开头添加一个无限的 1 序列，并在末尾添加一个无限的 0 序列，从而将其转化为双无限序列：

$$\ldots, 1, \ldots, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots. \tag{4.2}$$

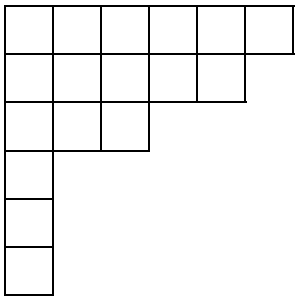

FIGURE 1. (6, 5, 3, 1, 1, 1) 的杨图

第 e 该序列的等价类就是与 (6, 5, 3, 1, 1, 1 相关联的算盘).

4.3. 钩与边条。设 λ 是一个分拆。与杨图中盒子 b相关联的钩 $hook\ h$ 由盒子 b 以及其正右方和正下方的所有盒子组成。 h的钩长记作 $\ell(h)$，即钩中所含盒子的数量。钩 h的高度 $height$ 记作 ht(h)，它比杨图中包含 h的盒子的行数少一，其中该杨图对应于 λ。与每个钩相关联的还有一个边条 $border\ strip$ （也称为斜钩），记作 bs(h)，它是杨图 h 边界盒子的连通区域，从最右侧的盒子延伸到底部的盒子。移除这样的边条后，剩下一个更小的杨图。这些概念在对称群的表示论中起着重要作用，尤其是 Murnaghan–Nakayama 规则在计算特征标值时会用到它们。下面我们回顾这条规则（参见 [6],中的定理 2.4.7，以及 [4]中的第 4 章）。

定理 4.1（Murnaghan–Nakayama 规则）。设 n 和 t 为正整数，且 $t \leq n$。设 $\sigma \in S_n$ 具有 $\sigma = \tau \cdot \rho$ 的形式，其中 ρ 是一个 t-循环，而 τ 是一个在 ρ 上支撑不相交的 S_n 的置换。设 λ 是 n 的一个分拆。则

$$\chi^{\lambda}(\sigma) = \sum_{\substack{h \in \lambda \\ \ell(h)=t}} (-1)^{\mathrm{ht}(h)} \chi^{\lambda \setminus \mathrm{bs}(h)}(\tau). \tag{4.3}$$

上面， χ^{λ}(σ) 表示与分拆 λ 对应的 S_n 的不可约表示的特征标在 σ 的共轭类上的取值； $\lambda \setminus$ bs(h) 表示从 λ 的杨图中移除边条 bs(h) 后得到的 $n-t$ 的分拆； $\chi^{\lambda \setminus \mathrm{bs}(h)}$($\tau$) 表示与分拆 $\lambda \setminus$ bs(h) 对应的 S_{n-t} 的不可约表示的特征标在 τ 的共轭类上的取值。

算盘表示法有助于理解钩长和边条。设 λ 为一个分拆， a_λ 表示相应的算盘， s 是算盘 a_λ在 $\mathcal{S}$ 中的一个代表元。杨图中 λ 的每个钩 h 都与一对指标 (i, j) $i < j$自然一一对应，其中 $s(i) = 0$ 且 $s(j) = 1$。钩 h 的长度为$j - i$。特别地，分拆 λ 不含长度为 t 的钩（也就是说， λ 是一个 t-核），当且仅当不存在一对指标 ($i, i+t$)，使得 $s(i) = 0$ 且 s ($i+t$) $= 1$。钩 h 的高度等于双无限序列 s 中严格位于指标i 处的 0 与指标 j处的 1 之间的 1 的个数：

$$\mathrm{ht}(h) = \#\left\{i < k < j : s(k) = 1\right\}.$$

11	7	6	4	3	1
9	5	4	2	1	
6	2	1			
3					
2					
1					

FIGURE 2. (6, 5, 3, 1, 1, 1)的钩长

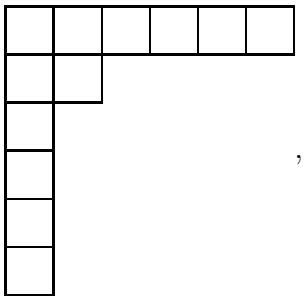

FIGURE 3. (6, 2, 1, 1, 1, 1)的杨图

此外，算盘表示法可以简便地描述从一个分拆中移除边条后的结果。对于任意一对不同的整数 (i, j)，定义算子 T_{ij}： $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$，它交换双无限序列 $s \in \mathcal{S}$ 中指标为 i 和 j 的项，并保持所有其他项不变。因此，对于 $s \in \mathcal{S}$

$$(T_{ij}s)(k) = \begin{cases} s(k) & k \neq i, j \\ s(j) & k = i \\ s(i) & k = j. \end{cases}$$

采用上述记号，设 λ 是一个分拆， $s \in a_\lambda$ 是 λ的算盘的一个代表元。设 λ的一个钩 h 对应于s中的指标对(i, j)（其中 $i < j$）。那么， $T_{ij}s$ 是与 $\lambda \setminus \mathrm{bs}(h)$相关联的算盘的一个代表元。

回到分拆(6, 5, 3, 1, 1, 1)的例子，图2再次展示了它的杨图，不过这次每个方格中都填入了相应的钩长。图中长度为5的唯一一个钩 h 对应于序列(4.1)的指标对(5, 10)。移除相应的边条后，我们得到图3所示的图，它对应于分拆(6, 5, 3, 1, 1, 1) $\setminus$ bs(h) $=$(6, 2, 1, 1, 1, 1)以及双无限序列

$$\ldots, 1, \ldots, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \ldots, 0, \ldots$$

由 0 和 1 组成。注意，如果我们交换代表元 (4.2) 中与钩 h 对应的 0 和 1，就会得到一个等价的双无限序列$a_{(6,5,3,1,1,1)}$。

4.4. 依次移除多个钩。在下文中，我们需要依次移除多个钩（更确切地说，是移除与这些钩对应的边条）

从一个分拆中移除。所谓从分拆 λ 中依次移除一列钩 h_1、.....、 h_R ，是指如下过程： h_1 是 λ 的一个钩， h_2 是 $\lambda \setminus \mathrm{bs}(h_1)$ 的一个钩， h_3 是 $\lambda \setminus \mathrm{bs}(h_1) \setminus \mathrm{bs}(h_2)$ 的一个钩，依此类推，直到得到 h_R，它是 $\lambda \setminus \mathrm{bs}(h_1) \ldots \setminus \mathrm{bs}(h_{R-1})$ 的一个钩；移除它后，我们便得到最终分拆 $\lambda' = \lambda \setminus \mathrm{bs}(h_1) \ldots \setminus \mathrm{bs}(h_R)$。

设 s 是与 λ 关联的算盘 a_λ 的一个代表元。设 (i_1, j_1) 表示 s 中对应于钩 h_1 的一对指标，(i_2, j_2) 表示对应于 h_2 的一对指标（请记住，它是 $\lambda \setminus \mathrm{bs}(h_1)$ 中的一个钩，对应于双无限序列 $T_{i_1,\ j_1} s$），依此类推。因此，钩子序列 $h_1, \ldots, h_R$ 可以用由 R 对组成的元组 $((i_1, j_1), (i_2, j_2) \ldots, (i_R, j_R))$ 编码，而移除这些钩子后得到的序列为

$$s' = T_{i_R, j_R} T_{i_{R-1}, j_{R-1}} \cdots T_{i_1, j_1} s.$$

序列 s' 是与分拆 λ' 关联的算盘 $a_{\lambda'}$ 的一个代表元。

我们尤其关注所有钩的长度都相同的情形，记作 m 。此时，对于所有 $1 \le k \le R$, 都有 $j_k = i_k + m$ ，而且我们可以仅用元组 $(i_1, \ldots, i_R)$ 来编码钩子序列。注意，指标 $i_1, \ldots, i_R$ 可能重复，但也存在一些限制，例如 $i_2 \neq i_1$ （因为 $(i_1, i_1 + m)$ 是 s 中的一个钩，因此不可能是 $T_{i_1,\ i_1+m} s$ 中的一个钩）。

5. Plan of the proof of Theorem 2.2

我们首先将定理 2.2 改写为关于不可约特征在 S_n 中元素处取值的表述，这样可以使其证明中涉及的记号更加简洁。

定理 5.1（定理 2.2 的一个等价表述）。设 $n, m_1, \ldots, m_r$ 是互不相同的正整数。设 $\sigma \in S_n$ 是形如

$$\sigma = \tau \cdot \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{p^{r-1}} \rho_i^{(j)},$$

的置换，其中每个 $\rho_i^{(j)}$ 都是长度为 m_i 的循环，所有循环 $\rho_i^{(j)}$ 的支撑两两不相交，并且 $\tau \in S_n$ 是一个置换，其支撑与各个 $\rho_i^{(j)}$ 的支撑不相交。假设对于所有满足某个 $k_i = p^{r-1}$ 的整数 $0 \le k_1, \ldots, k_r \le p^{r-1}$ 的 $(\sum_{i=1}^{r} k_i m_i)$ 元组 $(k_1, \ldots, k_r)$， λ 都是 n 的 $(\sum_{i=1}^{r} k_i m_i)$-核分拆。那么

$$p^r \mid \chi^\lambda(\sigma).$$

定理 5.1 的证明依赖于以下关键命题，该命题基于 p^{r-1} 次应用 Murnaghan–Nakayama 规则。

命题 5.2. 设 r、 m 和 n 为正整数。设 $\sigma \in S_n$ 具有如下形式

$$\sigma = \tau \cdot \prod_{j=1}^{p^{r-1}} \rho^{(j)},$$

其中每个 $\rho^{(j)}$ 都是一个 m-循环，且所有这些循环 $\rho^{(j)}$ 两两不相交； $\tau \in S_n$ 是一个置换，其支撑与所有循环 $\rho^{(j)}$均不相交。记 L 为这样一组分拆：它们可由 λ 依次移除 p^{r-1} 个长度为 m的边条后，从 $n - p^{r-1}m$ 得到。如果 λ 是 n的一个 $p^{r-1}m$-核分拆，那么

$$\chi^\lambda(\sigma) = p \sum_{\lambda' \in L} \epsilon_{\lambda'} \chi^{\lambda'}(\tau),$$

其中每个 $\epsilon_{\lambda'}$ 都是一个整数。

我们将由命题 5.2 和以下简单观察迅速推导出定理 5.1（从而也推导出定理 2.2）。

引理 5.3。设 n、t 和 m 为正整数。设 λ 是 n 的一个分拆，同时为一个 t-核和一个 $(t+m)$-核。设 λ' 是 $n-m$ 的一个分拆，且可由 λ 去掉长度为 m 的边条得到。那么 λ' 是一个 t-核。

证明。若 λ 没有长度为 m 的钩（因而也没有边条），则该引理显然成立。设 λ' 是从 λ 中去掉与长度为 m 的钩 h 对应的边条后得到的。设 a_λ 为 λ 的算盘，s 为 a_λ 中的一个双无限序列代表元。假设钩 h 对应于指标对 $(i, i+m)$，其中 $s(i) = 0$ 且 $s(i+m) = 1$，因此分拆 λ' 对应于包含 $s' = T_{i,\ i+m}s$ 的算盘。

如果 λ' 不是 t-核，那么必定存在一对指标 $(j, j+t)$，使得 $s'(j) = 0$ 且 $s'(j+t) = 1$。由于 s 和 s' 的项仅在指标 i 和 $i+m$ 处不同，并且由于 λ 是一个 t-核，因此必有 $j = i+m$ 或 $j+t = i$。如果 $j = i+m$，那么 $s(i) = 0$ 且 $s(i+t+m) = s'(j+t) = 1$，这与 λ 是一个 $(t+m)$-核的假设矛盾。如果 $j = i-t$，那么 $s(i-t) = s'(j) = 0$ 且 $s(i+m) = 1$，这再次与 λ 是一个 $(t+m)$-核的假设矛盾。□

由命题 5.2 推出定理 5.1。首先将命题 5.2 应用于 $m = m_r$，得到

$$\chi^\lambda(\sigma) = p\sum_{\lambda'\in L}\epsilon_{\lambda'}\chi^{\lambda'}\Big(\tau\prod_{i=1}^{r-1}\prod_{j=1}^{p^{r-1}}\rho_i^{(j)}\Big).$$

如果 t 是形如 $t = \sum_{i=1}^{r-1}k_i m_i$ 的任意数，其中 k_i 属于 $[0, p^{r-1}]$，且至少有一个是 p^{r-1}，那么对于所有 $0 \le k_r \le p^{r-1}$，λ 都是一个（$t + k_r m_r$）-核。由于任意 $\lambda' \in L$ 都可以通过移除长度为 m_r 的 p^{r-1} 条边条从 λ 得到，因此根据引理 5.3 的 p^{r-1} 次应用可知，λ' 是一个 t-核。

现在我们可以重复这一论证，对每个 $\lambda' \in L$ 应用命题 5.2，并移除长度为 m_{r-1} 的 p^{r-1} 条边条。引理 5.3 的应用表明，对于满足某个 $k_i = p^{r-1}$ 的所有 $0 \le k_i \le p^{r-1}$ 取值，得到的新分拆 λ'' 都是（$\sum_{i=1}^{r-2}k_i m_i$）-核。

将这一论证重复 r 次，即可得到所需结果。□

命题 5.2 的证明依赖于以下两个引理，我们将在接下来的两节中证明它们。

引理 5.4. 设 λ 为一个分拆，且 λ' 是由 λ 依次去掉 R 个长度相同的边条 m 后得到的。设 $h_1, \ldots, h_R$ 是一列长度为 m 的钩子 R，它们可以从初始分拆 λ 中去掉，从而得到最终分拆 λ'。那么

$$(-1)^{\mathrm{ht}(h_1)+\ldots+\mathrm{ht}(h_R)} = \epsilon(\lambda, \lambda')$$

其中符号 $\epsilon(\lambda, \lambda') = \pm 1$ 仅取决于初始分拆 λ 和最终分拆 λ'，并且对于所有此类可能的钩子序列都相同。

引理 5.5. 设 λ 是一个 $p^{r-1}m$-核分拆，且 λ' 是一个可通过移除 λ 中长度为 m 的 $R = p^{r-1}$ 条边条得到的分拆。满足下列条件的元组 $(i_1, \ldots, i_R)$ 的数量

$$s' = T_{i_R, i_R+m}T_{i_{R-1}, i_{R-1}+m}\cdots T_{i_1, i_1+m}s$$

是 p 的倍数。这里， s 是 λ 的算盘的一个代表元，而分拆 λ' 对应于包含 s' 的算盘

引理 5.4 和引理 5.5 成立后，推导出命题 5.2 就很简单了。

推导命题 5.2。我们反复应用 Murnaghan–Nakayama 规则，依次从 λ 中移去长度为 m 的 $R = p^{r-1}$ 个钩子。这将得到 $\chi^{\lambda}(\sigma)$ 的一个表达式，其形式为 $\sum_{\lambda' \in L} c_{\lambda'} \chi^{\lambda'}(\tau)$，其中 $c_{\lambda'}$ 是适当的整数，我们必须证明它们都是 p 的倍数。现在

$$c_{\lambda'} = \sum_{(i_1,\dots,i_R)} (-1)^{\mathrm{ht}(h_1)+\dots+\mathrm{ht}(h_R)}$$

其中求和遍及所有 R-元组 $(i_1, \dots, i_R)$，它们对应于钩 $h_1, \dots, h_R$；按顺序从 λ 中移去这些钩后，得到分拆 λ'。引理 5.4 告诉我们，对于所有适当的元组 $(i_1, \dots, i_R)$，符号 $(-1)^{\mathrm{ht}(h_1)+\dots+\mathrm{ht}(h_R)}$ 都相同；引理 5.5 则告诉我们，这种 R-元组的数量是 p 的倍数。□

6. Parity of heights of hooks: Proof of Lemma 5.4

设 λ 是一个分拆， s 是与 λ 相关联的算盘 a_λ 的一个代表元。通过给 s 中有限个 N 个 1 着上不同的颜色来增广 s，并注意给 s 中第一个零右侧出现的所有 1 着色。第一个 0 左侧出现的 1 并不重要，但我们允许灵活地给其中一些着色，因为从 λ 中移除钩子时，中间步骤可能会出现这种情况。注意，第一个零右侧出现的 1 的个数等于分拆 λ 的行数。因此， N 至少等于 λ 的行数。按照这些 1 在 s 中出现的顺序，依次用颜色 c_1、.....、 c_N 给它们着色。将增广后的序列称为 $\widehat{s}$。

我们先对移除钩子作一个一般性观察。设 (i, j) 是对应于 s 中一个钩 h 的一对指标（此时钩的长度 $j-i$ 可以任意）。移除这个钩会得到序列 $T_{i,j}s$。考虑增广序列 $\widehat{s}$，移除这个钩后，相应的增广序列为 $T_{i,j}\widehat{s}$ 。若考察该序列中各个 1 的颜色序列，就会得到原颜色序列 $(c_1,\dots,c_N)$ 的一个置换 π_{ij}，记作如此——$(T_{i,j}\widehat{s})(i)$ 中出现的 1，其颜色与 $\widehat{s}(j)$ 中的 1 相同；而 $T_{ij}(\widehat{s})$ 中所有其他 1 保留它们在 $\widehat{s}$ 中的颜色。若移除的钩的高度为 k，则注意到 $\widehat{s}$ 在 $s(i) = 0$ 与 $s(j) = 1$ 之间有 k 个着色的 1，并且置换π_{ij} 可以通过进行 k 次对换得到：每次都将位置 j 处的 1 的颜色与紧邻其前面的颜色互换。因此，$(-1)^k = (-1)^{\mathrm{ht}(h)}$ 等于置换 π_{ij} 的符号。

如果依次移除钩子 $h_1, \dots, h_\ell$（同样，它们的长度可以任意），那么相应的颜色排列会相乘，因此这些置换的符号也会相乘。因此，依次移除这些钩子后，我们将得到颜色序列 $(c_1, \dots, c_N)$ 的一个置换 π，并且

$$(-1)^{\mathrm{ht}(h_1)+\mathrm{ht}(h_2)+\dots+\mathrm{ht}(h_\ell)} = \mathrm{sgn}(\pi).$$

现在我们转向引理所述的情形：依次移除一列 h_1 个长度均为 m 的 R 钩子。上述观察表明，按顺序移除这些钩子，会得到序列 $\widehat{s}'$，其中 1 的颜色由原颜色序列 $c_1, \dots, c_N$ 的一个置换 π 给出。此外，该置换的符号 $\mathrm{sgn}(\pi)$ 等于 $(-1)^{\mathrm{ht}(h_1)+\dots+\mathrm{ht}(h_R)}$。

为完成证明，我们将说明，所有能够通过移除 R 个长度为 m 的钩子而得到分拆 λ' 的方式，都会产生相同的颜色置换 π。考虑将 $\widehat{s}$ 限制在一个模 m 的等差数列上所得到的子序列，即 $(\widehat{s}(a+\ell m))_{\ell\in\mathbf{Z}}$。这样的子序列有 m 个，分别对应于 $a=1,\ldots,m$。由于移除的钩子长度均为 m，每次移除一个钩子只会影响其中一个子序列里的项，而其他子序列保持不变。此外，在任意一个特定子序列 $(\widehat{s}(a+\ell m))_{\ell\in\mathbf{Z}}$ 中，不可能通过移除任意一列长度为 m 的钩子来改变原有的颜色序列。因此，我们可以唯一确定 $\widehat{s}'$ 中任意元素的颜色：该序列中出现在 a （模 m）的等差数列上的 1，其颜色由它们在原序列 s 中出现的顺序决定。

7. Proof of Lemma 5.5

设 λ 是一个 $p^{r-1}m$-核分拆，s 是其算盘的一个代表元。设 s' 是从 λ 中移除一系列长度为 m 的 $R=p^{r-1}$ 边条后得到的序列，并设 λ' 是与 s' 相关联的分拆。我们的目标是证明，从 λ 出发到达 λ' 的方法数是 p 的倍数。

首先注意，当 $r=1$ 时，不可能从 λ 中移除长度为 m 的边条，因为根据假设，λ 是 m-核。因此这里的方法数为 0，引理（显然）成立。以下设 $r\geq 2$。

对每个 $a=1,\ldots\ldots,m$，考虑将 s 和 s' 限制在模 m 的同余类 a 上所得到的子序列：因此，令

$$s(a;m)=(s(a+\ell m))_{\ell\in\mathbb{Z}},\qquad s'(a;m)=(s'(a+\ell m))_{\ell\in\mathbb{Z}}.$$

我们可以将 $s(a;m)$ 和 $s'(a;m)$ 看作分别对应于分拆 $\lambda(a;m)$ 和 $\lambda'(a;m)$，并注意到，分拆 λ 中长度为 m 的钩，对应于分拆 $\lambda(a;m)$ 中长度为 1 的钩（或简称边界方格）（对 a 作某种选择）。由于 $\lambda'(a;m)$ 是从 $\lambda(a;m)$ 中移去若干个长度为 1 的钩得到的，因此分拆 $\lambda'(a;\,m)$ 的杨图包含于分拆 $\lambda(a;m)$ 的杨图中（也就是说，对于所有 i，都有 $\lambda_i(a;m)\geq\lambda'_i(a;\,m)$）。$\lambda(a;m)$ 的杨图与 $\lambda'(a;m)$ 的杨图之差（换言之，即 $\lambda(a;m)$ 中不属于 $\lambda'(a;\,m)$ 的方格）是一个斜图，记作 $\lambda(a;m)/\lambda'(a;m)$。令 ℓ_a 表示这个斜图 $|\lambda(a;m)/\lambda'(a;\,m)|$ 的大小，则要从 $\lambda(a;m)$ 得到 $\lambda'(a;m)$，必须移去 ℓ_a 个长度为 1 的钩。由于从 λ 变到 λ' 总共移去了 $R=p^{r-1}$ 个长度为 m 的钩，注意到

$$R=p^{r-1}=\sum_{a=1}^{m}\ell_a.$$

通过依次移除长度为 1 的 ℓ_a 钩子，从 $\lambda(a;m)$ 到达 $\lambda'(a;m)$ 的方法数，等于斜形 $\lambda(a;m)/\lambda'(a;\,m)$ 的标准杨表数，我们用通常的记号将其记为 $f_{\lambda(a;m)/\lambda'(a;m)}$。回忆一下，这种斜形的标准杨表是对斜图中的方格用 1 到 ℓ_a 编号，使每一行中的数从左到右递增，每一列中的数自上而下递增。每个这样的杨表都对应一种移除钩子的方法：按照数字从大到小的顺序移除方格。

现在，我们可以计算通过移除长度为 m 的 R 个钩子，从 λ 到 λ' 的方法数。注意，从一个子序列 $s(a;m)$ 中移除一个钩子，不会影响其他任何子序列中的

钩子。因此，从 λ 到 λ' 的所需步骤方法数等于

$$\binom{p^{r-1}}{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m} \prod_{a=1}^{m} f_{\lambda(a;m)/\lambda'(a;m)}.$$

多项式系数 $\binom{p^{r-1}}{\ell_1\ \ell_2\ \dots\ ,,,\ell_m}$ 是 p的倍数，但在以下情形下除外：对于某个 a，$\ell_a = p^{r-1}$（且所有其他 ℓ_j 均为 0）。因此，我们只需考虑这样的情况：从 λ 到 λ' 的过程中，长度为 m 的所有钩子都局限于一个子序列 s（a；m）。到目前为止，我们尚未用到条件 λ 是一个 $p^{r-1}m$-核；只有在这种情况下，我们才需要这一假设。该假设意味着 λ（a；m）是一个 p^{r-1}- 核，因此斜图 λ（a；m）$/\lambda'$（a；m）（其大小为 $\ell_a = p^{r-1}$）不能是 λ（a；m）的边条。在这种情况下，事实证明 $f_{\lambda(a;m)/\lambda'(a;m)}$ 是 p的倍数。这由下一个引理推出，而该引理或许也具有独立的研究价值。

引理 7.1。设 π 和 τ 是两个分拆，且 π 的杨图包含 τ 的杨图（因此，对于所有 i，都有 $\pi_i \geq \tau_i$）。假设斜图 π/τ 不是分拆 π 的边条（等价地，π/τ 要么不连通，要么包含一个 2×2 方格），并且 $|\pi/\tau| = p^t$ 是一个素数幂。那么，斜形 π/τ的标准杨表数量记为 $f_{\pi/\tau}$，它是 p 的倍数。

证明。先设 π/τ 不连通，并由 $k \geq 2$ 个极大连通斜形 S_1、.....、 S_k组成，其中 $|S_j| = s_j \geq 1$。那么

$$f_{\pi/\tau} = \binom{p^t}{s_1, \dots, s_k} f_{S_1} \cdots f_{S_k},$$

显然是 p的倍数。

现在设 π/τ 是一个连通斜形，但包含一个 2×2 方格，因此它不是 π的边条。由于 $f_{\pi/\tau}$ 仅取决于形状 π/τ，我们不妨设 π是极小的，即只包含斜形 π/τ所需的行数和列数。那么，π 的最大钩长等于 π的边界方格数，这严格小于 $|\pi/\tau| = p^t$（因为根据假设，π/τ 不是边条）。

这是一个基本事实（例如参见 [8], 第 I.9 节——下面的恒等式可由 [8] 公式（9.1）两边与对称函数 $e_1^{p^t}$ 取霍尔内积得到）：

$$f_{\pi/\tau} = \sum_{\nu \vdash p^t} f_\nu c_{\tau\nu}^{\pi},$$

其中求和遍及 ν 的分拆，$f_\nu = \chi^\nu_{(1,\dots,1)}$ 是与 ν 对应的不可约特征的次数，而 $c_{\tau\nu}^{\pi}$ 是刘特伍德–理查森系数（它们都是整数）。由引理 2.1，$f_\nu \equiv \chi^\nu_{(p^t)} \pmod{p}$，因此除非 ν 是长度为p^t的钩，否则 $p \mid f_\nu$。现在假设 ν 是长度为 p^t的钩。这里我们用到刘特伍德–理查森系数 $c_{\tau\nu}^{\pi}$ 非零的必要条件是，分拆 ν 的杨图包含于 π的杨图中（再次参见 [8] 的第 I.9 节）。但是 π 的所有钩长度都是 $< p^t$，因此 π不可能包含长度为 p^t的钩 ν。于是，要么 $c_{\tau\nu}^{\pi} = 0$，要么 $p | f_\nu$，因此引理得证。□

8. Preliminaries for the proof of Proposition 2.3

与 [16], 中一样，令 $\widetilde{p}(k)$ 表示将非负整数 k 分拆为 p的幂的分拆数，并约定 $\widetilde{p}(0)=1$。用 $F_p(t)$ 表示相应的生成函数

$$F_p(t):=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k)e^{-k/t}=\prod_{j=0}^{\infty}\left(1-e^{-p^j/t}\right)^{-1},$$

其中 $t>0$ 是一个实数。我们先回顾一下我们先前工作中的一些估计 [16] .

引理 8.1（ [16] 的引理 2）。当 $0<t\le 1$ 时，我们有 $F_p(t)=O(1)$；当 $t\ge 1$ 时，我们有

$$\frac{(\log t)^2}{2\log p}+\frac{1}{2}\log t+O(1)\le\log F_p(t)\le\frac{(\log t)^2}{2\log p}+\frac{1}{2}\log t+\frac{1}{8}\log p+O(1).$$

对于固定的素数 p，已有更精确的结果，因为自 Mahler [9] 和 de Bruijn [1] 的工作以来，将整数分拆为素数幂之和的研究已十分广泛。我们只需要引理 8.1 中的估计；这些估计较为粗略，但对 p 一致成立。

给定一个将 μ 分拆为 k 的若干次幂之和的分拆，令 $\widetilde{\mu}$ 表示通过反复将每组大小为 p^j 、出现 p^r 次的部分替换为大小为 p^{j+1} 的 p^{r-1} 个部分，直到没有任何部分出现超过 p^r-1 次后得到的分拆。对于每个非负整数 s，定义 $\widetilde{p}(k;s)$ 为将 k 分拆为 p 的若干次幂之和、且对任意 $j\ge s$， $\widetilde{\mu}$ 不含有（至少） p^{r-1} 个大小相同的 p^j 部分的分拆 μ 的数量。本节的第二个引理给出了 $\widetilde{p}(k)$ 与 $\widetilde{p}(k;s)$ 之差的一个有用下界。

引理 8.2. 对所有 $s\ge 2$ 和 $k\ge p^{r+s-1}(1+4/s)$，有

$$\widetilde{p}(k)-\widetilde{p}(k;s)\ge\frac{p^{s(s-1)/2}}{(s-1)^{s-1}}.$$

证明。我们将构造至少 $p^{s(s-1)/2}/(s-1)^{s-1}$ 个分拆，这些分拆是 $\widetilde{p}(k)$ 所计数的 k 的分拆，却不属于 $\widetilde{p}(k;s)$。对于每个 $1\le i\le s-1$，选取一个处于以下范围内的整数 a_i

$$0\le a_i\le\frac{p^{s-i}}{s-1}.$$

每一种对 a_1、.....、a_{s-1} 的选择，都会通过将 a_i 个 p^i 用于 $1\le i\le s-1$，并将 $k-\sum_{i=1}^{s-1}a_ip^i$ 个 1 用于 $1\le i\le s-1$，得到一个由 $\widetilde{p}(k)$ 计数的分拆 μ。这类分拆的数量为

$$\prod_{i=1}^{s-1}\left\lceil\frac{p^{s-i}}{s-1}\right\rceil\ge\prod_{i=1}^{s-1}\frac{p^{s-i}}{s-1}=\frac{p^{s(s-1)/2}}{(s-1)^{s-1}}.$$

注意，如果 $i>s-\log(s-1)/\log p$，那么 a_i 必须为零，因此所有这些分拆的最大部分都不超过 $\frac{p^s}{s-1}$。

我们必须检查每个这样的 μ 没有被计入 $\widetilde{p}(k;s)$；也就是说，对应的 $\widetilde{\mu}$ 中，某个满足 $j\ge s$ 的部分 p^j 至少出现 p^{r-1} 次。假设情况并非如此。注意，根据构造，任意部分在 μ 中出现的次数与其在 $\widetilde{\mu}$ 中出现的次数模 p^{r-1} 同余。由于任何部分在 $\widetilde{\mu}$ 中出现的次数都不可能超过 p^r-1，因此，在 $\widetilde{\mu}$ 中出现少于 p^{r-1} 次或多于 p^r-p^{r-1} 次的任何部分，都必定曾出现在原始分拆 μ 中。由于 μ 的所有部分都小于 $p^s/(s-1)$，我们得出结论， $\widetilde{\mu}$ 中至多可以包含：(i) 任意部分 p^j 的 p^r-1 个副本

满足 $p^j \le p^s/(s-1)$ 的部分；(ii) 满足 $p^s/(s-1) < p^j \le p^{s-1}$ 的任意部分 p^j 至多有 $p^r - p^{r-1}$ 个副本；以及 (iii) 不含大小为 p^j 且满足 $j \ge s$ 的部分。但这些限制意味着

$$k = |\widetilde{\mu}| \le (p^r-1) \sum_{p^j \le p^s/(s-1)} p^j + (p^r - p^{r-1}) \sum_{p^s/(s-1) < p^j \le p^{s-1}} p^j$$
$$< (p^{r-1}-1)\frac{p^s}{(s-1)}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1} + (p^r-p^{r-1})p^{s-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1} < p^{r+s-1}\Big(1+\frac{4}{s}\Big),$$

这与我们对 k 大小的假设相矛盾。 □

9. 命题 2.3 的证明

令 $\mathcal{L}$ 为一个与 p 互素的正整数集合，并定义 $p(n;\mathcal{L},s)$ 为分拆 μ n 的分拆数，其中对于每个 $\ell \in \mathcal{L}$ 和 $j \ge s$， $\widetilde{\mu}$ 中包含的相同大小的部分 ℓp^j 少于 p^{r-1} 个。我们将通过对精心选取的 $\mathcal{L}$ 和 s，为 $p(n;\mathcal{L},s)$ 建立一个上界，从而证明命题 2.3。

引理 9.1。设 n 足够大，且 $p^r \le 10^{-3}\log n/\log\log n$。Pu t

$$x = \frac{\sqrt{6n}}{\pi}, \qquad s = \Big\lfloor \frac{\log\sqrt{n}}{ep^r} \Big\rfloor, \tag{9.1}$$

并令 $\mathcal{L}$ 为区间 $[L, L + x/p^{r+s-1}]$ 中与 p 互素的整数所组成的集合，其中 L 是取值范围为

$$\frac{\sqrt{6n}}{2\pi p^{r+s-1}} \le L \le \Big(1+\frac{1}{5p^r}\Big)\frac{\sqrt{6n}}{2\pi p^{r+s-1}}\log n. \tag{9.2}$$

Then

$$p(n;\mathcal{L},s) \ll p(n)n^{\frac{3}{4}}\exp(-n^{\frac{1}{16p^r}}).$$

在证明引理之前，我们先看看如何推出命题 2.3。选取 r 个不同的值 L_j（满足 $1 \le j \le r$），且它们都属于以下范围

$$\Big(1+\frac{1}{6p^r}\Big)\frac{\sqrt{6n}}{2\pi p^{r+s-1}}\log n \le L_j \le \Big(1+\frac{1}{5p^r}\Big)\frac{\sqrt{6n}}{2\pi p^{r+s-1}}\log n,$$

使得对应的集合 $\mathcal{L}_j$ 两两不相交。对于一个分拆 μ，若 $\widetilde{\mu}$ 不包含 r 个不同的部分 $m_1, \dots, m_r$，且每个部分至少出现 p^{r-1} 次，并且足够大（如命题中所要求），那么它必定被计入某个 $p(n;\mathcal{L}_j,s)$ 中，其中 $1 \le j \le r$。因此，由引理 9.1 可知，这类坏分拆 μ 的数量为

$$\le \sum_{j=1}^{r} p(n;\mathcal{L}_j,s) \ll rp(n)n^{\frac{3}{4}}\exp(-n^{\frac{1}{16p^r}}) \ll p(n)n\exp(-n^{\frac{1}{16p^r}}) \ll p(n)\exp(-n^{\frac{1}{20p^r}}),$$

如所声称的。

引理 9.1 的证明。考虑这样一个过程：将 μ 中大小相同的 p^r 个部分 m 合并为 p^{r-1} 个大小为 pm 的部分，从而得到 $\widetilde{\mu}$。假设 ℓ 与 p 互素，并且 μ 中所有形如 ℓp^j 的部分之和等于 ℓk。只考虑这些部分，我们可以将 μ 视为 k 的一个由 p 的幂组成的分拆，而 $\widetilde{\mu}$ 相应地给出 k 的一个由 p 的幂组成的分拆，该分拆通过反复合并 p^r

个大小为 p^j 的部分为 p^{r-1} 个大小为 p^{j+1} 的部分。因此， $p(n;\,\mathcal{L},s)$ 是生成函数中 z^n 的系数

$$\prod_{\substack{\ell\notin\mathcal{L}\\(\ell,p)=1}}\prod_{j=0}^{\infty}\Big(1-z^{\ell p^j}\Big)^{-1}\prod_{\ell\in\mathcal{L}}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k;s)z^{\ell k}\Big),$$

其等于

$$\prod_{i=1}^{\infty}\big(1-z^i\big)^{-1}\prod_{\ell\in\mathcal{L}}\Big(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k;s)z^{\ell k}}{\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k)z^{\ell k}}\Big).$$

由于 $p(n;\,\mathcal{L},s)$ 的生成函数中所有系数均非负，因此对于任意 $0<z<1$，必有

$$p(n;\mathcal{L},s)\le\frac{1}{z^n}\prod_{i=1}^{\infty}\big(1-z^i\big)^{-1}\prod_{\ell\in\mathcal{L}}\Big(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k;s)z^{\ell k}}{\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k)z^{\ell k}}\Big).\tag{9.3}$$

回顾 $x=\sqrt{6n}/\pi$，并在界（9.3）中取 $z=e^{-1/x}$。于是，根据分拆函数的渐近公式以及分拆数生成函数的基本估计（见 [3] 的第VIII.6节），我们得到

$$p(n;\mathcal{L},s)\ll n^{3/4}p(n)\prod_{\ell\in\mathcal{L}}\Big(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k;s)z^{\ell k}}{\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{p}(k)z^{\ell k}}\Big)\ll n^{3/4}p(n)\exp(-\Delta),\tag{9.4}$$

其中

$$\Delta:=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}\frac{1}{F_p(x/\ell)}\sum_{k=0}^{\infty}(\widetilde{p}(k)-\widetilde{p}(k;s))e^{-\ell k/x}.$$

目前为止，我们的工作适用于任意由与 p 互素的 $\mathcal{L}$ 个整数组成的集合；现在转而讨论当前情形。根据 L 的下界以及我们对 x 的选择，对于所有 $\ell\in\mathcal{L}$，有如下界

$$F_p\Big(\frac{x}{\ell}\Big)\le F_p\Big(\frac{x}{L}\Big)\le F_p\Big(\frac{2p^{r+s-1}}{\log n}\Big).$$

由此估计、我们对 $\mathcal{L}$ 的选择以及引理 8.2 可得

$$\Delta\ge\frac{1}{F_p(2p^{r+s-1}/\log n)}\sum_{\substack{L\le\ell\le L+x/p^{r+s-1}\\(\ell,p)=1}}\ \sum_{k\ge p^{r+s-1}(1+4/s)}\frac{p^{s(s-1)/2}}{(s-1)^{s-1}}e^{-\ell k/x}.\tag{9.5}$$

对于范围 $L\le\ell\le L+x/p^{r+s-1}$ 内的 ℓ，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge p^{r+s-1}(1+4/s)}e^{-\ell k/x}&\ge\exp\Big(-\frac{\ell p^{r+s-1}}{x}\Big(1+\frac{4}{s}\Big)\Big)\frac{e^{-\ell/x}}{1-e^{-\ell/x}}\\&\ge\frac{x}{2L}\exp\Big(-\Big(\frac{Lp^{r+s-1}}{x}+1\Big)\Big(1+\frac{4}{s}\Big)\Big).\end{aligned}$$

将其代入（9.5）的右边，并注意到（由于 p^{r+s-1} 相对于 x较小）

$$|\mathcal{L}|\ge\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{x}{p^{r+s-1}}-2\ge\frac{x}{3p^{r+s-1}},$$

我们得到（利用对 x 的选择以及 L的取值范围）

$$\begin{aligned}\Delta &\geq \frac{1}{F_p(2p^{r+s-1}/\log n)}\cdot\frac{p^{s(s-1)/2}}{(s-1)^{s-1}}\cdot\frac{x}{3p^{r+s-1}}\cdot\frac{x}{2L}\exp\Big(-\Big(\frac{Lp^{r+s-1}}{x}+1\Big)\Big(1+\frac{4}{s}\Big)\Big)\\ &\geq \frac{1}{6}\frac{1}{F_p(2p^{r+s-1}/\log n)}\cdot\frac{p^{s(s-1)/2}}{(s-1)^{s-1}}\cdot\frac{x}{\log n}\cdot\exp\Big(-\Big(\frac{Lp^{r+s-1}}{x}+1\Big)\Big(1+\frac{4}{s}\Big)\Big).\end{aligned}$$

利用引理 8.1 和界 $p^r \leq \log\sqrt{n}$，可得

$$\begin{aligned}\log F_p\Big(\frac{2p^{r+s-1}}{\log n}\Big) &\leq \frac{1}{2\log p}\Big(\log\frac{p^{r+s-1}}{\log\sqrt{n}}\Big)^2+\frac{1}{2}\log\frac{p^{r+s-1}}{\log\sqrt{n}}+\frac{1}{8}\log p+O(1)\\ &\leq \frac{1}{2\log p}\Big(\log\frac{p^{r+s-1}}{\log\sqrt{n}}\Big)^2+\frac{s}{2}\log p+O(1).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\log\frac{p^{s(s-1)/2}}{F_p(2p^{r+s-1}/\log n)(s-1)^{s-1}} &\geq \frac{s^2}{2}\log p-\frac{1}{2\log p}\Big(\log\frac{p^{r+s-1}}{\log\sqrt{n}}\Big)^2-s\log ps+O(1)\\ &\geq s\log\frac{\log\sqrt{n}}{p^r s}-\frac{(\log\log\sqrt{n})^2}{2\log p}+O(1).\end{aligned}$$

回想我们对 s 的选择，可得

$$\begin{aligned}\log\Delta &\geq s\log\frac{\log\sqrt{n}}{p^r s}+\log\sqrt{n}-\frac{(\log\log\sqrt{n})^2}{2\log p}-\log\log n-\frac{Lp^{r+s-1}}{x}\Big(1+\frac{4}{s}\Big)+O(1)\\ &\geq \Big(1+\frac{1}{ep^r}\Big)\log\sqrt{n}-\frac{Lp^{r+s-1}}{x}-\log\log n-\frac{(\log\log\sqrt{n})^2}{2\log p}+O(1)\\ &\geq \Big(\frac{1}{ep^r}-\frac{1}{5p^r}\Big)\log\sqrt{n}-(\log\log n)^2+O(1)\geq\frac{\log n}{15p^r}-(\log\log n)^2+O(1),\end{aligned}$$

在使用 u 之后　pper 上界 (9.2) 中的 L。在范围 $p^r \leq 10^{-3}\log n/(\log\log n)^2$ 内，我们得到

$$\log\Delta\geq\frac{\log n}{16p^r}+O(1),$$

将其用于 (9.4) 即可得到该引理。 □

References

[1] N. G. de Bruijn. 关于马勒分拆问题。荷兰皇家艺术与科学学院，论文集，51:659–669 = Indagationes Math. 10, 210–220 (1948), 1948年。[2] P. Erd˝os 和 J. Lehner. 正整数分拆中项数的分布。《杜克数学杂志》，8:335–345, 1941年。[3] P. Flajolet 和 R. Sedgewick. 解析组合学。剑桥大学出版社，剑桥，2009年。[4] W. Fulton 和 J. Harris. 表示论，数学研究生教材第129卷。Springer- Verlag，纽约，1991年。数学读本，入门课程。[5] D. Gluck. S_n的特征标表各列的奇偶性。《美国数学会会刊》，147(3):1005–1011, 2019年。[6] G. James 和 A. Kerber. 对称群表示论，《数学及其应用百科全书》第16卷。艾迪生-韦斯利出版公司，马萨诸塞州雷丁，1981年。[7] M. J. Larsenand A. R. Miller. 李型高秩群特征标表的稀疏性。《表示论》，25:173–192, 2021年。

[8] I. G. Macdonald. 对称函数与霍尔多项式。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，第二版，1995年。A. Zelevinsky 参与撰写，牛津科学出版物。[9] K. Mahler. 关于一个特殊函数方程。伦敦数学会会刊，15:115–123, 1940年。[10] J. McKay. 奇数度不可约表示。代数杂志，20:416–418, 1972年。[11] A. R. Miller. 关于对称群不可约特征的奇偶性的注记。预印本，2017年。arXiv:1708.03267。[12] A. R. Miller. 对称群特征标表中的同余关系。预印本，2019年。arXiv:1908.03741。[13] A. R. Miller. 关于对称群的奇偶性与特征。《组合理论杂志A辑》，162:231–240, 2019年。[14] L. Morotti. 对称群特征标表各列中的素数整除性。巴塞尔数学档案，114(4):361–365, 2020年。[15]S. Peluse. 关于对称群特征标表中的偶数项。预印本，2020年。arXiv:2007.06652。[16] S. Peluse 和 K. Soundararajan. 对称群特征标表中几乎所有项都是任意给定素数的倍数。纯粹与应用数学杂志，786:45–53, 2022年。

School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA, & Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ, USA电子邮箱地址：speluse@princeton.edu

Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA, USA电子邮箱地址：ksound@stanford.edu