arXiv:2301.02213v1 [cs.LO] 5 Jan 2023

可表示与对角可表示弱化关系代数*

Peter Jipsen[1][0000−0001−8608−808X] 和 Ja˘s ˘Semrl[2][0000−0001−7440−8867]

[1] 查普曼大学 jipsen@chapman.edu https://www1.chapman.edu/~jipsen/[2] UCL（伦敦大学学院） j.semrl@cs.ucl.ac.uk http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/jsemrl/

摘要。定义在偏序集上的二元关系若以该偏序作为双侧复合单位元，则称为弱化关系。这一概念源于序列演算中的弱化规则，并与相关逻辑的模型密切相关。对于一个固定的偏序集，其上的弱化关系全体构成该偏序集底集上完整关系代数的一个子约化。我们为可表示弱化关系代数类提出一种双人博弈，其形式类似于可表示关系代数类所对应的博弈。借此，我们能够定义若干抽象弱化关系代数类，用以逼近可表示弱化关系代数的拟簇。我们为其中一些类给出明确的有限公理化。我们定义对角可表示弱化关系代数类，并证明它是一个判别簇。我们还为若干小型弱化关系代数给出明确的表示。

关键词：弱化关系代数 · 相关框架 · 杉原幺半群 · 表示博弈

1 引言

集合 X 上的全体二元关系代数为

$$\mathbf{Rel}(X) = (\mathcal{P}(X^2), \cap, \cup, \emptyset, \top, ;, id_X, \neg, ^\smile)$$

其中，$\top = X^2$, $R;S$ 是 R, S 的复合，而 $R^\smile = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$。可表示关系代数类 $\mathsf{RRA} = \mathbb{SP}\{\mathbf{Rel}(X) \mid X\text{是一个集合}\}$。塔斯基 [22] 证明了 RRA 是一个簇，Monk [17] 证明了 RRA 不能用有限多个公理化。更多详情请参见 Givant [5][6]和 Maddux [11]的著作。

偏序集 $\mathbf{X} = (X, \leq)$ 上的弱化关系集合为 $\mathcal{W}(\mathbf{X}) = \{R \subseteq X^2 \mid \leq; R; \leq = R\}$。偏序集 $\mathbf{X}$ 上的全体弱化关系构成的代数为

$$\mathbf{wk}(\mathbf{X}) = (\mathcal{W}(X, \leq), \cap, \cup, \emptyset, \top, ;, 1, \sim)$$

* 本研究得到工程与物理科学研究理事会 EP/S021566/1 的资助

其中 $1 = \leq$ 和 $\sim R = \neg R^{\smile}$ 是补-逆向运算。可表示弱化关系代数类为

$$\mathsf{RwkRA} = \mathbb{SP}\{\mathbf{wk}(X, \leq) \mid (X, \leq) \text{ is a poset}\}.$$

弱化关系是二元关系的类比：当集合与函数构成的范畴 Set 被偏序集与保序函数构成的范畴 Pos 取代时，便得到弱化关系。由于集合可以视为离散偏序集（即按单位关系排序的反链），Pos 将 Set 包含为一个满子范畴，这意味着弱化关系是对二元关系的重要推广。然而，弱化关系不允许以 $\neg$ 或 $\smile$ 作为运算。

它们在序列演算 [2], 拟邻近格／空间[19] , 序 enriched 类别 [10] , 数学形态学 [21], 以及程序语义中均有应用，例如通过分离逻辑 [18] 。

密切相关的代数 Wk(X) 定义为将海廷蕴涵 $R \to S = \{(x, y) \mid \forall u, v(u \leq x \ \& \ y \leq v \ \& \ uRv \Rightarrow uSv)\}$ 添加到 wk(X) 后得到的扩张。这些代数的 $\mathbb{SP}$-闭包记为 RWkRA，并已在 [3], [4], [9], [20], [21] 中得到研究。它是一个判别子簇，其中可表示关系代数构成一个真子簇。RWkRA 中的代数是广义成束蕴涵代数，而 RwkRA 中的代数都是 RWkRA 中代数的子约化，因此 RwkRA 是一个拟簇。我们证明它不是一个簇，但就可表示性而言，这两个类的表现相同。

在第 2 节中，我们为 RwkRA 定义一种表示博弈（该博弈可以扩展为 RWkRA 的博弈），并用它为这一类给出一个显式的全称公理化。第 3 节定义弱化关系代数的（Kripke）框架，并将该博弈改编到这一框架中。我们从这一框架博弈的 n-棋子版本定义一系列类 wkRA_n，从上方逼近 RwkRA；这类似于序列 RA_n，后者收敛于 RRA。下一节中，我们为 wkRA_2 和 wkRA_3 找到有限公理化。第 5 节中，我们定义可表示对角弱化关系代数这一类，并证明它是一个判别子簇。最后一节中，我们证明，wkRA_3 中所有元素不超过 6 个的结合代数都是可表示的。

2 表示博弈

本节中，我们介绍一种针对弱化关系代数的表示博弈，它类似于为关系代数定义的博弈，见 [8]。我们先定义一些记号。

定义 1. 有界循环反演含幺分配格序岩浆$\mathcal{A} = (A, \cdot, +, \bot, \top, ; 1, \sim)$ 是满足以下条件的代数

(1) $(A, \cdot, +, \bot, \top)$ 是一个有界分配格 (2) $(s + t)$; $(u + v)$
$= s;\ u + s;\ v + t;\ u + t;\ v$

(3) $s;\bot = \bot = \bot;s$(4) $s;$
$1 = s = 1;s$(5) $\sim(\sim s) = s$
(6) $\sim(s \cdot t) = \sim s + \sim t$

对所有 $s,t,u,v \in A$， $\mathcal{A}$的表示是一个单射同态 h：$\mathcal{A} \to$wk(X)，其中 X 是某个偏序集 $= (X, \leq)$，并且 $h(\top)$ 是X上的等价关系。

注意， $s \leq t$ 当且仅当 $s + t = t$，或者等价地， $\sim s \cdot \sim t = \sim t$，这可以改写为 $\sim t \leq \sim s$，因此 $\sim$ 是序反转的。名称中加入“循环的”这一形容词，是为了与非循环的一般情形形成对比：该情形的语言中有两个一元运算 $\sim, -$，它们满足 $\sim -s = s = -\sim s$。在循环情形下， $\sim, -$ 具有相同的解释。

分配格序广群简称为 $d\ell$-广群。设 $\mathcal{A}$是一个有界的循环对合幺元 $d\ell$-广群。此外，我们定义 $0 = \sim 1$。

定义 2. 网络（针对 $\mathcal{A}$）是一个元组 $\mathcal{N} = (N, \lambda)$，其中 N 是一个节点集合，且 λ：$N^2 \to \wp(\mathcal{A})$ 是一个标记函数，使得对所有 $x, y \in N$,$1 \in \lambda(x,x)$ 和 $\top \in \lambda(x,y)$ 均成立。当且仅当对所有$x, y \in N$，满足以下条件时，该网络相容：

$$\lambda(x,y) \cap \{\sim a \mid a \in \lambda(y,x)\} = \emptyset.$$

网络 $\mathcal{N} = (N, \lambda)$ 是 $\mathcal{N}' = (N', \lambda')$ 的前网络——记作 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$——当且仅当 $N \subseteq N'$，且对所有 $x, y \in N$，均有 $\lambda(x,y) \subseteq \lambda'(x,y)$。

注意，前网络谓词构成一个偏序，而且不相容性会从前网络继承。

现在我们已经具备定义一个双人游戏的工具，并可证明，其中一位博弈者存在必胜策略，当且仅当 $\mathcal{A}$ 属于 RWkRA 类。

定义 3。对于某个 $n \leq \omega$， n 轮表示博弈记为 $\Gamma_n(\mathcal{A})$，是由挑战者 $\forall$ (Abelard) 和应答者 $\exists$ (H´elo¨ıse) 进行的双人游戏，共进行 $n+1$ 步。在 $0 \leq i \leq n$ 的第 i 步之后， $\exists$ 将返回一个网络 $\mathcal{N}_i$，使得 $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{N}_n$。如果 $\exists$返回一个不相容的网络，则 $\forall$ 获胜；否则， $\exists$ 获胜。

在初始化步 $\forall$ 中， $\forall$ 选取一对元素 $a \not\leq b \in \mathcal{A}$，而 $\exists$必须返回一个网络 $\mathcal{N}_0$，其中包含某个 $(x,y) \in N_0^2$，使得 $a \in \lambda(x,y)$ 且 $\sim b \in \lambda(y,x)$。

在 $0 < i \leq n$ 的第 i 步， $\forall$ 可以用以下四种步中的任意一种向 $\exists$ 发起挑战。

连接操作： $\forall$选取 $x, y \in N_{i-1}$，以及某个 $a \in \lambda_{i-1}(x,y)$，并选取某些 $b, c \in \mathcal{A}$，使得 $a \leq b + c$。 $\exists$ 必须返回一个 $\mathcal{N}_i$，满足 $b \in \lambda_i(x,y)$ 或 $c \in \lambda_i(x,y)$。
对合操作： $\forall$选取 $x, y \in N_{i-1}$和某些 $a, b \in \mathcal{A}$，使得 $b = \sim a$。
$\exists$必须返回一个 $\mathcal{N}_i$，其中包含 $a \in \lambda_i(x,y)$ 或 $b \in \lambda_i(y,x)$。

复合步：∀选择 x、y、$z \in N_{i-1}$和 $a \in \lambda_{i-1}(x,y)$ $b \in \lambda_{i-1}(y,z)$。∃必须返回一个 $\mathcal{N}_i$，其中包含 $c \in \lambda_i(x,z)$，且 $c = a$；b。
见证步：∀选取 $x,y \in N_{i-1}$, $a \in \lambda_{i-1}(x,y)$，以及 $b,c \in \mathcal{A}$，使得 $a = b$；c。∃必须返回一个 $\mathcal{N}_i$，其中包含某个 $z \in N_i$，使得 $b \in \lambda_i(x,z)$ $c \in \lambda_i(z,y)$。

命题 1. $\mathcal{A}$ 是可表示的，当且仅当 ∃ 对$\Gamma_\omega(\mathcal{A})$有必胜策略。

证明。若 $\mathcal{A}$ 是可表示的，那么 ∃ 可以取一个在 X上的表示 h。设$a \not\leq b$ 是初始化步中所下的有序对。则存在某个极大的$X' \subseteq X$，使得 $\exists x,y \in X'$：$(x,y) \in h(a) \backslash h(b)$，且 $\forall z,w \in X'$：$(z,w) \in h(\top)$。在初始化步中，∃可以返回网络 $\mathcal{N} = (X', \lambda)$，其中 $\lambda(x,y) = \{c \in \mathcal{A} \mid (x,y) \in h(c)\}$。由于 h 保留了该语言中的所有运算，因此 ∀ 可能要求的所有步都可以轻松应对：每步之后返回同一个网络即可。

如果 $\mathcal{A}$ 是可数的，那么 ∀ 就可以安排自己的步，使得每一步最终都会被调用。设 $\mathcal{N}^a_{,0}{}^b, \mathcal{N}^a_{,1}{}^b, \mathcal{N}^a_{,2}{}^b, \ldots$ 是在 $\Gamma_\omega(\mathcal{A})$ 的一场 ∃胜局中出现的网络，其中 ∀ 以这种方式安排了自己的步，并且已为有序对 $a \not\leq b$调用了初始化步。定义 $N^a_{,\omega}{}^b$为 $\{x \mid \exists i < \omega : j \geq i \Rightarrow x \in N^a_{,i}{}^b\}$, $\lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)$ 为 $\{c \mid \exists i < \omega : j \geq i \Rightarrow (x,y \in N^a_{,i}{}^b \wedge c \in \lambda^a_{,j}{}^b(x,y))\}$，并将关系 $\equiv$定义为 $\{(x,y) \in (N^a_{,i}{}^b)^2 \mid 1 \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)\ 1 \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(y,x)\}$。根据定义，它是对称的；由于网络被定义为具有 $1 \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,x)$，它是自反的；又由于所有复合步最终都会被调用，且 $1;1 = 1$，它是传递的。因此，我们可以定义 $h^{a,b}: \mathcal{A} \to \left((N_\omega/\equiv)^2\right)$，其中对所有 $c \in \mathcal{A}$，都有 $h^{a,b}(c) = \{([x]_\equiv, [y]_\equiv) \mid c \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)\}$。

由于初始化，存在一对 $x,y \in N^a_{,\omega}{}^b$，满足 $a \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)$；由于网络保持相容，且 $\sim b \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(y,x)$，我们有 $b \notin \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)$。由于每个复合步都已执行，且 1 是 ; 的单位元，因此对于所有 $x' \in [x]_\equiv, y' \in [y]_\equiv$，我们有$b \notin \lambda^a_{,\omega}{}^b(x',y')$。因此，$([x]_\equiv, [y]_\equiv)$ 是一对确保 $h^a_{,}{}^b(a) \not\subseteq h^a_{,}{}^b(b)$ 的元素。

$\top$ 由 $h^a_{,}{}^b$ 表示，根据网络的定义，它是全关系；而 $\bot$ 表示为空关系，因为如果存在一对 (x,y) 满足$\bot \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)$，那么通过一系列复合步，每一对都会在其标签中包含 $\bot$。这意味着，点的初始化对会在其标签中同时包含 a 和 b。

连接操作确保连接由 $h^{a,b}$ 正确表示，也就是说，连接操作确保 $h^{a,b}(c) + h^{a,b}(d) \subseteq h^{a,b}(c+d)$，因为 $c \leq (c+d)+(c+d)$，并且 $h^{a,b}(c) + h^{a,b}(d) \supseteq h^{a,b}(c+d)$，因为 $c+d \leq c+d$，因此 $h^{a,b}(c+d)$ 中的一对也会属于 $h^{a,b}(c)$ 或 $h^{a,b}(d)$。

由于从未引入不相容的网络，因此若 $\sim c \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)$，则 $c \notin \lambda^a_{,\omega}{}^b(x,y)$。由于所有复合操作最终都会被调用，且 1 是 ; 的单位元，这一结论适用于 $\equiv$ 的相关等价类以及 $h^{a,b}(\sim c) \subseteq \sim h^{a,b}(c)$ 中的所有点。对于 $h^{a,b}(\sim c) \supseteq \sim h^{a,b}(c)$，若 $([x]_\equiv, [y]_\equiv) \notin h^{a,b}(\sim c)$，那么在调用 (y,x) 的对合操作时，c, ∃ 选择令 $c \in \lambda^a_{,\omega}{}^b(y,x)$。

若 $([x]_{\equiv}, [y]_{\equiv}) \in h^{a,b}(c)$ 且 $([y]_{\equiv}, [z]_{\equiv}) \in h^{a,b}(d)$，那么通过对 $a; 1; b = a; b$ 执行复合操作，我们得到 $([x]_{\equiv}, [z]_{\equiv}) \in h^{a,b}(c; d)$，因此 $h^{a,b}(c); h^{a,b}(d) \subseteq h^{a,b}(c; d)$。对于 $h^{a,b}(c); h^{a,b}(d) \supseteq h^{a,b}(c; d)$，假设 $([x]_{\equiv}, [z]_{\equiv}) \in h^{a,b}(c; d)$，且不失一般性，$c; d \in \lambda^{a,}{}_{\omega}{}^{b}(x, z)$。由于相关的见证步已被调用，因此存在一个 y，使得 $([x]_{\equiv}, [y]_{\equiv}) \in h^{a,b}(c)$ 且 $([y]_{\equiv}, [z]_{\equiv}) \in h^{a,b}(d)$。

$h^{a,}{}_{b}(1)$ 根据网络的定义是自反的；由于底集是按 $\equiv$ 取商得到的，因此是反对称的；并且由于 $1; 1 = 1$ 和所有复合操作最终都会被调用，因此是传递的。此外，由于复合由 $h^{a,}{}_{b}$ 表示，且 1 是复合的单位元，因此对于所有 $c \in \mathcal{A}$, $h^{a,}{}_{b}(c)$ 相对于 1 都是弱化关系。

$h^{a,}{}_{b}$ 因此是一个同态，它区分 $\mathcal{A}$ $a \not\leq b$。于是，令 $h(c)$ 对所有 $c \in \mathcal{A}$ 都为 $\dot{\bigcup}_{a \not\leq b \in \mathcal{A}} h^{a,b}(c)$ 的不交并。由于 h 是一个能区分所有 $a \not\leq b$ 对的同态，因此它是一个表示。

由于 RWkRA 是一个伪初等类，根据向下 Löwenheim–Skolem 定理，这一结论可推广到不可数代数。□

接下来我们证明，存在针对 $\exists$ 的必胜策略可以用一个全称一阶句来表达。为此，我们定义以下概念。

定义 4。项网络是一个网络 $\mathcal{N} = (N, \lambda)$，其中 N 是一个有限节点集，λ 是一个标记函数，它将每一对节点映射到一个有限项集。我们还要求，对于所有 $x, y \in N$, $1 \in \lambda(x, x)$ 和 $\top \in \lambda(x, y)$。

对于每个项网络 $\mathcal{N} = (N, \lambda)$，我们定义一个网络 $\mathcal{N}^{+,x,y,t} = (N \cup \{y\}, \lambda^{\ell})$，其中 $x \in N$, $y \in N \uplus \{x^+\}$（其中 x^+ 是一个新节点），t 是 RWkRA 语言中的一个项，并且对所有 z, $w \in N \uplus \{x^+\}$ 均成立。

$$\lambda^{\ell}(z, w) = \begin{cases} \{1, \top\} & \text{if } x^+ = z = w \\ \{\top\} & \text{if } x^+ = z \neq w \neq x \text{ or } x^+ = w \neq z \neq x, w \neq y \\ \{t, \top\} & \text{if } z = x, w = y = x^+ \\ \lambda(z, w) \cup \{t\} & \text{if } z = x, w = y \neq x^+ \\ \lambda(z, w) & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于变量 a, b，我们定义下面两个初始项网络。

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{1,a,b} =& (\{x\}, \{(x, x) \mapsto \{\top, 1, a, {\sim}b\}\}) \\ \mathcal{N}^{2,a,b} =& (\{x, y\}, \{(x, x) \mapsto \{\top, 1\}, (x, y) \mapsto \{\top, a\}, \\ & (y, x) \mapsto \{\top, {\sim}b\}, (y, y) \mapsto \{\top, 1\}\}) \end{aligned}$$

命题 2. 对于每个 $n < \omega$，都存在一个一阶公式 σ_n，它对应于 $\exists$ 在 $\Gamma_n(\mathcal{A})$ 中拥有必胜策略。

证明。我们通过归纳证明：对于每个 $0 \leq n < \omega$，都存在一个公式 $\phi_n(\mathcal{N})$，它由有限项网络 $\mathcal{N}$ 定义，所有变量均为全称量化，并表示该网络能够在表示博弈中继续保持相容 n 步

；在该博弈中， $\exists$ 采取保守策略，即只添加所要求的标签。显然，她在该博弈中拥有必胜策略，当且仅当她在保守对局中也拥有必胜策略。

在基例中， $\phi_0(\mathcal{N})$（如下定义）表示一致性（在零步中保持相容）

$$\phi_0(\mathcal{N}) = \bigwedge_{x,y\in N} \bigwedge_{t\in\lambda(x,y)} \bigwedge_{t'\in\lambda(y,x)} t \neq {\sim}t'.$$

在归纳情形中，我们假设 $\phi_n(\mathcal{N}')$（其中 $\mathcal{N}'$ 是一个所有变量均全称量化的项网络）是 $\mathcal{N}'$ 能够在 n 步中保持相容的充要条件。接着，我们证明可以定义 $\phi_{n+1}(\mathcal{N})$，将这一假设扩展到 $n+1$ 步。尽管这里使用了 a、b，但在构造这些公式时，变量名应当各不相同。

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}(\mathcal{N}) = & \bigwedge_{x,y\in N} \bigwedge_{t\in\lambda(x,y)} \forall a,b\big(t \leq a+b \implies (\phi_n(\mathcal{N}^{+,x,y,a}) \vee \phi_n(\mathcal{N}^{+,x,y,b}))\big) \\
& \wedge \bigwedge_{x,y\in N} \bigwedge_{t\in\lambda(x,y)} \forall a\big(\phi_n(\mathcal{N}^{+,x,y,a}) \vee \phi_n(\mathcal{N}^{+,y,x,{\sim}a})\big) \\
& \wedge \bigwedge_{x,y,z\in N} \bigwedge_{t\in\lambda(x,y)} \bigwedge_{t'\in\lambda(y,z)} \phi_n(\mathcal{N}^{+,x,z,t;t'}) \\
& \wedge \bigwedge_{x,y\in N} \bigwedge_{t\in\lambda(x,y)} \forall a,b\Big(t = a;b \implies \bigvee_{z\in N\uplus\{x^+\}} \phi_n\big((\mathcal{N}^{+,x,z,a})^{+,z,y,b}\big)\Big)
\end{aligned}$$

现在，对于每个 $0 \leq n < \omega$，我们都有一个公式 $\phi_n(\mathcal{N})$，确保 $\exists$ 能使全称量化的项网络 $\mathcal{N}$ 保持相容。因此，公式

$$\sigma_n = \forall a,b\ (a \not\leq b \implies (\phi_n(\mathcal{N}^{1,a,b}) \vee \phi_n(\mathcal{N}^{2,a,b}))$$

确保 $\exists$ 在长度为 n 的保守博弈中拥有必胜策略。 □

推论 3. $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ 与循环分配对合半环的公理一起构成一个递归可枚举理论，该理论公理化了 RWkRA。

3 框架、框架博弈与有限卵石博弈

本节将有限代数呈现为框架，类似于相关逻辑中的 Routley-Meyer 框架或相关性框架 [1]，以及原子关系代数的原子结构 [12]。随后，我们将定义一种经过修改的表示博弈，该博弈利用框架。

最后，我们定义框架博弈的 n-棋子版本。类似于关系代数的抽象类 $\mathsf{RA}_\omega \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{RA}_3 \subseteq \mathsf{RA}_2$,，这引出了弱化关系代数的类 $\mathsf{wkRA}_\omega \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{wkRA}_3 \subseteq \mathsf{wkRA}_2$。显然，$\mathsf{RA}_\omega$、$\mathsf{wkRA}_\omega$ 分别是可表示关系代数和弱化关系

代数的类。此外，类似于 RA_4, ，我们称 wkRA_4 为弱化关系代数的类。

首先注意，RwkRA 的语言不包含否定，因此格不必是布尔代数。正如我们将在第 6 节中看到的，最小的可表示非布尔代数是一个含 4 个元素的链 S_4。因此，我们不能用原子来表示有限弱化关系代数，而要使用并不可约元。

定义 5。可表示弱化关系代数中的非$\bot$ 元素 a 是并不可约元，当且仅当对于所有 b、 c，若 $a = b + c$，则 $a = b$ 或 $a = c$。它是并素元，当且仅当对于所有 b、 c，若 $a \leq b + c$，则 $a \leq b$ 或 $a \leq c$。

由于 $\cdot$ 对 $+$ 具有分配性，因此一个元素是并不可约元，当且仅当它是并素元。在有限情形下，每个代数都有并不可约元，并且每个元素都是并不可约元的并。（一般而言，这仅对完备代数成立。事实上，根据定义，若分配格中的每个元素都是完全并不可约元的并，则称该格为并完备。这是布尔代数中原子概念的推广。）

下面结果中的元素 a 称为（x， y）的并不可约标签。

命题 4. 在有限可表示的弱化关系代数 $\mathcal{A}$的表示 h 中，对于任意一对（x， y），都存在一个并不可约元 $a \in \mathcal{A}$ ，使得

$$\uparrow a = \{s \in \mathcal{A} \mid (x, y) \in h(s)\}.$$

证明。表示 h 将并映射为并集，因此集合 $\{s \mid$（x， y）$\in h$（s）$\}$是上闭的；如果（x， y）$\in h$（$a+b$），那么它也属于 h（a）或 h（b）。因此，该表示的基集本身是并素元的上闭包的并。现在，如果它高于 $\uparrow a$ 和 $\uparrow b$，那么必然有（y， x）既不属于h（$\sim a$），也不属于 h（$\sim b$），从而（x， y）$\in h$（$\sim$（$\sim a + \sim b$））$= h$（$a \cdot b$）。因此，所有这类并不可约元的交也必然是一个非-$\bot$ 元，它是并素的，并且低于集合中的所有元素。□

虽然我们的语言中没有定义逆运算，但我们可以用下面的技巧，在并不可约元上定义一个有用的一元运算。

定义6。对于有限代数中的每个并不可约元 a，定义$\hat{a} = \sim \sum_{a \not\leq s} s$，其中 $\sum$ 相对于并（$+$）。

有限代数 $\mathcal{A}$中的所有 s 都定义了并 $\sum_{s \not\leq t} t,$ ，通常记为κ（s）。取 $s \leq s' \in \mathcal{A}$，则有 $s \not\leq t \Rightarrow s' \not\leq t$，因此 κ（s）$\leq \kappa$（s'），故κ 是保序的。由于 $\sim$ 是序反转的，而 κ 是保序的，因此^是序反转的。

命题 5. 在任意有限有界分配对合加法代数 $\mathcal{A}$ 中，如果 a 是并不可约元，那么$\hat{a}$ 也是并不可约元。

证明. 众所周知，格中并不可约元 a 的 $\kappa(a)$ 是交不可约的；又因为 $\sim$ 是序反转的，这意味着 $\hat{a} = {\sim}\kappa(a)$ 是并不可约元。□

命题 6. 若表示中的一对 (x, y) 具有并不可约标签 $\hat{a}$，则 (y, x) 具有标签 $\hat{a}$。此外，$\hat{\hat{a}} = a$。

证明. ${\sim}s \in h(y, x)$ 当且仅当 $s \notin h(x, y)$，即 $a \not\leq s$。因此，根据命题 4 中的论证，(y, x) 的并不可约标签可写为 $\prod_{a \not\leq s} {\sim}s$，其中 $\prod$ 是相对于交 $(\cdot)$ 而言的；根据德摩根等价，这等价于 ${\sim}\sum_{a \not\leq s} s$。□

最后，为了刻画复合，我们需要定义一个三元谓词，类似于关系代数中的允许的三角形集合。

定义 7. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限有界循环对合 $d\ell$-广群，并在 $\mathcal{A}$ 的并不可约元集合上定义一个三元关系 R，如下所示

$$R(a, b, c) \text{ if and only if } a \leq b; c.$$

对于原子为 a、b、c 的关系代数，皮尔士三角形定律指出：

$$a \leq b; c \iff \hat{a} \leq \hat{c}; \hat{b} \iff b \leq a; \hat{c} \iff \hat{b} \leq c; \hat{a} \iff c \leq \hat{b}; a \iff \hat{c} \leq \hat{a}; b.$$

正如我们将在下一节看到的，这一定律对于可表示弱化关系代数框架这一类并不成立。不过，关系代数的原子结构可以推广到弱化情形，如下所示。

定义 8. 相关性框架 $\mathcal{F} = (F, I, \leq, R, \hat{})$ 是一种结构，它具有底集 F、一元谓词 I、偏序谓词 $\leq$、三元谓词 R 和序反转对合运算 $\hat{}$，其中对于所有 $a, b, c, d \in F$

(1) $a \leq b \Leftrightarrow \exists e\colon I(e) \wedge R(a, e, b)$ (2)
$a \leq b \Leftrightarrow \exists e\colon I(e) \wedge R(a, b, e)$ (3)
$a \leq b \wedge R(b, c, d) \Rightarrow R(a, c, d)$ (4)
$b \leq c \wedge R(a, b, d) \Rightarrow R(a, c, d)$ (5)
$c \leq d \wedge R(a, b, c) \Rightarrow R(a, b, d)$

命题 7。相关性框架 $\mathcal{F} = (F, I, \leq, R, \hat{})$ 通过将 $(F, \leq)$ 取为带有其偏序的格的不可约元，并对所有 $s, t \in A$，定义了一个有界的对合幺 $d\ell$-广群 $\mathcal{A} = (A, \cdot, +, \bot, \top, ;, 1, \sim)$

$$1 = \sum_{I(a)} a, \qquad {\sim}s = \sum_{\hat{a} \not\leq s} a, \qquad s; t = \sum_{b \leq s, c \leq t, R(a,b,c)} a$$

其中 a、b、$c \in F$。

证明。有界分配格可以由其并不可约元及其序关系定义。为证明该广群有单位元，我们可以看到，根据定义 8(1)(2)，复合与单位元相复合所得的各项都不大于单位元；又因为 $\leq$ 是自反的，所以对于每个并不可约元，都存在一个与单位元（在任一侧）复合所得的项等于该并不可约元。因此，1 正是单位元。根据定义，复合具有加法性。$\sim$ 是一个对合，因为并不可约元 $a \leq \sim(\sim s)$ 当且仅当 $\hat{a} \not\leq \sim s$，而这当且仅当 $a = \hat{\hat{a}} \leq s$。对于德摩根等价，$a \leq \sim(\sim s + \sim t)$ 当且仅当 $\hat{a} \not\leq \sim s + \sim t,$，或者等价地，$\hat{a} \not\leq \sim s \wedge \hat{a} \not\leq \sim t$ ^ ^；根据定义，这当且仅当 $a = \hat{a} \leq s$ 且 $a = \hat{a} \leq t$，也就是 $a \leq s \cdot t$。□

命题 8. 每个有限有界循环对合幺元 $d\ell$-广群都有唯一的等价相关性框架。

证明. 有限分配格由其并不可约元偏序集唯一确定；根据命题 5，这些并不可约元上定义的 ^ 也是唯一的。到 R 的映射是唯一的，因为定义 8(3)(4)(5) 确保 R 在第一个参数上是下闭的，在其他参数上是上闭的。□

命题 9. 对于有限代数和有限框架，前两个引理中描述的映射互为逆映射。

证明. 有限分配格与其并不可约元偏序集一一对应。单位元的保持性和复合由定义立即可得。对于 $\sim$，注意到 $\sim\kappa(a) = \hat{a} \not\leq s$ 当且仅当 $\sim s \not\leq \kappa(a)$ $= \sum_{a \not\leq} t,$，或者等价地 $a \leq \sim s$。对于逆向，注意到 $\sim\kappa(a) = \sum_{\hat{} b \not\leq \kappa(a)} b = \sum_{a \leq \hat{b}} b = \sum_{b \leq \hat{a}} b = \hat{a}$。□

尽管我们是针对有限代数定义这些框架的，但我们可以说，如果一个可能是无限的代数能够由一个相关性框架定义，那么它就是框架可定义的。在关系代数的语境中，这对应于完备原子关系代数。类似于该类代数，我们将证明，每个非框架可定义代数都嵌入到一个具有等价可表示性的框架可定义代数中。

命题 10. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有界循环的对合幺 $d\ell$-广群。则可以通过取所有素滤子 $U \subseteq A$ 的底集来定义一个框架 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$，其中 $U \leq V$；当且仅当 $V \subseteq U$、$U = \{\sim s \mid s \in A \setminus U\}$、$I(U)$ $\Leftrightarrow 1 \in U$ 且 $R(U$、V、$W)$，当且仅当对于所有 $v \in V$、$w \in W$，都有 v；$w \in U$。

证明。 $\leq$ 显然是一个偏序；对于 ^ 的封闭性，注意到 $A \setminus U$ 是一个素 ^ 理想，因此根据 ∼的序反转性质， U 是一个素滤子。此外，所有幺元条件都显然得以保留，并且由 $U' \leq U$ 当且仅当$U \subseteq U'$ 可知， R 在第一个参数上向下封闭，在另外两个参数上向上封闭。□

命题 11。 $\mathcal{A}$ 是可表示的，当且仅当由 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$定义的代数是一个可表示的弱化关系代数。这个代数称为 $\mathcal{A}$的典范扩张。

证明。由于 $\mathcal{A}$ 是由 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$定义的代数的子代数，我们知道从右到左蕴涵成立。对于另一个方向，如果 $\mathcal{A}$ 是可表示的，则每个 (x, y) 都有一个素滤子 U ，使得 $(x, y) \in h(a)$ 当且仅当$a \in U$ ，从而正确表示该格。定义 (y, x) 的素滤子恰好是 U。单位元也得到了正确表示，因为它只位于包含它的那些素滤子之上。最后，对于 ; 我们已经证明，只需使 $\exists$ 在任意有限长度的游戏中拥有必胜策略即可。因此，在任意时刻，我们都需要证明：当且仅当所有复合的有限交都适当地包含在相关素滤子中时，复合才得到了正确表示。□

定义 9。框架网络 $\mathcal{N} = (N, \lambda)$ 是为框架 $\mathcal{F} = (F, I, \leq R, \check{})$ 定义的，其中 N是节点集合，$\lambda\colon N^2 \to F$是标记函数。当且仅当对于所有 $x, y \in N$ ，都有$\smile\lambda(x, y) = \lambda(y, x)$，并且对于所有 $x, y, z \in N$，都有 $R(\lambda(x, y)\ \lambda(x, z)\ \lambda(z, y))$ 时，该网络称为相容。

对于两个框架网络 $\mathcal{N} = (N, \lambda)$ $\mathcal{N}' = (N', \lambda')$，我们称其为 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$，当且仅当 $N \subseteq N'$ 且 $\lambda = \lambda' \restriction_{N^2}$ ，其中 $\restriction$ 表示将该函数限制到下标所示定义域后的结果。

定义 10. 无限长度框架博弈 $G(\mathcal{F})$ 是针对两个博弈者 $\forall$ 和 $\exists$定义的，其中 $\mathcal{F} = (F, I, \leq, R, \check{})$ 是一个相关性框架。

博弈开始时， $\forall$ 选择一个并不可约元 a ，而 $\exists$ 必须返回一个框架网络 $\mathcal{N}_0 = (N_0, \lambda_0)$，使得存在 $x, y \in N_0$ 满足 $\lambda_0(x, y) = a$。

在第 i步， $0 < i < \omega$ $\forall$ 选择一对 $x, y \in N_{i-1}$ 以及一对并不可约元 a, b，使得 $R(\lambda(x, y)\ a, b)$，并且对于所有 $a' \leq a, b' \leq b \in N_{i-1}$，如果 $R(\lambda(x, y)\ a', b')$，那么 $a = a'$ 且 $b = b'$。 $\exists$ 必须返回一个网络 $\mathcal{N}_i = (N_i, \lambda_i)$，使得 $\mathcal{N}_{i-1} \subseteq \mathcal{N}_i$ 且 $\exists z \in N_i$，并满足 $\lambda(x, z) = a, \lambda(z, y) = b$。

当且仅当 $\exists$ 在对局的任意时刻返回一个不相容的网络时，$\forall$ 才获胜。

命题 12. $\exists$ 对 $G(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$ 有必胜策略，当且仅当她对 $\Gamma_\omega(\mathcal{A})$ 有必胜策略。

证明. 只需证明她在所有步最终都会被称为「最终」的对局中有必胜策略。因此，如果她对 $\Gamma_\omega(\mathcal{A})$ 有必胜策略，我们知道极限网络会以相关素滤子作为标签。因此，如果 a 是初始不可约元， $\exists$ 就可以将她在初始化对为 $a \not\leq \kappa(a)$ 的对局的极限网络中的所有步映射过来。

反过来，假设她有一个针对 $G(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$ 的必胜策略。为了响应带有 $s \not\leq t$ 的初始化步，存在一个并不可约元 a ，使得 $a \leq s$ ，但 $a \not\leq t$ ，或者更确切地说， $t \leq \kappa(a)$；因此，返回 a 的初始网络将确保 $a \leq s$ 和$\hat{a} \leq \tilde{t}$。对于任何被调用的见证步，都可以通过极小不可约元对来响应，这使得 $\forall$ 调用的任何其他见证步都变得多余。□

现在，我们为每个 $2 \leq n \leq \omega$ 定义如下的 n-棋子等价版本的框架博弈。

定义 11. 对于框架 $\mathcal{F}$， n-棋子无限步博弈 $G^n(\mathcal{F})$ 的定义与 $G(\mathcal{F})$ 完全相同，不同之处在于，在 $\forall$ 调用见证步之前，他会先取 $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}_{i-1}$，使得 $|N'| \leq n$，然后再调用见证步。

特别地，框架博弈 G 等价于 G^ω。接下来，我们定义 wkRA_n 和 wkRA，它们类似于 RA_n——所有 n 维关系代数构成的簇——以及 RA，即所有（4 维）关系代数 [13], [8] 构成的簇。

定义 12. 类 wkRA_n 是所有有界、循环的、带 involution 和单位元的 $d\ell$-广群 $\mathcal{A}$ 的类，其中 $\exists$ 对 $G^n(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$ 具有必胜策略。弱化关系代数类 wkRA 定义为 wkRA_4。

由此可得，wkRA_ω 等价于 RwkRA，且 $\mathsf{wkRA}_\omega \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{wkRA}_4 \subseteq \mathsf{wkRA}_3 \subseteq \mathsf{wkRA}_2$。

4 抽象类的公理化

本节给出 wkRA_2 和 wkRA_3 的有限公理化。我们将以下问题留待解决：与 RA_4 类似，wkRA_4 的公理化是否由 wkRA_3 的公理以及 ; 的结合律组成。

我们首先对 wkRA_2 进行公理化。我们将结合有界循环对合含幺 $d\ell$-广群的公理化，以及下文定义的理论 Φ_2 来完成这一工作。

定义 13. 令 Φ_2 为由以下准等式给出的一阶理论：

(1) $s \cdot {\sim}s \leq 0$ (2) $s \leq t \Leftrightarrow s;{\sim}t \cdot 1 \leq 0$ (3) $s \leq t;u \wedge s;t \leq {\sim}u \Rightarrow s \cdot 1 \leq 0$ (4) $s \leq t;u \wedge u;s \leq {\sim}t \Rightarrow s \cdot 1 \leq 0$
(5) $s \leq t;u \wedge (s \cdot 1 \cdot t;v) + (1 \cdot s \cdot {\sim}v;u) \leq 0 \Rightarrow s \cdot 1 \leq 0$

在证明可靠性和完备性之前，我们根据下面的等价关系为框架语言 $R^{\min}$ 引入一个三元谓词。

$$R^{\min}(a,b,c) \Leftrightarrow R(a,b,c) \wedge \forall b', c' : (R(a,b',c') \wedge b' \leq b \wedge c' \leq c \Rightarrow b' = b \wedge c' = c)$$

注意，由于一条素滤子的链的并集仍然是素滤子，形如 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ 的框架具有这样的性质：对于某些素滤子 $b' \leq b$ 和 $c' \leq c$， $R(a,b,c)$ 可以细化为 $R^{\min}(a,b',c')$。

引理 13. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有界循环的带对合单位元的 $d\ell$-广群。当且仅当 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ 满足 $\mathcal{A} \models \Phi_2$

ˆ (1) $\forall a \exists b:\ I(b) \wedge b = b \wedge R(b,a,\hat{a})$ˆ (2) $\forall a,b:\ I(a) \wedge \hat{a} = a \wedge R(a,b,b) \Rightarrow R(b,a,b)$ ˆ ˆ ˆ (3) $\forall a,b:\ I(a) \wedge \hat{a} = a \wedge R(a,b,b) \Rightarrow R(b,b,a)$ (4) $\forall a,b,c:\ I(a) \wedge$ ˆ $a = a \wedge R^{\min}(a,b,c) \Rightarrow b = \hat{c}$

证明。对于从左到右的蕴含，注意，对于任意并不可约元 a，我们知道 $a \not\leq \kappa(a)$，因此，根据 Φ_2(2)，有 $(a;\ \sim\kappa(a) \cdot 1) \not\leq 0$。于是必定存在一个并不可约元 $b \leq 1$，$b \not\leq 0, b \leq a;\hat{a}$。假设 $b \neq \hat{}b$。那么就会存在某个 ˆ $b \leq s, \hat{}b \not\leq s$。由于 $\hat{}b = b$，我们知道 $b \leq \sim s$，从而 $b \leq s \cdot \sim s \leq 0$，这与 Φ_2(1) 矛盾，因此我们证明了 (1) 可由 Φ_2 推出。对于 (2)，假设有 $a \leq 1, \hat{a} = a$，则 $a \not\leq \sim 1 = 0$。因此 $a = a \cdot 1 \not\leq 0$，且 $a \leq b;\sim\kappa(b)$ 意味着 $a;b \not\leq \sim\sim\kappa(b)$，或者简单地说，$a \leq a;b$。用类似的论证可得 (3)。最后，若 $a \leq b;c$ 且 $a = a \cdot 1 \leq b;c \cdot 1 \not\leq 0$，则有 $b \not\leq \sim c$。我们还知道 $a \cdot 1 = a \not\leq 0$，并且 $a \leq b;c$，因此 $a \cdot \kappa(b);c \not\leq 0$ 或 $a \cdot b;\hat{}b \not\leq 0$。前一种情况意味着 $\kappa(b);c \not\leq 0$，从而 $\kappa(b) \leq \sim c$ 或 $c \leq \hat{}b$，于是得证。后一种情况意味着存在一个并不可约元 $a' \leq a$，使得 $a \not\leq 0$，因此 $a' = \hat{}a'$，并且由单调性可知 $a' \leq b;\ \hat{}b \leq b;\ c$。由于 $a' \leq a \leq \hat{}a' = a'$，我们有 ˆ $a = a'$，由极小性可得 $b = c$。

对于从右到左蕴涵，请注意，若 $s \cdot \sim s \not\leq 0$，则存在某个不低于 0 的 $a \leq s \cdot \sim s$。因此 $\hat{a} \leq 1$，并且我们知道存在一个并不可约元 $b = \hat{}b, b \leq a;\ \hat{a} \leq (s \cdot \sim s);\ 1 = s \cdot \sim s$，这与 $b = \hat{}b$ 矛盾。假设 $s \not\leq t$。若存在一个并不可约元 a 使得 $a \leq s,\ \hat{a} \leq \sim t$，则该命题成立。因此存在一个并不可约元 $b = b \cdot 1 \not\leq 0$，它低于 $1 \cdot a;\ \hat{a} \leq 1 \cdot s;\ \sim t$，由此得出 $1 \cdot s;\ \sim t \not\leq 0$。若 $1 \cdot s;\ \sim t \not\leq 0$，则存在并不可约元 a, b, c，使得 ˆ$I(a)\ a = \hat{a}, b \leq s,\ c \leq \sim t$，且 b, c 也都是极小的，因此 $b = c$。所以 $\hat{}b \leq \sim t$，或者简言之 $s \not\leq t$。$s \cdot 1 \not\leq 0 \wedge s \leq t;\ u \Rightarrow s;\ t \not\leq \sim u$ 直接由 (2) 得出，其对偶直接由 (3) 得出。最后，$s \cdot 1 \not\leq 0$ 和 $s \leq t;\ u$ 成立，当且仅当对应框架中存在某些 a, b, c，使得 $a \leq s \cdot 1, b \leq t, c \leq u, I(a), \hat{a} = a, R^{\min}(a,b,c)$ ˆ ˆ，因而由 (4) 得出 $b = c$。注意，对于每个 v，要么 $b \leq v$，要么 $b \leq \sim v$，因此$a \leq t;\ v$ 或 $a \leq \sim v;\ u$，且这两项的并不低于 0。□

定理14. wkRA$_2$ 由有界循环对合幺 $d\ell$广群的基本公理以及 Φ_2公理化。

证明。根据引理 13，该公理化等价于列举的框架条件 (1)–(4)。首先，我们证明这些条件对于双 pebble 博弈是可靠的。ˆ 若存在一个并不可约元 a，它没有 b, $I(b)\ b = b$，且满足 $R(b,a,\hat{a})$，那么 $\forall$ 就能在初始化时凭借 a 获胜，因为如果 $\lambda(x,y) = a$，就不存在满足相容性的 b，使得 $\lambda(x,x)$。接下来证明 (4)。若对于某些 a, b, c，条件不成立，那么 $\forall$ 可以在第一步先要求 a。根据 ˆ 和单位元的序反转性质，a 是唯一一个可设为 $\lambda(x,x)$ 的并不可约元，其中 $\lambda(x,y) = a$。第二步中，$\forall$ 调用见证 b；c 在 (x,x) 上，于是我们得到矛盾，因为 $b \neq \hat{c}$。对于 (2) 和 (3)，注意到若 $R(a,b,\hat{}b)$，则根据 ˆ 的序反转性质及 (4)，有 $R^{\min}(a,b,\hat{}b)$。因此，若 $\forall$ 再次通过迫使 $\lambda(x,x) = a$ˆ ˆ ˆ 开始，那么调用见证 b；为了使网络保持相容，b 必须同时满足 $R(b,a,b)\ R(b,b,a)$。

为证明完备性，只需说明 $\exists$ 可以对 a 的任意初始化作出回应：返回一个有两个节点 x, y 的网络，其中 $\lambda(x,y) = a, \lambda(y,x) = \hat{a}$；根据 (1)，存在一个 b 对应 a，以及一个 b' 对应 $\hat{a}$，分别可设为 $\lambda(x,x)$ 和 $\lambda(y,y)$；根据 (2)(3)，所有其他三角形也都相容。见证步只能在自反节点 (x,x) 上调用，这意味着根据 (2)(3)(4)，任何见证都相容；按照与初始化相同的推理，$\exists$ 可以在 $\lambda(y,y)$ 上放置一个标签，并使网络保持相容。□

为了公理化 wkRA$_3$，我们只需添加两个众所周知的公理以及一组准方程。第一个公理称为对合半环的旋转，第二个公理由 Maddux 在 [15] 中发现，它作为一个适用于二元关系、但不适用于相关逻辑框架的公理。

定义14. 令 Φ_3 为一阶理论，其中包含 Φ_2 中的所有公式，以及

(1) $s;t \leq \sim u \Rightarrow t;u \leq \sim s$(2) $s \cdot t;u \leq ((s;v) \cdot t)$;
$u + t;(u \cdot \sim v)$ (3) $1 \cdot \sim s';s \cdot t;\sim t' \leq 0 \Rightarrow s;t \leq (s \cdot s')$;
$t + s;(t \cdot t')$ (4) $1 \cdot s \cdot 0 = \bot \Rightarrow (s \cdot 1);(t;u) \leq ((s \cdot 1);$
$t);u$(5) $1 \cdot u \cdot 0 = \bot \Rightarrow (s;t);(u \cdot 1) \leq s;(t;(u \cdot 1))$

引理 15. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有界循环的含幺对合 $d\ell$ 广群。当且仅当对于 $\mathcal{F}(\mathcal{A})$，引理 13 中的所有公式也都成立，并且

(1) $\forall a,b,c\colon R^{\min}(a,b,c) \Rightarrow R(b,a,\hat{c})\hat{}$ (2) $\forall a,b,c\colon R(a,b,\hat{c}) \Rightarrow R(b,\hat{}$
$c,\hat{a})$ (3) $\forall a,b,c\colon R^{\min}(a,b,c) \Rightarrow \exists d\colon d = \hat{}d \wedge I(d) \wedge R(d,\hat{}b,b) \wedge R(d,$
$c,\hat{c})$ (4) $\forall a,b,c,d\colon d = \hat{}d \wedge I(d) \wedge R(a,d,a) \wedge R^{\min}(a,b,c) \Rightarrow R(b,d,$
$b)$ (5) $\forall a,b,c,d\colon d = \hat{}d \wedge I(d) \wedge R(a,a,d) \wedge R^{\min}(a,b,c) \Rightarrow R(c,c,d)$

证明。对于（1）的从左到右蕴含，若 a、b、c 是并不可约元，满足 $a \leq b;\ c$，并且 b、c 满足极小性条件，那么可见 $a = a \cdot b;\ c \leq (a;\ \hat{c} \cdot b)$；$c + b;\ (c \cdot \kappa(c))$。$c \cdot \kappa(c)$ 严格低于 c，并且由于 b、c 对于该复合满足极小性条件，有 $a \not\leq b;\ (c \cdot \kappa(c))$。因此 $a \leq (a;\ \hat{}$
$c \cdot b)$；c，再次利用极小性条件可得 $a;\ \hat{c} \cdot b = b$，或者简单地写作 $R(b,\ a,\ \hat{c})$。对于（2），注意到 $a \not\leq \hat{}b;\ \hat{c}$ 与 $\sim\kappa(b)$；$\sim\kappa(c) \leq \kappa(a)$ 相同，通过旋转可得 $\sim\kappa(c)$；$\sim\kappa(a) \leq \kappa(b)$，以及 $\hat{}\hat{}\sim\kappa(a)$；$\sim\kappa(b) \leq \kappa(c)$，因此 $R(a,\ b,\ \hat{c})\ R(b,\ \hat{c},\ \hat{a})\ R(c,\ \hat{a},\ b)$ 是等价的。对于（3），若 $R^{\min}(a,\ b,\ c)$，则我们知道 $b;\ c \not\leq (b \cdot \kappa(b))$；$c + b;\ (c \cdot \kappa(b))$，从而 $1 \cdot \sim s';\ s \cdot t;\ \sim t' \not\leq 0\hat{}\hat{}$，并且可以找到一个 d，满足 $I(d)\ d = d$、$R(d,\ b,\ b)\ R(d,\ c,\ \hat{c})$。对于（4），注意到 $1 \cdot d \cdot 0 = \bot$，因此 $a \leq d;\ a \leq d;\ (b;\ c) \leq (d;\ b)$；$c$。由极小性条件，$b = d;\ b$。通过类似的论证可得（5）。

对于从右到左蕴涵，若 $s;t \leq \sim u$，注意，对于所有满足 $a \leq s, b \leq t, c \leq u$ 的并不可约元 a,b,c，我们有 $a;b \leq \kappa(\hat{c})$，因此 $\neg R(\hat{c},a,b)$；由 (2) 可得 $\neg R(\hat{a},b,c)$，进而有 $b;c \leq \kappa(\hat{a}) = \sim a$。如果对于分别位于 s,t,u 之下的所有并不可约元 a,b,c，该条件均成立，则 $t;\ u \leq \sim s$。为证明 $s \cdot t;u \leq ((s;v) \cdot t);u + t;(u \cdot \sim v)$，任取 $a \leq s \cdot t;u$，以及某个极小的 b,c

作为 $t;u$ 复合的见证。于是所有 v 要么具有 $c \leq \sim v$，要么具有$\hat{c} \leq v$；无论哪种情况，根据单调性，该项都在 a 之上。最后，若 $s;t \not\leq (s \cdot s');(t \cdot t')$，这意味着 $s;t$ 非空，因此存在某个 $a \leq s;t$，以及某个 $R^{\min}(a,b,c)$，从而 $b \not\leq s'$ 且 $c \not\leq t'$，进而有 $\hat{}b;b \leq \sim s';s$，并且 $c\hat{c} \leq t;\sim t'$；存在一个 $d \not\leq 0$ 使得 $d \leq 1 \cdot \sim s';s \cdot t;\sim t'$，因此该项不可能在 0 之下。任取一个并不可约元 $a \leq (s \cdot 1);t;u$。存在一个自对偶 $\hat{}$ 并不可约元 $d \leq s \cdot 1$，使得 $d \leq d;a$，且存在分别位于 t,u 之下的极小元 b,c，使得 $a \leq b;c$；于是由 (4) 可得 $b \leq d;b$，进而有 $a \leq b;c \leq (d;b);c \leq ((s \cdot 1);t);u$。对偶情形可由 (5) 类似证明。□

定理 16. wkRA_3 由有界循环反演幺元 $d\ell$广群的基本公理以及 Φ_3公理化。

证明。首先，我们证明引理 15 中的所有公式都是可靠的。若有 a,b,c 满足 $R^{\min}(a,b,c)$，那么 $\forall$ 在初始化时会调用 a，并在 $\lambda(x,y)=a$ 上调用见证 $R^{\min}(a,b,c)$；$\exists$必须返回这样一个网络，使得$\lambda(x,z) = a$、$\lambda(y,z) = \hat{c}$，因此，为了保持一致性，$R(b,a,\hat{c})$必须成立，于是得到$\hat{}$ (1)。对于 (2)，不失一般性，假设有 $R(a,b,\hat{c})$，那么必定存在某个最小的 $b' \leq b, c' \leq \hat{c}$，用于在初始节点对 a上调用见证。注意，为了保持一致性，$b \leq b' \leq \hat{}c'$；$\hat{a} \leq \hat{c}$；根据单调性，$\hat{a}$。对于 (3)，若 $\forall$以 a初始化并调用 b,c 见证，则 $\exists$ 需要一个并不可约元 d，将其放在新增节点的自反边上。

由引理 13、定理 16 可知，$\exists$ 能够经受初始步，我们只需考察两种可能的见证步：一种是在双节点网络的非自反边上进行，另一种是在自反边上进行。若在非自反边（x，y）上执行见证步 R^{min}（a，b，c），则检查该三角形的所有皮尔士变换是否成立。根据（1），有 R（b，a，$\hat{c}$）；再由（2），我们得到 $\hat{}\hat{}\hat{}$ R（b，c，$\hat{a}$） R（$\hat{c}$，$\hat{a}$，b），它们来自 R（a，b，c）；并得到 R（$\hat{a}$，$\hat{c}$，b） R（c，b，a），它们来自 R（b，a，$\hat{c}$）。对于（z，z）上的自反边，可以看到 $\exists$ 能够根据（3）添加 λ（z，z）$= d$；并且通过与定理 16 类似的推理，所有包含（z，z）的三角形都是一致的。最后，设 λ（x，x）$= d$。根据（4），有 R（b，d，b）；根据（2），有 R（$d = d$，b，b）。其他三角形的一致性可由引理 13 中的公式推出。同理，我们得到 λ（y，y）的一致性。对于（x，x）上的自反见证 R^{min}（d，a，$\hat{a}$），注意到 $\hat{}$ 的序反转性质，$\exists$ 可以找到一个并不可约元 c，使得$R^{\min}$（λ（x，y） a，c），或者 $R^{\min}$（λ（y，x） c，$\hat{a}$）；而 $\exists$可以采用与非自反见证步相同的策略。□

要公理化 wkRA $=\mathrm{wkRA}_4$ 这一类，至少需要补充复合的结合律。对于 RA，恰恰是 RA_3 和复合的公理将 RA_4, 公理化；然而，这对 wkRA 是否也成立，仍是一个开放问题。

问题 17。公理化 wkRA 需要哪些公理？它能否有限公理化?

问题 18。设 $n > 4$。RA_n 不可有限公理化 [8]。wkRA_n是否也如此?

5 可表示对角弱化关系代数构成判别子簇

本节将可表示对角弱化关系代数定义为那些能够将 1 表示为反链的关系代数。因此，本节中提到具体二元关系 1 时，指的是 X 上的对角线。具有这一性质的代数是满足单位元 $1 \cdot 0 = \bot$ 的 RwkRA 成员。

我们证明，简单可表示对角关系代数具有一个判别子项。一个巧妙的推论是，与可表示弱化关系代数不同，可表示对角弱化关系代数可以用方程理论定义。

引理19. 对所有 $R \subseteq X^2$，我们有 $1 \cdot \big(R;(R \cdot \sim R)\big) = \bot = 1 \cdot \big(\sim R;(R \cdot \sim R)\big)$。

证明. 假设存在 $(x, x') \in 1 \cdot (R;(R \cdot \sim R))$。由于 $(x, x') \in 1$，我们有 $x = x'$。因此，必定存在一个 y，作为复合的见证，使得 $(x, y) \in R$，$(y, x) \in R \cdot \sim R$。这意味着 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in \sim R$，由此得出矛盾。

第二个等式可以用类似的论证证明，也可以通过将 R 替换为 $\sim R$，再应用对合律和交的交换律来证明。□

令 $d_1(R, S) = 1 \cdot \big(R;(S \cdot \sim S)\big)$，且 $d_2(R, S) = 1 \cdot \big(\sim S;(R \cdot \sim S)\big)$。

引理20. 若对于 $R, S \subseteq X^2$，$R \setminus S \neq \emptyset$，则 $d_1(R, S) + d_2(R, S) \neq \bot$。

证明. 假设 $(x, y) \in R \setminus S$，并考虑两种情况：$(y, x) \in S$ 和 $(y, x) \notin S$。在第一种情况下，由于 $(x, y) \notin S$，我们也有 $(y, x) \in \sim S$，因此 $(y, x) \in S \cdot \sim S$。于是 $(x, x) \in R;(S \cdot \sim S)$，并且根据定义1，$(x, x) \in d_1(R, S)$。

在第二种情况下，$(y, x) \notin S$，因此 $(x, y) \in \sim S$。由于 $(x, y) \notin S$，$(y, x) \notin \sim S$。由复合可得 $(y, y) \in \sim S;\ (R \cdot \sim S)$，并且由 1 的自反性，我们还有 $(y, y) \in 1 \cdot (\sim S;\ (R \cdot \sim S))$。

在任一种情况下，$d_1(R, S)$ $d_2(R, S)$ 中至少有一个非空，因此在给定 $R \setminus S \neq \emptyset$ 时，它们的并总是非空的。□

定理 21. 简单对角弱化关系代数有一个项 $d(a, b, c)$，满足

$$d(a, b, c) = \begin{cases} c & \text{if } a = b \\ a & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明. 很容易看出，在简单弱化关系代数中，若 $s \neq \bot$，则 $\top; s; \top = \top$；否则为 $\top; s; \top = \bot$。根据上述引理，对于可表示简单代数，我们有 $a = b$ 当且仅当 $d_1 + d_2 = \bot$，其中 $d_i = d_i(a, b) + d_i(b, a)$，适用于 $i = 1, 2$。因此，$d(a, b, c) = \top; (d_1 + d_2); \top \cdot a + \sim(\top; (d_1 + d_2); \top) \cdot c$ 在 $a = b$ 时等于 c，否则等于 a。□

有多种方式可以证明以下推论。我们概述一种生成递归可枚举等式理论的论证。

推论 22. 可表示对角弱化关系代数构成一个判别子簇。

证明。为弱化关系代数定义的表示博弈只需要增加一步：要求 $\exists$ 在 $\lambda(y,x)$ 中加 1，如果 $1 \in \lambda(x,y)$；这一博弈由此产生一种与命题 2 中所述类似的递归公理化。如果为所有变量指定唯一名称，那么还可以将全称量词移到所有这些公式的开头。注意，尽管这些公式适用于所有代数，但该博弈是在该代数的同态像上进行的，其中 $\top$ 映射到 $\top$；a；$\top$，其中 $\sigma_n = s \not\leq t \Rightarrow (\phi_n(\mathcal{N}^1,s,t) \vee \phi_n(\mathcal{N}^2,s,t))$。因此，对于任意全称量化的一阶公式，我们都可以构造一个项，使其等于 $\top$；a；$\top$，当且仅当该公式为真时，否则等于 $\bot$。对于方程 $t = t'$，我们取 $\top$；a；$\top \cdot \sim d(t,t',\top$；$a$；$\top)$。如果项 t对应于一个公式，那么 $\sim t \cdot \top$；a；$\top$ 对应于其否定；对于析取，我们可以取相应各项的并。因此，每个公式σ_n 都有一个等价的方程。□

6 用弱化关系表示 $\mathbf{wkRA_3}$ 的结合成员

杉原幺半群是交换分配幂等对合剩余格。这个簇是半线性的，即由线性有序代数生成，这些代数的结构众所周知。特别地，杉原幺半群 S_n 是一个含有 n 个元素的链 $\{a_{-k}, a_{-k+1}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$，如果 $n = 2k+1$ 是奇数；对于偶数 n，则为 $S_n = S_{n+1} \setminus \{a_0\}$。对合运算由 $\sim a_i = a_{-i}$ 给出，乘法为 $a_i;a_j = a_{-\text{最大值}\,|i|,\ |j|}$。因此，在奇数情形下，单位元为 $1 = a_0$；在偶数情形下，单位元为 $1 = a_1$。

注意，S_2 是 2 元布尔代数；对于偶数 n，存在一个满同态，将 S_n 映射到 S_{n-1}，并将 a_1 与 a_{-1}识别。

文献 [14] 证明，偶数杉原链可以表示为弱化关系代数。对于 S_2，这一点显然成立，因为 $S_2 \cong \mathbf{Rel(1)}$。对于 S_4，则需要一个具有稠密序的无限基集。例如，我们可以取 $(\mathbb{Q}, \leq)$ 为带有标准序的有理数偏序集，并验证 $S_4 \cong \{\emptyset, <, \leq \mathbb{Q}^2\}$ 是 $\mathbf{Wk}(\mathbb{Q}, \leq)$ 中的一个表示。

由网络的一致性可知，$\mathbf{wkRA_2}$ 的任何非平凡成员都没有满足 $a = \sim a$ 的元素。因此，wkRA 的任何有限成员都具有偶数个元素。特别地，奇数杉原链不能由弱化关系表示。然而，它们属于由所有弱化关系代数生成的簇，因为它们是偶数杉原链的同态像。这表明 RWkRA 对同态像不封闭，因此它是一个真拟簇。

令 $\mathbf{2} = \{0,1\}$ 为带有 $0 < 1$ 的二元素链。wk(2) 如图2所示，包含以下六个元素：$\emptyset$, {(0, 1)}, {(0, 0), (0, 1)},{(0, 1), (1, 1)}, $\leq$, $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$。

图1所示的点代数 P（另见 [7]）是一个有 3 个原子 $id_{\mathbb{Q}}, <, >$ 的可表示关系代数，其中 $<$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 上的严格序。它有两个弱化子代数：S$_4$ $= \{\emptyset, <, \leq, \top\}$ 和 W$_{6,1}$ $= \{\emptyset, id_{\mathbb{Q}}, <, \leq, <\cup>, \top\}$。与点代数一样，这两个代数都只能在无限集上表示。注意，W$_{6,1}$ 是对角线可表示的，而 S$_4$ 则不是。

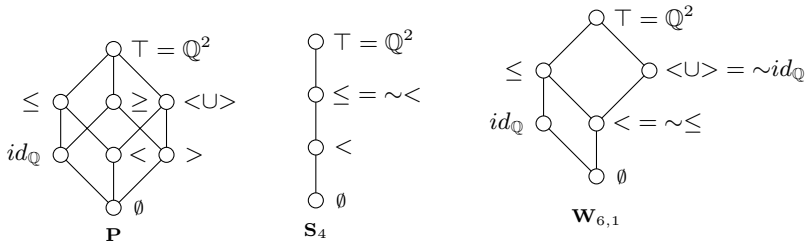


图1. 点代数 P、弱化子代数 S$_4$ 和对角可表示弱化子代数 W$_{6,1}$。

由于 wkRA$_3$ 是有限公理化的，因此可以使用 Mace4 [16] 等模型查找器，计算基数为 n 的所有成员（对于较小的 n）。在同构意义下，wkRA$_3$ 中至多有 6 个元素且满足 ; 具有结合性的代数共有 14 个，如图2所示。下面简要介绍它们通过弱化关系得到的表示。

前5个是对称可表示关系代数，因此它们都是对角可表示的弱化关系代数。

如上所述，菅原代数 S$_4$ 和代数 W$_{6,1}$ 可表示为点代数的 $\sim$-约化的子代数（图1）。代数 W$_{6,2}$ 可表示为 $\mathbb{Z}_7$ 的复代数的 $\sim$-子约化，其中元素 $a = \{1, 2, 4\}$ 和 $1 = \{0\}$。

W$_{6,3}$ 次直嵌入于两个 S$_4$, 副本的直积中，因此它可在两个 $\mathbb{Q}$不相交副本的并集上表示。

类似地，W$_{6,4}$ 在 $X = (\{0\} \times \mathbb{Q}) \cup (\{1\} \times \mathbb{Q})$ 上表示，其序为 $(i, p) \leq (j, q) \iff p < q$ 或 $p = q, i = j$。单位元 1 映射到 $\leq$，而元素 a 映射到关系 $\{((i, p), (i, q)) \mid i = 0$、1、$p < q\}$。

W$_{6,5}$ 的表示需要 $\{i\} \times \mathbb{Q}$ 的并集，其中 $i \in \{0, 1, 2\}$。偏序 $\leq$ 以相同方式定义，而 a 映射到关系$\{((i, p), (i, q)) \mid i = 0$、1、2、 $p < q\}$。

最后，W$_{6,6}$ 在 $X = (\{0\} \times \mathbb{Q}) \cup (\{1\} \times \mathbb{Q})$ 上以序 $(i, p) \leq (j, q) \iff i = j$和 $p \leq q$ 表示。单位元 1 映射到 $\leq$，而元素a映射到关系 $\{((i, p), (i, q)) \mid i = 0$, 1, $p < q\}$。

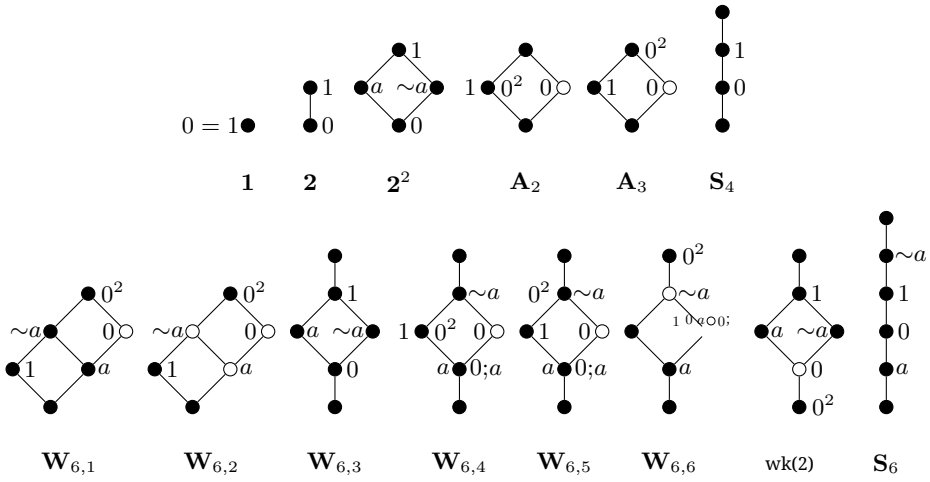


图 2. wkRA_4 中至多含 6 个元素的所有代数。黑色节点表示幂等元素（x；$x = x$）和 $0^2 = 0$；0。

我们衷心感谢与 Roger Maddux 就相关框架、相关逻辑及其与关系代数之间的联系进行的一次极有帮助的交谈。特别是，[15] 中的公式 (3.101)、(3.102) 为 wkRA_3 的公理化提供了关键见解。

参考文献

1. Bimb´o, K., Dunn, J.M., Maddux, R.D.：相关逻辑与关系代数。《符号逻辑评论》2(1), 102–131 (2009), doi.org/10.1017/S1755020309090145 2. Galatos, N., Jipsen, P.：分配剩余框架与广义捆绑蕴涵代数。《普遍代数》78(3), 303–336 (2017), doi.org/10.1007/s00012-017-0456-x 3. Galatos, N., Jipsen, P.：广义 BI 代数与弱化关系代数的结构。《普遍代数》81(3), 35 (2020), doi.org/10.1007/s00012-020-00663-9 4. Galatos, N., Jipsen, P.：弱化关系代数与 FL^2 代数。载于：Fahren- berg, U., Jipsen, P., Winter, M. (编)《计算机科学中的关系与代数方法》。第 117–133 页。施普林格国际出版公司，Cham (2020) 5. Givant, S.：《关系代数高级专题》，第 2 卷。施普林格国际出版公司 (2017) 6. Givant, S.：《关系代数导论》，第 1 卷。施普林格国际出版公司 (2017) 7. Hirsch, R.：区间关系代数。《人工智能》83(2), 267–295 (1996), doi.org/10.1016/0004-3702(95)00042-9 8. Hirsch, R., Hodkinson：《通过博弈研究关系代数》。爱思唯尔 (2002)

9. Jipsen, P.：关系代数、幂等半环与广义捆绑蕴涵代数。载于：《计算机科学中的关系与代数方法》，《计算机科学讲义》，第 10226 卷，第 144–158 页。施普林格，Cham (2017), doi.org/ 10 1007 978 3 319 57418 9_9 . / - - - - . Kurz, A., Velebil, J.：关系提升综述。《逻辑与代数编程方法杂志》85(4), 475–499 (2016) 11. Maddux, R.：《关系代数》，第 13 卷。爱思唯尔 (2006) 12. Maddux, R.：一些包含关系代数的簇。美国数学会汇刊 272 1998710 13 2 501 526 1982 10 2307 ( ), – ( ), doi.org/ . / . Maddux, R.：关系代数的序列演算。《纯粹与应用逻辑年刊》25(1), 73 6 14 101 1983 10 1016 0168 0072 83 90055 – ( ), doi.org/ . / - ( ) - . Maddux, R.D.：关系逻辑与关系演算。《符号逻辑评论》3(1), 41 1755020309990293 15 70 2010 10 1017 – ( ), doi.org/ . /S . Maddux, R.D.：塔斯基式经典相关逻辑。载于：Alasdair Urquhart 关于非经典逻辑、代数逻辑与证明复杂性的论述，《逻辑杰出贡献》，第 22 卷，第 67 161 2022 10 1007 978 3 030 71430 7_3 – 页。施普林格，Cham ( )，doi.org/ . / - - - - . McCune, W.：Prover and Mace www.cs.unm.edu/ mccune/prover /, (2005– 2010) 17. Monk, D.：关于可表示关系代数。密歇根数学杂志 11, 207–210 (1964 1028999131 18), projecteuclid.org/euclid.mmj/ . Reynolds, J.C.：分离逻辑：一种用于共享可变数据结构的逻辑。载于：第 17 届 IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集。第 55–74 页。IEEE (2002) 19. Smyth, M.：稳定紧化 i。《伦敦数学会杂志》2(2), 321–340 (1992) 20. Stell, J.G.：超图上的关系。载于：《计算机科学中的关系与代数方法》，《计算机科学讲义》，第 7560 卷，第 326–341 页。施普林格，海德堡 (2012 10 1007 978 3 642 33314 9_22)，doi.org/ . / - - - - . Stell, J.G.：应用于超图的对称海廷关系代数。《逻辑与代数编程方法杂志》 84(3), 440–455 (2015), doi.org/10 001 22 1016 2014 12 . /j.jlamp. . . . Tarski, A.：对模型论的贡献。《符号逻辑杂志》21(4) (1956)