arXiv:2301.02223v1 [math.NT] 5 Jan 2023

测量元辛 Whittaker 函数空间

Ilani Axelrod-Freed、Claire Frechette 和 Veronica Lang

2023年1月6日

摘要

惠特克函数是在 p-进数论和表示论中出现的特殊函数。它们可以定义在约化群的表示以及其元辛覆盖群的表示上；有趣的是，它们的许多数论应用在从约化情形过渡到元辛情形时依然成立。然而，一个显著的区别是，在非阿基米德局部域 F 上的约化群的惠特克函数空间是一维的，而在元辛情形下则不再如此。在一篇先前的论文中，第二作者证明，任意 n 重元辛覆盖上的 $GL_r(F)$ 的惠特克函数空间维数，可以根据由 n 和 r 表述的特定线性丢番图方程组的解的个数来计算。本文给出 $\dim(\mathfrak{W})$ 的两个精确公式：一个公式的思路是将该方程组视为某个非齐次方程组的齐次特化，另一个则利用 $GL_r(F)$ 的余根格结构。随后，我们运用这些公式研究 $\mathfrak{W}$ 与一个特定量子群模之间的同态；该模由第二作者在先前的论文中构造。我们精确地说明了对于 $\mathfrak{W}$ 的任意基，该映射何时定义良好。

1 引言

惠特克函数出现于 p-进数论和表示论中，具体而言，涉及对局部域上的自守形式以及约化群主系列表示的研究。它们有多种表达形式：可以是矩阵群上的积分、关于各种组合对象的生成函数、自守形式的系数，在某些情形下还可以是格模型的配分函数。特别是，当格模型可解时，这一视角揭示了惠特克函数空间的代数结构与量子群模的代数结构之间令人惊讶的联系。

一种尤其值得关注的惠特克函数是元辛 Whittaker 函数，它们定义在元辛覆盖群的主系列表示上；这类覆盖群是约化群被 n 次单位根中心扩张得到的群。这些群得名于最早的“元辛群”，即辛群的唯一二重覆盖群 Sp_{2n} ，由 Weil [19]发现。然而，构造这一特定覆盖的机制可以应用于更广泛的情形，从而得到非代数群；这些群继承了其代数基群中许多有趣的表示论和数论性质。这种现象的一个原因是，如果 G 是一个同时也是拓扑空间的群，那么元辛覆盖在拓扑意义下也是一个覆盖空间。因此，具有拓扑结构的约化群的元辛覆盖尤为值得关注。Kazhdan 和 Patterson [11], 、Matsumoto [13], 、Brylinski-Deligne [5], 、McNamara [15],、Gan、Gao 和 Weissman [8, 9], 等许多人都在不同的一般性层次上研究了这些群。就我们的目的而言，一个特别有用的描述来自 Brylinski-Deligne [5], ；他们证明，约化 p-进群的元辛覆盖与余特征格上的对称 Weyl 群不变双线性形式一一对应。我们将在第 2 节中更详细地考察这些覆盖群的结构，并遵循第二作者在 [7]中的论述。

本文聚焦于约化群 $G = GL_r(F)$，即非阿基米德局部域 F 上含有 μ_{2n} 的 $r \times r$ 矩阵的一般线性群。在这一情形中，Matsumoto[13], 首先对此进行了研究；Brylinski-Deligne [5] 所规定的双线性形式可以 [11] 得到 Kahzdan-Patterson 覆盖的一个子集，并且可按照 Frechette [7] 的方式$B_{c,\ d}$ 用两个参数 c、$d \in \mathbb{Z}$ 显式参数化（有关这一构造的细节，请参见~第 2 节）。一般而言， G 的元辛覆盖记作 $\tilde{G}$，因此令$\tilde{G}_{c,\ d,\ r,\ n}$ 为与 $B_{c,\ d}$ 相对应的 n 重覆盖 $GL_r(F)$。需要注意的是，尽管可能

对于给定的覆盖，可能存在多个相对应的双线性形式，但对我们的目的而言，任意一种这样的形式都足够。关于哪些形式对应相同或相似覆盖的更详细说明，请参阅 [11] 或 [7] 。

代数（即非元辛）情形与元辛情形之间一个有趣的差异，是惠特克函数空间的维数。对于约化代数群，任意主系列表示上的惠特克函数空间都是一维的 [18, 17, 10]。然而在元辛情形中，主系列表示的构造变得更加复杂，因为 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$元辛环面 T（即环面 T 在元辛覆盖 G 下的原像）F不再必然是阿贝尔的。由于这一现象，惠特克函数空间的维数取决于所选的覆盖。McNamara [15], 证明，若 $\mathfrak{W}$ 是$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$上一个主系列表示的元辛惠特克函数空间，且 H 是 T 的极大阿贝尔子群，则

$$\dim(\mathfrak{W}) = \left|\widetilde{T}/H\right|,$$

$\widetilde{\ }$且 $\mathfrak{W}$ 的基向量可由 T/H 中的陪集参数化。注意，惠特克函数空间传统上记作 $\mathfrak{W}^{\boldsymbol{z}}$，其中 $\boldsymbol{z} = (z_1, ..., z_r) \in \mathbb{C}^r$ 列出了该主系列表示的佐竹参数。由于本文的结果大多不依赖于 $\boldsymbol{z}$ 的选取，我们通常会在记号中省略它，直接写作 $\mathfrak{W}$。

考察 $\widetilde{\ }$ H 对于非阿基米德局部域 F，我们得到维数的一个显式表达式，并将在第 2 节中以定理 2.4 证明这一结果。

定理 1.1。 $\widetilde{\ }$对于与双线性形式 $B_{c,d}$相对应的 n 重元辛覆盖 G 的 $GL_r(F)$,

$$\left|\widetilde{T}/H\right| = \frac{n^r}{|\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r : B_{c,d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod{n} \ \textit{for all}\ \boldsymbol{y} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r\}|}.$$

我们的主要结果是定理 1.1 分母中集合的阶的一个闭式公式。为此，令

$$\Lambda_{fin} := \{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r : B_{c,d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod{n} \text{ for all } \boldsymbol{y} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r\}.$$

然后，利用线性丢番图方程以两种不同方式参数化 Λ_{fin}，我们得到以下结果，该结果分别在定理 4.7 和定理 6.1 中分两部分证明。

主定理 1。 给定一个与双线性形式 $B_{c,d}$ 相对应的 n 重元辛覆盖 $GL_r(F)$,

$$|\Lambda_{fin}| = \mathscr{d}_1^{r-1} \gcd\left(\mathscr{d}_2, \frac{dn}{\mathscr{d}_1}\right),$$

其中 $\mathrm{d}_1 =$ 是 $c-d$ 和 n 的最大公约数，且 $\mathrm{d}_2 =$ 是 $c+(r-1)d$ 与 n 的最大公约数。或者，我们也有

$$|\Lambda_{fin}| = \frac{\mathscr{d}_1^{r-1}\mathscr{d}_2}{n} \gcd\left(\frac{n}{\mathscr{d}_1}, \frac{n}{\mathscr{d}_2}, r\right) \operatorname{lcm}\left(\frac{n}{\gcd(r,n)}, \gcd\left(\mathscr{d}_2, \frac{dn}{\mathscr{d}_1}\right)\right),$$

其中 $b =$ 是 r 与 n 的最大公约数。

第一个公式源于将参数化丢番图方程视为一个非齐次系统的齐次特化；这些方程由 $GL_r(F)$ 的余特征格的自然基生成。这种观点给出了更优雅的公式，也更具体地描述了惠特克函数空间的结构。另一方面，虽然第二个公式更复杂，但它源自 $GL_r(F)$ 的根结构，这为将这一结果推广到其他约化群提供了更直接的途径。

对于 $GL_r(F)$，惠特克函数空间也与一个由李代数 $\mathfrak{gl}$ 构造的量子群的特定模密切相关。尽管名称如此，量子群并非真正的群，而是拟三角 Hopf 代数。本文考虑量子仿射包络代数 $\widehat{U}_q(c,d,n) := U_q(\mathfrak{gl}(n/\mathrm{d}_1))$，其中 q 是 F 的剩余域的基数。该量子群有一个依赖于参数 $z \in \mathbb{C}$ 的 n/d_1 维求值模 $V_+(z)$，其基向量可以用 $\mathbb{Z}/(n/\mathrm{d}_1)\mathbb{Z}$ 的元素来标记。

在 [1], 中，Brubaker、Bump 和 Buciumas 证明，对于 $GL_r(F)$ 最简单的 n 重元辛覆盖（即满足 $c = 1$ 和 $d = 0$ 的覆盖），惠特克函数空间同构于求值模的 r 重张量积；经过 Drinfeld 扭曲（它会改变群作用，但不影响模结构）后，这个同构将量子群的作用与交织算子在底层主系列表示上的作用对应起来。这一证明的关键要素是针对情形 $c = 1, d = 0$ 的元辛惠特克函数格模型构造，该构造由 Brubaker、Bump、Chinta、Friedberg 和 Gunnells 于 [2] 中提出。

在 [7], 中，第二作者证明，这两种构造在更广泛的情形下都成立：他构造了惠特克函数格模型，并给出了一个映射 $\theta_{\boldsymbol{z}}$，连接 $\mathfrak{W}^{\boldsymbol{z}}$ 与由任意 $GL_r(F)$ 的元辛覆盖所对应的求值模构成的 r重张量积$V_+(z_1) \otimes \cdots \otimes V_+(z_r)$。（为与 [7], 中使用的术语保持一致，令 $n_Q := n/\mathrm{d}_1$。）此外，通过此映射，量子群的作用仍与交织算子在惠特克函数上的作用完全一致。

随着 c, d, r, n 变化，处理更复杂覆盖所付出的代价是：此映射有时是同构，有时是单射，有时是满射；而 H-陪集代表元的选取会影响~映射。 [7] 中使用的格模型构造要求从 T/H 中选取陪集代表元，以便为 $\mathfrak{W}$ 给出一组基，使得 $\theta_{\boldsymbol{z}}$ 有定义。然而，除了这一现象之外，格模型并非建立 $\mathfrak{W}$ 与量子模之间联系的必要条件。于是自然会产生一个问题：对于 $\mathfrak{W}$的任意基，映射 $\theta_{\boldsymbol{z}}$ 何时有定义?

我们结果的一项主要应用，是利用主定理 1 证明中对 Λ_{fin} 元素的刻画来回答这个问题。任取 $\mathfrak{W}$的一组基，利用定理 1.1 将其表示为 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$中的一组向量。于是， [7] 中给出的映射恰好是

$$\begin{aligned} \theta_{\boldsymbol{z}} : \mathfrak{W}^{\boldsymbol{z}} &\to V_+(z_1) \otimes \cdots \otimes V_+(z_r) \\ \boldsymbol{\nu} &\mapsto \quad \rho - \boldsymbol{\nu} \pmod{n/\mathrm{d}_1}, \end{aligned}$$

其中 $\rho = (r-1, \ldots, 2, 1, 0)$，且模数分别作用于向量的每个分量。利用我们的刻画来说明任意给定的陪集 νH 如何位于 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$中，我们得到以下结果，其证明将作为定理 8.2 和推论 8.3 给出。

主定理 2. 对于向量 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{C}^r$， [7] 中给出的同态 $\theta_{\boldsymbol{z}}$对 $\mathfrak{W}$ 的任意基选择都有良好定义，当且仅当

$$\gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}\right) = \gcd(c, d, n).$$

此外，若 $\mathfrak{W}$ 的维数为最小或最大，则 $\theta_{\boldsymbol{z}}$ 是一个同构 .

理解这一映射如何受到覆盖的选择影响，是了解如何将这些量子联系推广到其他约化群上的元辛覆盖的重要一步。虽然格模型联络只有在 $GL_r(F)$ 和 $SL_r(F)$ 上才完整存在，但惠特克函数框架适用于任意约化群，因此我们希望进一步研究 $\mathfrak{W}$ 的结构，不仅能让我们为其他群建立主定理 1 的类比结果，还能确定与其他类型的元辛 Whittaker 函数相关联的确切量子群和模。

关于本文的结构，第 2 节考察 $GL_r(F)$ 的元辛覆盖及其惠特克函数的构造，并以证明定理 1.1 收尾。第 3 节介绍用于参数化 Λ_{fin} 的第一组丢番图方程，随后在第 4 节中利用这些方程证明主定理 1 的第一部分，即定理 4.7。第 5 节介绍关于 Λ_{fin} 的第二组丢番图方程，这些方程有助于在第 6 节中证明主定理 1 的第二部分，即定理 6.1。第7节考察若干情形，在这些情形下，$\dim(\mathfrak{W})$ 的公式会大幅简化；此外，还证明了关于 $\mathfrak{W}$ 的若干值得关注维数的条件，包括最大维数和最小维数的条件。最后，第 8 节构建量子联络，并利用 $\mathfrak{W}$ 的结构证明主定理 2（即定理 8.2）及推论 8.3。

致谢

本项目部分由 NSF RTG 项目资助 DMS-1745638 提供支持，并由第二作者指导，作为明尼苏达大学数学学院 2022 年夏季 REU 项目的一部分。该

第二作者还获得了美国国家科学基金会项目资助 DMS-2203042。作者谨向助教 Carolyn Stephen 致谢，感谢她在整个项目期间给予的指导；同时也感谢 Ben Brubaker 和 Darij Grinberg 提供的宝贵意见。

2 元辛惠特克函数空间

为了理解元辛惠特克函数空间的结构，我们必须首先具体描述 $GL_r(F)$ 的元辛覆盖。随后，我们可以将所有覆盖的这一显式参数化扩展为对元辛环面及其极大阿贝尔子群的描述。如引言中所述，这些子群的商决定了惠特克函数空间的维数：根据覆盖精确描述其结构，使我们能够将一个复杂的表示论问题化简为一个简单的线性代数问题。

设 n 是一个自然数，F 是一个非阿基米德局部域，其中包含 $2n$ 个互不相同的 $2n$ 次单位根 μ_{2n}。令 $\mathfrak{o}$ 为 F 的整数环，ϖ 为其一致化元。

定义。给定一个分裂约化群 G，n 重元辛覆盖或 n 重元辛覆盖群 $\widetilde{G}$ 是一个以 n 次单位根 μ_n 为核、以 G 为商的非代数中心扩张。也就是说，G 由以下短正合列定义：

$$1 \to \mu_n \to \widetilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1.$$

作为集合，$\widetilde{G}$ 是由元组 (ζ, g) 构成的集合，其中 $\zeta \in \mu_n, g \in G$。然而，群乘法由余循环 $\sigma \in H^2(G, \mu_n)$ 控制；也就是说，对于两个元素 (ζ_1, g_1)、(ζ_2, g_2)，它们在 $\widetilde{G}$ 中的乘积为

$$(\zeta_1, g_1) \cdot (\zeta_2, g_2) = (\zeta_1 \zeta_2 \sigma(g_1, g_2), g_1 g_2).$$

在为 $GL_r(F)$ 的覆盖写出余循环的显式形式时，我们发现可以同时处理一个稍一般的情形。本文余下部分令 $G = GL_r(F)$。

定义。更一般地，一个次数本质上为 n 的元辛覆盖群由如下短正合列给出

$$1 \to \mu_m \to \widetilde{G} \xrightarrow{p} G \to 1$$

其中 $n|m$，且相应的余循环 $\sigma \in H^2(G, \mu_m)$ 满足如下性质：在由嵌入 $\varepsilon: \mu_m \to \mathbb{C}^\times$ 诱导的包含映射下，$[\sigma^n]$ 在 $H^2(G, \mathbb{C}^\times)$ 中是平凡的。

虽然为 G 的一般元素写出这些余循环的公式略显繁琐，但它们在 G 中由对角矩阵构成的环面 T 上的表达式相当简洁。在 [7], 中，第二作者证明，$GL_r(F)$ 上所有次数本质上为 n 的元辛覆盖都来自如下形式的余循环

$$\sigma_{c,d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\det(\boldsymbol{x}), \det(\boldsymbol{x}))_{2n}^{c} \prod_{i>j} (x_i, y_j)_n^{d-c}. \tag{1}$$

对于 $c, d \in \mathbb{Z}$，其中 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in T$ 和 $(\cdot,\cdot)_k$ 表示第 k 个希尔伯特符号（关于希尔伯特符号构造的更多细节，见 Neukirch [16]）。值得注意的是，将覆盖的次数从“纯粹”的 n 次转为本质上的 n 次，这对于纳入与余循环 $\sigma_{1,0}$ 对应的元辛覆盖是必要的。尽管该覆盖的本质次数仅为 n，但它一直是这一领域的重要示例（例如见 [1, 2, 3, 4, 14]。）

注 2.1. 由于第 $2n$ 个希尔伯特符号会产生 $2n$ 次单位根，因此必须使 F 包含 μ_{2n}，群才有良好定义。不过，如果我们考虑参数 c 为偶数的余循环，则可以放宽这一条件，只要求 F 包含 μ_n。

在 [5], Brylinski-Deligne 中，他们证明元辛覆盖的集合与对称 Weyl 群不变双线性形式的集合 B 相对应：$Y \times Y \to \mathbb{Z}$ 在余特征格 Y 上的形式满足 $B(\alpha^\vee, \alpha^\vee) \in 2\mathbb{Z}$ 对所有余根 $\alpha^\vee \in Y$ 均成立。对于 $G = GL_r(F)$，~~Y 的一个~~自然基是 r 基本余权 $\varepsilon_i^\vee$ 的集合：$F^\times \to T$，其中 $i = 1, ..., r$，且 $\varepsilon_i^\vee(a) := \mathrm{diag}(1, ..., 1, a, 1, ..., 1)$，其中 a 位于第 i 个位置。注意：虽然我们将对 $\lambda \in Y$ 使用记号 $\lambda(a)$，$a \in F^\times$ 的另一种常见记号是 a^λ。

在此基下，余特征格 Y 同构于 $\mathbb{Z}^r$；例如，

$$(\varepsilon_1^\vee + 3\varepsilon_2^\vee)(a) = \mathrm{diag}(a, a^3, 1, ..., 1).$$

利用这个基，我们用相应的矩阵 A 表示 Y 上的双线性形式，使得对于$\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{y} \in Y$，

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y}.$$

Brylinski-Deligne 对应中的每个条件都会转化为对这个矩阵的一个条件。首先，对称双线性形式规定了一个对称矩阵。其次，魏尔群 W 与对称群 S_r同构，并通过 $\sigma \cdot \varepsilon_i^\vee = \varepsilon_{\sigma(i)}^\vee$作用于 Y。因此， A 在置换矩阵的共轭作用下必须保持不变，所以对于某些（名称颇具提示性的） c、 $d \in \mathbb{Z}$，我们有 $a_{i,\ i} = c$ 对所有 i 均成立，且$a_{i,\ j} = d$对所有 $i \neq j$均成立。（矩阵 (2) 展示了这一要求。）

共有 $r-1$ 个单余根，每个都具有 $\varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}^\vee$的形式。要检验余根格上的整性条件，只需证明该条件对单余根成立。然而，对于 $GL_r(F)$，这个条件已经满足：对于任意单余根 $\varepsilon_i^\vee$，

$$\frac{B_{c,d}(\varepsilon_i^\vee, \varepsilon_i^\vee)}{2} = \frac{2(c-d)}{2} = c - d \in \mathbb{Z}.$$

根据 Brylinski-Deligne，与此双线性形式对应的元辛覆盖满足以下~条件：若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in T = p^{-1}(T)$ 使得 $p(\boldsymbol{x}) = \lambda(x)$ $p(\boldsymbol{y}) = \mu(y)$，其中某些 $x, y \in F^\times$ 以及 $\lambda, \mu \in Y$，则 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的交换子为

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = (x, y)_n^{B(\lambda,\mu)}.$$

通过显式余循环来计算交换子，我们可以确定与特定余循环对应的双线性形式，反之亦然。请注意，这一性质揭示了 Brylinski-Deligne 对应并非双射的一个关键原因：由于（1）中的余循环依赖于希尔伯特符号的幂，因此许多不同的余循环会给出完全相同的覆盖，具体来说，任何满足 $c' \equiv c$ (模 $2n$) 且 $d' - c' \equiv d - c$ (模 n) 的 $\sigma_{c',d'}$ 都可以。

定理 2.2 (Frechette [7])。对于 $c, d \in \mathbb{Z}$， $GL_r(F)$ 的本质上 n 重元辛覆盖，其乘法由 $\sigma_{c,\ d}$ 给出，对应于双线性形式 $B_{c,\ d}$，该形式作用于 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r$，其作用方式为

$$B_{c,d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \begin{pmatrix} c & d & d & \dots & d \\ d & c & d & \dots & d \\ d & d & c & \dots & d \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \dots & c \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{y}. \tag{2}$$

将双线性形式与其对应的矩阵视为一体，我们将二者都记作 $B_{c,\ d}$；希望这种记号上的滥用不会造成混淆。注意：在 [7], 中，这个双线性形式的参数化方式略有不同，写作 $B_{b,\ c}$，其中 $b = c - d$。

现在我们已经明确描述了元辛覆盖，接下来考察这种参数化方式对元辛 Whittaker 函数空间有何启示。本文不需要构造元辛 Whittaker 函数本身，也不需要构造其定义所依托的元辛主系列表示。相反，我们将利用 McNamara 的以下定理，通过 Whittaker 函数空间与元辛环面之间的联系来进行研究。关于元辛主系列表示及其 Whittaker 函数的定义，读者可分别参阅 [15] 的第 6 节和第 8 节，以作参考。

~定理 2.3（McNamara [15]）。固定一个 p-进约化群 G 上的元辛覆盖 G ，并设 $\mathfrak{W}$ 为 G上主系列表示对应的元辛 Whittaker 函数空间。令元辛~ ~ ~环面 T为环面 $T(F)$在 G中的原像，并令 H为 T的极大阿贝尔子群。那么

$$\dim(\mathfrak{W}) = \left| \widetilde{T}/H \right|.$$

注：对角矩阵群 T 记作 T，因为它是阿贝尔环面，也就是说，它同构于 $(F^\times)^r$。虽然我们称 T 为元辛环面，但它不再是阿贝尔群，严格来说也不是环面，因为其$\widetilde{}$元素为 (ζ, t)，其中 $\zeta \in \mu_n$（其中 $\mu_n \subsetneq F$）且 $t \in T$。通过研究 T的精确结构，我们证明以下定理，它是定理 1.1 的另一种表述。

$\widetilde{}$定理 2.4. 对于对应于双线性形式 $B_{c,d}$ 的 $GL_r(F)$ 的元辛覆盖 G ，

$$\left|\widetilde{T}/H\right| = \frac{n^r}{|\{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r : B_{c,d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod{n} \text{ for all } \boldsymbol{y} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r\}|}.$$

$\widetilde{}$证明。利用我们对元辛覆盖的描述，可以更明确地表示子群 T 和 H：$\widetilde{}$利用 $GL_r(F)$ 的岩泽分解，我们有 $T = \mu_n \times T(\mathfrak{o}) \times Y$ 作为一个集合。也就是说，对于 $(\zeta, t) \in T$，我们可以将其写成 $t = t_0 \cdot \lambda(\varpi)$，其中 $t_0 \in T(\mathfrak{o})$ 且 $\lambda \in Y$。

$\widetilde{}$由于 H 是 T 的子群，其元素也具有 (ζ, h) 的形式，其中 ζ 是一个 n 次单位根，而 h 是一个$\widetilde{}$对角矩阵，其元素属于 F。考察 G 上的群运算可知，单位根不会妨碍元素的交换性，因此我们必须进一步考察矩阵分量 h ，以便描述 H。为此，回想一下， $\mathfrak{o}$ 是 F 的赋值环，而 ϖ 是一致化元。于是，根据 [15], ，作为一个集合，我们有 $H = \mu_n \times T(\mathfrak{o}) \times \Lambda$，其中 Λ 是自由阿贝尔群

$$\Lambda := \{\lambda \in Y : s(\lambda(\varpi)) \in H\}$$

$\widetilde{}$对于 $s: G \to G$ 标准截面 $s(g) = (1, g)$。利用交换子关系以及 Y的基本余权基，对 Λ 的等价描述为

$$\Lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^r : B_{c,d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod{n} \text{ for all } \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^r\}. \tag{3}$$

可以将群 Λ 理解为控制矩阵 h对角线上各项中 ϖ 的幂。也就是说，对于任意元素 $(\zeta, h) \in H$，有 $h = h_0 \cdot \mathrm{diag}(\varpi^{\lambda_1}, ..., \varpi^{\lambda_r})$，其中 $h_0 \in T(\mathfrak{o})$，且$\lambda = \lambda_1\varepsilon_1^\vee + \cdots + \lambda_r\varepsilon_r^\vee$属于 Λ。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$接着，结合对 T和 H 的描述来考察 T/H，可得

$$|\widetilde{T}/H| = |Y/\Lambda| = |\mathbb{Z}^r/\Lambda|,$$

其中，最后一个描述使用了式 (3) 中所述的 Λ 到 $\mathbb{Z}^r$ 的嵌入。注意，若对所有 i都有 $\lambda_i \in n\mathbb{Z}$，则$B((\lambda_1, ..., \lambda_r)\ \boldsymbol{y})$ 必定是任意 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^r$ 的倍数，因此 $\lambda = \lambda_1\varepsilon_1^\vee + \cdots + \lambda_r\varepsilon_r^\vee$ 属于 Λ。所以，只需考虑模 n 的所有坐标 λ_i ，于是

$$|\widetilde{T}/H| = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r / (\Lambda \cap (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r)|$$

至此，证明完成。 □

设 $\Lambda_{fin} := \{\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r : B_{c,\ d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv 0 \text{ (模 } n) \text{ 对所有 } \boldsymbol{y} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r\}$. 成立。接下来的几节中，我们将建立两个相关的线性丢番图方程组，用以描述 Λ_{fin} 中的元素；这两个方程组分别给出 $|\Lambda_{fin}|$的一种公式。随后，我们将在第7节回到更广泛的$\widetilde{}$框架，探讨这些不同的公式揭示了 $|T/H|$ 的什么结构，进而揭示 $\mathfrak{W}$ 的结构。

3 余特征丢番图方程与现象

本节中，我们使用 $GL_r(F)$ 的余特征格 Y 的自然基，建立一组关于 c、d 和 n 的 r线性丢番图方程，用以描述集合 Λ_{fin}；我们将其称为余特征方程。这一视角将一个表示论问题转化为线性代数问题，其中改变参数 c、d、r 和 n 中的每一个，都会对方程组产生不同影响。我们还将在此构建一个直观的框架，以阐明各个参数所起作用的差异。

从基本余权基的视角考察 Λ_{fin} 关于 Y 的条件（见第 2 节），我们得到以下方程组。令 $\mathbf{0}_r = (0, 0, \ldots, 0)^T$ 为所有分量均为 0 的列向量，并类似地定义 $\mathbf{1}_r = (1, 1, \ldots, 1)^T$。回想一下，$B_{c,d}$ 既是定理 2.2 中给出的双线性形式，也是其对应的矩阵。

定义。对于自然数 $r, n \geq 1$ 和常数 $c, d \in \mathbb{Z}$，我们将以下方程组称为余特征方程：

$$B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_r \pmod{n}.$$

也就是说，对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_r)^T$，我们有

$$\begin{aligned} cx_1 + dx_2 + \cdots + dx_r &\equiv 0 \pmod{n} \\ dx_1 + cx_2 + \cdots + dx_r &\equiv 0 \pmod{n} \\ &\vdots \\ dx_1 + dx_2 + \cdots + cx_r &\equiv 0 \pmod{n} \end{aligned}$$

这里，第 i 个方程是通过在双线性形式 $B_{c,d}$ 中将 $\boldsymbol{x} \in Y$ 与 $\varepsilon_i^\vee$ 配对求值（对每个 $i \in \{1, ..., r\}$）得到的。因此，引理 3.1 直接成立。

引理 3.1. 设 $S_{cochar}(c, d, r, n)$ 为满足余特征方程的解 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ 的数量。~那么，对于覆盖 $G_{c,d,r,n}$，我们有 $S_{cochar}(c, d, r, n) = |\Lambda_{fin}|$。

考察固定 r 和 n 时，S_{cochar} 的值在遍历 c 和 d 的过程中呈现出某些模式，这促使我们定义一组称为对角数的常数。这些常数将在 S_{cochar} 的公式中发挥基础作用，因此我们现在花些时间对其进行探讨。

对于固定的 r 和 n，首先注意到，只需理解 S_{cochar} 在 c, d (模 n) 下的情形，因为对于 $c \equiv c'$ (模 n)，$S_{cochar}(c, d, r, n) = S_{cochar}(c', d, r, n)$，对于 d 也同样如此。将 S_{cochar} 的值按 $c, d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 取值排列成如下表格将会很有帮助：

c \ d	0	1	2	$\cdots$	$(n-1)$
0					
1					
2					
$\vdots$					
$(n-1)$					

观察图 1（其中包含若干这类表格的示例）可以发现，每幅图中标记的对角线上，S_{cochar}的值都能被共同因子整除，而且每幅图中都有两组对角线。受此现象启发，我们为每个表项指定一组由两个对角数组成的数值。

定义。令 $\mathsf{d}_1 = gcd(c - d, n)$ 为第一对角数，并将 $\mathsf{d}_2 = gcd(c + (r-1)d, n)$ 定义为第二对角数。

注意，对于位置 c, d 处的特定表项，其第一对角数表示斜率为 -1 的对角线与第一行相交处的列 $c - d$；同理，第二对角数表示斜率为 $r - 1$ 的对角线与第一列相交处的行。

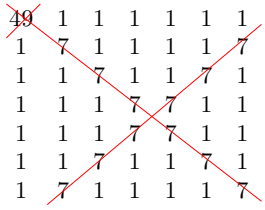
示例。当 r 和 n 互素时，S_{cochar} 的表格仅取决于这些对角数，这一点我们将在第 6 节中证明（见推论 7.4）。例如，$n = 10, r = 3$ 对应的表格见图 2，其中标出了对角数；矩阵中的每个表项的值都由其两个对角数确定。具体而言，对于任意 c, d，我们有 $S_{cochar}(10, 3, c, d) = \mathsf{d}_1^{r-1}\mathsf{d}_2 = \mathsf{d}_1^2\mathsf{d}_2$。

一般而言，给定一个随机的 n 和 r，S_{cochar} 的值与 d_1 和 d_2, 的关系不会如此简单，但它们仍起着重要的决定作用。要找到 S_{cochar}的闭式公式，我们必须考察我们最初讨论的齐次余特征方程的非齐次推广。

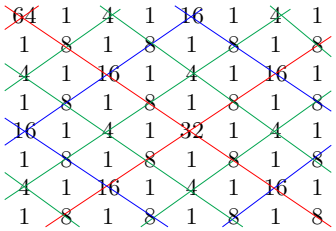
定义。令 $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，且 $\boldsymbol{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$。那么，$a \in \mathbb{Z}$ 的非齐次余特征方程定义为

$$B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} = a \cdot \mathbf{1}_r \pmod{n}. \tag{4}$$

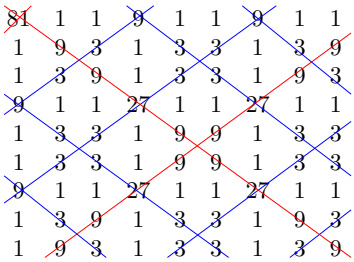
令 $S_{inhom}(c, d, r, n)$ 表示非齐次余特征方程的解总数，其中遍历 $a \in \mathbb{Z}$ 的所有取值。



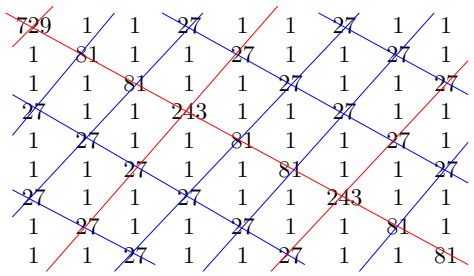
$r = 2,\ n = 7$



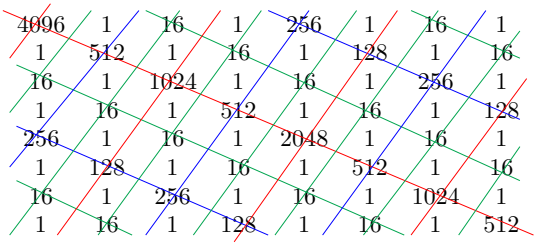
$r = 2,\ n = 8$



$r = 2,\ n = 9$



$r = 3,\ n = 9$



$r = 4,\ n = 8$

图 1：不同选择的 r 和 n所对应的余特征现象示例。请注意，每个示例中都有一组斜率为 -1 的对角线和一组斜率为 $r-1$ 的对角线：前者体现第一对角数 d_1 的影响，后者体现第二对角数 d_2的影响。每个示例中，相同对角数（大于 1）对应的对角线用相同颜色标记。例如，在第二个示例 $(r = 2, n = 8)$ 中，红色标记对角数为 8 的对角线，蓝色标记对角数为 4 的对角线，绿色标记对角数为 2 的对角线。

在下一节中，我们将通过运用直接的线性代数方法刻画非齐次余特征方程的解集，并确定解中满足 $a \equiv 0 \pmod{n}$ 的比例，从而求出 $S_{cochar}(c, d, r, n)$。为此，我们需要找出一个精确公式，给出使 (4) 有解的 a 的最小非零值。

定义。固定 c, d, r, n，令 $A(c, d, r, n)$ 表示使非齐次余特征方程 (4) 有解的 a 的最小正整数值。

4 主定理 1 的证明（第 1 部分）

本节全程固定一组参数 c, d, r, n。为求出 $S_{cochar} := S_{cochar}(c, d, r, n)$ 的公式，我们首先证明，非齐次余特征方程的解可按 $a \in \mathbb{Z}$ 的取值划分为大小相等的等价类，并且

$$S_{cochar}(c, d, r, n) = \frac{A(c, d, r, n)}{n} \cdot S_{inhom}(c, d, r, n)$$

在刻画非齐次余特征方程的解之后，我们将给出 $S_{inhom}(c, d, r, n)$ 和 $A(c, d, r, n)$ 的显式表达式。

引理 4.1. 方程 $B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv a \cdot \mathbf{1}_r \pmod{n}$ 有解，当且仅当 a 是 $A = A(c, d, r, n)$ 的倍数。因此，$A(c, d, r, n)$ 整除 n。

证明。根据定义，方程 $B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv A \cdot \mathbf{1}_r \pmod{n}$ 存在解 $\boldsymbol{x}_A$。若对某个 $k \in \mathbb{Z}$ 有 $a = kA$，那么 $k\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{A}}$ 是方程 $B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv a \cdot \mathbf{1}_r \pmod{n}$ 的一个解。反过来，假设存在一个

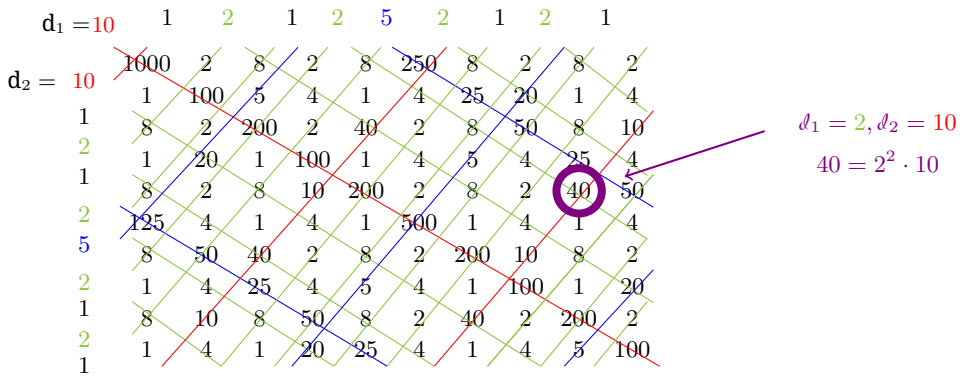


图 2：该表展示了对于所有满足 $\in \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$ 的 (c,d)， $S_{cochar}(c,d,3,10)$ 的取值；大于 1 的对角数对应的对角线已作标记。请注意，由于 $r=3$ 和 $n=10$ 互素，每个表项都等于 $\mathrm{d}_1^2 \cdot \mathrm{d}_2$。相较之下，请参见图 1 中 $r=3$ 和 $n=9$ 的示例，此时情况并非如此。

正整数 g 和方程 $B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x}_g \equiv g \cdot \mathbf{1}_r \pmod{n}$ 的解 $\boldsymbol{x}_g \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$，但 A 不能整除 g。那么，对某个正整数 j，有 $jA < g < (j+1)A$。因此，

$$\begin{aligned} B_{c,d} \cdot (\boldsymbol{x}_g - j\boldsymbol{x}_A) &\equiv B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x}_g - jB_{c,d} \cdot \boldsymbol{x}_A \\ &\equiv (g - jA) \cdot \mathbf{1}_r, \end{aligned}$$

这与 A 的最小性矛盾。然后，由于 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_r$ 是 $B_{c,\ d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv n \cdot \mathbf{1}_r \equiv \mathbf{0}_r \pmod{n}$ 的一个解，第二个结论便得证。 □

将方程 (4) 的解按照 a 划分为等价类后，我们考察每个等价类中的解的数量，并对其作更具体的刻画。

引理4.2。对于 $k \in \{1, \ldots, \frac{n}{A}\}$，令 W_k 为 $B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv (kA) \cdot \mathbf{1}_r$（模 n）的解集。那么$|W_k| = |W_1|$ 对于所有此类 k 均成立。

证明。任取 $\boldsymbol{x} \in W_1$。函数 $\phi_{\boldsymbol{x}}\colon W_1 \to W_k$ 定义为 $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{y} + (k-1) \cdot \boldsymbol{x}$，它在 W_1 与 W_k 之间给出一个双射。 □

引理 4.3。设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)^T$。那么， $\boldsymbol{x}$ 满足非齐次余特征方程，当且仅当对于每个 $2 \le j \le r$，都有 $cx_1 + dx_j \equiv dx_1 + cx_j$（模 n）。

证明。设 $2 \le j \le r$。对于一个解 $\boldsymbol{x}$，方程 $B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv a \cdot \mathbf{1}_r$（模 n）的第一行告诉我们

$$cx_1 + dx_j + \sum_{\substack{2 \le k \le r \\ k \ne j}} dx_k \equiv a \pmod{n}$$

从第一行减去第 j 行

$$dx_1 + cx_j + \sum_{\substack{2 \le k \le r \\ k \ne j}} dx_k \equiv a \pmod{n},$$

由第一式，我们得到

$$cx_1 + dx_j \equiv dx_1 + cx_j \pmod{n}.$$

反过来，假设对于所有 $j \in \{2, \ldots, r\}$， $\boldsymbol{x}$ 满足 $cx_1 + dx_j \equiv dx_1 + cx_j$（模 n）。那么， $\boldsymbol{x}$满足取值为 $a \equiv cx_1 + dx_j + \sum_{2 \le k \le r k \ne j} dx_k$（模 n）的非齐次余特征方程。 □

命题 4.4. 向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)^T$ 是非齐次余特征方程的解，当且仅当对每个 $j \in \{2, ..., r\}$，我们都有 $x_j = x_1 + v_j \frac{n}{\mathrm{d}_1}$，其中某个整数 v_j 满足 $1 \le v_j \le \mathrm{d}_1$。

证明。根据 L emma 4.3，只需刻画由下式给出的方程组的解 $\boldsymbol{x}$ y

$$cx_1 + dx_j \equiv dx_1 + cx_j \pmod{n}$$

对每个 $j \in \{2, ..., r\}$ 都成立，或等价地，

$$(c-d)(x_1 - x_j) \equiv 0 \pmod{n}. \tag{5}$$

回顾 $\mathrm{d}_1 = \gcd(c-d, n)$，向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 (5) 当且仅当 $x_1 - x_j$ 对所有 $j \in \{2, ..., r\}$ 都是 $\frac{n}{\mathrm{d}_1}$ 的倍数。因此，非齐次余特征方程的解恰好是如下形式的向量

$$\boldsymbol{x} = x_1 \cdot \mathbf{1}_r + \frac{n}{\mathrm{d}_1}(0, v_2, v_3, ..., v_r)^T$$

其中 $0 \le x_1 < n$ 和 $v_j \in \mathbb{Z}$ 满足：对所有 $j \in \{2, ..., r\}$，$1 \le v_j \le \mathrm{d}_1$。 □

现在，我们已经精确刻画了满足非齐次余特征方程的 $\boldsymbol{x}$ 集合，因此可以通过遍历所有互不相同的元组 $(x_1, v_2, ..., v_r)$ 来计算该集合的大小，其中每个元组都会得到一个不同的解 $\boldsymbol{x}$。

推论 4.5. 非齐次余特征方程的解的数量为

$$S_{inhom}(c, d, r, n) = n\mathrm{d}_1^{r-1}.$$

现在我们可以用 n、r、c 和 d 来表示 A 的精确公式。

命题 4.6. 使非齐次余特征方程有解的最小正整数 A 为 $A = \gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}\right)$，其中 $\mathrm{d}_2 = \gcd(c + (r-1)d, n)$。

证明. 将命题 4.4 代入 (4)，可得左侧为

$$\begin{pmatrix} c & d & d & \ldots & d \\ d & c & d & \ldots & d \\ d & d & c & \ldots & d \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \ldots & c \end{pmatrix} \left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{n}{\mathrm{d}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} \right) \equiv x_1(c + (r-1)d) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{n}{\mathrm{d}_1} \begin{pmatrix} dv_2 + dv_3 + \cdots + dv_r \\ cv_2 + dv_3 + \cdots + dv_r \\ dv_2 + cv_3 + \cdots + dv_r \\ \vdots \\ dv_2 + dv_3 + \cdots + dv_{r-1} + cv_r \end{pmatrix}.$$

要使其有解，该表达式的每一行都必须等于一个常数 A。观察第一行，

$$A \equiv x_1(c + (r-1)d) + \frac{dn}{\mathrm{d}_1}(v_2 + v_3 + \cdots + v_r) \pmod{n}.$$

由命题 4.4 的证明可知，x_1 和 $v_2 + v_3 + \cdots + v_r$ 都是任意常数。因此，A 的最小取值为 $\gcd\left(c + (r-1)d, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}, n\right) = \gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}\right)$。 □

注意，由于 d_1 整除 $c - d$，我们可以等价地将 A 写为 A =最大公约数 $\left(\mathrm{d}_2, \frac{cn}{\mathrm{d}_1}\right)$ =最大公约数 $\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}\right)$ =最大公约数 $\left(\mathrm{d}_2, \frac{n}{\mathrm{d}_1}$最大公约数$(c, d, n)\right)$。因此，我们得到了一个用 c、d、r、n表示 S_{cochar}的闭式。

定理 4.7。余特征方程的解的数量为

$$S_{cochar}(c, d, r, n) = \mathrm{d}_1^{r-1} \gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}\right).$$

5 余根丢番图方程

受余特征方程中出现的常数 $c+(r-1)d$ 和 $c-d$ 的启发，我们定义了第二组相关方程，它与 $GL_r(F)$ 的根结构联系得更为紧密。

定义。余根方程是以下由 r 个方程组成的方程组：

$$\begin{aligned}(c-d)(x_i-x_r)&\equiv 0 \pmod n \quad \text{for all } i\in\{1,...,r-1\},\\ (c+(r-1)d)(x_1+\cdots+x_r)&\equiv 0 \pmod n.\end{aligned}$$

我们称这些方程为余根方程，因为第 i 个方程是通过在双线性形式 $B_{c,d}$ 中，将 $\boldsymbol{x}\in Y$ 作用于余根 $\varepsilon_i^\vee-\varepsilon_r^\vee$ 而得到的，其中 $i\in\{1,...,r-1\}$。我们也可以类似地将其作用于单余根 $\varepsilon_i^\vee-\varepsilon_{i+1}^\vee$，但这种表述对我们的目的更有用。

在某些情形下，余根方程与余特征方程等价，但在另一些情形下则不然：计算余根方程的解并考察这种联系，将为我们提供 S_{cochar} 的另一种表达式。

注 5.1。这个方程组也揭示了 $SL_r(F)$ 和 $GL_r(F)$ 的元辛覆盖之间的差异。对于 $SL_r(F)$ 的任意余特征 $\boldsymbol{x}$，最后一个余根方程显然成立，因为要使所得矩阵 $\boldsymbol{x}(a)$ 对任意 $a\in F$ 的行列式都为 1，必须有 $x_1+\cdots+x_r\equiv 0$（模 n）。在这种情况下，余特征方程与余根方程等价，二者都给出 $|\Lambda_{fin}\cap SL_r(F)|=\mathrm{d}_1^{r-1}$。

定理 5.2。余根方程的解的数量为

$$S_{coroot}(c,d,r,n)=\mathrm{d}_1^{r-1}\mathrm{d}_2\gcd\left(\frac{n}{\mathrm{d}_1},\frac{n}{\mathrm{d}_2},r\right).$$

与第 4 节一样，我们证明余根方程的解的一般性质。这些描述将使我们能够在第 6 节直接关联 S_{cochar} 与 S_{coroot}。

证明。我们从 一次变量代换开始。考虑以 $y_1,...,y_{r-1},z$ 为变量的余根系统，写作 s

$$\begin{aligned}(c-d)y_i&\equiv 0 \pmod n \quad \text{for all } i\in\{1,...,r-1\},\\ (c+(r-1)d)z&\equiv 0 \pmod n.\end{aligned}$$

用这些变量表示，有 $\mathrm{d}_1^{r-1}\cdot\mathrm{d}_2$ 个元组 $(y_1,...,y_{r-1},z)$ 满足余根方程：y_i 都是 $\frac{n}{\mathrm{d}_1}$ 的倍数，而 z 是 $\frac{n}{\mathrm{d}_2}$的倍数。令 $S_{Y,Z}$ 为这类元组的集合。

接下来，我们对满足 $y_i=x_i-x_r$ 和 $z=x_1+\cdots+x_r$ 的 $\boldsymbol{x}$ 进行分类，使得 $(y_1,..,y_{r-1},z)\in S_{Y,\ Z}$：也就是说，满足余根方程原始表述的 $\boldsymbol{x}$ 集合。注意到 $x_i=y_i+x_r$，因此重新整理最后一个余根方程可得

$$rx_r\equiv z-(y_1+\cdots+y_{r-1}) \pmod n, \tag{6}$$

因此，按 $\boldsymbol{x}$ 还是按 $(y_1,...,y_{r-1},z)$ 来计数解的数量，取决于 r 是否模 n 可逆。令 $b=\gcd(n,r)$。那么，当 $z-(y_1+\cdots+y_{r-1})$ 是 b 的倍数时，x_r 有 b 个解；否则没有解。直接计算可验证，对于不同的元组 $(y_1,..,y_{r-1},z)\in S_{Y,\ Z}$，对应的 $\boldsymbol{x}$ 集合之间没有交集

令 $Fr_b(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,n)$ 表示能够得到余根方程有效解的 $(y_1,\ldots,y_r,z)$ 元组所占的比例。换言之，

$$Fr_b:=\frac{|\{(y_1,\cdots,y_r,z)\in S_{Y,Z}: z-y_1-\cdots-y_r \text{ is a multiple of } b\}|}{|S_{Y,Z}|}.$$

于是 $S_{coroot}(c,d,r,n)=\mathrm{d}_1^{r-1}\mathrm{d}_2\cdot b\cdot Fr_b(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,n)$，因此只需推导出 $Fr_b(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,n)$ 的公式。 □

注 5.3. 当 n 与 r 互素时，r 可逆。因此 Fr_b 的值为 1，因为我们选取的任何一组元组相加后都是 $b=1$ 的倍数，所以在这种情况下，这两组变量给出等价条件，且$S_{coroot}=|S_{Y,\ Z}|$。

命题 5.4. 函数 Fr_b 的值为

$$Fr_b(\ell_1, \ell_2, n) = \frac{1}{b} \cdot \gcd\left(\frac{n}{\ell_1}, \frac{n}{\ell_2}, b\right).$$

证明。我们仔细考察 b 的因子与 $\frac{n}{\ell_1}, \frac{n}{\ell_2}$ 的因子之间的重叠。设 $k_1 = \gcd(\frac{n}{\ell_1}, b)$，且 $m_1 \in \mathbb{Z}$ 满足 $b = m_1 k_1$。类似地，设 $k_2 = \gcd(\frac{n}{\ell_2}, b)$，且 $m_2 \in \mathbb{Z}$ 满足 $b = m_2 k_2$。

由于 y_i 是 $\frac{n}{\ell_1}$ 的倍数，它也是 k_1 的倍数：考察模 b 下可能的倍数，我们看到，$y_i \pmod b$ 在 $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ 中可以是 m_1 个 k_1 的任意倍数，且概率相等。类似地，考虑和 $y = \sum_{i=1}^{r-1} y_i$，我们断言对于 y 也同样如此。设 $1 \le g \le m_1$，并假设 $y \equiv gk_1 \pmod b$：若任意选取 $y_1, y_2, \ldots, y_{r-2}$，则剩下

$$y_{r-1} \equiv gk_1 - \sum_{i=1}^{r-2} y_i \pmod b.$$

该方程的右侧定义了某个等价类 ℓk_1 (模 b)，我们必须从中选择y_{r-1}，以确保 $y \equiv gk_1$ (模 b)。对于给定的 g，y_{r-1} 的所有可能取值中，恰有 $\frac{1}{m_1}$ 个会使我们落入正确的等价类。因此，y以相同的概率落入等价类 k_1、$2k_1$、.....、m_1k_1。

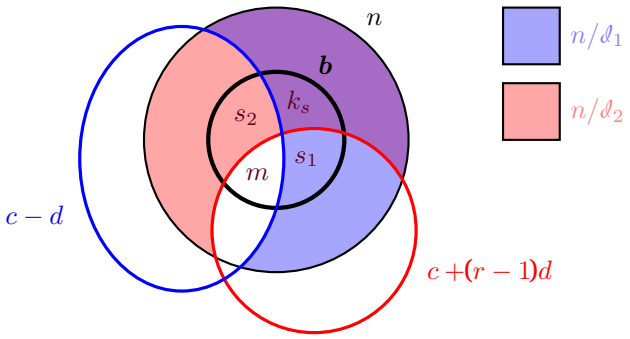


图 3：$b = \gcd(r, n)$的因式分解示意图，其中任意圆或阴影区域与表示 b 的圆的重叠部分，都包含它们最大公约数的因式分解。注意，紫色区域是红色区域和蓝色区域的重叠部分。

同样，(模 b) 可以等概率地取 m_2 个 k_2 模 b 的倍数中的任意一个。为了衔接 y 和 z，我们必须进一步分解：令 $k_s = \gcd(k_1, k_2)$，使得 $k_1 = s_1 k_s$ 和 $k_2 = s_2 k_s$，且 $\gcd(s_1, s_2) = 1$。令 $m = \gcd(m_1, m_2)$，将 b完全分解为 $b = ms_1s_2k_s$。读者可以参阅图 3，以了解这一因式分解与 b、$\frac{n}{\ell_1}$，以及 $\frac{n}{\ell_2}$之间的关系。

现在我们确定满足 $z - y \equiv 0$ (模 b) 的 y 和 z 值所占的比例。由于 y、z、b 都含有因子 k_s，令 $y = \alpha k_1 = \alpha s_1 k_s$ 和 $z = \beta k_2 = \beta s_2 k_s$，其中 α、$\beta \in \mathbb{Z}$ 为某些值。于是，等价地，我们要寻找满足以下条件的（α，β）对所占的比例：

$$\beta s_2 \equiv \alpha s_1 \pmod{ms_1s_2}.$$

由于 s_1、s_2 互素，因此对于某个 $a \in \mathbb{Z}$，必有 $\alpha = as_2$。所有可能的 α 值中，恰好有$\frac{1}{s_2}$ 是 s_2 的倍数。因此

$$\beta s_2 \equiv as_1s_2 \pmod{ms_1s_2}$$

其仅在 $\beta \equiv as_1 \pmod b$ 时有解。在 $m_2 = ms_1$ 个可能归入的等价类中，只有由 $\beta = as_1$ 定义的那个可行。因此，

$$Fr_b(\ell_1, \ell_2, n) = \frac{1}{s_2}\left(\frac{1}{ms_1}\right) = \frac{1}{ms_1s_2} = \frac{k_s}{b} = \frac{\gcd\left(\frac{n}{\ell_1}, \frac{n}{\ell_2}, b\right)}{b}.$$

□

由于 $b = \gcd(r, n)$，我们有 $\gcd\left(\frac{n}{1}, \frac{n}{\ell_2}, b\right) = \gcd\left(\frac{n}{1}, \frac{n}{\ell_2}, r\right)$，这就完成了定理 5.2 的证明，并使我们能够仅用 c、d、r 和 n 来表示 S_{coroot}。

6 主定理 1 的证明（第 2 部分）

现在我们可以证明主要结果的第二部分了。本节将说明如何由余特征方程得到余根方程，以及这与 S_{coroot} 和 S_{cochar} 的关系。

定理 6.1. 余特征方程的解的数量也可以定义为

$$S_{cochar} = S_{coroot} \cdot \frac{1}{n} \cdot \operatorname{lcm}\left(\gcd\left(\ell_2, \frac{dn}{\ell_1}\right), \frac{n}{\gcd(n, r)}\right).$$

令 $M(c, d, r, n) := \text{最小公倍数}\left(\text{最大公约数}\left(d_2, \frac{dn}{\ell_1}\right), \frac{n}{\text{最大公约数}(n,r)}\right)$。我们还将证明关于 $M(c, d, r, n)$ 的以下公式，这将有助于我们研究第 7 节中 $\mathfrak{W}$ 的特殊维数。

命题 6.2. 设 r, n 的素因数分解分别为 $r = p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \dots p_j^{\ell_j}$ 和 $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_j^{m_j}$。对于每个 $1 \le i \le j$，令

$$(c - d) \equiv c_i p_i^{s_i} \pmod{p_i^{m_i}} \text{ and } d \equiv d_i p_i^{t_i} \pmod{p_i^{m_i}} \text{ for each } 1 \le i \le j$$

因此 $0 \le s_i, t_i \le m_i$。令 $\mu_i = \min(m_i, \ell_i)$，且 c_i, d_i 与 p_i 互素。那么

$$M(c, d, r, n) = \prod_{i=1}^{j} p_i^{\max(m_i - \mu_i, \min(s_i, t_i + m_i - s_i))}.$$

为了从余特征方程得到余根方程，我们可以将定义余特征方程的矩阵 $B_{c,\ d}$ 乘以矩阵 $r \times r$

$$L_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

也就是说，此变换所指定的新方程组为

$$L_r B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv \mathbf{0}_r \pmod{n}$$

这恰好给出了余根方程。同样，将余根方程乘以

$$L'_r = \begin{pmatrix} r-1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ -1 & r-1 & \dots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ -1 & -1 & & r-1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

可得到乘以 r 后的余特征方程。也就是说，

$$L'_r(L_r B_{c,d}) \cdot \boldsymbol{x} \equiv r \cdot B_{c,d} \cdot \boldsymbol{x} \equiv \mathbf{0}_r \pmod{n}.$$

正如我们在注 5.3 中讨论的，如果 r 和 n 互素，那么 r 在 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中有一个逆元 r^{-1}，并且余特征方程与余根方程等价。然而，如果 r 模 n不可逆，那么从余根方程反推余特征方程就会更加复杂。

回忆一下， $b=$ 是r与 n的最大公约数。那么 $r\cdot B_{c,\ d}\boldsymbol{x}\equiv\mathbf{0}_r$ (模 n)可分解为

$$b\left(\frac{r}{b}\right)\begin{pmatrix} c & d & d & \dots & d \\ d & c & d & \dots & d \\ d & d & c & \dots & d \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ d & d & d & \dots & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\pmod{b\cdot\frac{n}{b}}.$$

由于等式两边和模数都是 b 的倍数，这意味着 t

$$\left(\frac{r}{b}\right)B_{c,d}\cdot\boldsymbol{x}\equiv\mathbf{0}_r\pmod{\frac{n}{b}}.$$

数 $\frac{r}{b}$ 与 $\frac{n}{b}$ 互素，因此在 $\mathbb{Z}/\frac{n}{b}\mathbb{Z}$ 中可逆，故

$$B_{c,d}\cdot\boldsymbol{x}\equiv\mathbf{0}_r\pmod{\frac{n}{b}}. \tag{7}$$

注记 6.3. 同样，由 (7) 可知，当 r 与 n 互素时，余根方程与余特征方程等价，因为此时 $n=n/b$，而 (7) 恰好得出余特征方程。

若不属于这种情形，即若 $b\neq 1$，那么对于任意余根解 $\boldsymbol{x}$，我们有

$$B_{c,d}\boldsymbol{x}\equiv\frac{n}{b}\boldsymbol{v}\pmod{n}$$

对于某个向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}^r$。现在我们证明，每个余根方程的解也满足特定 a 值下的非齐次余特征方程。

引理 6.4. 余根方程等价于满足条件 $a\in(n/b)\mathbb{Z}$ 的非齐次余特征方程。

证明。设 $\boldsymbol{x}$ 是余根方程的一个解，并设方程（7）左端的第 i 行为

$$w_i=cx_i+\sum_{j\neq i}dx_j.$$

根据定义，

$$w_i-w_r=(c-d)(x_i-x_r)\equiv 0\pmod{n}.$$

因此，对于某个 $k\in\{1,...,b\}$,

$$B_{c,d}\boldsymbol{x}\equiv\frac{n}{b}k\cdot\mathbf{1}_r\pmod{n}. \tag{8}$$

类似地，设 $\boldsymbol{x}$ 满足（8）。然后按上述方式定义 w_i，

$$(c-d)(x_i-x_r)\equiv w_i-w_r\equiv k\frac{n}{b}-k\frac{n}{b}\equiv 0\pmod{n}$$
$$(c+(r-1)d)(x_1+x_2+\dots x_r)\equiv w_1+w_2+\dots+w_r\equiv r\left(k\frac{n}{b}\right)\equiv 0\pmod{n}.$$ □

我们在第 4 节证明了，方程（8）有解当且仅当 $k\frac{n}{b}$ 是 $A(c,d,r,n)$ 的倍数，并且每个解类（由具有相同的 k 来定义）的大小都相同。与该节一样，我们希望找到使（8）有解的最小非零 k。

定义。令 $\kappa(c\qquad d,r,n)$ 是 k 的最小正值，使得方程（8）有解 .

同样，根据上下文通常可以看出我们讨论的是某个固定的 c,d,r,n，为简洁起见，我们将写作 κ 和 M，而不写作 $\kappa(c,d,r,n)$ 和 $M(c,d,r,n)$。

定理 6.1 的证明。我们可以如下联系 $\kappa(c,d,r,n)$ 和 $A(c,d,r,n)$ 的取值 ws:

$$\kappa \cdot \frac{n}{b} = \operatorname{lcm}\left(A, \frac{n}{b}\right) = \operatorname{lcm}\left(\gcd\left(\ell_2, \frac{dn}{\ell_1}\right), \frac{n}{b}\right).$$

令 $M(c,d,r,n) := \operatorname{lcm}\left(\gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\ell_1}\right), \frac{n}{b}\right)$. 那么，方程 (8) 的解有 $\frac{n}{M} = \frac{b}{\kappa}$ 个等价类。这些等价类中恰有一个——由 $k = b$ 给出——对应余特征方程的解。因此，

$$S_{cochar} = S_{coroot} \cdot \frac{M}{n} = S_{coroot} \cdot \frac{\kappa}{b}.$$

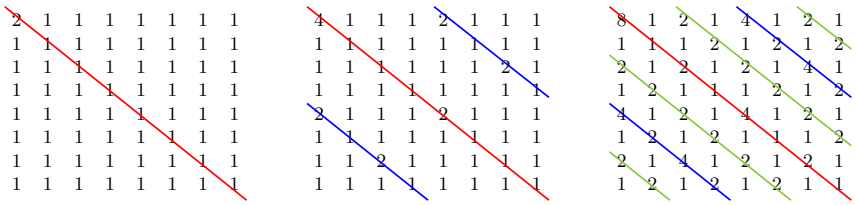
将 S_{coroot} 和 M 的值代入我们先前得到的表达式，可得

$$S_{cochar} = \frac{\ell_1^{r-1}\ell_2}{n} \gcd\left(\frac{n}{\ell_1}, \frac{n}{\ell_2}, r\right) \operatorname{lcm}\left(\frac{n}{\gcd(r,n)}, \gcd\left(\ell_2, \frac{dn}{\ell_1}\right)\right). \qquad \square$$

尽管乍看之下无法从这个方程看出，这个公式与定理 4.7 中给出的公式等价。未来的一个研究方向是简化这一表达式，并更直接地理解它为何与定理 4.7 的陈述等价。此外，虽然这个公式看起来比定理 4.7 中的公式更复杂，但这种方法或许更适合推广到 $GL_r(F)$ 之外，因为第 2 节中构造的元辛 Whittaker 函数可以定义在任意约化群上，而且这种方法与约化群的根数据结构关系更密切。

使用与第 3 节中相同的可视化表格，可以更直观地展示当我们改变 c、d、r 和 n 时， M 和 κ 如何变化。这里，对于固定的 r、n，将位置 (c,d) 上的元素记为 $\kappa(c,d,r,n)$。（要得到与 M 相匹配的表格，将 κ 表格乘以 n/b。）

示例。对于 $n = 8 = 2^3$ 和 $r = 2^\ell$，下列表格展示了当 ℓ 从 1 增至 3 时， κ 如何变化。由于 M 和 κ 取决于 $\mu = \min(\ell, m)$，而非 ℓ，因此 $\ell > 3$ 的任何 κ 表格都会与 $\ell = 3$ 的表格相同。



$n = 8, r = 2$ $n = 8, r = 4$ $n = 8, r = 8$

这些表格中的元素由其所在的主对角线决定，主对角线由 s 描述；元素所在的列则由 t 描述，并用于标示该元素沿主对角线向下的位置。特别要注意， ℓ 和 $\ell + 1$ 的矩阵之间唯一的区别是，后一个矩阵中每条对角线上都有特定比例的元素乘以了 2。例如，对于 $\ell = 2$，红色对角线上的这一比例为 1/4，蓝色对角线上的则为 1/2。

这些表格还有助于直观呈现组合不同的素数所产生的效果。

示例。 当 $r = 2^2$ 和 $n = 2^2 \cdot 3$，我们看到 κ 的表格是该对象的一个 3×3 镶嵌图 r

$r = 2^2, n = 2^2$:

4	1	2	1
1	1	1	2
2	1	2	1
1	2	1	1

$r = 2^2, n = 2^2$

4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1

$r = 2^2, n = 12 = 3 \cdot 2^2$

示例。以下是 κ 表格，分别对应 $n = 6$ 和 $r = 2$、3、6。注意， $r = 6$ 的表格是将 $r = 2$ 和 $r = 3$ 的表格逐项相乘得到的。证明命题 6.2 后，我们将看到这一结论在更一般的情形下也成立。

2	1	2	1	2	1
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
1	1	1	1	1	1

$r = 2, n = 6$

3	1	1	3	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
3	1	1	3	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$r = 3, n = 6$

6	1	2	3	2	1
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
2	1	2	1	2	1
1	1	1	1	1	1

$r = 6, n = 6$

.

将 M和 κ的值直接用 n、 r、 c和 d的素因子表示后，我们就可以证明命题 6.2 了。

命题 6.2 的证明。设 $r = p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \dots p_j^{\ell_j}$和 $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_j^{m_j}$，其中某些 ℓ_i或 m_i可能为 0。回顾 d_2, 的定义，我们有

$$M = \operatorname{lcm}\left(\gcd\left(c + (r-1)d, n, \frac{dn}{\mathsf{d}_1}\right), \frac{n}{b}\right).$$

因此， M 的素因子只能是 n的素因子，而 M 在这些素数幂上是乘性的。只考虑某个 $i \in \{1, j\}$时 M 中出现的 p_i 的幂，令

$$(c-d) \equiv c_i p_i^{s_i} \pmod{p_i^{m_i}} \text{ and } d \equiv d_i p_i^{t_i} \pmod{p_i^{m_i}} \text{ for each } 1 \le i \le j$$

因此 $0 \le s_i$、 $t_i \le m_i$和 c_i、 d_i 均与 p_i互素。令 $\mu_i = \min(m_i, \ell_i)$。那么， $n/b = b_i p_i^{m_i - \mu_i}$，其中 b_i 与 p_i互素。

接下来考虑 $\gcd\left(c + (r-1)d, n, \frac{dn}{\mathsf{d}_1}\right)$ 中 p_i 的幂：回想一下， $\mathsf{d}_1 = \gcd(c-d, n)$， d_1 中 p_i 的幂为 $\min\{s_i, m_i\} = s_i$。因此， dn/d_1 中 p_i 的幂为 $t_i + m_i - s_i$。还需考虑最大公约数第一个分量中产生的幂。

考虑 $c + (r-1)d = c - d + r \cdot d$。代入因式分解，得到

$$c + (r-1)d \equiv c_i p_i^{s_i} + r_i d_i p_i^{t_i + \mu_i} \pmod{p_i^{m_i}},$$

其中 r_i 与 p_i互素。

我们考虑三种 情形。如果 $s_i < t_i + \mu_i$，则该分量中 p_i 的幂为 s_i。因此，幂 p_i最大公约数中的值为 $\min\{s_i, 因为 $s_i \le m_i$。那么 M 中 p_i 的幂次为

$$\max\{m_i - \mu_i, \min\{s_i, t_i + m_i - s_i\}\}.$$

接下来，假设 $s_i > t_i + \mu_i$。那么，最大公约数中 p_i 的幂次为 $\min\{t_i+\mu_i, t_i+m_i-s_i\}$。然而，此时 M 中 p_i 的幂次为

$$\max\{m_i - \mu_i, \min\{t_i+\mu_i, t_i+m_i-s_i\}\} = m_i - \mu_i,$$

由于 $s_i > t_i + \mu_i$，所以 $t_i + m_i - s_i < m_i - \mu_i$。

最后，若 $s_i = t_i + \mu_i$，则

$$c - d + rd \equiv p_i^{s_i}(c_i + r_i d_i) \pmod{p_i^{m_i}}.$$

注意，$c_i + r_i d_i$ 可能会为某个整数 $\tau_i \geq 0$产生额外因子 $p_i^{\tau_i}$。于是，最大公约数中出现的 p_i 的幂为

$$\min\{s_i+\tau_i, m_i, t_i+m_i-s_i\} = \min\{s_i+\tau_i, m_i-\mu_i\}$$

于是，M 中 p_i 的幂为

$$\max\{\min\{s_i+\tau_i, m_i-\mu_i\}, m_i-\mu_i\} = m_i - \mu_i.$$

综合这三种情形，表达式

$$\max\{m_i - \mu_i, \min\{s_i, t_i+m_i-s_i\}\}$$

在每种情形下都与 M 中 p_i 的幂相符，从而完成命题的证明。 □

推论 6.5。量 $\kappa(c,d,r,n)$ 关于不同素数的幂具有乘法性。

在下一节中，我们将看到，对于 S_{cochar}，两种不同的方法各自在不同方面都很有用。未来研究中一个可能颇有成果的方向，是精确 выяс明这两个公式为何相等，因为这一点并不容易看出。由于第二种方法与 GL_r 作为约化群的根结构联系得更为直接，而第一种方法则给出了更简单的公式和证明，因此研究这种联系将有助于揭示如何把较简单的公式推广到一般约化群。

7 Whittaker 空间的结构

这些关于 Λ_{fin} 结构的研究不仅为我们提供了计算 $\dim(\mathfrak{W})$ 的方法，也阐明了参数 c、d、r 和 n 如何以不同方式影响 $\mathfrak{W}$ 的结构。在本节中，我们首先介绍主定理 1 的两个部分（定理 4.7 和 6.1）的一些自然推论，并讨论它们与文献的联系。随后，我们将建立 $\dim(\mathfrak{W})$ 具有最大维数和最小维数的充要条件，以及若干其他理想维数的相应条件，以便进一步探讨这些联系。

推论 7.1。由定理 4.7，我们得到关于 $\dim(\mathfrak{W})$ 的以下自然结果：

$$\dim(\mathfrak{W}) = \begin{cases} \left(\frac{n}{\gcd(c,n)}\right)^r & \text{if } d \equiv 0 \pmod{n} \\ \left(\frac{n}{\gcd(d,n)}\right)^{r-1} \cdot \frac{n}{\gcd((r-1)d,n)} & \text{if } c \equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

证明。回顾定理 1.1，我们有 $\dim(\mathfrak{W}) = n^r/|S_{cochar}(c,d,r,n)|$。那么，如果 $d \equiv 0 \pmod{n}$，

$$\begin{aligned} S_{cochar}(c,d,r,n) &= \gcd(c-d,n)^{r-1} \gcd\left(c+(r-1)d, n, \frac{dn}{\gcd(c-d,n)}\right) \\ &= \gcd(c,n)^r. \end{aligned}$$

同样，如果 $c \equiv 0 \equiv n$，那么

$$\begin{aligned} S_{cochar}(c,d,r,n) &= \gcd(-d,n)^{r-1} \gcd\left((r-1)d, n, \frac{dn}{\gcd(-d,n)}\right) \\ &= \gcd(d,n)^{r-1} \gcd((r-1)d, n). \end{aligned}$$

□

从这个推论可以看出，参数 c 和 d 在影响 Whittaker 函数空间的结构方面扮演着截然不同的角色。在最简单的 n 重元辛覆盖 ($c=1, d=0$) 中，我们看到 $\lfloor T \rfloor = n^r$，这使 Brubaker、Bump 和 Buciumas 得以将 $\mathfrak{W}$ 同构映射到 [1] 中一个维数为 n^r 的量子模，从而解释 Brubaker、Bump、Chinta、Friedberg 和 Gunnells [2] 发现的格模型现象。本着同样的精神，第二作者在 [7] 中证明，这种联系相当自然地扩展为任意由对角矩阵导出的覆盖的同构（即 $d \equiv 0$）。然而，纳入参数 d 会带来复杂性，因为量子模（我们将在后文某一节讨论）无法反映 $\dim(\mathfrak{W})$ 中出现的因子 $\gcd\left(c+(r-1)d, n, \frac{dn}{\gcd(c-d,n)}\right)$。因此，要理解这种联系，我们还需要了解 $\mathfrak{W}$ 的结构。

推论 7.2。当且仅当 $c \equiv d \equiv 0$（模 n）时，我们有 $\dim(\mathfrak{W}) = 1$（即，大小最小）。

证明。反向由推论 7.1 得出。现在假设 $S_{cochar} = n^r$。由于定理 4.7 中每个 r 因子都是 n 的因子，因此必有 $\mathsf{d}_1 = \gcd(c-d, n) = n$，于是

$$S_{cochar} = n^{r-1} \gcd(c-(r+1)d, n, c, d).$$

因此还必有 $\gcd(n, c, d) = n$，这要求 $c, d \equiv n$（模 n）。 □

推论 7.3。当且仅当 $c-d$ 且 $c+(r-1)d$ 与 n 互素时，我们有 $\dim(\mathfrak{W}) = n^r$（即，大小最大）。

证明。只需证明 $S_{cochar} = 1$ 当且仅当 $\mathsf{d}_1 = \mathsf{d}_2 = 1$。利用定理 6.1 最容易看出反向：若 $\mathsf{d}_1 = \mathsf{d}_2 = 1$，则

$$S_{cochar} = \frac{1}{n} \gcd(r, n) \cdot \operatorname{lcm}\left(\frac{n}{\gcd(r,n)}, 1\right) = 1.$$

对于正向推导，我们使用定理 4.7。此处，$S_{cochar} = 1$ 意味着 $\mathsf{d}_1^{r-1} = 1$（因此也意味着 $\mathsf{d}_1 = 1$），并且 $\gcd\left(\mathsf{d}_2, \frac{dn}{\mathsf{d}_1}\right) = 1$。由于 $\mathsf{d}_1 = 1$，我们于是有 $\gcd(\mathsf{d}_2, dn) = 1$，这说明 d_2 必须与 n 互素。但 $\mathsf{d}_2 = \gcd(c+(r-1)d, n)$，因此 $\mathsf{d}_2 = 1$。 □

我们稍后将看到，最大化和最小化 $\mathfrak{W}$ 都会产生非常优美的量子联系。

另一个值得探讨的问题是，第 3 节中发展的对角数现象何时恰好与维数相等：也就是说，何时 $|\Lambda_{fin}| = \mathsf{d}_1^{r-1}\mathsf{d}_2$？这种情况有一个相当直接的例子。

推论 7.4. 若 n 与 r 互素，则 $\dim(\mathfrak{W}) = n^r / \left(\mathsf{d}_1^{r-1}\mathsf{d}_2\right)$。

证明。假设 $\gcd(r, n) = 1$，并参见定理 6.1。于是，

$$S_{cochar} = \frac{\mathsf{d}_1^{r-1}\mathsf{d}_2}{n} \cdot \operatorname{lcm}\left(n, \gcd\left(c+(r-1)d, n, \frac{dn}{\mathsf{d}_1}\right)\right) = \mathsf{d}_1^{r-1}\mathsf{d}_2$$

因为上述最大公约数是 n 的一个因子。 □

然而，一般条件要复杂一些。

命题 7.5。假设 $n = p_1^{m_1} \cdots p_j^{m_j}$，并且对于每个 p_i，c 都有 $c - d \equiv c_i p_i^{s_i}$（模 $p_i^{m_i}$），$d \equiv d_i p_i^{t_i}$（模 $p_i^{m_i}$）以及 $r \equiv r_i p_i^{\mu_i}$（模 $p_i^{m_i}$），其中 $n^r / \left(\mathsf{d}_1^{r-1}\mathsf{d}_2\right)$ 、d_i 与 均互素。则 $\dim(\mathfrak{W}) = \mathsf{d}$，当且仅当以下三个条件之一对每个 均成立：

- $s_i < t_i + \mu_i$ 以及 $2s_i \le t_i + m_i$，
- $s_i > t_i + \mu_i$ 以及 $s_i \le m_i - \mu_i$，或
- $s_i = t_i + m_i$ 和 $2s_i + \tau_i \le t_i + m_i$，其中 τ_i 是 $c_i + r_i d_i$ 中 p_i 的幂的个数 .

证明。利用定理 4.7， $S_{cochar} = \mathsf{d}_1^{r-1}\mathsf{d}_2$ 当且仅当 $\gcd(\mathsf{d}_2, \frac{dn}{\mathscr{J}_1}) = \mathsf{d}_2$。也就是说，恰好当 d_2整除 $\frac{dn}{\mathscr{J}_1}$时成立。由于左边整除 n，只需验证对于 n的每个素因子 p_i，d_2中 p_i的幂整除 $\frac{dn}{\mathscr{J}_1}$中对应的幂。任取 p_i，由命题 6.2 的证明可知，右边 p_i的幂为 $t_i+m_i-s_i$。同样， $c-d+rd$中出现的 p_i的幂为 $\min\{s_i, t_i+\mu_i\}+\tau_i\cdot\delta_{s_i=t_i+\mu_i}$，其中 τ_i 是 $c_i + r_i d_i$中出现的 p_i 的幂。因此，只需准确确定何时

$$\min\{s_i, t_i + \mu_i\} + \tau_i \cdot \delta_{s_i=t_i+\mu_i} \leq t_i + m_i - s_i. \tag{9}$$

为此，我们按照命题 6.2 证明中采用的相同情形进行划分，依据的是 p_i 在 d_2 中出现的幂次。首先，假设 $s_i < t_i + \mu_i$。于是我们得到第一个条件，因为 (9) 当且仅当以下条件成立时为真：

$$s_i \leq t_i + m_i - s_i.$$

接着，假设 $s_i > t_i + \mu_i$。那么 (9) 当且仅当以下条件成立时为真：

$$\mu_i \leq m_i - s_i$$

满足第二个条件。最后，假设 $s_i = t_i + \mu_i$。那么 (9) 等价于第三个条件 on

$$2s_i + \tau_i \leq t_i + m_i.$$ □

使用相同的方法，我们还可以描述所有满足 $\dim(\mathfrak{W}) = (n/\mathsf{d}_1)^r$ 的情形。正如我们稍后将看到的，与 $\mathfrak{W}$ 相关联的量子模的维数为 $(n/\mathsf{d}_1)^r$，因此这是映射为同构的必要条件。

命题 7.6. 假设 $n = p_1^{m_1}\cdots p_j^{m_j}$，且对于每个 p_i，都有 $c - d \equiv c_i p_i^{s_i}$(模 $p_i^{m_i}$)、$d \equiv d_i p_i^{t_i}$(模 $p_i^{m_i}$) 和 $r \equiv r_i p_i^{\mu_i}$(模 $p_i^{m_i}$)，其中 c_i、d_i 和 r_i 均与 p_i 互素。那么，$\dim(\mathfrak{W}) = (n/\mathsf{d}_1)^r$ 当且仅当对于每个 i，都有 $2s_i \leq m_i + t_i$，并且满足以下条件中至少一项：

- $s_i < t_i + \mu_i$,
- $s_i = t_i + \mu_i$ 和 $2s_i = t_i + m_i$，或者
- $s_i = t_i + \mu_i$ 和 $c + (r-1)d$ 不含 p_i 的其他幂。

证明。利用定理 4.7，$\dim(\mathfrak{W}) = (n/\mathsf{d}_1)^r$ 当且仅当 $\gcd(\mathsf{d}_2, \frac{dn}{\mathscr{J}_1}) = \mathsf{d}_1$。利用命题 6.2 的证明中所建立的方法，注意到两边都是 n 的因子，因此只需验证 n 的素因数分解中出现的每个素数 p_i 的幂次相同。

设 $n = p_1^{m_1}\cdots p_j^{m_j}$，并假设 $c - d \equiv c_i p_i^{s_i}$(mod $p_i^{m_i}$) 且 $d \equiv d_i p_i^{t_i}$(mod $p_i^{m_i}$)，其中 c_i 和 d_i 与 p_i 互素。此外，注意 $r \equiv r_i p_i^{\mu_i}$(mod $p_i^{m_i}$)，其中 r_i 也与 p_i 互素。那么，d_1 中出现的 p_i 的幂次为 s_i。回想命题 6.2 的证明， $\frac{dn}{\mathscr{J}_1}$ 中出现的 p_i 的幂次为 $t_i + m_i - s_i$，而 $c - d + rd$ 中出现的 p_i 的幂次为 $\min\{s_i, t_i + \mu_i\} + \tau_i \cdot \delta_{s_i=t_i+\mu_i}$，其中 $c_i + r_i d_i$ 中出现的 p_i 的幂次为 τ_i。因此，$\gcd(\mathsf{d}_2, \frac{dn}{\mathscr{J}_1}) = \mathsf{d}_1$ 当且仅当

$$\min\{\min\{s_i, t_i + \mu_i\} + \tau_i \cdot \delta_{s_i=t_i+\mu_i}, t_i + m_i - s_i\} = s_i. \tag{10}$$

与命题 6.2 的证明一样，我们分三种情形讨论。若 $s_i < t_i + \mu_i$，则由 (10) 得到

$$\min\{s_i, t_i + m_i - s_i\} = s_i,$$

这恰好在 $t_i + m_i - s_i \geq s_i$ 时成立，满足第一个条件。

若 $s_i > t_i + \mu_i$，则会产生矛盾，因为 (10) 中的最小值已经小于 s_i，反之亦然。

最后，若 $s_i = t_i + \mu_i$，则 (10) 为

$$\min\{s_i + \tau_i, t_i + m_i - s_i\} = s_i,$$

这恰好在 $2s_i = t_i + m_i$ 或 $\tau_i = 0$ 和 $s_i \leq t_i + m_i - s_i$ 时成立，分别满足第二和第三个条件。

□

本节中我们已经看到，定理 4.7 和定理 6.1 的两种不同表述在许多方面都很有用。虽然用于推导定理 6.1 的方法为推广到 $GL_r(F)$ 之外提供了一条更自然的途径，但未来值得研究的是，是否存在一种类似于定理 4.7 中所用方法、适用于其他约化群的途径。特别是，弄清定理 4.7 和定理 6.1 在 $GL_r(F)$ 情形下的关系，将为进一步拓展这种联系指明方向。

8 量子联系

最后，我们汇集前几节的结果，探究惠特克函数空间如何与量子群模相关联，并在此过程中介绍必要的量子定义。

设 $U_q(c,d,n)$ 为仿射量子群 $U_q(\mathfrak{gl}(n/\mathsf{d}_1))$，其中 q 是非阿基米德局部域 F 的剩余域的基数。本文的结果不需要在此给出精确定义，因此有关其构造的细节，请读者参阅 Chari 和 Pressley [6] ；我们这里只指出 $U_q(c,d,n)$ 的几个有趣性质。首先，尽管名称如此， $U_q(c,d,n)$ 并不是一个群，而是一个代数，具体来说，是一个拟三角 Hopf 代数。也就是说，它既是代数又是余代数，因此除了乘法和单位映射之外，还带有余乘法、余单位，以及一个联系代数结构与余代数结构的对跖映射。此外，这个量子群拥有一类非常优良的模，我们可以对其进行具体建模。

定义。对于 $z \in \mathbb{C}$，令 $V_+(z)$ 为 $U_q(c,d,n)$ 的求值模，或称求值表示。同样，本文不需要这一表示的完整结构；但参照 Kojima [12] 这一便于查阅的资料，可知 $V_+(z)$ 的维数为 n/d_1，其基可由 $\mathbb{Z}/(n/\mathsf{d}_1)\mathbb{Z}$ 的元素参数化。

此外， $U_q(c,d,n)$ 带有一个称为万能 R-矩阵的可逆元素 $R \in U_q(c,d,n) \otimes U_q(c,d,n)$，它作用于 $U_q(c,d,n)$-模的张量积上。选定一对具体的模及其基后， R 便成为一个实实在在的矩阵。

正是这个 R-矩阵促成了惠特克函数与量子群之间的联系： R-矩阵是杨–巴克斯特方程的自然解源；杨–巴克斯特方程是统计力学中的函数关系，除了其他领域，也出现在格模型理论中。在 [2], Brubaker、Bump、Chinta、Friedberg 和 Gunnells 构造了一种名为 Metaplectic Ice 的冰型格点模型，用以计算覆盖中最简单情形（$c=1, d=0$，因此 $\mathsf{d}_1=\mathsf{d}_2=1$）下的元辛 Whittaker 函数。然而，直到 Brubaker、Bump 和 Buciumas 在 [1] 中确认该模型的杨–巴克斯特方程是 $U_q(\mathfrak{gl}(n))$ 的 R-矩阵经 Drinfeld 扭曲 $\widehat{\ }$ 后所得，模型的杨–巴克斯特方程才为人所知。借助格模型这一桥梁，他们将这一覆盖上的惠特克函数空间同构地映射到张量积 $V_+(z_1) \otimes \cdots \otimes V_+(z_r)$ 中，其中 $z_i \in \mathbb{C}$ 是主系列表示的佐竹参数，该主系列表示构成了惠特克函数空间 $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{\mathfrak{z}}$ 的基础。在此同构下， R-矩阵对 $V_+(z_1) \otimes \cdots \otimes V_+(z_r)$ 各分量的作用，与交织算子对主系列表示、进而对惠特克函数空间的作用完全吻合。

值得注意的是，这一联系可扩展到 $GL_r(F)$ 的任意元辛覆盖。在 [7], 中，第二作者为任意覆盖群构造了一般格模型，并利用它在惠特克函数的空间与量子群 $U_q(c,d,n) = U_q(\mathfrak{gl}(n/\mathsf{d}_1))$ 的量子群模之间构造了一个映射。然而，正如我们从 $\dim(\mathfrak{W})$ 的公式以及第7节中的结构理论已经看到的那样，改变参数 c 和 d 会导致一个复杂得多的函数空间。这些复杂性也延伸到了该映射，因为量子空间的变化方式与 $\mathfrak{W}$ 不同。尽管如此，一般情形下由格模型规定的映射仍然是一个同态，并且它将右侧 R矩阵的作用与左侧交织算子的作用完全对应起来。

考虑量子群 U 的量子群求值模的张量积 $V_+(z_1) \otimes \cdots \otimes V_+(z_r)$。作为一个向量空间，我们有

$$\dim\Big(V_+(z_1) \otimes \cdots \otimes V_+(z_r)\Big) = \left(\frac{n}{\mathsf{d}_1}\right)^r.$$

请注意，与 eit 不同 与主定理 1 中 $\dim(\mathfrak{W})$ 的公式类似，该公式不受 d_2 的影响。

~现在我们来精确地说明这种联系。根据定理 1.1，从集合 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ 中选取陪集 T/H 的代表元。再根据定理 2.2，利用这些代表元构造 $\mathfrak{W}$ 的一组基。

定理 8.1（Frechette [7], 定理 1.1）。设 $\rho=(r-1, ..., 2, 1, 0)$。对于 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^r$，映射

$$\begin{aligned}\theta_{\boldsymbol{z}}:\mathfrak{W}^{\boldsymbol{z}} &\to V_+(z_1)\otimes\cdots\otimes V_+(z_r)\\ \boldsymbol{\nu} &\mapsto \quad \rho-\boldsymbol{\nu} \pmod{n/\ell_1},\end{aligned}$$

其中模数在每个分量上分别取值，是一个同态，并且与作用于 $\mathfrak{W}$ 上的交织算子以及量子张量积上的 R矩阵相兼容。

从最理想的覆盖推广到一般覆盖时，遇到的一个困难是：格模型为 $\mathfrak{W}$ 指定了一组基，使得该映射成为同态，但证明本身并不需要格模型；格模型只是 Whittaker 函数空间与量子群模型之间一个可移除的桥梁。然而，没有格模型，就无法为 $\mathfrak{W}$选定一组规范的基，因此~我们要问：对于 T/H中每个陪集的代表元，无论如何选择，该映射何时才是良定义的?

利用第7节中建立的 $\mathfrak{W}$ 的结构，我们可以更精确地研究这个映射，并得到以下定理，它重述了主定理 2 的第一部分。

~定理 8.2。对于元辛覆盖 $G_{c,\ d,\ r,\ n}$，定理~8.1 中的映射 $\theta_{\boldsymbol{z}}$：$\mathfrak{W}\to V_+(z_1)\otimes\cdots\otimes V_+(z_r)$ 定义良好，且与 T/H 的陪集代表元的选择无关，当且仅当

$$\gcd\left(\ell_2, \frac{dn}{\ell_1}\right)=\gcd(c,d,n).$$

证明。利用定理 6.1 中得到的刻画，$\theta_{\boldsymbol{z}}$ 定义良好，当且仅当 Λ_{fin} 中的所有元素在模中都映射到同一个元素。根据命题 4.4 的描述，写作 $\boldsymbol{x}=x_1\cdot\mathbf{1}_r+\frac{n}{\ell_1}(0, v_2, v_3, ..., v_r)$ 和 $\boldsymbol{y}=y_1\cdot\mathbf{1}_r+\frac{n}{\ell_1}(0, v_2', v_3', ..., v_r')$，其中对于所有 i，$x_1, y_1, v_i, v_i'\in\mathbb{Z}$。因此，

$$\theta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x})-\theta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y})=(y_1-x_1)\cdot\mathbf{1}_r \pmod{n/\ell_1}.$$

由于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\Lambda_{fin}$，我们也有 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\Lambda_{fin}$，因此定义余特征方程进一步给出了 y_1-x_1可能取值的信息。利用第一个余特征方程，存在 $k\in\mathbb{Z}$使得

$$(c+(r-1)d)\cdot(y_1-x_1)\equiv\frac{dn}{\ell_1}\cdot k \pmod{n}.$$

遍历所有 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}\in\Lambda_{fin}$时，该方程右侧的可能取值恰好是 $\gcd\left(n, \frac{dn}{\ell_1}\right)\cdot$ 的整数倍。于是，两边都必须是 $\operatorname{lcm}\left(c+(r-1)d, \gcd\left(n, \frac{dn}{\ell_1}\right)\right)$ 的倍数。利用 $\operatorname{lcm}(A,B)=(A\cdot B)/\gcd(A,B)$ 这一事实，y_1-x_1 的可能取值就是以下各数的整数倍：

$$\frac{\gcd\left(n, \frac{dn}{\ell_1}\right)}{\gcd\left(c+(r-1)d, n, \frac{dn}{\ell_1}\right)}=\frac{\frac{n}{\ell_1}\gcd(\ell_1, d)}{\gcd\left(\ell_2, \frac{dn}{\ell_1}\right)}=\frac{n}{\ell_1}\cdot\frac{\gcd(c,d,n)}{\gcd\left(\ell_2, \frac{dn}{\ell_1}\right)}. \tag{11}$$

回到该映射，$\theta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{x})-\theta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{y})=0$ 当且仅当 $y_1-x_1\equiv 0$(模 n/d_1)。由于 $\gcd(c,d,n)$ 同时整除 d_2 和 $\frac{dn}{\ell_1}$，因此，当且仅当 $\gcd(c,d,n)=\gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\ell_1}\right)$ 时，式（11）是 $\frac{n}{\ell_1}$ 的倍数。因此，对于 $\widetilde{T}/H$ 的任意陪集代表元选择，该映射 $\theta_{\boldsymbol{z}}$ 良定义，当且仅当 $\gcd(c,d,n)=\gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\ell_1}\right)$。

□

推论 8.3。当 $\mathfrak{W}$ 为最大大小或最小大小时，$\theta_{\boldsymbol{z}}$ 是一个同构。

证明。若 $\mathfrak{W}$ 的大小为最大值 n^r，则由推论 7.3 可得 $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2 = 1$。因此，$\gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}\right) = 1$，这迫使 $\gcd(c,d,n) = 1$，所以 $\theta_{\mathbf{z}}$ 定义良好。在这种情况下，T/H 由所有 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$ 参数化，并且由于 $n/\mathrm{d}_1 = n$，量子模也如此。考察定理 8.1 中对 $\theta_{\mathbf{z}}$ 的描述，我们看到根据定义，$\theta_{\mathbf{z}}$ 是一个同构，它翻转 $\mathfrak{W}$ 并平移 ρ。

若 $\mathfrak{W}$ 的最小大小为 1，则推论 7.2 表明 $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2 = n$。因此，$\gcd(c,d,n) = n$，这迫使 $\gcd\left(\mathrm{d}_2, \frac{dn}{\mathrm{d}_1}\right) = n$，并使 $\theta_{\mathbf{z}}$ 定义良好。此处，$\widetilde{T}/H$ 是单个元素，它映射到 $(\mathbb{Z}/(n/\mathrm{d}_1)\mathbb{Z})^r$ 中的单个元素 0，因为 $n/\mathrm{d}_1 = 1$。因此，该映射显然是同构。 □

请注意，推论 8.3 的第一种情形包含最理想的覆盖 $c = 1, d = 0$，该覆盖最初由 [2]和 [1], 处理，并解释了为什么此情形下 $\mathfrak{W}$ 上的量子映射是同构。

利用对 Λ_{fin} 的描述，我们计划今后按照推论 8.3 的风格，对更一般情形下 $\mathfrak{W}$ 的结构给出精确描述，从而能够刻画 $\theta_{\mathbf{z}}$ 的确切行为。特别是，我们希望通过寻找一个充分条件，补充命题 7.6，以涵盖 $\theta_{\mathbf{z}}$ 为同构的所有情形。随后，将我们针对 $\mathfrak{W}$ 的研究方法和结果从 $GL_r(F)$ 推广到任意约化群，将使我们进一步了解与其他类型约化群相关的量子对象应当是什么样子。尽管其他类型也存在一些可解格点模型，但它们尚未与量子群的模或其他量子代数对象建立联系，因此我们认为，研究其他类型下 $\mathfrak{W}$ 的维数和描述，将有助于揭示更广泛量子联系的可能候选对象。

参考文献

[1] Ben Brubaker、Valentin Buciumas、Daniel Bump 和 Nathan Gray，《亚代数韦伊群冰模型的一个杨–巴克斯特方程》，《通信、数论与物理》13（2019），第1期，101–148。MR 3951106[2]Ben Brubaker、Daniel Bump、Gautam Chinta、Solomon Friedberg 和 Paul E. Gunnells，《亚代数韦伊群冰模型》，《多重狄利克雷级数、L 函数与自守形式》，数学进展，第300卷，Birkh¨auser/Springer，纽约，2012年，第65–92页。MR 2952572[3] ———，《亚代数韦伊群冰模型》，《多重狄利克雷级数、L 函数与自守形式》，数学进展，第300卷，Birkh¨auser/Springer，纽约，2012年，第65–92页。MR 2952572[4] Ben Brubaker、Daniel Bump 和 Solomon Friedberg，《魏尔群多重狄利克雷级数：A 型组合理论》，《数学年刊研究》，第175卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2011年。MR 2791904[5] Jean-Luc Brylinski 和 Pierre Deligne，《约化群的中心扩张》，由 K_2, 扩张。《高等科学研究所数学出版物》（2001），第94期，5–85。MR 1896177 ´Vyjayanthi Chari 和 Andrew Pressley，《量子群指南》，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。MR 1300632[6] Claire Frechette，《一般亚代数韦伊群冰模型的杨–巴克斯特方程》，arxiv:2009.13669，2020年。[7] Wee Teck Gan 和 Fan Gao，《Brylinski-Deligne 扩张的朗兰兹-魏斯曼纲领》，第398号，2018年，《覆盖群的 L 群与朗兰兹纲领》，第187–275页。MR 3802419[8] Wee Teck Gan、Fan Gao 和 Martin H. Weissman，《覆盖群的 L 群与朗兰兹纲领：历史导论》，第398号，2018年，《覆盖群的 L 群与朗兰兹纲领》，第1–31页。MR 3802417[9] I. M. Gel'fand 和 D. A. Kajdan，《群 GL([10] ,n) 的表示，其中 K 是一个局部域》，《李群及其表示》（博尧伊·亚诺什数学学会暑期学校论文集，布达佩斯，1971），Halsted，纽约，1975年，第95–118页。MR 0404534 K D. A. Kazhdan 和 S. J. Patterson，《亚伽罗瓦形式》，高等科学研究所数学出版物（1984），第59期，35–142。MR 743816

ˇ[12] Takeo Kojima, 《带边界的超对称性 $U_q(sl(M+1|N+1))$ 链转移矩阵的对角化》, 《数学物理杂志》54（2013）, 第4期, 043507, 40页。MR 3088809[13] Hideya Matsumoto, 《关于分裂半单群的算术子群》, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）2（1969）, 1–62。MR 0240214 ´Peter J. McNamara, 《元辛 Whittaker 函数与晶体基》, 《杜克数学杂志》156（2011）, 第1期, 1–31。MR 2746386 ´《局部域上亚代数韦伊群的主系列表示》, 《多重狄利克雷级数、L 函数与自守形式》, 数学进展, 第300卷, Birkh ´auser/Springer, 纽约, 2012年, 第299–327页。MR 2963537´J[14] urgen Neukirch, 《代数数论》, 数学科学基础丛书, 第322卷, 施普林格出版社, 柏林, 1999年; 译自1992年德文原版, Norbert Schappacher 作注, 并有 G. Harder 撰写的序。MR 1697859[15] ———, I. I. Pjateckij-ˇSapiro, 《欧拉子群》, 《李群及其表示》（博尧伊·亚诺什数学学会暑期学校论文集, 布达佩斯, 1971）, Halsted, 纽约, 1975年, 第597–620页。MR 0406935¨J. A. Shalika, 《GL[16] 的重数一性定理》, 《数学年刊》（第2辑）100（1974）, 171–193。MR 348047¨Andr [e Weil, 《论某些酉算子群》, 《数学学报》111（1964）, 143–211。MR 165033