Horndeski类黑洞的对数修正与热力学

Riasat Ali[1], * Zunaira Akhtar[2], † Rimsha Babar[3], ‡ G. Mustafa[4], § 和 Xia Tiecheng[1], ¶

[1] *Department of Mathematics, Shanghai University,Shanghai-200444, Shanghai, People's Republic of China*

[2] *Department of Mathematics, University of the Punjab, Quaid-e-Azam Campus, Lahore 54590, Pakistan*

[3] *Division of Science and Technology, University of Education, Township, Lahore-54590, Pakistan*

[4] *Department of Physics Zhejiang Normal University Jinhua 321004, People's Republic of China*

本文采用量子隧穿方法计算Horndeski类黑洞的霍金温度。我们将半经典现象和WKB 近似应用于涉及广义不确定性原理（GUP）的拉格朗日场方程，并计算隧穿率以及霍金温度。当引力参数为零时，我们得到的结果与无修正参数或原始隧穿情况下的结果一致。此外，我们研究了所考虑几何结构的热涨落，并通过热容方法检验系统的稳定状态。我们还研究了热涨落影响下热力学量的行为。由图形分析可知，加入这些修正项后，相应系统在热力学上是稳定的。

关键词：Horndeski类黑洞；量子引力；隧穿辐射、热涨落、修正熵、相变。

arXiv:2301.02216v1 [gr-qc] 5 Jan 2023

一、引言

隧穿是粒子从黑洞外视界辐射出来的一种半经典机制。一些研究通过隧穿方法分析不同黑洞的霍金温度（T_H），并对此表现出浓厚兴趣。研究 T_H 的主要方面，是考察经典作用量的虚部；它会导致玻色子从Horndeski类黑洞中隧穿辐射出来。

黑洞中的带电费米子的量子隧穿和 T_H 已得到观测[1]。本文考察了带电粒子对黑洞的隧穿和 T_H 取决于电荷和磁荷、加速度、旋转、质量以及NUT参数。研究人员分析了全局磁单极子背景下类似Reissner Nordstom-de Sitter黑洞解的隧穿策略 [2]。本文中，作者发现修正后的 T_H 取决于全局磁单极子参数。研究人员考察了 [3] 加速度、NUT参数和旋转等因素对黑洞热力学的影响，并研究了面积、熵、表面引力和 T_H等热力学量。研究人员利用Proca场方程，计算了从修正后的黑洞视界发出的玻色粒子的隧穿谱。霍金利用理论方法计算了黑洞的隧穿概率[4] ，随后Parikh和Wilczek对其进行了阐释[5, 6]。这种辐射的重要意义在于，真空热涨落会在视界处产生粒子对（粒子和反粒子）。霍金认为，粒子能够从黑洞中发射出来，而反粒子则无法从视界辐射出来。Parikh和Wilczek利用WKB近似给出了数学方法。这一现象采用几何光学近似，它是波动描述中程函近似的另一种表述[7]。所有粒子都停留在前沿边界；随着这些粒子的发射，黑洞质量以粒子能量的形式减少。

在 Parikh-Wilczek 方法中，已建立精确的隧穿理论，但信息释放、温度幺正性和发散等问题仍未得到解答。许多作者从不同黑洞视界的角度，对隧穿策略和半经典现象进行了研究；其中一种重要解释可见于 [8]-[31]。研究人员分析了许多黑洞的辐射粒子，并计算了不同参数下黑洞几何结构对辐射粒子的影响。通过考虑广义不确定性原理（GUP）的影响，可以研究黑洞修正后的热力学性质 [32]。GUP 意味着高能

*电子邮箱：riasatyasin@gmail.com

†电子邮箱：zunaira.math.pu@gmail.com

‡电子邮箱：rimsha.babar10@gmail.com§电子邮箱：gmustafa3828@gmail.com

¶电子邮箱：xiatc@shu.edu.cn

结果会影响黑洞热力学；通过考虑具有最小长度的量子引力理论，并纳入 GUP 的影响，可以研究黑洞修正后的热力学性质。

众所周知，热涨落是致密物质中统计扰动的结果。随着黑洞发射霍金辐射，黑洞的尺寸减小，进而其温度升高。Faizal及其同事 [33] 借助一阶修正研究了广义Schwarzschild黑洞（即 Reissner-Nordstrom、Kerr 和带电AdS黑洞）的热力学与热涨落，并讨论了黑洞的稳定性。Pourhassan 和 Faizal 研究了旋转Kerr-AdS黑洞的热力学及其相变[34]。他们得出结论，熵修正对于考察小型黑洞的几何结构非常有帮助。通过应用热容和海森矩阵的稳定性检验，研究了宇宙学常数存在时非最小正规黑洞的相变及热力学[35] ，并得出结论：对于更高的修正参数值，相应黑洞的局部和整体稳定性均会增强。Zhang 和 Pradhan[36, 37] 研究了带电加速黑洞在热涨落下的修正熵和二阶相变。

此外，研究者还探讨了新型Schwarzschild黑洞的热力学和几何分析 [38, 39]。在量子引力影响下，利用隧穿方法讨论了不同类型黑洞的霍金温度[40]-[44]。Sharif和Zunaira [45, 46] 借助Weyl修正，计算了带电黑洞的热力学、准正规模和热涨落。作者发现，在一阶修正的影响下，黑洞半径较小时系统不稳定；此外，他们还利用热容和海森矩阵方法研究了系统的稳定条件。文献[47, 48] 中的作者通过带电、加速以及旋转对，研究了NUT黑洞的热力学、相变及局部/全局稳定性。Ilyas等人[49–52] 在不同修正引力理论背景下，以黑洞几何结构作为外部时空，讨论了能量条件并计算了恒星结构的新解。最近，Ditta等人[53] 讨论了正规BTZ类黑洞的热稳定性和焦耳–汤姆孙膨胀。

本文的主要目的是研究不考虑自引力和反作用时的隧穿辐射，并解释修正后的隧穿率。在电荷-能量守恒以及 Horndeski 参数和 GUP 参数影响下，对隧穿辐射进行评估。修正后的 T_H 取决于 Horndeski 参数和 GUP 参数，同时还研究了热涨落下热力学量的变化。

本文基于对类霍恩德斯基黑洞的量子隧穿、 T_H、稳定性和不稳定条件的分析。本文结构如下：在第 II 节中，我们研究玻色粒子从 $4D$类霍恩德斯基黑洞中隧穿辐射的情况，并计算广义不确定性原理参数对隧穿和 T_H的影响。在第 III 节中，我们以图形展示此类黑洞的隧穿辐射，并分析类霍恩德斯基黑洞的稳定和不稳定条件。在第 IV 节中，我们研究热涨落影响下热力学量的变化。在第 V 节中，我们讨论并总结全文的分析。

II. HORNDESKI 类黑洞

Hui 和他的合作者 Nicolis [58] 指出，由于伽利略场在特殊导数相互作用的作用下与引力耦合，无毛定理并不适用于伽利略场。此外，他们证明，定义黑洞几何结构的静态球对称时空无法维持非平凡的伽利略场构型。Babichev 和 Charmousis [59] 在文献 [58] 中考察了 Horndeski 理论及其扩展下的无毛定理。此外，他们给出了 Horndeski 理论的拉格朗日量，该拉格朗日量可表示为广义伽利略拉格朗日量，其定义如下：

$$\begin{aligned} S= \int \sqrt{-g}\left(Q_2(\chi)+Q_3(\chi)\Box\phi+Q_4(\chi)R+Q_{4,\chi}\left[(\Box\phi)^2\right]\right). \\ -\left(\nabla^\epsilon\nabla^\varepsilon\phi\right)\left(\nabla_\epsilon\nabla_\varepsilon\phi\right)]+Q_5(\chi)G_{\epsilon\varepsilon}\nabla^\epsilon\nabla^\varepsilon\phi \\ -\tfrac{1}{6}Q_{5,\chi}\left[(\Box\phi)^3-3(\Box\phi)\left(\nabla^\epsilon\nabla^v\phi\right)\left(\nabla_\epsilon\nabla_\varepsilon\phi\right)\right. \\ \left.+2\left(\nabla_\epsilon\nabla_\varepsilon\phi\right)\left(\nabla^v\nabla^\gamma\phi\right)\left(\nabla_\gamma\nabla^\epsilon\phi\right)]\right\} d^4x. \end{aligned} \tag{1}$$

其中， Q_2、 Q_3、 Q_4和 Q_5 是标量场 ϕ 的任意函数， $\chi=-\partial^\epsilon\phi\partial_\epsilon\phi/2$ 表示正则动能项。此外，在当前分析中， f_χ 表示 $\partial f(\chi)/\partial\chi$， $G_{\epsilon\varepsilon}$ 是爱因斯坦张量， R 是里奇标量，其他关系定义如下：

$$\begin{aligned} \left(\nabla_\epsilon\nabla_\varepsilon\phi\right)^2 &\equiv \nabla_\epsilon\nabla_\varepsilon\phi\nabla^\varepsilon\nabla^\epsilon\phi \\ \left(\nabla_\epsilon\nabla_\varepsilon\phi\right)^3 &\equiv \nabla_\epsilon\nabla_\varepsilon\phi\nabla^\varepsilon\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\nabla^\epsilon\phi \end{aligned} \tag{2}$$

标量场在 $\partial_\epsilon\phi \to \partial_\epsilon\phi + b_\epsilon$ 平直时空中具有伽利略平移对称性 $Q_2 \sim Q_3 \sim \chi$ 和 $Q_4 \sim Q_5 \sim \chi^2$，这与伽利略对称性[60]相似。本研究考察了自旋1大质量玻色子粒子从类 Horndeski 黑洞发出的隧穿辐射。为此，我们采用了 [57] 中针对 Horndeski 时空所报告的方法。最后，我们得到如下时空：

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2rM(r)}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{1}{\nabla(r)}\Sigma dr^2 + \Sigma^2 d\theta^2 - \frac{A}{\Sigma}\sin^2 d\phi^2 - \frac{4ar}{\Sigma}M(r)\sin^2\theta dt d\phi, \tag{3}$$

其中 $\Sigma^2 = a^2\cos^2\theta + r^2$和 $\nabla(r) = a^2 - 2rM(r) + r^2$， $M(r) = M - \frac{1}{2}QIn\frac{r}{r_0}$以及 $A = (a^2+r^2)^2 - \nabla a^2\sin^2\theta$，而 a、Q M $Q\to 0$ 和 分别表示旋转参数、Horndeski 参数和黑洞质量。如果，度规（3）退化为 Kerr 黑洞 [61]；如果 $Q = a = 0$，度规（3）也退化为 Schwarzschild 度规。线元（3）可重写为

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g^{-1}(r)dr^2 + I(r)d\phi^2 + h(r)d\theta^2 + 2R(r)dtd\phi \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} f(r) &= \left(1-\frac{2rM(r)}{\Sigma}\right), \quad g-1(r) = \frac{1}{\nabla}\Sigma, \quad h(r) = \Sigma^2, \\ I(r) &= -\frac{A}{\Sigma}\sin^2, \quad R(r) = -\frac{2ar}{\Sigma}M(r)\sin^2\theta. \end{aligned}$$

我们研究了来自四维类霍恩德斯基黑洞的自旋-1 粒子的隧穿辐射。通过利用 Hamilton–Jacobi 拟设和 WKB 近似求解 Horndeski 时空中的修正场方程，成功应用了隧穿现象。我们研究了以旋转参数、Horndeski 参数为背景的四维时空中的修正场方程，并对径向函数进行了求解。结果，我们得到了辐射粒子的隧穿概率，并推导出了类霍恩德斯基黑洞的修正 T_H。修正场方程表示为 [27, 30]

$$\begin{aligned} &\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\Psi^{\nu\mu}\right) + \sqrt{-g}\frac{m^2}{\hbar^2}\Psi^\nu + \sqrt{-g}\frac{i}{\hbar}A_\mu\Psi^{\nu\mu} + \sqrt{-g}\frac{i}{\hbar}eF^{\nu\mu}\Psi_\mu + \hbar^2\beta\partial_0\partial_0\partial_0\left(\sqrt{-g}g^{00}\Psi^{0\nu}\right) \\ &-\hbar^2\beta\partial_i\partial_i\partial_i\left(\sqrt{-g}g^{ii}\Psi^{i\nu}\right) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

这里，$\Psi^{\nu\mu}$、m 和 g 分别表示反对称张量、玻色子质量和系数矩阵行列式，因此

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu\mu} &= \left(1-\hbar^2\beta\partial_\nu^2\right)\partial_\nu\Psi_\mu - \left(1-\hbar^2\beta\partial_\mu^2\right)\partial_\mu\Psi_\nu + \left(1-\hbar^2\beta\partial_\nu^2\right)\frac{i}{\hbar}eA_\nu\Psi_\mu \\ &- \left(1-\hbar^2\beta\partial_\nu^2\right)\frac{i}{\hbar}eA_\mu\Psi_\nu, \quad \text{and} \quad F_{\nu\mu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu, \end{aligned}$$

β、e、∇_μ 和 A_μ 分别为GUP 参数（量子引力）、玻色子电荷、协变导数和黑洞势。$\Psi^{\nu\mu}$ 可计算为

$$\begin{aligned} \Psi^0 &= \frac{-I\Psi_0 + R\Psi_3}{fI+R^2}, \quad \Psi^1 = \frac{1}{g^{-1}}\Psi_1, \quad \Psi^2 = \frac{1}{h}\Psi_2, \quad \Psi^3 = \frac{R\Psi_0 + f\Psi_3}{fI+R^2}, \quad \Psi^{01} = \frac{-\tilde{D}\Psi_{01} + R\Psi_{13}}{(R^2+fI)g^{-1}}, \\ \Psi^{02} &= \frac{-\tilde{D}\Psi_{02}}{(R^2+fI)h}, \quad \Psi^{03} = \frac{(f^2-fI)\Psi_{03}}{(fI+R^2)^2}, \quad \Psi^{12} = \frac{1}{g^{-1}h}\Psi_{12}, \\ \Psi^{13} &= \frac{1}{g^{-1}(fI+R^2)}\Psi_{13}, \quad \Psi^{23} = \frac{f\Psi_{23} + R\Psi_{02}}{(fI+R^2)h}. \end{aligned}$$

为了观测玻色子隧穿，我们假设了拉格朗日引力方程。此外，我们对拉格朗日引力方程采用了WKB 近似，并计算得到一组方程。此外，我们利用变量分离作用量得到了所需的解。WKB 近似定义为 [?] 为

$$\Psi_\nu = \eta_\nu \exp\left[\frac{i}{\hbar}K_0(t,r,\phi,\theta) + \Sigma\hbar^n K_n(t,r,\phi,\theta)\right]. \tag{6}$$

我们得到s 附录 A 中的方程组。利用变量分离技术，我们可以取

$$K_0 = -(E - L\omega)t + W(r) + L\phi + \nu(\theta), \tag{7}$$

其中 E 和 L 分别表示对应于角度 ϕ的粒子能量和粒子角度。将方程（7）代入方程（22）-（25），得到如下形式的矩阵

$$U(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)^T = 0,$$

which express a 4×4 matrix presented as "U", whose elements are given as follows:

$$\begin{aligned}
U_{00} &= \frac{-I}{g^{-1}(fI+R^2)}\left[W_1^2+\beta W_1^4\right] - \frac{I}{(fI+R^2)h}\Big[L^2+\beta L^4\Big] - \frac{fI}{(fI+R^2)^2}\Big[\nu_1^2+\beta\nu_1^4\Big] - \frac{m^2 I}{(fI+R^2)},\\
U_{01} &= \frac{-I}{g^{-1}(fI+R^2)}\Big[((E-L\omega)+(E-L\omega)^3\beta+A_0 e+(E-L\omega)^2\beta e A_0\Big]W_1 + \frac{R}{g^{-1}(fI+R^2)} + \Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big],\\
U_{02} &= \frac{-I}{h(fI+R^2)}\Big[(E-L\omega)+(E-L\omega)^3\beta-A_0 e-(E-L\omega)^2\beta e A_0\Big]L,\\
U_{03} &= \frac{-R}{g^{-1}(fI+R^2)}\Big[W_1^2+\beta W_1^4\Big] - \frac{fI}{h(fI+R^2)^2}\Big[(E-L\omega)^3\beta-(E-L\omega)^2\beta e A_0+(E-L\omega)-eA_0\Big]\nu_1\\
&+ \frac{m^2 R}{(fI+R^2)^2},\\
U_{12} &= \frac{1}{g^{-1}h}\Big[W_1+\beta W_1^3\Big]L,\\
U_{11} &= \frac{-I}{g^{-1}(fI+R^2)}\Big[\beta(E-L\omega)^4-\beta e A_0 E W_1^2+(E-L\omega)^2-eA_0(E-L\omega)\Big] + \frac{R}{(fI+R^2)g^{-1}}\\
&+ \Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big](E-L\omega) - \frac{1}{g^{-1}h}\Big[L^2+\beta L^4\Big] - \frac{1}{(fI+R^2)g^{-1}}\Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big] - \frac{m^2}{g^{-1}} - \frac{eA_0 I}{(fI+R^2)g^{-1}}\\
&\times \Big[(E-L\omega)+(E-L\omega)^3\beta-A_0 e-(E-L\omega)^2\beta e A_0\Big] + \frac{eA_0 R}{g^{-1}(fI+R^2)}\Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big],\\
U_{13} &= \frac{-R}{g^{-1}(fI+R^2)}\Big[W_1+\beta W_1^3\Big](E-L\omega) + \frac{1}{g^{-1}(fI+R^2)^2}\Big[W_1+\beta W_1^3\Big]\nu_1 + \frac{ReA_0}{g^{-1}(fI+R^2)}\Big[W_1+\beta W_1^3\Big],\\
U_{20} &= \frac{I}{h(fI+R^2)}\Big[(E-L\omega)L+\beta(E-L\omega)L^3\Big] + \frac{R}{h(fI+R^2)}\Big[(E-L\omega)+\beta(E-L\omega)^3\nu_1^2\Big]\\
&- \frac{IeA_0}{h(fI+R^2)}\Big[L+\beta L^3\Big],\\
U_{22} &= \frac{I}{h(R^2+fI)}\Big[\beta E^4-\beta e A_0 E+E^2-eA_0(E-L\omega)\Big] - \frac{1}{g^{-1}h} + \frac{R}{h(R^2+fI)}\Big[(E-L\omega)^3\beta\\
&+ -(E-L\omega)^2\beta e A_0 - A_0 e+(E-L\omega)\Big]\nu_1 - \frac{f}{h(R^2+fI)}\Big[\nu_1^2+\beta\nu_1^4\Big] - \frac{m^2}{h} - \frac{eA_0 I}{h(fI+R^2)}\\
&\Big[(E-L\omega)+(E-L\omega)^3\beta-A_0 e-(E-L\omega)^2\beta e A_0\Big],\\
U_{23} &= \frac{f}{h(fI+R^2)}\Big[L+\beta L^3\Big]\nu_1,\\
U_{30} &= \frac{(fI-f^2)}{(fI+R^2)^2}\Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big]E + \frac{R}{h(fI+R^2)}\Big[L^2+\beta L^4\Big] - \frac{m^2 R}{(fI+R^2)} - \frac{eA_0(fI-f^2)}{(fI+R^2)^2}\Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big],\\
U_{31} &= \frac{1}{g^{-1}(fI+R^2)}\Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big]W_1,\\
U_{32} &= \frac{R}{h(R^2+fI)}\Big[L+\beta L^3\Big]E + \frac{f}{h(R^2+fI)}\Big[\nu_1+\beta\nu_1^3\Big]L,\\
U_{33} &= \frac{(fI-f^2)}{(fI+R^2)}\Big[(E-L\omega)^2-eA_0(E-L\omega)+\beta(E-L\omega)^4-\beta e A_0(E-L\omega)^3\Big]\\
&- \frac{1}{g^{-1}(R^2+fI)}\Big[W_1^2+\beta W_1^4\Big] - \frac{f}{(R^2+fI)h}\Big[L^2+\beta L^4\Big] - \frac{m^2 f}{(fI+R^2)} - \frac{eA_0(fI-f^2)}{(fI+R^2)}\\
&\times \Big[(E-L\omega)+\beta(E-L\omega)^3-eA_0(E-L\omega)^2\Big],
\end{aligned}$$

其中 $\partial_t K_0 = (E - L\omega)$ $\partial_\phi K_0 = L$、 $W_1 = \partial_r K_0$ 和 $\nu_1 = \partial_\theta K_0$。对于非平凡解，我们得到

$$\begin{aligned} ImW^{\pm} &= \pm \int \sqrt{\frac{\left(E - L\Omega - eA_0\right)^2 + Z_1\left[1 + \beta\frac{Z_2}{Z_1}\right]}{(fI + R^2)gI^{-1}}} dr, \\ &= \pm i\pi \frac{\left(R - L\Omega - A_0 e\right) + \left[1 + \beta A\right]}{2k(r_+)}, \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} Z_1 &= (E - L\omega)\nu_1 \frac{g^{-1}R}{fI + R^2} + \frac{fg^{-1}}{fI + R^2}\nu_1^2 - g^{-1}m^2, \\ Z_2 &= \frac{g^{-1}I}{fI + R^2}\left[(R - L\Omega)^4 + (eA_0)^2(R - L\Omega)^2 - 2A_0 e(R - L\Omega)^3\right] \\ &+ \frac{g^{-1}R}{h(fI + R^2)}\left[(R - L\Omega)^3 - eA_0(R - L\Omega)^2\right]\nu_1 - \frac{fg^{-1}}{fI + R^2}\nu_1^4 - W_1^4. \end{aligned}$$

且 A 是一个任意参数。具体而言，我们取粒子作用量的径向分量，为此选择矩阵的一个分量使其等于零。由此，我们得到了黑洞的隧穿辐射（与 Horndeski引力和量子引力有关）。这种隧穿和 T_H 量与该特定物理对象的 Horndeski引力和量子引力有关。因此，我们得到了相应的 T_H，它是 Horndeski引力和量子引力主导度规的重要组成部分。这样，在此方法中，我们不考虑普朗克常数的高阶项，只得到适当的结果。广义隧穿取决于黑洞度规、Horndeski引力和 GUP 参数。类霍恩德斯基黑洞的广义隧穿可写为

$$T = \frac{T_{emission}}{T_{absorption}} = \exp\left[-2\pi \frac{(R - L\Omega - A_0 e)}{k(r_+)}\right]\left[1 + \beta A\right], \tag{9}$$

with

$$k(r_+) = \frac{4\pi r_+\left(a^2 + r_+^2\right)}{Qr_+ + -a^2 + r_+^2} \tag{10}$$

在考虑 GUP 项的情况下，我们通过取玻尔兹曼因子$T_B = \exp\left[(E - L\omega - eA_0)/T_H\right]$ 作为，计算 Horndeski引力黑洞的 T_H

$$T_H = \frac{-a^2 + Qr_+ + r_+^2}{4\pi r_+\left(a^2 + r_+^2\right)}\left[1 - \beta A\right]. \tag{11}$$

上述结果表明， T_H 取决于 Horndeski引力、GUP 参数、旋转参数、Horndeski引力、任意参数 A 以及黑洞的半径（r_+）。当 $\beta = 0$时，我们得到 T_H 在 [57]中的一般 $Q = 0$。在无电荷的情况下，即[58, 59]，上述温度降为 Kerr 黑洞温度 $\beta = 0$ 。当 $a = 0$和$\dot{c}$时，温度降为 Reissner Nordstr $Q = 0 = a$m 黑洞的温度。此外，当[60]时，我们恢复 Schwarzschild黑洞的温度 T_H。量子修正减缓了整个辐射现象过程中 T_H 的升高。

A. T_H versus r_+

我们观察了 $4D$ Horndeski类度规相对于 T_H 和 r_+ 的几何表示。此外，我们还观察了这些图像在Horndeski引力和GUP 参数下的物理意义，并研究了相应 T_H的稳定性和不稳定性分析。当 β 等于零时，隧穿辐射将与GUP 参数无关。在图1左图中， T_H 随着 β 的增加而增加，这发生在视界 $0 \leq r_+ \leq 5$的小范围内，表明黑洞在 $r_+ \to \infty$之前处于稳定状态。在图1右图中，旋转参数和 β 保持不变，然后取Horndeski引力毛发参数的不同值，得到具有负温度的完全不稳定黑洞。

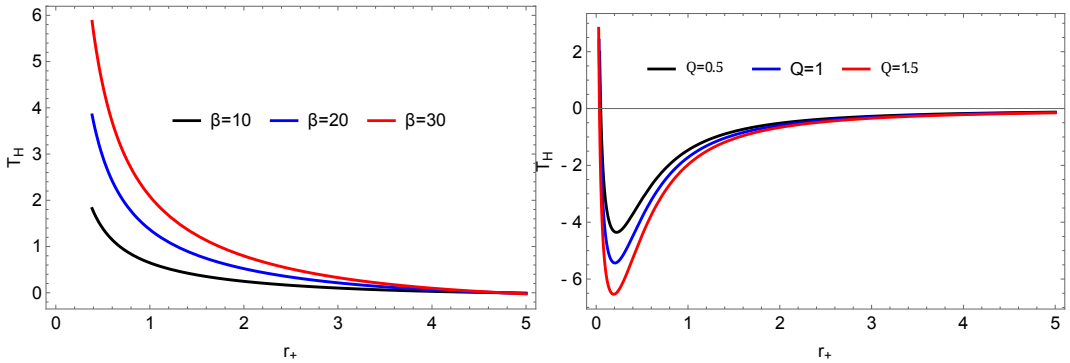

图1： T_H 关于视界 r_+，对应于 $a=5$、$Q=0.5$ 和 $\Xi=1$；左图为 $\beta=10$（黑色）、$\beta=20$（蓝色）、$\beta=30$（红色）。右图为 $a=0.5$、$\Xi=1$、$\beta=5$、$Q=0.5$（黑色），$a=0.5$、$\Xi=1$、$\beta=5$、$Q=1$（蓝色），$a=0.5$、$\Xi=1$、$\beta=5$、$Q=1.5$（红色）。

III. 热力学与一阶修正的影响

热涨落在黑洞热力学研究中发挥着重要作用。根据欧几里得量子引力的概念，时间坐标向复平面偏移。为检验这些修正对熵的影响，我们借助热力学第一定律求得给定系统的霍金温度和通常熵

$$S=\pi\left(a^2+r_+^2\right),\quad T=\frac{-a^2+Qr_++r_+^2}{4\pi r_+\left(a^2+r_+^2\right)} \tag{12}$$

为考察这些热涨落下的修正熵，关于态密度 $\eta(E)$，配分函数为 $Z(\mu)$，其表达式为 [37]

$$Z(\mu)=\int_0^\infty \exp(-\mu E)\eta(E)dE, \tag{13}$$

其中 $T_+=\frac{1}{\mu}$，E 是热辐射的平均能量。利用拉普拉斯逆变换，态密度的表达式可写为

$$\rho(E)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu_0-i\infty}^{\mu_0+i\infty} Z(\mu)\exp(\mu E)d\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu_0-i\infty}^{\mu_0+i\infty}\exp(\tilde{S}(\mu))d\mu, \tag{14}$$

其中，$\tilde{S}(\mu)=\mu E+\ln Z(\mu)$ 表示所研究系统的修正熵，该熵取决于霍金温度。此外，借助最速下降法，熵的表达式得到了修正，

$$\tilde{S}(\mu)=S+\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)^2\frac{\partial^2\tilde{S}(\mu)}{\partial\mu^2}\Big|_{\mu=\mu_0}+\text{higher-order terms}. \tag{15}$$

利用条件 $\frac{\partial\tilde{S}}{\partial\mu}=0$ 和 $\frac{\partial^2\tilde{S}}{\partial\mu^2}>0$，可得到一阶修正下的修正熵关系。忽略高阶项后，熵的精确表达式为

$$\tilde{S}=S-\delta\ln(ST^2), \tag{16}$$

其中 δ 被称为修正参数。通过固定 $\delta=0$ 即可得到所研究系统的通常熵，即不受这些修正影响的熵。此外，将方程（12）代入（16），可得

$$\tilde{S}=(a^2+r_+^2)-\delta\log\left(\frac{\left(a^2-r_+\left(Q+r_+\right)\right)^2}{16\pi r_+^2\left(a^2+r_+^2\right)}\right). \tag{17}$$

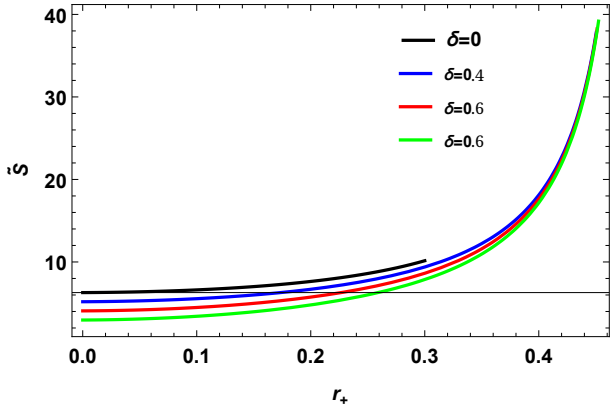

图2： r_+ 对应的修正熵，a=0.2，Q=0.4。

在图 2 中，修正熵的曲线在所研究的定义域内单调递增。值得注意的是，通常熵的曲线（黑色）仅在视界半径取较小值时递增，而能量的修正表达式则平滑递增。因此，这些修正项对小型黑洞更为有效。现在，利用修正熵的表达式，通过热涨落检验其他热力学量。这样，亥姆霍兹能（$F = -\int \tilde{S} dT$）可写为

$$F = \frac{\left(a^4 - r_+^2\left(-4a^2 + 2Qr_+ + r_+^2\right)\right)\left(\delta \log\left(\frac{\left(a^2 - r_+(Q+r_+)\right)^2}{\{}r_+^2\left(a^2 + r_+^2\right)\}\right) - a^2 - \delta\log(16\pi) - r_+^2\right)}{4\pi r_+^2\left(a^2 + r_+^2\right)^2}. \quad (18)$$

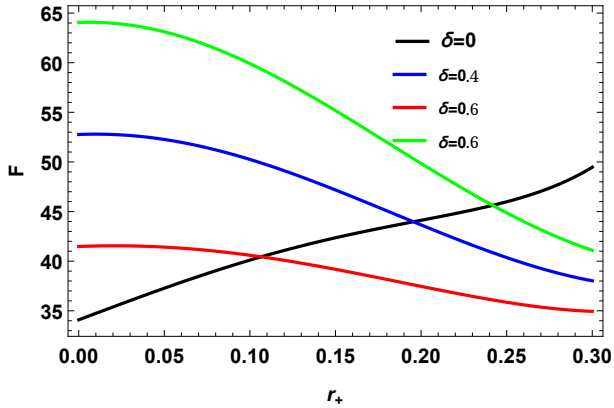

图3：亥姆霍兹自由能随 r_+ 的变化，适用于 a=0.2、Q=0.4..

图 3 展示了亥姆霍兹自由能随视界半径变化的曲线。可以观察到，对于不同的修正参数 δ 取值，能量逐渐降低。通常熵的曲线则呈现相反趋势，逐渐上升。这种行为意味着，所考虑的系统正逐渐趋于˜平衡，因此无法再从中提取更多功。相应几何结构的内能（$E = F + TS$）表达式为 [37]

$$\begin{aligned} E = & \left(r_+\left(a^2 + r_+^2\right)\left(r_+(Q + r_+) - a^2\right)\left(\delta\left(\log(16\pi) - \log\left(\frac{\left(a^2 - r_+(Q+r_+)\right)^2}{r_+^2\left(a^2 + r_+^2\right)}\right)\right) + \pi\left(a^2 + r_+^2\right)\right)\right. \\ & - \left(a^4 - r_+^2\left(-4a^2 + 2Qr_+ + r_+^2\right)\right)\left(-\delta\log\left(\frac{\left(a^2 - r_+(Q+r_+)\right)^2}{r_+^2\left(a^2 + r_+^2\right)}\right) + a^2 + \delta\log(16\pi) + r_+^2\right)\Big) \\ & \left(4\pi r_+^2\left(a^2 + r_+^2\right)^2\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

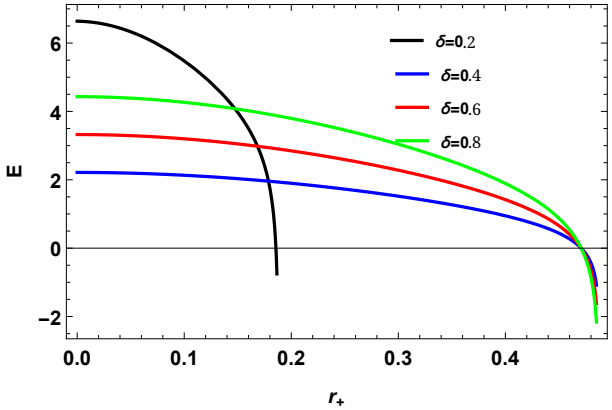

图4：内能随 r_+ 变化，a=0.2，Q=0.4。

图 4 展示了不同视界半径取值下内能的变化曲线。可以观察到，当半径较小时，曲线逐渐下降，甚至趋于负值；而修正后的内能则呈现正向变化。这意味着，所考虑的黑洞不断从周围吸收热量，以维持其状态。由于黑洞被视为热力学系统，因此压强是另一个重要的热力学量。在这方面，体积（$V = {}^{2\pi}{}_{(r_+^2+a^2)}\ {}_{(2r_+^2+a^2)}\ {}_{3r_+}$ ）与压强之间存在密切联系。热涨落影响下的黑洞压强（$P = -\frac{dF}{dV}$）表达式为

$$
\begin{aligned}
P \;=\; & \Big(2r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(-4a^2+3Qr_++2r_+^2\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\Big(\Big(\Big(a^2-r_+(Q+r_+)\Big)^2\Big)(r_+^2(a^2+r_+^2))^{-1}\Big)\\
& +\; a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)-2\Big(r_+\Big(Q+r_+\Big)-a^2\Big)\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(-a^4\delta+Qr_+^3\Big(a^2+\delta\Big)\\
& -\; r_+^2\Big(a^4+3a^2\delta\Big)+Qr_+^5+r_+^6\Big)+4r_+^2\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\\
& \times\; \Big(\Big(\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big)\Big(r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big)^{-1}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)+2\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2\\
& +\; 2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\Big(\Big(\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big)\Big(r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big)^{-1}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)\\
& +\; r_+^2\Big)\Big)\Big(4\pi r_+^3\Big(a^2+r_+^2\Big)^3\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big)^{-1}. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

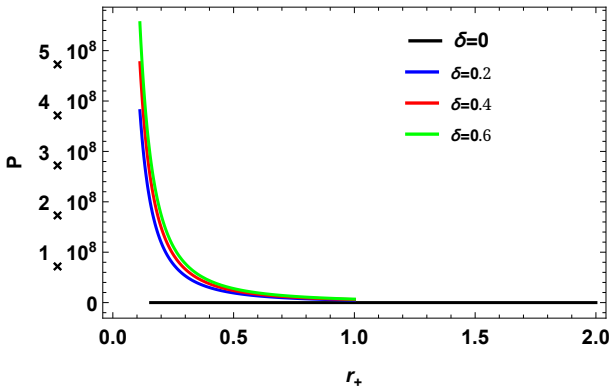

图5：压强随 r_+ 的变化，a=0.2，Q=0.4。

在图5中，压强曲线恰好与平衡态重合。对于修正参数的不同取值，所研究系统的压强显著增加。此外，附录B中还给出了另一个重要的热力学量——焓（$H = E + PV$）。

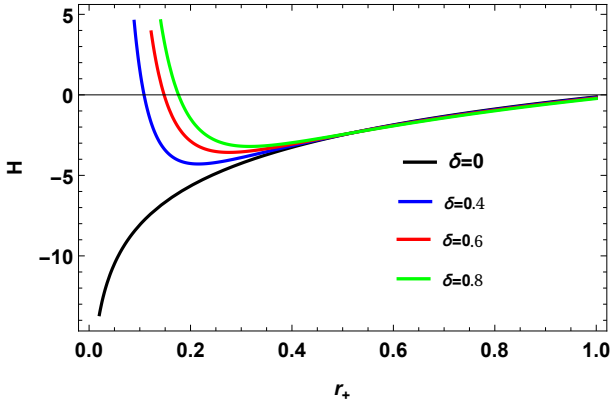

图6：焓与 r_+ 的关系，适用于 a=0.2、Q=0.4。

从图6可以观察到，常规焓的曲线与修正后的曲线重合，并且会突然下降，甚至转向负值。这意味着存在放热反应，即大量能量会释放到周围环境中。考虑热涨落后，吉布斯自由能（$G = H - TS$）的表达式见附录B。

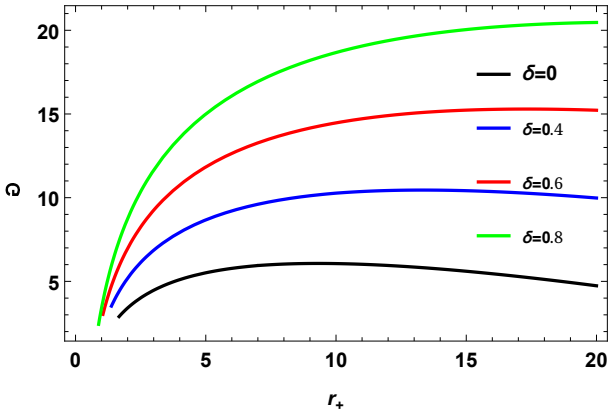

图7：吉布斯自由能随 r_+ 变化，适用于a=0.2、Q=0.4。

吉布斯自由能随视界半径变化的图形分析如图 7 所示。该能量为正意味着发生了非自发反应，表明该系统需要更多能量才能达到平衡态。在详细讨论热力学量之后，另一个重要概念是系统的稳定性，可通过比热来检验。比热（$C_{\tilde{S}} = \frac{dE}{dT}$）表示为

$$
\begin{aligned}
C_{\tilde{S}} \;=\; & \Big(2\Big(a^2+3r_+^2\Big)\Big(r_+\Big(r_+\Big(a^2\Big(-\delta(Q-4)\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2(\pi Q-5)+\delta(Q-4)\log(16\pi)\Big)+r_+ \\
& +\Big(-\pi a^4-2\delta Q\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+r_+\Big(-\delta(Q+1)\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+r_+\Big(-\delta\log \\
& \times\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+\pi a^2+\delta\log(16\pi)+r_+\Big(\pi Q+\pi r_++1\Big)+2Q\Big)+a^2(2\pi Q-3)+\delta(Q+1)\log(16\pi)\Big) \\
& +\;2a^2Q+2\delta Q\log(16\pi)\Big)\Big)-a^4\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+\pi a^2+\delta\log(16\pi)\Big)\Big)-a^4\Big(-\delta\log \\
& \times\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)\Big)\Big)\Big)\Big(r_+\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(-a^4-4a^2r_+^2+2Qr_+^3+r_+^4\Big)\Big)^{-1}. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

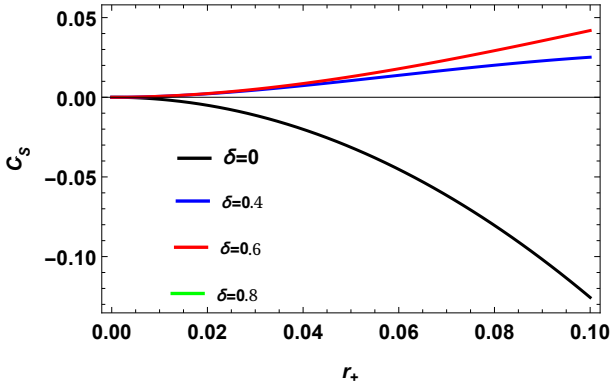

图 8：比热随 r_+ 的变化，取值为=0.2、Q=0.4。

从图 8 可以看出，比热随视界半径以及修正参数 δ的不同取值而变化。未经修正的量（黑色曲线）呈现负值，表明系统不稳定；而修正后的比热在所考虑的整个定义域内均为正值。曲线为正表明系统处于稳定区域。由此可得，这些修正项使系统在热涨落下保持稳定。

IV. 讨论与结果

本文利用拉格朗日引力方程研究玻色粒子穿过类霍恩德斯基黑洞视界的隧穿过程。我们采用了参考文献 [57]中的度规。我们考虑了一个带有 Horndeski 参数 Q 和旋转参数 a的新型黑洞。由于这些参数的存在，我们将该度规称为一种新型时空。我们的结果也取决于这些参数，因此不同于先前关于该黑洞热力学的相关文献。基于相对论量子力学，并考虑粒子持续产生的真空区域，其中发生湮灭现象。作为一种量子力学过程，隧穿辐射可视为隧穿现象：正能量玻色粒子从视界辐射出来，而负能量玻色粒子向内运动并被黑洞吸收。入射和出射玻色粒子的运动分别由实部和复数形式的粒子作用量描述。与类霍恩德斯基黑洞构型相应的隧穿辐射发射率取决于粒子作用量的虚部，而虚部与玻尔兹曼因子相关；该因子给出 T_H 。根据我们的研究，在黑洞旋转的情况下，玻色粒子穿越黑洞视界的 T_H 不依赖于任何种类的粒子。特别是，若粒子具有不同的自旋（零自旋、正自旋或负自旋），在采用半经典方法的假设下，隧穿率将相同。因此，对应的 T_H 对所有类型的粒子都应相同。因此可以认为，隧穿辐射与所有种类的粒子无关；利用特定坐标变换，这一结果对于不同的坐标系也成立。在这一过程中，粒子的隧穿与粒子能量、动量、量子引力、Horndeski引力的毛发参数以及黑洞表面引力有关，而温度则取决于 Horndeski引力的毛发参数、旋转参数和量子引力参数。值得指出的是，当 $\beta = 0$时，我们得到类霍恩德斯基黑洞的标准温度。在无电荷的情况下，即 $Q = 0$，上述温度退化为 Kerr 黑洞的温度。当 $\beta = 0$ 且 $a = 0$时，温度退化为 Reissner Nordström 黑洞的温度。此外，当 $Q = 0 = a$时，我们得到 Schwarzschild黑洞的温度。当 β 在 $0 \leq r_+ \leq 5$区域内从 10 变化到 30 时，我们发现类霍恩德斯基黑洞是稳定的；而当 Q 从 0.5 变化到 1.5 时，类霍恩德斯基黑洞具有负温度且不稳定。此外，温度随量子引力参数 β的增大而升高。

此外，我们还计算了 Horndeski引力类黑洞的 T_H 以及热容。首先，通过熵计算 T_H ，并借助逆拉普拉斯变换计算态密度。我们应用最速下降法，在不同条件下观察到系统的精确熵取决于霍金温度。我们以图示方式研究了度规在假定定义域内单调递增的熵。我们观察到，当半径取某个值时熵会降低，而能量的修正表达式则平稳增加；我们还研究发现，小型黑洞受热涨落的影响更显著。

可以观察到，随着不同修正参数 δ 取值的变化，能量逐渐降低，而通常熵的曲线则呈现相反的趋势，即逐渐上升。因此，所考虑的系统向平衡态转变。可以看出，在半径取较小值时，该曲线逐渐下降，甚至

向负方向移动，而修正后的内能则呈现正向变化。因此，所考虑的黑洞从周围环境中吸收了越来越多的热量，以维持其状态。压强曲线与平衡态相一致。对于不同的修正参数取值，所考虑系统的压强显著增加。

可以观察到，通常焓的图像与修正后的焓的曲线重合，并突然下降，甚至转向负值区域。由此可得，存在放热反应，这意味着大量能量释放到周围环境中。能量为正表明发生了非自发反应，也就是说，系统需要更多能量才能达到平衡态。我们还考察了比热随视界半径以及不同修正参数 δ 的变化。未经修正的比热呈负值，意味着系统不稳定；而修正后的比热在所考虑的整个定义域内均为正值。比热曲线为正表明系统处于稳定区域。由此可得，这些修正项使系统在热涨落下保持稳定。

附录 A

我们有 ut 在 WKB 近似下求解拉格朗日方程，得到以下解 s,

$$
\begin{aligned}
&\frac{I}{(R^2+fI)g^{-1}}\left[\eta_1(\partial_0K_0)(\partial_1K_0)+\beta\eta_1(\partial_0K_0)^3(\partial_1K_0)-\eta_0(\partial_1K_0)^2-\beta\eta_0(\partial_1K_0)^4+\eta_1eA_0(\partial_1K_0)+\right.\\
&\left.\eta_1\beta eA_0(\partial_0K_0)^2(\partial_1K_0)\right]-\frac{R}{g^{-1}(fI+R^2)}\left[\eta_3(\partial_1K_0)^2+\beta\eta_3(\partial_1K_0)^4-\eta_1(\partial_1K_0)(\partial_3K_0)-\beta\eta_1(\partial_1K_0)(\partial_3K_0)^2\right]\\
&+\frac{I}{h(fI+R^2)}\left[\eta_2(\partial_0K_0)(\partial_2K_0)+\beta\eta_2(\partial_0K_0)^3(\partial_2K_0)-\eta_0(\partial_2K_0)^2-\beta\eta_0(\partial_2K_0)^4+\eta_2eA_0(\partial_2K_0)\right.\\
&\left.+\eta_2eA_0\beta(\partial_0K_0)^2(\partial_1K_0)\right]+\frac{fI}{(fI+R^2)^2}\left[\eta_3(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)+\beta\eta_3(\partial_0K_0)^3(\partial_3K_0)-\eta_0(\partial_3K_0)^2-\beta\eta_0(\partial_3K_0)^4\right.\\
&\left.+\eta_3eA_0(\partial_3K_0)+\eta_3eA_0(\partial_0K_0)^2(\partial_3K_0)\right]-m^2\frac{I\eta_0-R\eta_3}{(fI+R^2)}=0, \qquad (22)\\
&\frac{-I}{g^{-1}(fI+R^2)}\left[\eta_1(\partial_0K_0)^2+\beta\eta_1(\partial_0K_0)^4-\eta_0(\partial_0K_0)(\partial_1K_0)-\beta\eta_0(\partial_0K_0)(\partial_1K_0)^3+\eta_1eA_0(\partial_0K_0)+\beta\eta_1eA_0(\partial_0K_0)^3\right]\\
&+\frac{R}{g^{-1}(fI+R^2)}\left[\eta_3(\partial_0K_0)(\partial_1K_0)+\beta\eta_3(\partial_0K_0)(\partial_1K_0)^3-\eta_1(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)-\beta\eta_1(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)^3\right]\\
&+\frac{1}{g^{-1}h}\left[\eta_2(\partial_1K_0)(\partial_2K_0)+\beta\eta_2(\partial_1K_0)(\partial_2K_0)^3-\eta_1(\partial_2K_0)^2-\beta\eta_1(\partial_2K_0)^4\right]\\
&+\frac{1}{g^{-1}(fI+R^2)}\left[\eta_3(\partial_1K_0)(\partial_3K_0)+\beta\eta_3(\partial_1K_0)(\partial_3K_0)^3-\eta_1(\partial_3K_0)^2-\beta\eta_1(\partial_3K_0)^4\right]-\frac{m^2\eta_1}{g^{-1}}+\frac{eA_0I}{g^{-1}(fI+R^2)}\\
&\left[\eta_1(\partial_0K_0)+\beta\eta_1(\partial_0K_0)^3-\eta_0(\partial_1K_0)-\beta\eta_0(\partial_1K_0)^3+eA_0\eta_1+\beta\eta_1eA_0(\partial_0K_0)^2)\right]\\
&+\frac{eA_0R}{g^{-1}(fI+R^2)}\left[\eta_3(\partial_1K_0)+\beta\eta_3(\partial_1K_0)^3-\eta_1(\partial_3K_0)-\beta\eta_1(\partial_1K_0)^3\right]=0, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$\frac{h}{I}(fI+R^2)\left[\eta_2(\partial_0K_0)^2+\beta\eta_2(\partial_0K_0)^4-\eta_0(\partial_0K_0)(\partial_2K_0)-\beta\eta_0(\partial_0K_0)(\partial_2K_0)^3+\eta_2eA_0(\partial_0K_0)+\beta\eta_2eA_0(\partial_0K_0)^3\right]+\frac{1}{g^{-1}h}\left[\eta_2(\partial_1K_0)^2+\beta\eta_2(\partial_1K_0)^4-\eta_1(\partial_1K_0)(\partial_2K_0)-\beta\eta_1(\partial_1K_0)(\partial_2K_0)^3\right]-\frac{h}{R}(fI+R^2)\left[\eta_2(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)+\beta\eta_2(\partial_0K_0)^3(\partial_3K_0)-\eta_0(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)-\beta\eta_0(\partial_0K_0)^3(\partial_3K_0)+\eta_2eA_0(\partial_3K_0)+\beta\eta_2eA_0(\partial_3K_0)^3\right]+\frac{h}{f}(fI+R^2)\left[\eta_3(\partial_2K_0)(\partial_3K_0)+\beta\eta_3(\partial_2K_0)^3(\partial_3K_0)-\eta_2(\partial_3K_0)^2-\beta\eta_2(\partial_3K_0)^4\right]+\frac{eA_0}{h}I(fI+R^2)\left[\eta_2(\partial_0K_0)+\beta\eta_2(\partial_0K_0)^3-\eta_0(\partial_2K_0)-\beta\eta_0(\partial_2K_0)^3+\eta_2eA_0+\eta_2\beta eA_0(\partial_0K_0)^2\right]-\frac{m^2\eta_2}{h}=0,\ (fI-f^2)(fI+R^2)_2\left[\eta_3(\partial_0K_0)^2+\beta\eta_3(\partial_0K_0)^4-\eta_0(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)-\beta\eta_0(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)^3+eA_0\eta_3(\partial_0K_0)+\beta\eta_3eA_0(\partial_0K_0)^3\right]\frac{}{h}(fI+R^2)\left[\eta_3(\partial_1K_0)^2+\beta\eta_3(\partial_1K_0)^4-\eta_1(\partial_1K_0)(\partial_3K_0)-\beta\eta_1(\partial_1K_0)(\partial_3K_0)^3\right]-\frac{R}{h}(fI+R^2)\left[\eta_2(\partial_0K_0)(\partial_2K_0)+\beta\eta_2(\partial_0K_0)^3(\partial_2K_0)-\eta_0(\partial_2K_0)^2+\beta\eta_0(\partial_2K_0)^4+eA_0\eta_2(\partial_2K_0)+\beta\eta_2eA_0\partial_0K_0)^2(\partial_2K_0)\right]\frac{}{h}(fI+R^2)\left[\eta_3(\partial_2K_0)^2+\beta\eta_3(\partial_2K_0)^4-\eta_2(\partial_2K_0)(\partial_3K_0)-\beta\eta_2(\partial_0K_0)(\partial_3K_0)^3\right]-\frac{m^2}{eA_0f}(R\eta_0-f\eta_3(fI+R^2)_+eA_0(fI-f^2)(fI+R^2)_2\left[\eta_3(\partial_0K_0)+\beta\eta_3(\partial_0K_0)^3-\eta_0(\partial_3K_0)-\beta\eta_0(\partial_3K_0)^3+\eta_3eA_0+\eta_3\beta eA_0(\partial_0K_0)^2\right]=0, \tag{24}$$

$$\frac{}{}\frac{}{}\tag{25}$$

附录B

热力学量焓表示为

$$\begin{aligned}
H &= \Big(r_+\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(r_+\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(r_+\Big(Q+r_+\Big)-a^2\Big)\Big(\delta\Big(\log(16\pi)-\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)\Big)\\
&+ \pi\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big)-\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)\Big)\\
&+ \Big(2r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(-4a^2+3Qr_++2r_+^2\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2\\
&+ \delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)-2\Big(r_+\Big(Q+r_+\Big)-a^2\Big)\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(-a^4\delta+Qr_+^3\Big(a^2+\delta\Big)\\
&- r_+^2\Big(a^4+3a^2\delta\Big)+Qr_+^5+r_+^6\Big)+4r_+^2\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\\
&\times \Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)+2\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\\
&\times \Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)\Big)\Big(\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big)^{-1}\Big)\\
&\times \Big(4\pi r_+^3\Big(a^2+r_+^2\Big)^3\Big)^{-1}.
\end{aligned}\tag{26}$$

吉布斯自由能表示为

$$
\begin{aligned}
G \;=\; & \Big(-r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)^2\Big(r_+\Big(Q+r_+\Big)-a^2\Big)\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)+r_+\Big(a^2+r_+^2\Big)\\
\times\; & \Big(r_+\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(r_+\Big(Q+r_+\Big)-a^2\Big)\Big(\delta\Big(\log(16\pi)-\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)\Big)+\pi\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big)-\Big(a^4-r_+^2\\
\times\; & \Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)\Big)+\Big(2r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)\\
\times\; & \Big(-4a^2+3Qr_++2r_+^2\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)\\
-\; & 2\Big(r_+\Big(Q+r_+\Big)-a^2\Big)\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(-a^4\delta+Qr_+^3\Big(a^2+\delta\Big)-r_+^2\Big(a^4+3a^2\delta\Big)+Qr_+^5+r_+^6\Big)\\
+\; & 4r_+^2\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)+a^2+\delta\log(16\pi)\\
+\; & r_+^2\Big)+2\Big(a^2+r_+^2\Big)\Big(a^4-r_+^2\Big(-4a^2+2Qr_++r_+^2\Big)\Big)\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big(-\delta\log\Big(\frac{\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2}{r_+^2\Big(a^2+r_+^2\Big)}\Big)\\
+\; & a^2+\delta\log(16\pi)+r_+^2\Big)\Big)\Big(\Big(a^2-r_+\Big(Q+r_+\Big)\Big)^2\Big)\Big)\Big(4\pi r_+^3\Big(a^2+r_+^2\Big)^3\Big)^{-1}. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

---

[1] M. Sharif, W. Javed, 《欧洲物理学杂志 C》72, 1997(2012). [2] M. Sharif, W. Javed, 《国际现代物理会议丛刊》23(2013)271. [3] M. Sharif, W. Javed, 《加拿大物理学杂志》91(2013)236. [4] S. W. Hawking, 《数学物理通讯》43(1975)199. [5] M. K. Parikh and F. Wilczek, 《物理评论快报》85(2000)5042. [6] M. K. Parikh, 《国际现代物理学杂志 D》13(2004)2351. [7] J. T. Firouzjaee and G. F. R. Ellis, 《广义相对论与引力》47(2015)6. [8] W. Javed, R. Babar, 《高能物理进展》2019(2019)2759641. [9] W. Javed, R. Babar, 《中国物理学报》61(2019)138. [10] W. Javed, R. Babar, 第十五届马塞尔·格罗斯曼会议, 世界科学出版社 3(2022)905. [11] W. Javed, R. Babar, 《旁遮普大学数学杂志》52(2020)6.[12] W. Javed, R. Babar, A. ¨Ovg¨un, 《现代物理快报 A》34(2019)1950057.[13] R. Babar, W. Javed, A. ¨Ovg¨un, 《现代物理快报 A》35(2020)2050104. [14] M. Sharif, W. Javed, 《韩国物理学会志》57(2010)217.[15] A. ¨Ovg¨un, K. Jusufi, 《欧洲物理学杂志 Plus》132(2017)298.[16] A. ¨Ovg¨un, 《国际理论物理学杂志》55(2016)2919. [17] K. Jusufi, A. Ovgun, G. Apostolovska, 《高能物理进展》2017(2017)8798657. [18] I. Sakalli, A. ¨Ovg¨un, K. Jusufi, 《天体物理与空间科学》361(2016)330.[19] I. Sakalli, A. ¨Ovg¨un, 《广义相对论与引力》48(2016)1.[20] A. ¨Ovg¨un, I. Sakalli, 《国际理论物理学杂志》57(2018)322.[21] A. ¨Ovg¨un, I. Sakalli, J. Saavedra, C. Leiva, 《现代物理快报 A》35(2020)2050163. [22] I. Sakalli, A. Ovgun, 《实验与理论物理学杂志》121(2015)404. [23] R. Ali, K. Bamba, M. Asgher, M. F. Malik, S. A. A. Shah, 《对称性》12(2020)1165. [24] R. Ali, K. Bamba, M. Asgher, S. A. A. Shah, 《国际现代物理学杂志 D》30(2021)2150002. [25] R. Ali, M. Asgher, M. F. Malik, 《现代物理快报 A》35(2020)2050225. [26] W. Javed, R. Ali, R. Babar, A. ¨Ovg¨un, 《欧洲物理学杂志 Plus》134(2019)511. [27] W. Javed, R. Ali, R. Babar, A. ¨Ovg¨un, 《中国物理 C》44(2020)015104. [28] K. Jusufi, A. ¨Ovg¨un, 《天体物理与空间科学》361(2016)207.

[29] **93** 2022 101759 R. Ali, M. Asgher, 《新天文学》（）R. Ali, R. Babar [30] 和 P. K. Sahoo, 《暗宇宙物理学》35(2022)100948。[31] R. Ali, R. Babar, M. Asgher 和 S. A. A. Shah, 《现代物理几何方法国际期刊》19(2022)2250017。[32] J. M. Bardeen, 载于 GR5 会议论文集（第比利斯，苏联，1968），第174页。[33] M. Faizal 和 M. M. Khalil, 《现代物理学国际期刊A辑》30(2015)1550144。[34] B. Pourhassan 和 M. Faizal, Nucl. Phys. B 913(2016)834。[35] A. Jawad 和 M. U. Shahzad, 《欧洲物理学杂志 C 》77(2017)349。[36] M. Zhang, Nucl. Phys. B 935(2018)170。[37] P. Pradhan, 《宇宙》5(2019)57。[38] K. Ghaderi, B. Malakolkalami, Nucl. Phys. B 903(2016)10。[39] W. X. Chen, Y. G. Zheng, arXiv 预印本 arXiv:2204.05470。[40] R. Ali, R. Babar, M. Asgher 和 S. A. A. Shah, 《物理学年鉴》432(2021)168572。[41] W. Javed, G. Abbas, R. Ali, 《欧洲物理学杂志 C》77(2017)296。[42] A. ¨Ovg¨un, W. Javed, R. Ali, 《高能物理进展》2018(2018)11。[43] W. Javed, R. Ali, G. Abbas, 《加拿大物理学杂志》97(2018)176。[44] R. Ali, K. Bamba, S. A. A. Shah, 《对称性》631(2019)11。[45] M. Sharif 和 Z. Akhtar, Phys. Dark Universe 29(2020)100589。[46] M. Sharif 和 Z. Akhtar, Chin. J. Phys 71(2021)669。[47] W. Javed, Z. Yousaf 和 Z. Akhtar, 《现代物理快报 A》33(2018) 1850089。[48] Z. Yousaf, K. Bamba, Z. Akhtar 和 W. Javed, 《现代物理几何方法国际期刊》19(2022)2250102。[49] K. Bamba, M. Ilyas, M.Z.Bhatti 和 Z. Yousaf, 《广义相对论与引力》49(8) (2017), 第1-17页。[50] M. Ilyas, 《欧洲物理学杂志 C》78, 757 (2018)。[51] M. Ilyas, 《现代物理学国际期刊A辑》36.24 (2021): 2150165。[52] M. Ilyas, 《现代物理几何方法国际期刊》16.10 (2019): 1950149。[53] A. Ditta 等, 《欧洲物理学杂志 C》(2022) 82:756。[54] L. Hui, A. Nicolis, 《物理评论快报》110, 241104 (2013) [55] E. Babichev, C. Charmousis, A. Leh´ebel, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》04, 027 (2017) [56] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, Phys. Rev. D 79, 064036 (2009) [57] R. K. Walia, S. D. Maharaj 和 S. G. Ghosh, 《欧洲物理学杂志 C》82(2022)547。[58] R. Kumar, S. G. Ghosh, A. Wang, Phys. Rev. D 101(2020)104001。[59] R. Kumar, S. G. Ghosh, 《欧洲物理学杂志 C》78(2018)750。[60] D. Y. Chen, Q. Q. Jiang, X. T. Zua, Phys. Lett. B 665(2008)106。[61] R. P. Kerr, 《物理评论快报》11(1963)237。