arXiv:2301.02210v1 [math.DS] 5 Jan 2023

极化社区中意见动态的排斥性有限信心模型*

Claudia Kann和Michelle Feng‡

摘要。集体意见会影响公民参与、治理和社会规范。受意见动态的影响，人们提出了许多模型来研究意见的形成与演变。研究意见动态的一种常用方法是有界信任模型。在这些模型中，个体会受到其网络中他人意见的影响。通常，这些模型假设个体会调整自己的意见，使其与同伴的意见趋于一致。本文受党派政治动态的启发，提出一种有界信任模型，其中个体可能会受到同伴意见的排斥，而不只是被其吸引。我们证明了该模型的收敛性质，并通过模拟研究该模型在各种随机网络中的行为。特别是，我们发现，与标准有界信任模型相比，加入意见排斥会导致更高程度的意见碎片化。

Key 词。意见动态、有界信任、数理政治学、国会投票 g

AMS 学科分类。91D30,91F10

1. 引言。意见决定了个人如何与社会互动。它们影响我们与谁交友、如何投票以及消费什么。在个人和集体层面，意见塑造着我们的生活和社会交往。了解意见如何形成及其动态变化，为研究社会变迁提供了框架。意见在政治和治理中的作用，是美国公共讨论的重要组成部分。受有关政治极化和党派政治的讨论启发，本文提出一种数学方法，用于建模极化的意见动态，其中个体会感受到吸引力和排斥力。

公众意见对政治的影响一直受到哲学家、社会学家和社会理论家的研究 [6,15,30]。当代研究意见的方法通常致力于对意见进行量化。本文关注意见动态，旨在研究社会中的意见如何因个体间的关系而发生变化。已有多种研究个体意见的模型 [9,14,17,21]。本文将重点讨论有界信任模型。有界信任模型是一类模型，认为个体会基于彼此的关系改变意见，但前提是他们的意见原本就与同伴的意见相近。也就是说，如果某人的意见与我自己的意见相差甚远，那么即使我与此人有关系，也不会以其意见为依据来形成自己的意见。已有许多有界信任模型得到开发和研究，其中包括对共识形成的考察 [11,13],极化 [16,29],，以及大量用于应用于现实世界意见的模型扩展 [1,8,18,20]。

We 考虑极化，以及个体可能通过

*提交给编辑部：2022年12月8日。**资助：** 本研究部分由詹姆斯·S·麦克唐纳基金会博士后奖学金资助

†加州理工学院人文与社会科学系（ckann@caltech.edu）。
‡计算 + 加州理工学院数学科学系（mfeng@caltech.edu）。

本稿件仅供审阅。

采取唱反调的方式来形成自己的意见。如果我与某人存在对立关系，我可能会特意选择持有与对方不同的意见。与其他有界信任模型类似，我们认为，个体主要受那些意见与自己已有几分相近的人影响。我们最感兴趣的是了解该模型中的集体意见会如何变化。什么样的关系和社群结构会导致社会内部出现强烈的极化？我们又该如何将这些观察推广到现实世界应用和数据中？

本文结构安排如下。我们在第 2 节介绍模型的研究动机，并在第 3 节定义模型。在第 4 节给出分析结果，并在合成网络上进行数值模拟（第 5 节）。最后在第 6 节作出结论。

2. 背景与研究动机。本节介绍我们提出的意见动态模型的研究动机。在第 2.1 小节中，我们讨论促使我们作出建模选择的政治学研究；在第 2.2 小节中，我们介绍 Hegselmann–Krause 意见动态模型，并以此作为构建我们模型的出发点。

2.1. 政治学研究动机。在政治学中，人们通常将意识形态视为空间中的点，例如处于左翼或右翼、自由派或保守派。这种对政治家和个人的空间视角，推动了大量关于投票行为的研究，涵盖个人层面和立法层面，也推动了对国会内部策略行为的建模。这一模型的最初构想通常归功于 Downs 及其中位选民理论 [12]。此后，相关研究进一步探讨了立法组织 [4, 19, 25, 26], 选举竞争 [2], 以及法院 [22] 等议题。

获取国会议员意识形态空间估计最常用的方法是 NOMINATE [23]。该方法利用观察到的投票选择和项目反应模型（IRT）来推断空间距离。这项工作已扩展至纳入跨时间的衔接，以估计国会议员在不同届国会中的分布变化 [24]。近年来，这类衔接技术和新的数据来源也被用于对不同议院的政治家以及未能赢得选举的候选人进行一致的测量 [3, 7, 10, 27]。

本文提出一种有界信任模型，其中成员之间既存在吸引连边，也存在排斥连边。这一模型的动机在于，国会议员对议题的显著性各有不同。虽然可以通过投票行为揭示议员的意识形态立场，但有理由认为，政治家会受到优先事项相似的同僚吸引。因此，与其他国会议员合作会使他们的意识形态趋于一致。相反，无论其他方面是否相似，他们都会刻意疏远那些在显著议题上与自己立场相左的议员。这会促使他们努力凸显自身差异。从选举角度来看，这种差异化十分重要；据我们所知，空间模型尚未将其纳入考量。

2.2. 有界信任模型。我们提出的模型是 Hegselmann– Krause（HK）模型的一个变体 [17]。HK 模型考虑的是一群相互作用的主体彼此影响其意见的情形。在HK模型中，个体被建模为网络中的节点，节点之间存在连接——

本稿件仅供审阅。

彼此连接的个体会影响对方的意见，但前提是他们的意见足够接近。也就是说，即使两个个体彼此连接，如果他们的意见相距甚远，在形成新意见时也不会将对方纳入考虑。

HK模型的精确数学表述如下。设 $G = (V, E)$ 是一个网络，其对应的邻接矩阵为 A。那么在每个时间步 t，我们用意见向量 $\mathbf{x}(t)$ 表示节点$i \in V$的意见。我们为该模型设定一个置信界 c。意见按照以下规则更新：

$$x_i(t+1) = \frac{\sum_{j \in V} A_{ij} x_j(t) \mathbf{1}_{|x_j(t) - x_i(t)| < c}}{\sum_{j \in V} A_{ij} \mathbf{1}_{|x_j(t) - x_i(t)| < c}} \tag{2.1}$$

也就是说，在时间步 $t+1$，我们考察 i 的所有邻居，选出意见与其相差不超过置信界的邻居，然后对这些邻居的意见取平均。注意，我们可以将其改写为

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \frac{\sum_{j \in V} A_{ij} (x_j(t) - x_i(t)) \mathbf{1}_{|x_j(t) - x_i(t)| < c}}{\sum_{j \in V} A_{ij} \mathbf{1}_{|x_j(t) - x_i(t)| < c}} \tag{2.2}$$

尽管上述模型的表述针对的是一维意见，但通过扩展符号表示，同样的平均方案也可用于高维意见。

先前对 HK 模型的研究发现，该模型可在多项式时间内收敛 [5]。在 [17], Hegselmann 和 Krause 也研究了该模型的稳态。具体而言，HK 模型表明，随着置信界增大，稳态会在三种类型之间转变。置信界较小时，稳态可能包含许多不同的意见，且没有特别占主导地位的意见（我们将其称为 碎片化）。随着置信界增大，稳态中开始只出现少数几种占主导地位的意见（极化）。当置信界超过某一阈值时，我们观察到稳态中只有一种占主导地位的意见（共识）。这三种不同的稳态见图 1。在后续章节中，我们将讨论本模型的稳态与这些稳态有何异同。

3. 模型说明。驱动我们模型的关键机制是引入排斥边，使各节点能够彼此推开。假设 $G = (V, E)$ 是一个网络，其对应的邻接矩阵为 A。对于任意一对节点 i, j，若 $A_{ij} = 1$，则它们之间存在一条吸引边。若 $A_{ij} = -1$，则存在一条排斥边。否则，$A_{ij} = 0$，节点之间不存在边。与原始模型一样，我们假设对所有 i,$A_{ii} = 1$。此假设确保在计算下一步时，将节点的现有位置纳入计算。令 $\mathbf{x}$ 为意见向量，其中 $x_i(t)$ 表示节点 i 在时间 t的意见。

我们将变量 M 定义如下：

$$M_{ij}(t) = \begin{cases} x_j(t) - x_i(t) & A_{ij} \geq 0 \\ \text{sign}(x_j(t) - x_i(t))|c - |x_j(t) - x_i(t)|| & A_{ij} = -1, |x_j(t) - x_i(t)| > 0 \\ \text{sign}(j - i)c & A_{ij} = -1, x_j(t) = x_i(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

直观地说，M_{ij} 表示节点 i 可能因节点 j而移动的有符号距离。M 的作用是，随着节点彼此远离，排斥力会逐渐减弱

此稿件仅供审阅。

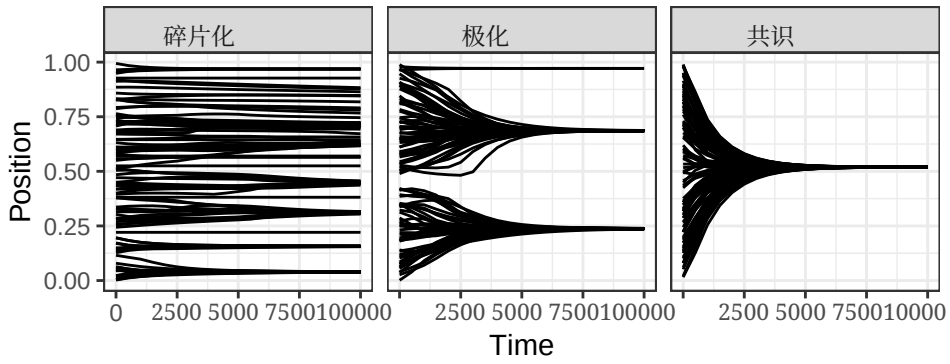


图1：本图创建了一个连接概率为 25% 的 Erd˝os–Renyi 随机图，并展示了置信区间 (0.05, 0.2, 0.6) 下的演化，以说明该模型的三种稳态。

。请注意， M_{ij} 的第三行涵盖了两个节点意见相同且相互排斥的情况。在这种情况下，索引较高的节点会被推向更高的意见值，而索引较低的节点则会被推向更低的意见值。在模拟中，这种情况不太可能发生，因为相互排斥的两个节点恰好具有相同数值的情况很少见。我们使用以下规则更新意见：

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \frac{\sum_{j\in V} A_{ij} M_{ij}(t) \mathbf{1}_{|x_j(t)-x_i(t)|<c}}{\sum_{j\in V} |A_{ij}| \mathbf{1}_{|x_j(t)-x_i(t)|<c}} \tag{3.2}$$

请注意，如果不存在排斥边，(3.2)就会完全化为(2.2)中所述的HK模型。

将(3.1) 纳入模型是为了帮助实现收敛。为了解其原因，假设我们不采用这种方法，而是直接将 $M_{ij}(t)$ 在(3.2) 中替换为$x_j(t) - x_i(t)$。从图2 中的以下三节点示例可以很容易看出，意见可能会永远来回摆动：吸引力先将意见拉到一起，随后意见又迅速彼此远离。我们将在第4节和第5节进一步讨论该模型的稳态。

存在排斥边时，我们的模型会产生若干种不同于标准HK模型的行为。首先，初始意见范围不一定能界定最终意见集合。在我们的模型中，如果排斥边足够多，最终意见就可能覆盖远宽于初始意见的范围（如图3所示）。我们在定理 4.10中证明了最终意见的一个界。

其次，在存在排斥边时，彼此处于置信范围内的连通节点可能无法收敛到单一意见。在 HK 模型中，我们可以考察接受度子图，也就是 G 中这样一个子图：若边连接的节点彼此超出置信界，则将该边删去。在 HK 模型中，接受度子图的连通分量将收敛到单一意见。在我们的模型中，由于吸引边与排斥边之间存在张力，节点可能会在停止时间收敛到一种不同于其邻居的意见。对于

此稿件仅供审阅。

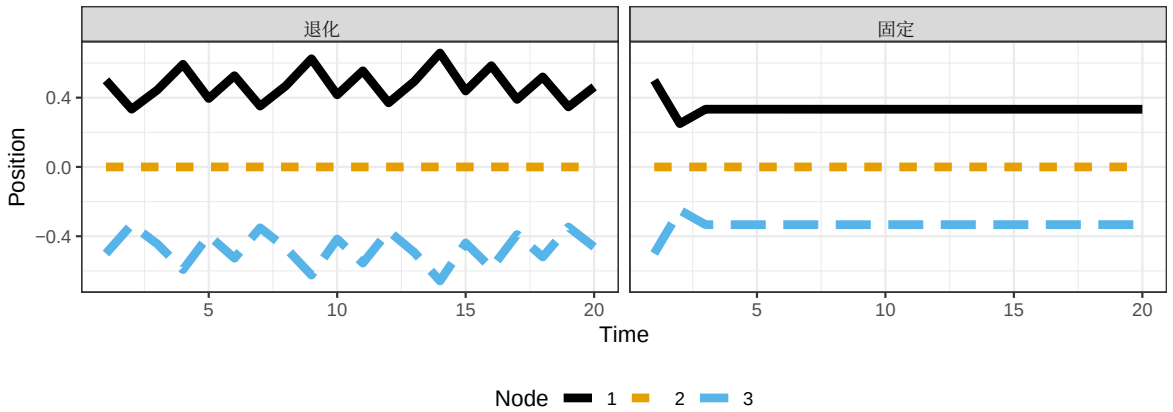


图2：三节点示例，其中顶部和底部节点相互排斥，而中央节点则吸引另外两个节点。若不引入距离缩放，中央节点会将两个外围节点拉向自己，直到它们彼此处于置信范围内；此时它们会互相推离，直到不再处于彼此的置信范围内。然而，由于它们仍处于中央节点的置信范围内，便会再次被拉回，如此循环往复，使模型永不收敛。使用$M_{ij}(t)$ 在 (3.1)中表示的值。

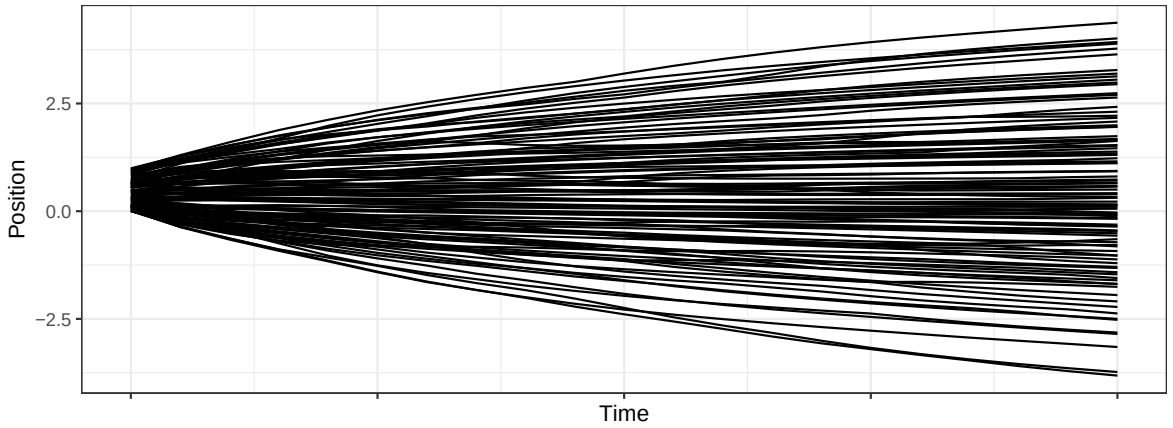


图3：该图展示了一次模拟，其最终意见宽度大于初始意见宽度。边按照方程(5.1) 所述方式创建，其中 $p_1 = 40\%$， $p_2 = 80\%$，置信界为 1.6

例如，图2 中的同一个三节点例子会收敛到这样一种状态：三个节点仍然彼此连通且处于彼此的置信范围内，但意见并不相同。

4. 分析结果。 本节将给出关于我们模型稳态的一些简单证明。值得注意的是，尽管该模型在大多数情况下都会收敛（根据 第 5 节中的分析结果，我们推测它在所有情况下都会收敛），但最终意见不一定受初始意见的界约束。负边的存在意味着节点之间的排斥力会使最终意见远远超出初始意见的界，不过在节点之间不再处于彼此的置信范围内之前，这一过程只能持续到一定程度。为此，我们根据 定理 4.10 中负边的数量，提出了最终意见的一个简单界。

我们首先在最简单的情形下（即只有 2 个节点时）证明这个界。

命题 4.1。 设 $G = (V, E)$ 是一个有 2 个节点的网络，且 $V = \{0, 1\}$。那么，由 (3.2) 描述的动力过程会收敛，并且在收敛时刻 T，

$$|x_0(T) - x_1(T)| \leq \max\{c, |x_0(0) - x_1(0)|\}$$

证明。 假设不存在边，或者 $E = \emptyset$。那么模型在时间$T = 1$收敛，并且

$$|x_0(T) - x_1(T)| = |x_0(0) - x_1(0)|$$

现在假设 $E = \{(x_0, x_1)\}$，且 $|x_0(0) - x_1(0)| \geq c$。那么更新规则不会带来任何变化，模型在 $T = 1$ 收敛

$$|x_0(T) - x_1(T)| = |x_0(0) - x_1(0)|$$

Now 假设 $|x_0(0) - x_1(0)| < c$。如果 $A_{01} = -1$，这两个节点会相互排斥。那么

$$\begin{aligned} x_1(1) &= x_1(0) + \frac{(x_1(0) - x_1(0)) + c - (x_1(0) - x_0(1))}{2} \\ x_0(1) &= x_0(0) + \frac{(x_0(0) - x_0(0)) - (c - (x_1(0) - x_0(0))}{2} \\ x_1(1) - x_0(1) &= x_1(0) - x_0(0) + \frac{2(c - (x_1(0) - x_0(0)))}{2} \\ &= c \end{aligned}$$

并且 $x_1(1) - x_0(1) >= c$，因此在此时间之后，这两个节点将不再相互影响，也无法再进一步推开对方，所以模型已经收敛，并且 $\max_{i,j} |x_0(T) - x_1(T)| \leq c$。

如果 $A_{01} = 1$，这两个节点会相互吸引，且该模型等同于标准的 Hegselmann–Krause 模型，因此我们可以收敛到一个单点，并且

$$|x_0(T) - x_1(T)| = 0$$

这涵盖了所有可能的情况，命题得证。 ■

这个双节点证明需要注意的要点是，任意两个节点之间的排斥力都会试图将它们推开，使其距离恰好达到 c。此外

此稿件仅供评审使用。

请注意，在一个时间步内，任何节点在任意方向上的移动距离都不能超过 c，因为 $|M_{ij}(t)| \leq c$。

现在我们证明几个引理，以便证明 定理 4.10。

引理 4.2。 假设 $i \in V$ 是一个节点。定义以下集合：

$$
\begin{aligned}
V_i^+(t) &= \{j \in V : A_{ij} = 1 \ and \ |x_j(t) - x_i(t)| < c\} \\
U_i(t) &= \{j \in V : A_{ij} = -1 \ and \ [(0 < x_j(t) - x_i(t) < c) \ or \ (x_j(t) = x_i(t) \ and \ j > i)]\} \\
L_i(t) &= \{j \in V : A_{ij} = -1 \ and \ [(0 < x_i(t) - x_j(t) < c) \ or \ (x_j(t) = x_i(t) \ and \ i > j)]\}
\end{aligned}
$$

Then

$$
x_i(t+1) = \frac{\sum_{j \in V_i^+(t)} x_j(t) + \sum_{j \in U_i(t)} (x_j(t) - c) + \sum_{j \in L_i} (x_j(t) + c)}{|V_i^+(t)| + |U_i(t) + |L_i(t)|} \tag{4.1}
$$

证明。 由(3.2)，我们整理得

$$
\begin{aligned}
x_i(t+1) &= x_i(t) + \frac{\sum_{j \in V} A_{ij} M_{ij}(t) \mathbf{1}_{|x_j(t) - x_i(t)| < c}}{\sum_{j \in V} |A_{ij}| \mathbf{1}_{|x_j(t) - x_i(t)| < c}} \\
&= x_i(t) + \frac{\sum_{j \in V_i^+(t) \cup U_i(t) \cup L_i(t)} A_{ij} M_{ij}(t)}{\sum_{j \in V_i^+(t) \cup U_i(t) \cup L_i(t)} |A_{ij}|} \\
&= x_i(t) + \frac{\sum_{j \in V_i^+(t)} (x_j(t) - x_i(t))}{|V_i^+(t)| + |U_i(t)| + |L_i(t)|} \\
&\quad + \frac{\sum_{j \in U_i(t)} (-1)(1)(c - (x_j(t) - x_i(t)))}{|V_i^+(t)| + |U_i(t)| + |L_i(t)|} \\
&\quad + \frac{\sum_{j \in L_i(t)} (-1)(-1)(c - (x_i(t) - x_j(t)))}{|V_i^+(t)| + |U_i(t)| + |L_i(t)|} \\
&= \frac{\sum_{j \in V_i^+(t)} x_j(t) + \sum_{j \in U_i(t)} (x_j(t) - c) + \sum_{j \in L_i} (x_j(t) + c)}{|V_i^+(t)| + |U_i(t) + |L_i(t)|}
\end{aligned}
$$

■

直观而言，这个引理告诉我们，更新规则通过对若干意见取平均值，将 $x_i(t)$ 移至 $x_i(t+1)$。集合 $V_i^+(t)$ 包含在时间 t 被 i 吸引的节点。集合 $U_i(t)$ 包含在时间 t 排斥 i 的节点，这些节点会使 i 的意见降低。集合 $L_i(t)$ 包含在时间 t 排斥 i 的节点，这些节点会使 i 的意见升高。方程 (4.1) 告诉我们，可以对 $x_j(t)$、$x_j(t) - c$（针对 $j \in U_i(t)$）以及 $x_j(t) + c$（针对 $j \in L_i(t)$）取平均值，以确定 $x_i(t+1)$。

引理 4.3。 设 $i \in V$ 在时间 t，并设 $W(t) \subset V$ 是一个节点集合，满足 $W(t)$ 完全包含于 $V_i^+(t) \cup U_i(t) \cup L_i(t)$。定义

$$
\overline{W}(t) = \frac{\sum_{j \in W(t)} x_j(t)}{|W(t)|}
$$

此稿件仅供审阅。

为所有 $x_j(t)$ 的平均值，其中 $j \in W(t)$。于是，我们可以将 (4.1) 改写为

$$x_i(t+1) = \frac{\sum_{j \in \left(V_i^+(t) \cup U_i(t) \cup L_i(t)\right) \setminus W(t)} x_j(t) + \sum_{j \in W(t)} \overline{W}(t) + \left(|L_i(t)| - |U_i(t)|\right) c}{|V_i^+(t)| + |U_i(t) + |L_i(t)|}$$

证明。 我们将(4.1) 重写如下：

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \frac{\sum_{j \in V_i^+(t)} x_j(t) + \sum_{j \in U_i(t)} (x_j(t) - c) + \sum_{j \in L_i} (x_j(t) + c)}{|V_i^+(t)| + |U_i(t) + |L_i(t)|} \\ &= \frac{\sum_{j \in \left(V_i^+(t) \cup U_i(t) \cup L_i(t)\right)} x_j(t) + \left(|L_i(t)| - |U_i(t)|\right) c}{|V_i^+(t)| + |U_i(t) + |L_i(t)|} \\ &= \frac{\sum_{j \in \left(V_i^+(t) \cup U_i(t) \cup L_i(t)\right) \setminus W(t)} x_j(t) + \sum_{j \in W(t)} \overline{W}(t) + \left(|L_i(t)| - |U_i(t)|\right) c}{|V_i^+(t)| + |U_i(t) + |L_i(t)|} \end{aligned}$$

在某些情况下，这个引理允许我们用一组意见值的平均值替换该组中各个节点的意见值。

引理 *4.4*。设 $G = (V, E)$ 是一个包含 n 个节点和 m 条边、置信界为 c 的网络。假设 G 中的每条边都是排斥性的。在时间 t，假设对所有其他节点 j，$x_i(t) > x_j(t)$，因此 i 是时间 t 意见值最高的节点。那么对所有 j，$x_i(t+1) > x_j(t+1)$。

证明。 注意 $V_k^+(t) = \{x_k\}$ 对所有 k，t，因为 G 中的每条边都是排斥性的。为方便起见，我们定义以下集合：

$$\begin{aligned} U_{ij}(t) &= U_j(t) \bigcap U_i(t) \\ U'_{ij}(t) &= U_i(t) \setminus U_{ij}(t) \\ L_{ij}(t) &= L_i(t) \bigcap L_j(t) \\ L'_{ji}(t) &= L_j(t) \setminus L_{ij}(t) \\ W_{ij}(t) &= L_i(t) \bigcap U_j(t) \end{aligned}$$

展开这些记号，$U_{ij}(t)$ 由所有同时向下排斥 i 和 j 的节点组成，而 $L_{ij}(t)$ 由所有同时向上排斥 i 和 j 的节点组成。$U'_{ij}(t)$ 由向下排斥 i、但不排斥 j 的节点组成（注意，若 $x_i(t) < x_j(t)$，则该集合自动为空）；而 $L'_{ji}(t)$ 由向上排斥 j、但不排斥 i 的节点组成（同样，若 $x_i(t) < x_j(t)$，则该集合为空）。最后，$W_{ij}(t)$ 由向上排斥 i 且向下排斥 j 的节点组成（若 $x_j(t) > x_i(t)$，则该集合为空）。

现在，假设对所有 $j \in V$，$x_i(t) > x_j(t)$。那么我们可以写成

$$\begin{aligned} V_i^+(t) &= \{i\} \\ U_i(t) &= \emptyset \\ L_i(t) &= L_{ij}(t) \bigcup W_{ij}(t) \bigcup \{j\} \end{aligned}$$

此稿件仅供审阅。

and

$$\begin{aligned} V_j^+(t) &= \{j\} \\ U_i(t) &= \{i\} \bigcup W_{ij}(t) \\ L_i(t) &= L_{ij}(t) \bigcup L'_{ji}(t) \end{aligned}$$

由节点只有在彼此处于对方的置信范围内时才会相互影响这一事实，我们可以得出以下结论。

$$\begin{aligned} x_j(t) + c &> x_i(t) \\ \overline{L_{ij}}(t) + c &> x_i(t) \\ \overline{W_{ij}}(t) + c &> x_i(t) \\ x_i(t) &> \overline{L'_{ji}} + c \end{aligned}$$

然后应用 引理 4.2 和 引理 4.3:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \frac{x_i(t) + (x_j(t)+c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t)+c) + |W_{ij}(t)|(\overline{W_{ij}}(t)+c)}{2+|L_{ij}(t)|+|W_{ij}(t)|} \\ &> \frac{x_i(t) + (x_j(t)+c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t)+c) + |W_{ij}(t)|(\overline{W_{ij}}(t)+c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t)+c)}{2+|L_{ij}(t)|+|W_{ij}(t)|+|L'_{ji}(t)|} \qquad (4.2) \\ &> \frac{(x_i(t)-c) + x_j(t) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t)+c) + |W_{ij}(t)|(\overline{W_{ij}}(t)-c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t)+c)}{2+|L_{ij}(t)|+|W_{ij}(t)|+|L'_{ji}(t)|} \\ &= x_j(t+1) \end{aligned}$$

其中，(4.2) 中的不等式成立，是因为 $x_i(t+1)$ 是加权平均值，而 $L'_{ji}(t)$ 小于上一行中参与平均的所有其他值。下一个不等式显然成立，因为将平均值中的每个值替换为更小或相等的值即可。

因此，如果 $x_i(t)$ 在时间 t 的意见值最高，那么它的意见值将始终最高。

推论 *4.5.* 设 $G = (V, E)$ 是一个包含 n 个节点和 m 条边、置信界为 c 的网络。假设 G 中的每条边都具有排斥性。在时间 t，令 $M = \{i : x_i(t) \geq x_j(t) \forall j \in V\}$。那么 $x_{\max_M i}(t+1) > x_j(t+1)$ $\forall j \in V$。

证明。 根据 $U_i(t)$ $L_i(t)$ 的定义，可以看出， M 中索引最大的成员，其对应集合 $L_i(t)$ 最大，而对应的$U_i(t)$ 最小，因此在时间 $t+1$，该成员的意见值将高于 M 的所有其他成员。按照 引理 4.4证明中的同样思路，该意见也将是所有意见中值最高的。

推论 4.6. 设 $G = (V, E)$ 为含有 n 个节点、置信界为c 的完全网络。假设 G 中的每条边都具有排斥性。在时间 t，设 $M = \{i : x_i(t) \leq x_j(t) \forall j \in V\}$。则 $x_{\min_M i}(t+1) < x_j(t+1) \forall j \in V$。

此稿件仅供审阅。

证明。证明对所有 $j \in V$， $x_i(t) < x_j(t)$，进而对所有 $j \in V$， $x_i(t+1) < x_j(t+1)$；方法是将 $U_i(t)$ $L_i(t)$ $U_j(t)$ $L_j(t)$ 划分为相应的子集，并根据需要反转不等式，如引理 4.4 中所示。然后，按照推论 4.5 中的相同思路即可证明该结论。

引理 *4.7.* 设 $G = (V, E)$ 是一个具有 n 个节点和 m 条边、置信界为 c 的网络。假设 G 中的每条边都是排斥性的。在时间 t，假设对于所有其他节点 $j \in V$， $x_i(t) > x_j(t)$，因此 i 是时间 t 意见值最高的节点。假设存在某个节点 j，使得 $x_i(t) - x_j(t) < c$，并且在所有此类节点中， j 的意见值最高。那么

$$\frac{2c}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \leq x_i(t+1) - x_j(t+1) \leq \frac{(|L'_{ji}(t)| + 2)c}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|}$$

证明。 根据假设，由于 j 在置信范围内的所有节点中意见值最高， i， $W_{ij}(t)$ 为空。为证明下界，

$$\begin{aligned}
x_i(t+1) &= \frac{x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c)}{2 + |L_{ij}(t)|} \\
&\geq \frac{x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t) + c)}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\
x_j(t+1) &= \frac{(x_i(t) - c) + x_j(t) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t) + c)}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\
x_i(t+1) - x_j(t+1) &\geq \frac{2c}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|}
\end{aligned}$$

为证明上界，

$$\begin{aligned}
x_i(t+1) &= \frac{x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) +}{2 + |L_{ij}(t)|} \\
&\leq \frac{x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(x_j(t) + c)}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\
x_j(t+1) &= \frac{(x_i(t) - c) + x_j(t) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t) + c)}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\
x_i(t+1) - x_j(t+1) &\leq \frac{c + c + |L'_{ji}(t)|(x_j(t) - \overline{L'_{ji}}(t))}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\
&\leq \frac{(|L'_{ji}(t)| + 2)c}{2 + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|}
\end{aligned}$$

注意，如果 $L'_{ji}(t)$为空，则两个不等式都变为等式，因此

$$x_i(t+1) - x_j(t+1) = \frac{2c}{2 + |L_{ij}(t)|}$$

还要注意，如果 $L_{ij}(t)$ 和 $L'_{ji}(t)$ 都为空，那么 $x_i(t+1)$ 与 $-x_j(t+1)$ 之间的距离恰好为 c。

此稿件仅供审阅。

推论 *4.8*。设 $G = (V, E)$ 是一个包含 n 个节点和 m 条边、置信界为 c 的网络。假设 G 中的每条边都是排斥性的。在时间 t，假设对于所有其他节点 $j \in V$， $x_i(t) < x_j(t)$，因此 i 是时间 t 意见值最低的节点。假设存在某个节点 j，使得 $x_j(t) - x_i(t) < c$，且 j 在所有此类节点中意见值最低。那么

$$\frac{2c}{2 + |U_{ij}(t)| + |U'_{ij}(t)|} \leq x_i(t+1) - x_j(t+1) \leq \frac{(|U'_{ij}(t)| + 2)c}{2 + |U_{ij}(t)| + |U'_{ij}(t)|}$$

引理 4.7 和 推论 4.8 之所以有趣，是因为它们给出了精确条件，说明意见最极端的节点何时不再处于任何其他节点的置信范围内。具体而言，要使意见值最高的节点与所有其他节点失去连接，它必须满足这样的条件：它仍受影响的唯一节点是意见值次高的节点，并且这两个节点都不受任何其他节点影响。否则，即使意见值最高的节点仍是最极端的节点，且其意见继续被推高，它们仍会彼此处于置信范围内。

最后，我们再给出一个引理，讨论相邻节点之间间隔宽度的界。

引理 *4.9*。设 $G = (V, E)$ 是具有 n 个节点且置信界为 c 的完全网络。假设 G 中的每条边都是排斥性的。在时间 t，假设 i 和 j 是满足 $(i, j) \in E$, $x_i(t) > x_j(t)$ 且 $x_i(t) - x_j(t) < c$ 的节点，并且不存在连接到 i 或 j、且满足 $x_i(t) > x_k(t) > x_j(t)$ 的节点 k。那么

$$|x_i(t+1) - x_j(t+1)| \leq c$$

证明。 根据不存在取值介于 $x_i(t)$ 与 $x_j(t)$ 之间的节点这一假设，我们有 $W_{ij}(t) = W_{ji}(t) = \emptyset$。接下来，为证明该界的一个方向，

$$\begin{aligned}
x_i(t+1) &= \frac{|U'_{ij}(t)|(\overline{U'_{ij}}(t) - c) + |U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)|} \\
&\leq \frac{|U'_{ij}(t)|(\overline{U'_{ij}}(t) - c) + |U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(x_j(t) + c)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\
x_j(t+1) &= \frac{|U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + (x_i(t) - c) + x_j(t) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t) + c)}{2 + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\
&\geq \frac{|U'_{ij}(t)|(x_i(t) - c) + |U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + (x_i(t) - c) + x_j(t) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t) + c)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|}
\end{aligned}$$

∎

此稿件仅供审阅。

结合两个方程,

$$\begin{aligned} x_i(t+1) - x_j(t+1) &\leq \frac{|U'_{ij}(t)|\left(\overline{U'_{ij}}(t) - x_i(t)\right) + c + c + |L'_{ji}(t)|\left(x_j(t) - \overline{L'_{ji}}(t)\right)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\ &\leq \frac{\left(2 + |U'_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|\right)c}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\ &\leq c \end{aligned}$$

为证明反方向,

$$\begin{aligned} x_j(t+1) &= \frac{|U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + (x_i(t) - c) + x_j(t) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t) + c)}{2 + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\ &\leq \frac{|U'_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + (x_i(t) - c) + x_j(t) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{L'_{ji}}(t) + c)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\ x_i(t+1) &= \frac{|U'_{ij}(t)|(\overline{U'_{ij}}(t) - c) + |U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)|} \\ &\geq \frac{|U'_{ij}(t)|(\overline{U'_{ij}}(t) - c) + |U_{ij}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c) + x_i(t) + (x_j(t) + c) + |L_{ij}(t)|(\overline{L_{ij}}(t) + c) + |L'_{ji}(t)|(\overline{U_{ij}}(t) - c)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \end{aligned}$$

结合两个不等式可得

$$x_j(t+1) - x_i(t+1) \leq \frac{|U'_{ij}(t)|\left(\overline{L_{ij}}(t) - \overline{U'_{ij}}(t) + 2c\right) + c + c + |L'_{ji}(t)|\left(\overline{L'_{ji}}(t) - \overline{U_{ij}}(t) + 2c\right)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|}$$

然而，请注意,

$$\begin{aligned} 2c &= (x_i(t) + c) - (x_i(t) - c) \\ &> \overline{U'_{ij}}(t) - \overline{L_{ij}}(t) \\ &> (x_j(t) + c) - x_j(t) = c \end{aligned}$$

类似地，$c < U_{ij}(\overline{t}) - L'_{ji}(\overline{t}) < 2c$ 从而我们有

$$\begin{aligned} x_j(t+1) - x_i(t+1) &\leq \frac{|U'_{ij}(t)|\left(\overline{L_{ij}}(t) - \overline{U'_{ij}}(t) + 2c\right) + c + c + |L'_{ji}(t)|\left(\overline{L'_{ji}}(t) - \overline{U_{ij}}(t) + 2c\right)}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\ &\leq \frac{\left(2 + |U'_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|\right)c}{2 + |U'_{ij}(t)| + |U_{ij}(t)| + |L_{ij}(t)| + |L'_{ji}(t)|} \\ &\leq c \end{aligned}$$

证明至此完成。 ■

定理 4.10。 设 $G = (V, E)$ 是一个包含 n 个节点、置信界为 c的网络。假设 G 是完全图，且每条边 $(i, j) \in E$ 都是排斥边（即 $A_{ij} = -1$）。再假设初始意见为 $x_i(0)$，满足 $|x_i(0) - x_j(0)| < c$。那么该模型收敛，并且 最大值$_{i,\ j}|x_i(T) - x_j(T)| = (n-1)c$。

此稿件仅供审阅。

证明。 该定理的直觉如下：对于任意一条排斥边（i, j），节点 i和 j 会相互排斥，直到

$$|x_i(t) - x_j(t)| >= c$$

在某个未来的时间步 t。如果每条边都是排斥性的，那么为了使模型收敛，每一对由边相连的节点之间的距离都必须至少为 c。直观地说，这些节点会不断相互排斥，直到彼此距离达到 c，不会再继续增大。因此，模型的最终收敛状态会出现在原始图中所有 c边之间的间隔都至少为 m 时。然而，根据 引理 4.7，这些间隔的宽度恰好为 c，因此该界成立。

根据 推论 4.5 和 推论 4.6，在时间 1，必定存在意见值最高和最低的意见节点。根据 引理 4.4，对于 $t > 1$，这些节点始终是意见值最高和最低的意见节点。将这些节点记为 i_{max}，i_{min}。

由于 G 是完全图，且所有边都是排斥性的，我们可以观察到 i_{max} 和i_{min} 的意见会被向外推，因为起初每个节点都在所有其他节点的置信范围内。此外，根据 引理 4.3，我们可以观察到 i_{max}会朝着 $\{j \neq i\}(0)+c$的方向被推移，因此意见值远低于平均值的节点会开始脱离 i_{max}的置信范围。此外，根据引理 4.7， i_{max} 只要在前一个时间步处于至少 2 个节点的置信范围内，就会继续处于至少一个节点的置信范围内。综合这些引理可知，最终在时间 t'，i_{max} 将恰好处于另一个节点的置信范围内。

令 i'_{max} 为满足 $x_{i_{max}}(t')- x_{i'_{max}}(t') < c$的奇异节点。然后，我们可以遵循引理 4.4 中相同的证明过程，证明对于所有不等于 $j = i_{max}$ 的 $j \in V$，$x_{i'_{max}}(t' + 1) > x_j(t' + 1)$，并且其余节点都无法进入 i_max 的置信范围。由于这与引理 4.4 十分相似，我们不在此列出证明过程；但推动证明的关键观察是，只有一个节点 i_{max} 对 i'_{max} 施加向下压力（如果有非常多的节点对 i'_{max}施加向下压力，那么 i'_{max} 就可能失去其作为意见值第二高节点的位置）。这使我们能够将 $x_{i'_{max}}$ 改写为一组数值的平均值，同时保留 i_{max}、 i'_{max}及其余节点的顺序。类似地，我们可以证明，经过某个时间点后，意见值第二低的节点将始终保持为意见值第二低的节点。

我们继续采用这种方式，从意见值最高和最低的节点向内推进，直到证明经过一段时间后，节点的意见必定保持固定的顺序。

从这里开始，我们可以观察到，根据引理 4.9，任意两个相邻节点之间的间距都不超过 c。由于我们对 $x_i(t)$的初始条件，任意相邻节点之间的间距都不可能在任何时刻变得更大。如果两个节点之间的间距小于 c，我们就尚未收敛，因为这两个节点之间的排斥力会在下一时间步将它们推开。所有节点都会相互推开，直到任意两个相邻节点之间的间距恰好为 c，此时模型便已收敛。由于存在

本稿件仅供审稿使用。

n 个节点，这告诉我们

$$\max\{|x_i(T) - x_j(T)|\} = (n-1)c$$

定理 定理 4.10的证明依赖于所有边都是排斥边，从而保持节点的顺序。当同时存在吸引边和排斥边时，这一性质未必成立。不过，根据数值实验，我们猜想下面的定理也成立：

定理 4.11。 设 $G = (V, E)$ 是一个包含 n 个节点、 m 条边且置信界为 c 的网络。设 m_r 为该网络中排斥边的数量。那么，该模型收敛，且

$$\max_{i,j\in V}\{x_i(T) - x_j(T)\} \leq \max\{\max_{i,j\in V}\{x_i(0) - x_j(0)\}, mc\}$$

直觉。 该模型的最坏情形假设所有排斥节点彼此之间至少相距c，因此，如果所有节点起初都处于彼此的置信范围内，最坏情形就是所有带有排斥边的节点沿一条长度为 m 条边的直线按顺序连续排列，此时它们的意见宽度不会超过 mc，因为引理 4.9所给出的界应当适用，并能防止任何单个间隔变得更宽。间隔变宽的唯一可能是存在吸引节点将受排斥的节点进一步拉开；在这种情况下，这些吸引节点要么彼此之间有排斥力，并且已经在线上纳入考量，要么一开始彼此相距就更远，此时我们考察 $\max_{i,j\in V}\{x_i(0) - x_j(0)\}$。

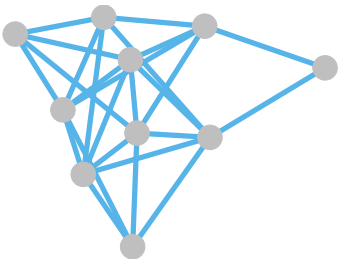
由于在这种情况下，我们不能依赖节点保持固定顺序，因此无法使用与定理 4.10中相同的技巧来证明收敛性并给出一个界。不过在实践中，我们观察到，最终意见的范围会随排斥边数量的增加而扩大，而且实际上 mc 的界并不十分紧（这是意料之中的，例如在定理 4.10中的完全图情形下，该界要小得多）。有关显示最终意见范围随排斥边数量变化以及c的数值结果，请参见图5及相关讨论。

5. 合成网络上的数值结果。 本节将分析在多种随机网络上进行的数值模拟，这些网络因常用于社会结构建模而被选取 [28]。

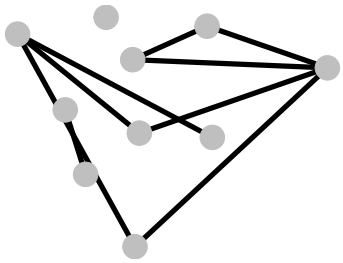
5.1. Erd˝os–Renyi。 我们首先将 Erd˝os–Renyi（ER）网络改编为一种简单的随机网络模型。为了构建同时包含正边和负边的随机网络，我们生成两个 ER 网络， $G_1 = G(n, p_1)$ 和 $G_2 = G(n, p_2)$，其对应的邻接矩阵为 A_1 和 A_2。总网络 G 则是由邻接矩阵 $A_1 - A_2$ 构建而成的网络。该方法的示意图见图4。在后续网络中，任意一组节点之间出现各类边的概率可表示为：

$$P((i,j) \in E) = \begin{cases} 0 & (1-p_1)(1-p_2) + p_1p_2 \\ 1 & p_1(1-p_2) \\ -1 & (1-p_1)p_2 \end{cases} \tag{5.1}$$

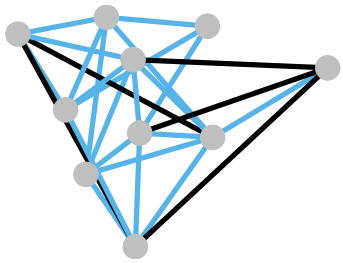
本稿仅供审阅。



(a) G1：含有 $p_1 = 0.6$的正节点网络



(b) G2：负节点网络含有 $p_2 = 0.2$



(c) G3： 最终网络 with $p_1 = 0.6$ 和 $p_2 = 0.2$。

图4：生成具有吸引边和排斥边的ER网络示例

为获得仿真结果，我们针对以下参数的所有组合进行了100次试验：

$$
\begin{aligned}
p_1 &\in (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1) \\
p_2 &\in (0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8) \\
c &\in (0.05, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6)
\end{aligned}
$$

每次试验都会随机生成一组初始意见，并将模型运行10000次迭代。在图5中，当 p_1 设为0.4时，针对每组参数展示了一次试验。该次试验是随机选取的，其他所有试验在定性上看起来都相同。

加入排斥边后，意见的最终范围会随着 p_2 和 c 的增大而扩大。这些结果符合预期。随着 p_2 增大，负连接的数量也随之增加，导致节点之间的排斥力增强，从而使意见彼此分离。随着c 增大，节点拥有更多邻居。对于 $p_2 << p_1$，吸引力压过排斥力，因此较高的 c 会带来更多共识，这与标准HK模型中的情况相同。对于$p_2 >> p_1$，情况则相反——排斥力压过吸引力，随着 c增大，节点会进一步彼此推离，导致意见的扩散范围更广。

特别是，我们观察到，$\frac{p_2}{p_1}$ 的比例似乎是决定最终意见范围的关键因素。为了得出更明确的结论，我们考察<style id='2'>意见分散度，并将其定义为以下量：

$$
\frac{\max_{i,j} |x_i(T) - x_j(T)|}{\max_{i,j} |x_i(0) - x_j(0)|} \tag{5.2}
$$

在图6中，我们绘制了各次试验中意见分散度的平均值随比例$\frac{p_2}{p_1}$ 和置信界 c 变化的热力图。我们观察到与图5类似的趋势：较高的比例 $\frac{p_2}{p_1}$ 会导致较高的意见分散度，而 c 对意见分散度的影响则取决于$\frac{p_2}{p_1}$。在接下来的例子中，我们同样会看到，意见分散度主要由网络中的负边决定，但向网络中添加更多结构会以有趣的方式影响意见形成。

本稿件仅供审稿使用。

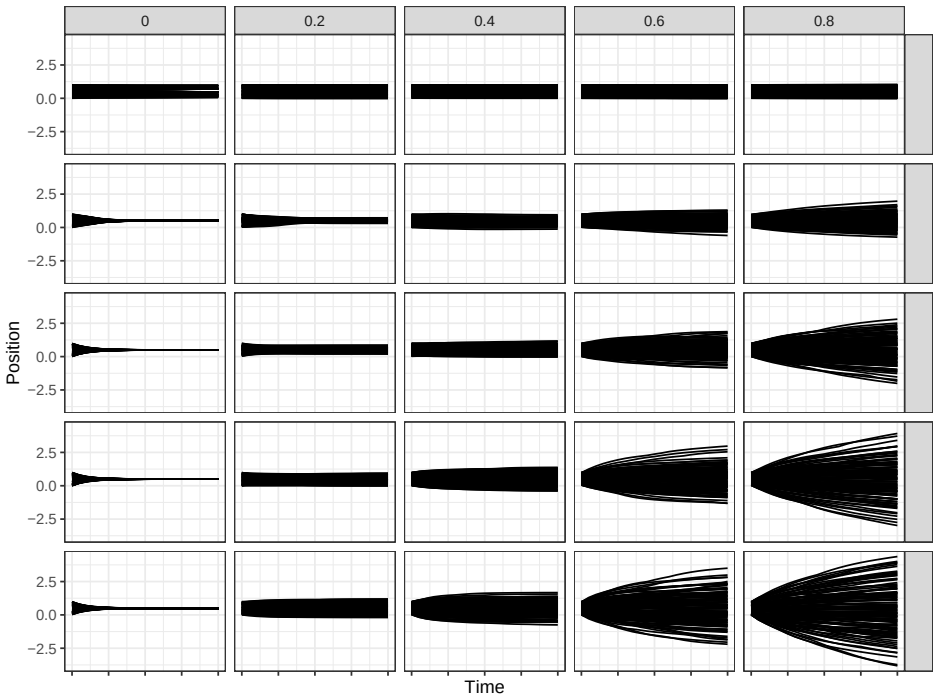


图5：对于所有图，$p_1 = .4$。横轴表示 p_2，纵轴表示 c。请注意，随着 p_2 增加，最终意见的范围会变宽。对于较低的 p_2值，随着 c 增加，最终意见的范围会变窄（更接近共识）。相反，对于较高的 p_2值，随着 c 增加，最终意见的范围会变宽。

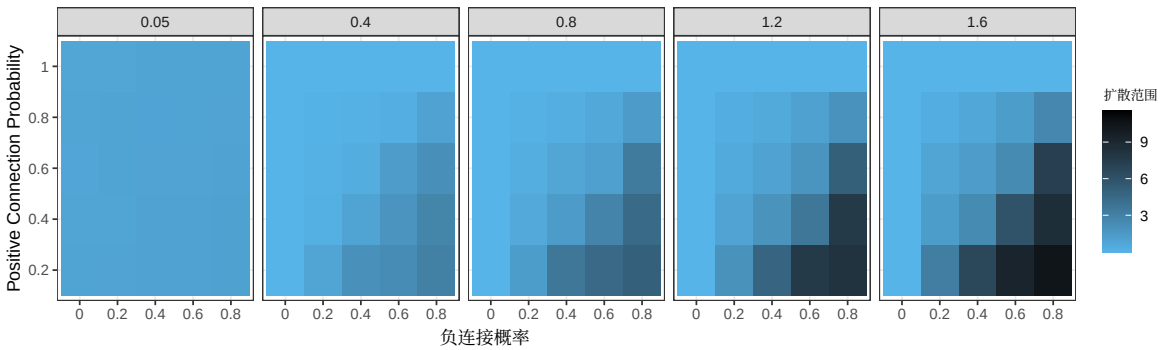


图6：意见分散度热力图，以 G_1和 G_2 中的连接概率为函数，并在置信界 c上迭代。数据取自每组参数进行100次试验的均值，参数为 $p_1 \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$、$p_2 \in \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$和$c \in \{0.05, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6\}$。

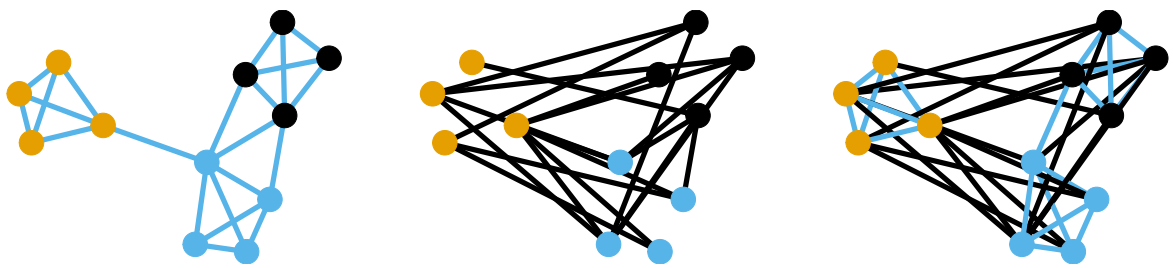
此稿件仅供审阅。

5.2. 随机块模型。 接下来，我们调整随机块模型（SBM），以纳入正边和负边。在这些网络中，每个节点都被分配到一个群组 $k \in K$。当 $i_k = j_k$ 与当 $i_k \neq j_k$不同时，连接的概率也不同。这会在网络内部形成结构。与第5.1小节类似，我们通过两个子网络生成该网络。在这种情况下，生成过程从两个随机块模型网络开始，$G_1 = G$（n、p_1、ρ）和 $G_2 = G$（n、p_2、ρ），其对应的邻接矩阵为 A_1 和 A_2。变量 p 表示与同一簇中的另一个节点建立连接的概率，而 $p\rho$ 表示与不同簇中的节点建立连接的概率。如果 G 是由邻接矩阵 $A_1 - A_2$ 表示的网络，则生成的网络边概率为：

$$P((i,j) \in E)_{i_k = i_j} = \begin{cases} 0 & (1-p_1)(1-p_2) + p_1 p_2 \\ 1 & p_1(1-p_2) \\ -1 & (1-p_1)p_2 \end{cases} \tag{5.3}$$

$$P((i,j) \in E)_{i_k \neq i_j} = \begin{cases} 0 & (1-p_1\rho)(1-p_2\rho) + \rho^2 p_1 p_2 \\ 1 & p_1\rho(1-p_2\rho) \\ -1 & (1-p_1\rho)p_2\rho \end{cases} \tag{5.4}$$

生成过程的一个示例见图7，其中蓝色边表示正边，黑色边表示负边。节点颜色分别代表不同的群组 $k \in K$。



(a) G1：正节点网络
其中 $p_1 = 0.85$ 和 $\rho = 0.05$

(b) G2：负节点网络
其中 $p_2 = 0.3$ 和 $\rho = 0.05$

(c) G3：最终网络 p_1 =0.85，
$p_2 = 0.3$ 和 $\rho = 0.05$

图7：一个具有吸引边和排斥边的随机块模型网络生成示例

同样，为了获得仿真结果，对参数的所有组合均进行了100次试验

$$\begin{aligned} \rho &\in (0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1) \\ p_1 &\in (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1) \\ p_2 &\in (0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8) \\ c &\in (0.05, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6) \end{aligned}$$

此稿件仅供审阅。

每次试验都会随机生成一组初始意见，并应用该模型。当 $p_1 = 0.8$ 且 $p_2 = 0.2$ 时，一次示例运行的完整历史记录见图8。可以看出，每个群组内部的意见都完全收敛，而置信区间决定了群体之间的分散程度。随着 ρ 增大，所有意见开始趋于收敛。与ER模型的情况一样，在某些参数组合下，稳态时的扩散范围会大于初始时的扩散范围。从这些数值可以看出，当 p_1 和 p_2 固定时，较高的信任边界会导致较大的最终扩散范围，较低的跨群体边比例也会如此（ρ）。

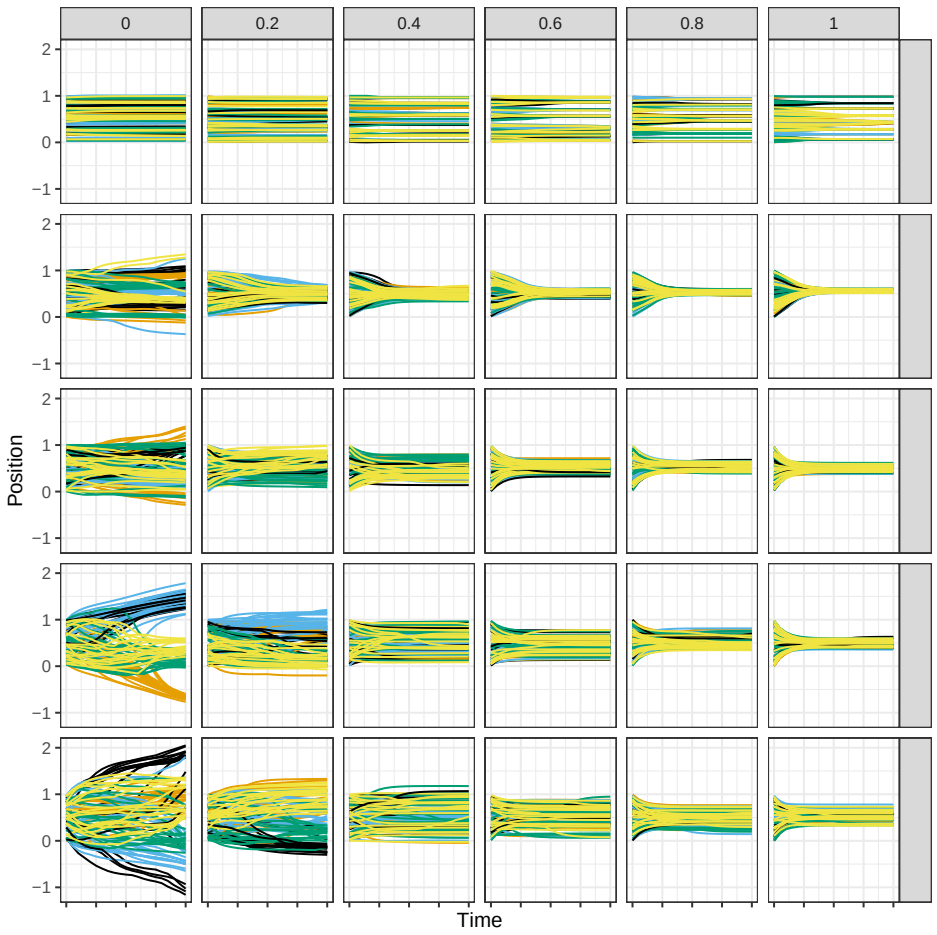


图8：图展示了图按照 5.4 节所述的随机块模型方案生成时，各节点的演化路径示例。在此情形下，$p_1 = 0.8$ 和 $p_2 = 0.2$ 均处于锁定状态；各行对应不同的置信界，各列对应不同的跨群组连边比例。每种颜色代表一个不同的群体。这些示例中共有五个群体。

与 ER模型 一样，对于随机块模型，我们首先考察稳态意见分布范围。结果见图9。请注意，当 $\rho = 1$ 随机块模型等价于 ER

本稿件仅供评审使用。

模型（参数相同）时。因此，最后一行与图6完全相同。我们注意到，随着 ρ 减小，最终扩散范围会增加。除此之外，ER模型的趋势仍然一致。

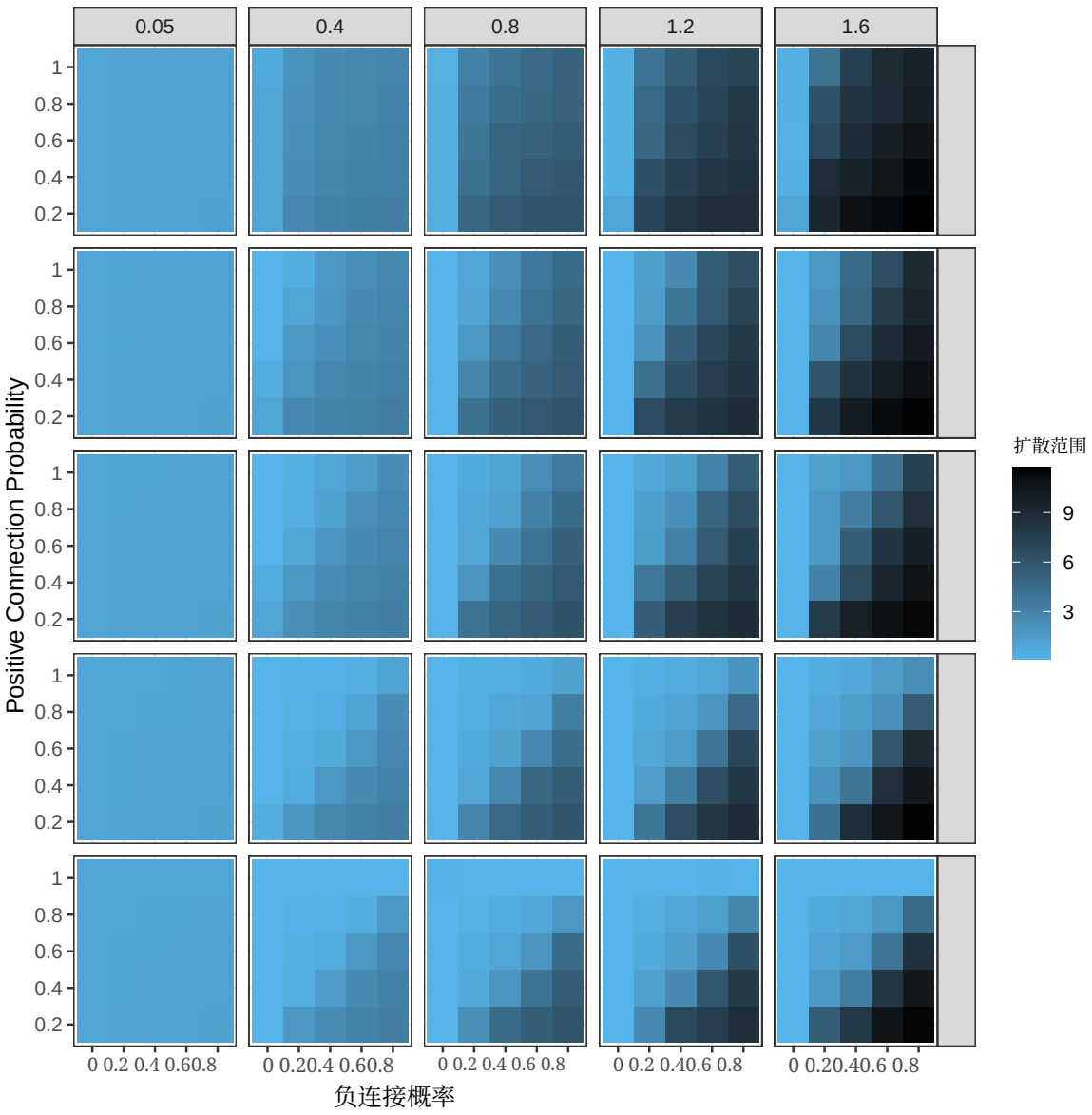


图9：随机块模型试验的意见分散度热力图。行表示 ρ，即群组外（内）连接值为正（负）的百分比；列表示 c 置信界。

对于随机块模型（SBM），由于每个顶点 $i \in V$ 都被分配到 k中的一个群组，因此除了意见分散度之外，我们还关注聚类。我们引入一种衡量顶点接近程度的指标

本稿件仅供审阅。

用于比较顶点与组内顶点和组外顶点的接近程度。为了计算这一指标（我们称之为比例离散度），首先计算组内和组外距离的平均值：

$$\mathcal{I}_T = \frac{1}{|k|}\sum_{k_i \in k}\frac{1}{|k_i|^2}\sum_{j\in k_i \subset V}\sum_{\ell \in k_i \in \subset V}|x_j(T) - x_\ell(T)| \tag{5.5}$$

$$\mathcal{O}_T = \frac{1}{|k|}\sum_{k_i \in k}\frac{1}{|k_i|}\sum_{j\in k_i \subset V}\frac{1}{|k| - |k_i|}\sum_{\ell \in \subset V/k_i}|x_j(T) - x_\ell(T)| \tag{5.6}$$

由于样本的末端扩散范围不同，为了进行恰当的比较，我们考察其比率，即

$$\mathcal{PS}_T = \frac{\mathcal{I}_T}{\mathcal{O}_T} \tag{5.7}$$

比例离散度的值越小，意味着同组节点之间的距离明显小于不同组节点之间的距离。因此，较小的值表示群体间分离程度更高。在 图10 中可以看到扩散范围以及 $\mathcal{O}_0$ 和 $\mathcal{I}_0$ 。显然，数值分布于大部分取值范围内，此外 $\mathcal{O}_0 \approx \mathcal{I}_0$。因此，在各项试验开始时，整体上有 $\mathcal{PS}_0 = 1$。各项试验稳态下比例离散度的图表见图 11。我们观察到， p_1 取值越高且 ρ取值越低，聚类现象越明显。在较小程度上，较低的 p_2也会增强聚类。这表明，较高的组内连接率和较少的跨组连接会导致极化加剧。

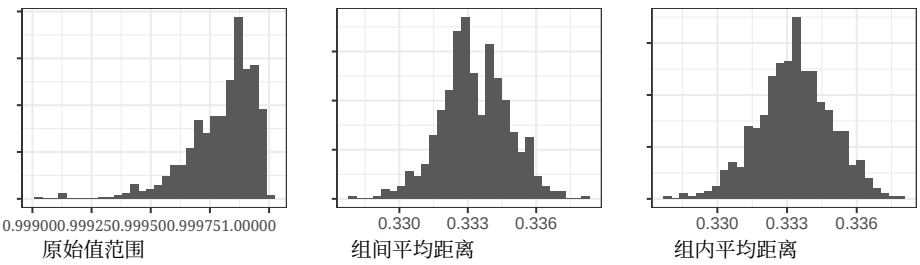


图10：每项试验开始时各指标的直方图，可用于比较最终结果

本稿件仅供审阅。

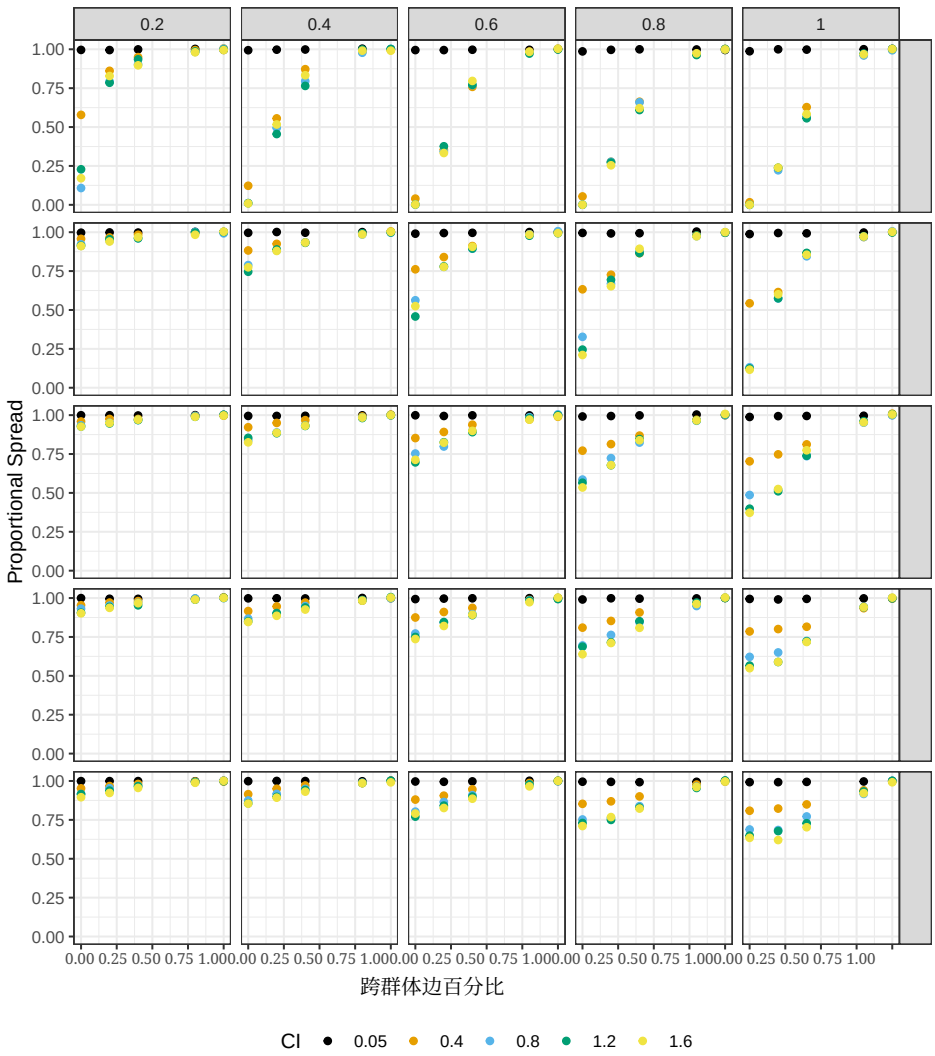


图 11：随机块模型试验的比例离散度。各行表示 p_2，即群外负连接的基础概率；各列表示 p_1，即群内正概率的基础值。横轴为 ρ 跨群体边的百分比，颜色表示置信界。值为 1 表示节点与群内和群外节点的距离相同。值越小，群体的聚集程度越高。

此稿件仅供审阅。

6. 未来工作与结论。 以往的意见动态模型主要关注网络连接的吸引性。这些模型会使每个接受度子图中的意见在稳态时完全收敛。使用极化 一词时，仍意味着整体意见空间会缩小。相比之下，本文提出的模型承认，在某些情况下，个体会寻求与其网络中的其他人形成差异。这种行为使整体意见空间有可能扩张。

本文通过解析方法证明了这种扩张在某些情况下的基本界，并为一般情况提供了直觉。此外，本文还通过数值方法分析了随机网络的稳态行为。这些仿真结果揭示了各种结构参数对模型的影响。显然，当网络连接中存在结构（例如随机块模型）时，会出现基于群体的聚类。即使初始条件是随机设定的，也会形成这种聚类。此外，信任边界的大小和排斥边的密度对意见分散度都至关重要。

本文提出的模型可用于研究复杂的意见动态：由于一些与其表达的意见无关的因素，政治人物或个人希望与他人区分开来。我们希望在未来的工作中探讨该模型如何帮助我们理解政治行为。初步想法包括为国会网络采用具有信息量的初始条件。或者，也可以用该模型考察受流行文化影响、将意识形态信念与其他因素联系起来的个人的意识形态观点。这将引入一个与理想点之间可变的连接，而理想点会吸引或排斥个人。加入排斥力后，有界信任模型对于人类行为的实证和理论研究将变得愈发重要。

致谢。 本项目的一位作者（M. FENG）获得 James S. McDonnell基金会博士后奖学金的资助。此外，我们还要感谢 Danny Ebanks、R. Michael Alvarez、Jonathan Katz 和 Mason A. Porter 提供的宝贵意见与见解。

参考文献

[1] C. Altafini and F. Ceragioli, *Signed bounded confidence models for opinion dynamics*, Automatica, 93（2018年），第114–125页。[2] S. Ansolabehere, J. M. Snyder Jr, and C. Stewart III, *Candidate positioning in us house elections*, 《美国政治科学杂志》（2001年），第136–159页。[3] M. A. Bailey, *Comparable preference estimates across time and institutions for the court congress and , , ,* 《美国政治科学杂志》（），第–页。*presidency* 51 2007 433 448 [4] D. P. Baron, *A sequential choice theory perspective on legislative organization*, 《立法研究季刊》（1994年），第267–296页。[5] A. Bhattacharyya, M. Braverman, B. Chazelle, and H. L. Nguyen, *On the convergence of thehegselmann-krause system*, 载于 ITCS '13：第四届理论计算机科学创新会议论文集，理论计算机科学创新，纽约，NY，2013年，计算机协会，第61–66页。[6] H. Blumer, *Public opinion and public opinion polling*, 《美国社会学评论》13（1948年），第542–549页，http://www.jstor.org/stable/2087146（访问于2022年11月17日）。[7] A. Bonica, *Mapping the ideological marketplace*, 《美国政治科学杂志》58（2014年），第367–386页。

此稿件仅供审阅。

[8] H. Z. Brooks and M. A. Porter, *A model for the influence of media on the ideology of content in online social networks* 2 2020 023041, 10 1103 , Phys. Rev. Research, ( ), 第https://doi.org/ . /PhysRevResearch. 2.023041页, https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.023041。[9] P. Clifford and A. Sudbury, *A model for spatial conflict*, Biometrika, 60（1973年）, 第581–588页, https: // doi.org/10.1093/biomet/60.3.581。[10] J. Clinton, S. Jackman, and D. Rivers, *The statistical analysis of roll call data*, 《美国政治科学评论》98（2004年）, 第355–370页。[11] J. C. Dittmer, *Consensus formation under bounded confidence*, 《非线性分析：理论、方法与应用》47（2001年）, 第4615–4621页。[12] A. Downs et al., *An economic theory of democracy*（1957年）。[13] S. Fortunato, V. Latora, A. Pluchino, and A. Rapisarda, *Vector opinion dynamics in a bounded confidence consensus model* 16 2005 1535 1551, , 《现代物理学国际期刊 C》（ ）, 第–页 https://doi.org/10.1142/S0129183105008126。[14] A. Grabowski and R. Kosiński, *Ising-based model of opinion formation in a complex network of interpersonal interactions* 361 2006 651 664 , 《物理学 A：统计力学及其应用》（ ）, 第–页。[15] J. Habermas, *The Public Sphere*, 加利福尼亚大学出版社, 伯克利, 1991年, 第398–404页。[16] R. Hegselmann, *Polarization and Radicalization in the Bounded Confidence Model: A Computer-Aided Speculation* 2020, 199 228 , De Gruyter, 柏林, 波士顿, 第–页。[17] R. Hegselmann and U. Krause, *Opinion dynamics and bounded confidence: models analysis and simulation* 5 2002 , 《人工社会与社会模拟期刊》（ ）。[18] A. Hickok, Y. Kureh, H. Z. Brooks, M. Feng, and M. A. Porter, *A bounded-confidence model of opinion dynamics on hypergraphs* 21 2022 1 32 , 《SIAM 应用动力系统期刊》（ ）, 第–页。[19] M. P. Hitt, C. Volden, and A. E. Wiseman, *Spatial models of legislative effectiveness*, 《美国政治科学杂志》61（2017年）, 第575–590页。[20] U. Kan, M. Feng, and M. A. Porter, *An adaptive bounded-confidence model of opinion dynamics on networks* 2021 10 48550 2112 05856, 2112 05856 , https://doi.org/ . / ARXIV. . https://arxiv.org/abs/ . 。[21] A. C. R. Martins, *Continuous opinions and discrete actions in opinion dynamics problems*, 《现代物理学国际期刊 C》19（2008年）, 第617–624页。[22] McNollgast, *Politics and the courts: A positive theory of judicial doctrine and the rule of law*, S. Cal. L. Rev., 68（1994年）, 第1631页。[23] K. T. Poole and H. Rosenthal, *A spatial model for legislative roll call analysis*, 《美国政治科学杂志》（1985年）, 第357–384页。[24] K. T. Poole and H. Rosenthal, *Congress: A political-economic history of roll call voting*, 牛津大学出版社按需出版, 2000年。[25] W. H. Riker, *Implications from the disequilibrium of majority rule for the study of institutions*, 《美国政治科学评论》74（1980年）, 第432–446页。[26] K. A. Shepsle, *Institutional arrangements and equilibrium in multidimensional voting models*, 《美国政治科学杂志》（1979年）, 第27–59页。[27] B. Shor, C. Berry, and N. McCarty, *A bridge to somewhere: Mapping state and congressional ideology on a cross-institutional common space* 35 2010 417 448 , 《立法研究季刊》（ ）, 第–页。[28] D. A. Siegel, *Social networks and collective action*, 《美国政治科学杂志》53（2009年）, 第122–138页。[29] A. Sîrbu, D. Pedreschi, F. Giannotti, and J. Kertész, *Algorithmic bias amplifies opinion fragmentation and polarization: A bounded confidence model* 14 2019 1 20 , 《PLOS ONE》（ ）, 第–页。[30] H. Speier, *Historical development of public opinion*, 《美国社会学杂志》55（1950年）, 第376–388页。

此稿件仅供审阅。