非精确蕴涵与否定逻辑

Ivan Chajda 和 Helmut L¨anger

arXiv:2301.02205v1 [math.LO] 5 Jan 2023

摘要

众所周知，直觉主义逻辑可以通过布劳威尔半格，即相对伪补半格来形式化。在这种形式化中，逻辑联结词蕴涵被视为相对伪补，而合取则是半格运算交。若布劳威尔半格具有底元 0，则相对于 0 的相对伪补称为伪补，并被视为该逻辑中的联结词否定。我们的想法是，考虑一个满足升链条件的任意含 0 交半格；该条件在有限半格中显然成立。然后将联结词否定 x^0 定义为满足 $x \wedge z = 0$ 的所有极大元 z 所组成的集合，并将联结词蕴涵 $x \to y$ 定义为满足 $x \wedge z \leq y$的所有极大元 z 所组成的集合。这种否定和蕴涵是 “ 非精确的 ”，因为它们分别将半格中的一个元素 x 或两个元素 x 和 y 映射为一个子集，而非半格中的一个元素。令人惊讶的是，这种否定和蕴涵仍保留了直觉主义逻辑中这些联结词的若干性质，尤其是肯定前件式推理规则。此外，非锐否定和非尖锐蕴涵分别可以用五条和七条简单公理刻画。文中给出了若干例子，并介绍了演绎系统和滤子的概念，以及由此类滤子确定的同余。最后，我们描述了这些概念之间的某些关系。

美国数学学会主题分类：03G10, 03G25, 03B60, 06A12, 06D20

关键词：半格、布劳威尔半格、海廷代数、直觉主义逻辑、非锐否定、非尖锐蕴涵、演绎系统、滤子、同余

1 引言

直觉主义逻辑通常通过布劳威尔半格进行代数形式化，即半格 $(S, \wedge, *)$，其中 $*$ 表示相对伪补运算，并被视为蕴涵联结词，参见 [1], [2], [12], [15] 和 [16]。若 $(S, \wedge, *)$ 有 0，则 $x*0$ 是 x 的伪补，通常记作 x^*，并在该逻辑中被视为 x 的否定。若 $(S, \wedge, *, 0)$ 还是一个格，则称其为海廷代数，参见 [14] 和 [17]。作者在 [4] 和 [5] 中将伪补运算的概念推广到偏序集，并对其进行了研究。

众所周知，每个布劳威尔格（或海廷代数）都是分配的。第一作者将相对伪补运算的概念以截面伪补运算之名推广到了非分配格，参见 [3] 和 [9]。

因此，可以在具有截面伪补运算的格上建立一种非分配直觉主义逻辑。

在此前的论文中， [6] 和 [8] 作者指出，一些重要的逻辑也可以建立在不必是格的偏序集之上。这类逻辑的一个例子是基于正交模偏序集的量子力学逻辑，参见例如 [6], [10], [11] 和[18]。显然，在这种情况下，析取或合取等某些逻辑联结词可能只是偏运算；或者，正如作者在 [8]和[7], 中所指出的，它们也可以被视为“非锐版本”，即其结果不必是单个元素，而可以是相应偏序集的一个子集。因此，蕴涵联结词也以这种方式构造为“非锐”的。关于“非锐性”，另见 [13]。这促使我们研究一种基于格的直觉主义逻辑变体：这些格既不必是相对伪补的，甚至也不必是分段伪补的，其中蕴涵联结词是非锐的。

2 预备知识

下文中，我们将单元素集与其唯一元素视为相同，即用 x 代替 $\{x\}$。此外，本文后续讨论的所有偏序集均假设满足升链条件，简称升链条件。这意味着每个元素都位于某个极大元之下。显然，每个有限偏序集都满足升链条件。设 $(P, \leq)$ 为一个偏序集，$b \in P$ 且 $A, B \subseteq P$。我们用 $\mathsf{Max}\ A$ 表示 A 的所有极大元构成的集合。定义

$$\begin{aligned} &A \leq B \text{ if } a \leq b \text{ for all } a \in A \text{ and all } b \in B, \\ &A \leq_1 B \text{ if for every } a \in A \text{ there exists some } b \in B \text{ with } a \leq b, \\ &A \approx_1 B \text{ if } A \leq_1 B \text{ and } B \leq_1 A. \end{aligned}$$

关系 $\leq_1$ 是 2^P 上的拟序关系，而 $\approx_1$ 是 2^P 上的等价关系。容易看出，若 $A \subseteq B$，则 $A \leq_1 \mathsf{Max}\, B$，并且 $A \leq_1 b$ 等价于 $A \leq b$。
设 $\mathsf{S} = (S, \wedge)$ 是任意一个交半格，且 $A, B \subseteq S$。定义

$$A \wedge B := \{a \wedge b \mid a \in A, b \in B\}.$$

3 非锐否定

设 $(S, \wedge, 0)$ 是满足升链条件的交半格，且 $a \in S$ 和 $A \subseteq S$。我们定义

$$a^0 := \mathrm{Max}\{x \in S | a \wedge x = 0\}.$$

因此， ^{0} 是交半格 $(S, \wedge, 0)$ 上的一个一元算子；该交半格满足升链条件。此算子将每个元素 $x \in S$ 映射到非空子集 $x^0 \subseteq S$。若 $a^{00} = a$，则称元素 a 为尖锐。此外，我们定义

$$A^0 := \mathrm{Max}\{x \in S | A \wedge x = 0\}.$$

我们将证明，对于每个满足升链条件的含 0 交半格，算子 ^{0} 都具有以下性质。

定理 3.1. 设 S $=(S,\wedge,0)$ 是一个满足升链条件的含 0 交半格，且$a,b\in S$。则有以下结论:

(i) a^0 是一个反链，(ii) $a\leq_1 a^{00}$,
(iii) $a\leq b$ 蕴含 $b^0\leq_1 a^0$，(iv) $0^0=$ 极大元S，(v) $a\wedge a^0=0$，(vi) 若 S 有界，则 $0^0=1$ 且 $1^0=0$，(vii) $a\wedge 0^0\approx_1 a$,
(viii) $a\wedge(a\wedge b)^0\approx_1 a\wedge b^0$。

证明。

(i) 显然。

(ii) 我们有 $a\in\{x\in S\mid a^0\wedge x=0\}$。

(iii) 若 $a\leq b$，则 $\{x\in S\mid b\wedge x=0\}\subseteq\{x\in S\mid a\wedge x=0\}$。

(iv) 和 (v) 直接由 a^0的定义得出。

(vi) 若 S 有界，则根据 (iv)

$$\begin{aligned}0^0&=\operatorname{Max}S=1,\\1^0&=\operatorname{Max}\{x\in S\mid 1\wedge x=0\}=\operatorname{Max}\{0\}=0.\end{aligned}$$

(vii) 根据 (iv)，我们有 $a\leq_1$ 极大元 $S=0^0$，因此 $a\leq_1 a\wedge 0^0\leq a$.

(viii) 以下每个陈述都蕴含下一个陈述:

$$\begin{aligned}(a\wedge b)\wedge(a\wedge b)^0&=0,\\b\wedge\big(a\wedge(a\wedge b)^0\big)&=0,\\a\wedge(a\wedge b)^0&\leq_1 b^0,\\a\wedge(a\wedge b)^0&\leq_1 a\wedge b^0.\end{aligned}$$

由 $a\wedge b\leq b$，根据 (iii) 可得 $b^0\leq_1(a\wedge b)^0$，因此 $a\wedge b^0\leq_1 a\wedge(a\wedge b)^0$。

□

由定理 3.1 的 (iii) 立即可得 $x^0\wedge y^0\leq(x\wedge y)^0$。

例 3.2. 考虑图 1 所示的交半格:

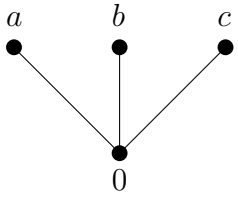


图 1 交半格

我们有

$$a = \{b, c\}^0 = a^{00},$$
$$0^0 = \{a, b, c\},$$
$$a \wedge (a \wedge b)^0 = a \wedge 0^0 = a \wedge \{a, b, c\} = \{0, a\} = a \wedge \{a, c\} = a \wedge b^0$$

分别根据定理 3.1 的 (ii)、(iv) 和 (viii)。

例 3.3。考虑图 2 所示的模格 L:

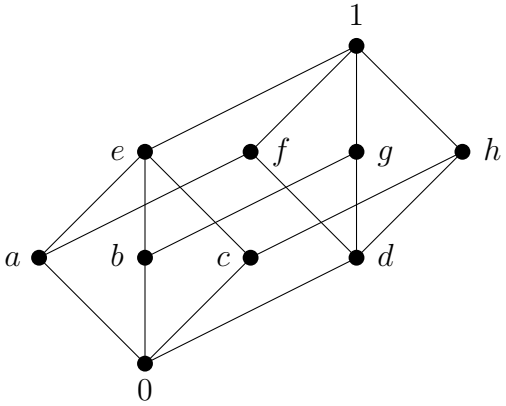


图 2 模格

我们有

$$a^{00} = \{g, h\}^0 = a,$$
$$f^{00} = \{b, c\}^0 = f,$$
$$a^0 \wedge e^0 = \{g, h\} \wedge d = d \neq \{g, h\} = a^0 = (a \wedge e)^0.$$

因此 a 和 f 是尖锐的，而等式 $x^0 \wedge y^0 = (x \wedge y)^0$ 一般并不成立。在图 2 的 L 中，我们有

$$e^0 = d \ and \ d^0 = e.$$

由于 $e \wedge d = 0$ 和 $e \vee d = 1$，$\{0, d, e, 1\}$ 是有补格。

如果 a^0 是单元素集，它未必是 a的补，即使半格是格也是如此。例如，考虑一个四元素格，其原子为 a 和 b，并有一个额外的最大元 1。那么 $a^0 = b$，但 $a \vee b \neq 1$，也就是说，a^0 不是 a的补。

对于每个基数 n，令 $\mathbf{M}_n = (M_n, \vee, \wedge)$ 表示一个长度为 2、具有 n个原子的有界模格。

图 2 中的情形可以推广如下。

注 3.4. 布尔代数与任意多个格 $\mathbf{M}_n$ （可能彼此不同 n）的直积中的每个元素都是尖锐的。

这是直接由以下事实得出的：布尔代数中的每个元素以及格 $\mathbf{M}_n$ 中的每个元素都是尖锐的。

然而，若格 L 不是若干二元格与 $\mathbf{M}_n$的直积，则注 3.4 中的断言未必成立，见下例。

例 3.5. 考虑图 3 所示的格：

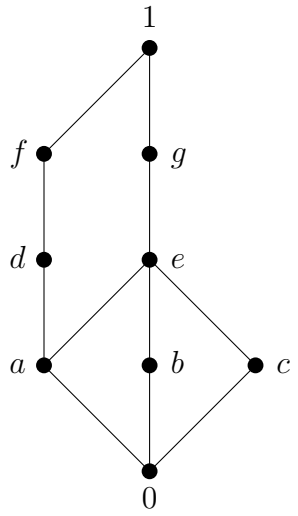


图 3 格

我们有

$$\begin{aligned} a^{00} &= \{b,c\}^0 = f \neq a, \\ a^{000} &= f^0 = \{b,c\} = a^0, \\ b^{00} &= \{c,f\}^0 = b, \\ (a^0 \wedge b^0)^{00} &= (\{b,c\} \wedge \{c,f\})^{00} = \{0,c\}^{00} = \{b,f\}^0 = c \neq \{0,c\} = a^0 \wedge b^0, \\ (c^0 \wedge f^0)^{00} &= (\{b,f\} \wedge \{b,c\})^{00} = \{0,b\}^{00} = \{c,f\}^0 = b \neq \{0,b\} = e^0 \wedge f^0. \end{aligned}$$

因此， a 不是尖锐的， b 是尖锐的，并且等式 $(x^0 \wedge y^0)^{00} = x^0 \wedge y^0$ 一般并不成立。

我们将证明，算子 ^{0} 可以用四个简单条件来刻画。

定理 3.6. 设 $(S, \wedge, 0)$ 是满足升链条件的带 0 交半格，且 ^{0}是 S上的一元算子。那么以下条件等价：

(i) $x^0 = \mathrm{Max}\{y \in S \mid x \wedge y = 0\}$ *for all* $x \in S$,

(ii) 算子 ^{0} 满足以下条件：

(P1) x^0 是一个反链，

(P2) $x \wedge 0^0 \approx_1 x$,

(P3) $x \wedge x^0 \approx 0$,

(P4) $x \wedge (x \wedge y)^0 \approx_1 x \wedge y^0$.

证明。
(i) ⇒ (ii)：这由定理 3.1 得出。(ii) ⇒(i)：若
$x \wedge y = 0$，则根据 (P2) 和 (P4)，我们有

$$y \approx_1 y \wedge 0^0 = y \wedge (x \wedge y)^0 = y \wedge (y \wedge x)^0 \approx_1 y \wedge x^0 \leq_1 x^0$$

因此 $y \leq_1 x^0$。反过来，若 $y \leq_1 x^0$，则根据 (P3)，我们有

$$x \wedge y \leq_1 x \wedge x^0 = 0$$

因此 $x \quad \wedge y = 0$。这表明 $x \wedge y = 0$ 等价于 $y \leq_1 x^0$。由此可得

$$\mathrm{Max}\{y \in S \mid x \wedge y = 0\} = \mathrm{Max}\{y \in S \mid y \leq_1 x^0\} = x^0.$$

最后一个等式可如下看出。设 $z \in$极大元$\{y \in S \mid y \leq_1 x^0\}$。则 $z \leq_1 x^0$，即存在某个 $u \in x^0$ 满足 $z \leq u$。我们有 $u \leq_1 x^0$。现在， $z < u$将推出$z \notin$ 极大元$\{y \in S \mid y \leq_1 x^0\}$，这与假设矛盾。这表明 $z = u \in x^0$。反过来，假设$z \in x^0$。则 $z \leq_1 x^0$。若 $z \notin$ 极大元 $\{y \in S \mid y \leq_1 x^0\}$，则存在某个 $u \in S$满足 $z < u \leq_1 x^0$，因而存在某个 $w \in x^0$ 满足 $z < u \leq w$，这与 (P1) 矛盾。这表明 $z \in$ 极大元$\{y \in S \mid y \leq_1 x^0\}$。 □

4 非尖锐蕴涵

现在，我们按如下方式将相对伪补运算推广到满足升链条件的任意带 0 交半格：设 S $= (S, \wedge, 0)$ 是满足升链条件的带 0 交半格，且 $a, b \in S$ 和 $A, B \subseteq S$。我们定义

$$a \to b := \mathrm{Max}\{x \in S \mid a \wedge x \leq b\}.$$

因此， $\to$ 是 S 上的二元算子，它将每一对 $(x, y) \in S^2$ 映射到非空子集 $x \to y \subseteq S$。显然，

$$x^0 = x \to 0 \text{ for each } x \in S.$$

此外，我们定义

$$A \to B := \mathrm{Max}\{x \in S \mid A \wedge x \leq B\}.$$

例 4.1。图 1 中交半格上的算子 $\to$ 的“运算表”如下所示（我们用 abc 代替 $\{a, b, c\}$，依此类推）：

$\to$	0	a	b	c
0	abc	abc	abc	abc
a	bc	abc	bc	ab
b	ac	ac	abc	ac
c	ab	ab	ab	abc

例 4.2。图 3 中交半格上的算子 $\to$ 的“运算表”如下所示（我们用 bc 代替 $\{b,c\}$，依此类推）：

$\to$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	bc	1	bc	bc	1	1	1	1	1
b	cf	cf	1	cf	cf	1	cf	1	1
c	bf	bf	bf	1	bf	1	bf	1	1
d	bc	g	bc	bc	1	g	1	g	1
e	0	f	b	c	f	1	f	1	1
f	bc	g	bc	bc	dg	g	1	g	1
g	0	f	b	c	f	ef	f	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

可以证明二元算子 $\to$ 具有以下性质。

定理 4.3. 设 S $=(S,\wedge,0)$ 是满足升链条件和$a,b,c\in S$的含 0 交半格。则有以下结论：

(i) $a\to b$ 是反链，(ii) $a\le b$ 蕴含 $a\to b=$ 极大元S，(iii) $b\in$ 极大元S 蕴含 $b\in a\to b$，(iv) $b\le_1 a\to b$，(v) $a\le_1(a\to b)\to b$，(vi) $a\le b$ 蕴含 $c\to a\le_1 c\to b$ 和 $b\to c\le_1 a\to c$。

(vii) $a\wedge(a\to b)\approx_1 a\wedge b$，

(viii) $a\to(b\wedge c)\approx_1(a\to b)\wedge(a\to c)$，(ix) $(a\to b)\wedge b\approx_1 b$，(x) 若 S 有界，则 $1\to b=b$，(xi) $a\wedge(b\to b)\approx_1 a$，(xii) 若 S 有界，则 $a\to b=1$ 当且仅当 $a\le b$，(xiii) $b\le_1 a\to(a\wedge b)$。

证明。

(i) 这显然成立。

(ii)、(iv)、(x)、(xii) 和 (xiii) 由.....的定义立即得出$\to$。(iii) 若 $b\in$极大元 S，则根据 $a\wedge b\le b$，我们有 $b\in$极大元$\{x\in S\mid a\wedge x\le b\}=a\to b$。(v) 由于 $a\wedge x\le b$ 对所有 $x\in a\to b$ 都成立，我们有 $a\wedge(a\to b)\le b$，即 $(a\to b)\wedge a\le b$。

(vi) 若 $a \leq b$，则

$$\{x \in S \mid c \wedge x \leq a\} \subseteq \{x \in S \mid c \wedge x \leq b\},$$
$$\{x \in S \mid b \wedge x \leq c\} \subseteq \{x \in S \mid a \wedge x \leq c\}.$$

(vii) 根据 (iv)，我们有 $a \wedge x \leq b$，因此 $a \wedge x \leq a \wedge b$ 对所有 $x \in a \to b$ 均成立，从而 $a \wedge b \leq_1 a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$。

(viii) 根据 (vii)，我们有 $a \to (b \wedge c) \leq_1 (a \to b) \wedge (a \to c)$。反过来，假设 $d \in a \to b$ 且 $e \in a \to c$。那么 $a \wedge d \leq b$ 且 $a \wedge e \leq c$，因此 $a \wedge (d \wedge e) \leq b \wedge c$，这意味着 $d \wedge e \leq_1 a \to (b \wedge c)$。这表明 $(a \to b) \wedge (a \to c) \leq_1 a \to (b \wedge c)$。

(ix) 根据 (iv)，我们有 $b \leq_1 a \to b$，因此 $b \leq_1 (a \to b) \wedge b \leq$ b.

(xi) 根据 (ii)，我们有 $a \leq_1 \mathrm{Max}\, S = b \to b$，因此 $a \leq_1 a \wedge (b \to b) \leq a$。

□

由定理 4.3 可见，尽管二元算子 $\to$ 是非尖锐的，但它仍具有直觉主义逻辑中逻辑联结词蕴涵的性质；也就是说，对于 x、$y \in S$，$x \to y$ 的结果不一定是单元素集。因此，它拓展了基于海廷代数 $(L, \vee, \wedge, *, 0)$ 的直觉主义逻辑，其中 $\vee$ 仍表示析取，$\wedge$ 表示合取，而 $\to$ 表示非尖锐蕴涵，^{0} 表示非锐否定。

例 4.4。考虑图 4 所示的模格：

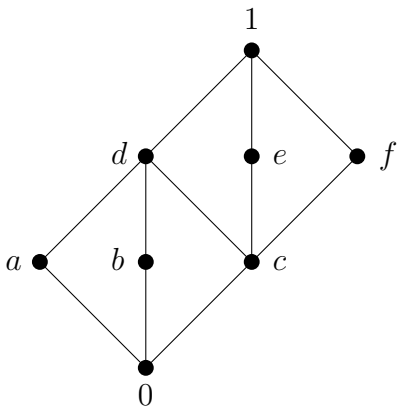


图 4 模格

Then

$$e \leq_1 \{d, e\} = \{e, f\} \to e = (d \to e) \to e,$$
$$d \wedge (d \to e) = d \wedge \{e, f\} = c = d \wedge e,$$
$$(d \to e) \wedge e = \{e, f\} \wedge e = \{c, e\} \approx_1 e$$

分别根据定理 4.3 的 (v)、(vii) 和 (ix)。

备注 4.5. 不难看出，运算 $\wedge$ 与算子 $\to$ 之间存在所谓的非尖锐伴随关系，即

$$a \wedge b \leq c \text{ if and only if } a \leq_1 b \to c.$$

由于运算 $\wedge$ 具有结合性、交换性和单调性，因此可将其视为三角范数。因此，赋予算子 $\to$ 的半格 $(S, \wedge, \to)$ 是一个非锐剩余半格。此外，由定理 4.3 的 (viii) 可得

$$a \wedge (a \to b) \approx_1 a \wedge b$$

这表明 $(S, \wedge, \to)$ 满足可除性。

与一元算子 ^{0} 类似，我们可以如下刻画满足升链条件的带 0 交半格上的二元算子 $\to$ 。

定理 4.6. 设 $(S, \wedge, 0)$ 是满足升链条件的带 0 交半格，且 $\to$ 是 S 上的一个二元算子。则以下条件等价：

(i) $x \to y = \mathrm{Max}\{z \in S \mid x \wedge z \leq y\}$ *for all* $x, y \in S$,

(ii) 算子 $\to$ 满足以下条件：

(R1) $x \to y$ *is an antichain,*
(R2) $x \wedge (x \to y) \approx_1 x \wedge y$,
(R3) $(x \to y) \wedge y \approx_1 y$,
(R4) $x \to (y \wedge z) \approx_1 (x \to y) \wedge (x \to z)$,
(R5) $x \wedge (y \to y) \approx_1 x$,
(R6) $y \leq z$ *implies* $x \to y \leq_1 x \to z$.

证明。
(i) $\Rightarrow$ (ii)：这由定理 4.3 得出。(ii) $\Rightarrow$(i)：若 $x \wedge z \leq y$，则根据 (R3)、(R5)、(R4) 和 (R6)，有

$$z \approx_1 (x \to z) \wedge z \leq_1 x \to z \approx_1 (x \to x) \wedge (x \to z) \approx_1 x \to (x \wedge z) \leq_1 x \to y$$

因此 $z \leq_1 x \to y$。反过来，若 $z \leq_1 x \to y$，则根据 (R2)，有

$$x \wedge z \leq_1 x \wedge (x \to y) \approx_1 x \wedge y \leq y$$

因此 $x \wedge z \leq y$。这表明 $x \wedge z \leq y$等价于 $z \leq_1 x \to y$。综上

$$\mathrm{Max}\{z \in S \mid x \wedge z \leq y\} = \mathrm{Max}\{z \in S \mid z \leq_1 x \to y\} = x \to y.$$

最后一个等式可由如下方式看出。设 $u \in$ 极大元$\{z \in S \mid z \leq_1 x \to y\}$。那么 $u \leq_1 x \to y$，也就是说，存在某个 $v \in x \to y$，使得 $u \leq v$。我们有 $v \leq_1 x \to y$。现在 $u < v$ 将推出 $u \notin$ 极大元$\{z \in S \mid z \leq_1 x \to y\}$，这与假设矛盾。这说明 $u = v \in x \to y$。反过来，假设 $u \in x \to y$。那么 $u \leq_1 x \to y$。如果$u \notin$ 极大元 $\{z \in S \mid z \leq_1 x \to y\}$，那么就存在某个 $v \in S$，使得 $u < v \leq_1 x \to y$，进而存在某个 $w \in x \to y$，使得 $u < v \leq w$，这与 (R1) 矛盾。这说明 $u \in$ 极大元$\{z \in S \mid z \leq_1 x \to y\}$。□

例 4.7。考虑图 4 中的格。那么

$$d \wedge (d \to e) = d \wedge \{e, f\} = c = d \wedge e,$$
$$(d \to e) \wedge e = e \wedge e = e,$$
$$d \to (e \wedge f) = d \to c = \{e, f\} \approx_1 \{c, e, f\} = \{e, f\} \wedge \{e, f\} = (d \to e) \wedge (d \to f)$$

分别与 (R2)、(R3) 和 (R4) 一致。

5 演绎系统

众所周知，直觉主义逻辑中的蕴涵联结词与相应布劳威尔半格中的所谓演绎系统密切相关。接下来我们将说明，对演绎系统概念作某种修改，在具有非尖锐蕴涵的逻辑中也起着类似的作用。我们定义

定义 5.1. 交半格 $\mathbf{S} = (S, \wedge, 0)$ 的演绎系统（其中 0 满足升链条件）是满足以下条件的子集 D of S，对于 $x, y \in S$:

(D1) $(\mathrm{Max}\, S) \cap D \neq \emptyset$,

(D2) $x \in D$ 和 $(x \to y) \cap D \neq \emptyset$ 蕴涵 $y \in D$。

回顾一下，交半格 $\mathbf{S} = (S, \wedge)$ 的滤子是 S 的一个非空子集 F，满足以下条件：对于 x, $y \in S$:

(F1) 若 $x, y \in F$，则 $x \wedge y \in F$,

(F2) 若 $x \in F$ 且 $x \leq y$，则 $y \in F$。

显然，若 S 有限，则 S 的所有滤子均由集合 $[x)$ 给出，其中 $= \{y \in S \mid x \leq y\}$,$x \in S$，因此 S 的所有滤子所成的偏序集与 S 对偶同构，故为一个并半格，其中对于所有 $x, y \in S$，有 $[x) \vee [y) = [x \wedge y)$。
对于交半格 $(S, \wedge)$ 的论域中任意非空子集 A，我们定义 S 上的二元关系 $\Theta(A)$ 如下:

$$(x, y) \in \Theta(A) \text{ if there exists some } a \in A \text{ with } x \wedge a = y \wedge a.$$

尽管以下结果已为人所知，为方便读者，我们仍给出其证明。

引理 5.2. 设 $\mathbf{S} = (S, \wedge, 1)$ 是带有 1 的交半格，且 $\Phi \in \mathrm{Con}\mathbf{S}$。则下列结论成立:

(i) $[1)\Phi$ 是 S 的一个滤子,

(ii) $\Theta([1)\Phi) \subseteq \Phi$。

证明。

(i) (F1) 如果 a、$b \in [1)\Phi$，那么 $a \wedge b \in [1 \wedge 1)\Phi = [1)\Phi$。

(F2) 如果 $a \in [1]\Phi$、 $b \in S$ 和 $a \leq b$，那么 $b = 1 \wedge b \in [a \wedge b]\Phi = [a]\Phi = [1]\Phi$ 。这表明 $[1]\Phi$ 是 S 的滤子。

(ii) 若 $(a, b) \in \Theta([1]\Phi)$，则存在某个 $c \in [1]\Phi$，使得 $a \wedge c = b \wedge c$，由此可得

$$a = a \wedge 1 \; \Phi \; a \wedge c = b \wedge c \; \Phi \; b \wedge 1 = b$$

这表明 $(a, b) \in \Phi$。

□

尽管我们对演绎系统的定义不同于相对伪补半格中已知的定义，但我们仍然能够证明前面提到的概念之间存在以下关系。

定理 5.3. 设 $\mathbf{S} = (S, \wedge, 0, 1)$ 是满足升链条件且D 的一个有界交半格，其中 S 是非空子集。那么以下条件等价：

(i) D S 的一个演绎系统，(ii) D 是 S 的一个滤子，(iii) $\Theta(D) \in \mathbf{ConS}$ 且 $D = [1]\big(\Theta(D)\big)$。

证明。
(i) ⇒ (ii):

(F2) 设 $a \in D$、 $b \in S$ 和 $a \leq b$。由定理 4.3 的 (ii) 可知， $a \to b = \mathrm{Max}\, S$ 。根据 (D1)，我们有 $(a \to b) \cap D = \mathrm{Max}\, S \cap D \neq \emptyset$，因此由 (D2) 得到$b \in D$ 。

(F1) 设 a、 $b \in D$。由定理 4.3 的 (xiii)，我们得到 $b \leq_1 a \to (a \wedge b)$。因此，存在某个 $c \in a \to (a \wedge b)$，使得 $b \leq c$。现在，由 (F2) 可知 $c \in D$，因此$\big(a \to (a \wedge b)\big) \cap D \neq \emptyset$，由此我们根据 (D2) 得出 $a \wedge b \in D$。

(ii) ⇒(iii):
显然， $\Theta(D)$是自反且对称的。设(a, b)、$(b, c) \in \Theta(D)$。则存在$d, e \in D$，使得 $a \wedge d = b \wedge d$ 且 $b \wedge e = c \wedge e$。由(F1)可得 $d \wedge e \in D$。现在

$$a \wedge (d \wedge e) = (a \wedge d) \wedge e = (b \wedge d) \wedge e = (b \wedge e) \wedge d = (c \wedge e) \wedge d = c \wedge (d \wedge e)$$

由此得到$(a, c) \in \Theta(D)$，即 $\Theta(D)$是传递的。此外，若 $f \in S$，则

$$(a \wedge f) \wedge d = (a \wedge d) \wedge f = (b \wedge d) \wedge f = (b \wedge f) \wedge d$$

这表明$(a \wedge f, b \wedge f) \in \Theta(D)$。因此， $\Theta(D) \in \mathbf{ConS}$ 的同余格。若 $a \in D$，则由$a \wedge a = a = 1 \wedge a$ 可得 $a \in [1]\big(\Theta(D)\big)$，这表明 $D \subseteq [1]\big(\Theta(D)\big)$。反过来，设$a \in [1]\big(\Theta(D)\big)$。则存在某个 $b \in D$，使得 $a \wedge b = 1 \wedge b$。这意味着 $b \leq a$，由此根据(F2)可得 $a \in D$，表明 $[1]\big(\Theta(D)\big) \subseteq D$。

(iii) ⇒(i):

(D1) 如果 $a \in D$，那么，由于 S 满足升链条件，存在某个 $b \in$ 极大元S，满足 $a \leq b$，因此

$$b = 1 \wedge b \in [a \wedge b]\big(\Theta(D)\big) = [a]\big(\Theta(D)\big) = [1]\big(\Theta(D)\big) = D.$$

(D2) 若 $a \in D, b \in S$ 且 $(a \to b) \cap D \neq \emptyset$，则存在某个 $c \in D$，使得 $c \in a \to b$，因此 $a \wedge c \leq b$，由此

$$b = 1 \wedge 1 \wedge b \in [a \wedge c \wedge b]\big(\Theta(D)\big) = [a \wedge c]\big(\Theta(D)\big) = [1 \wedge 1]\big(\Theta(D)\big) = [1]\big(\Theta(D)\big) = D.$$

□

众所周知，对于相对伪补半格的一个滤子 F，有 $(a, b) \in \Theta(F)$，当且仅当 $a \to b \in F$ 且 $b \to a \in F$。然而，只要考虑非尖锐蕴涵，我们也可以将这一结果推广到满足升链条件的任意含 0 交半格。

命题 5.4. 设 S $= (S, \wedge, 0)$ 是满足升链条件的含 0 交半格， F 是 S 的一个滤子，且 $a, b \in S$。那么以下条件等价:

(i) $(a, b) \in \Theta(F)$,

(ii) $(a \to b) \cap F \neq \emptyset$ 且 $(b \to a) \cap F \neq \emptyset$。

证明。
(i) $\Rightarrow$ (ii):
存在某个 $c \in F$，使得 $a \wedge c = b \wedge c$。因此 $a \wedge c \leq b$ 且 $b \wedge c \leq a$，从而存在某个 $d \in a \to b$，使得 $c \leq d$，并且存在某个 $e \in b \to a$，使得 $c \leq e$。由 (F2) 可得 d， $e \in F$，这就证明了 (ii)。

(ii) $\Rightarrow$ (i):
设 $c \in (a \to b) \cap F$，且 $d \in (b \to a) \cap F$。由 (F1) 得 $c \wedge d \in F$、 $a \wedge c \leq b$ 和 $b \wedge d \leq a$。因此

$$a \wedge (c \wedge d) = (a \wedge c) \wedge (c \wedge d) \leq b \wedge (c \wedge d) = (b \wedge d) \wedge (c \wedge d) \leq a \wedge (c \wedge d),$$

即 $a \wedge (c \wedge d) = b \wedge (c \wedge d)$，这就证明了 (i)。 □

结论
尽管基于结构（S、 $\wedge$、0、 $\to$）的逻辑中的蕴涵并不尖锐，即 $x \to y$ 可以是 S 的子集 I，而 S 不一定是单元素集，但它具有其逻辑含义。也就是说，我们要求 $x \to y$ 是满足 $x \wedge c \leq y$ 的 S 的极大元 c（其中 $\wedge$表示合取）。并且，对于每个 $c \in I$，这一条件都得到满足。此外， I中的元素两两互不可比。因此，我们没有必要相对于其他元素偏好其中任何一个。然而，表达式

$$x \wedge (x \to y) \leq y$$

无非就是推导规则肯定前件式（无论在经典逻辑还是非经典逻辑中），因为它恰当地表明， y 的真值不能小于 x 的合取 $x \wedge (x \to y)$与蕴涵 $x \to y$的真值。因此，尽管存在非锐性，这种逻辑仍然是可靠的，尽管它是从一个满足升链条件的任意含 0 交半格导出的。

参考资料

[1] L. E. J. Brouwer，《逻辑原则的不可靠性》。Tijdschrift Wijs- begeerte 2 (1908), 152–158。[2] L. E. J. Brouwer，直觉主义与形式主义。《Bull. Amer. Math. Soc.》20 (1913), 81–96。[3] I. Chajda，将相对伪补推广至非分配格。《塞格德数学学报》69 (2003), 491–496。[4] I. Chajda，伪补偏序集与Stone偏序集。《帕拉茨基大学学报》Fac. Rerum Natur. Math. 51 (2012), 29–34。[5] I. Chajda 和 H. L¨anger，描述伪补、相对伪补及分段伪补偏序集的代数。《对称性》13 (2021), 753 (17 pp.)[6] I. Chajda 和 H. L¨anger，伪补截段有限偏序集中的蕴涵。《软计算》26 (2022), 5945–5953。[7] I. Chajda 和 H. L¨anger，有限高度正交模偏序集的逻辑。《逻辑学会会刊》30 (2022), 143–154。[8] I. Chajda 和 H. L¨anger，有限高度正交模偏序集中的算子剩余。《模糊集与系统》（已投稿）。[9] I. Chajda、H. L¨anger 和 J. Paseka，分段伪补偏序集。《序》38 (2021), 527–546。[10] D. Fazio、A. Ledda 和 F. Paoli，关于正交模偏序集完备化的Finch条件。《科学基础》(2020), https://doi.org/10.1007/s10699-020-09702-z。[11] P. D. Finch，论正交模偏序集。《澳大利亚数学学会杂志》11 (1970), 57–62。[12] O. Frink，半格中的伪补。《杜克数学杂志》29 (1962), 505–514。[13] R. Giuntini 和 H. Greuling，迈向描述非锐性质的形式语言。《物理学基础》19 (1989), 931–945。[14] A. Heyting，直觉主义逻辑的形式规则。Sitzungsber. Akad. Berlin 1930, 42–56。[15] P. K¨ohler，布劳威尔半格：全子代数格。《巴拿赫中心出版物》9 (1982), 47–56。[16] A. Monteiro，布劳威尔代数的独立公理。《阿根廷数学联合会评论》17 (1955), 149–160。[17] L. Monteiro，Heyting代数与三值Łukasiewicz代数。《圣母大学形式逻辑杂志》11 (1970), 453–466。[18] P. Pt´ak 和 S. Pulmannov´a，《作为量子逻辑的正交模结构》。Kluwer，多德雷赫特，1991。ISBN 0-7923-1207-4。

作者地址：
Ivan Chajda 帕拉茨基大学奥洛穆茨
校区 理学院 代数与几何系
17.listopadu 12 771 46 奥洛穆茨 捷
克共和国 ivan.chajda@upol.cz

Helmut L¨anger 维也纳工业大学 数学与地理
信息学院 离散数学与几何研究所 Wiedner
Hauptstraße 8-10 1040 维也纳 奥地利，以及
帕拉茨基大学奥洛穆茨校区 理学院 代数与几何
系 17. listopadu 12 771 46 奥洛穆茨 捷克共和
国 helmut.laenger@tuwien.ac.at