arXiv:2301.02266v1 [math.LO] 5 Jan 2023

二元关系的蕴涵代数和蕴含半群*

Andrew Lewis-Smith[1][0000−0001−9020−4055] 和 Jaˇs ˇSemrl[2][0000−0001−7440−8867]

[1] 伦敦国王学院 andrew.lewis-smith@kcl.ac.uk
http://eecs.qmul.ac.uk/profiles/lewis-smithandrewstephen.html[2] 伦敦大学学院（UCL） j.semrl@cs.ucl.ac.uk http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/jsemrl/

摘要。已知可表示蕴涵代数可以用有限多个方程公理化（因此，其表示问题和有限表示问题均可判定）。我们证明，这一结论在一元关系（以及二元关系）的情形下同样成立，并给出一个 Stone 风格的表示定理。随后我们证明，蕴含半群的（有限）表示判定问题是不可判定的，这与蕴涵代数的情形形成鲜明对比。

关键词：蕴涵代数 · 蕴含半群 · 作为二元关系的表示

1 引言

由 Abbott [1] 命名、并由 Ra- siowa [12], Diego [2], 及其学生研究的蕴涵代数簇，构成了经典命题逻辑蕴涵片段的代数语义。这类代数是仅保留一个运算（$\rightarrow$）和一个常数（$\top$ 或 1）的布尔代数。关系代数簇，也称为带有额外对合运算符（$x^\smile$，即“ x的逆”，其中 x 被视为关系）的剩余布尔代数，构成了关系演算的代数语义。根据 Korselt 的一项经典结果（ [10], 中将此结果归于他），关系代数簇对应于经典一阶逻辑的三变量片段，使得人们能够通过无量词等式理论研究数理逻辑，尤其是集合论 [14], 。该理论中的证明由对恒等式的简单操作构成，类似于抽象代数中的证明。这与标准数理逻辑（或集合论）的证明形成对比，后者可能涉及复杂的量词交替。与此同时，蕴涵代数（具有一个运算，即经典蕴涵）为经典逻辑中命题间的蕴涵关系提供了代数分析。尽管研究动机各异，关系代数与蕴涵代数的研究仍因其独特的优雅而值得推荐。

* 本研究由工程与物理科学研究委员会（EP/S021566/1）资助

本文考察关系代数签名的一个片段，我们称之为蕴含半群。它是在 Abbott 的蕴涵代数上添加一个半群运算（;），即关系合成而得到的。当该结构的载体集是二元关系的集合时，我们得到由（S，$\rightarrow$，;）构成的关系代数片段，也就是签名限于蕴涵和复合的关系代数。研究这一签名有充分的理由。首先，它尚未得到充分探索：事实上，代数逻辑中考察的大多数代数结构都是剩余格、群，或至少是幺半群——这一点从关系代数的一种标准定义中便可看出：它是剩余格 [9] ——其中蕴涵运算和幺半群运算通过剩余相互作用。包含蕴涵运算和半群运算的代数结构并未进入次结构逻辑研究的主流，因为相关代数缺少即使在剩余幺半群情形下也存在的互相可定义性。

对于代数逻辑（尤其是关系代数）而言，代数是否具有有限表示是一个重要问题。人们通常会问，某个感兴趣的逻辑系统是否不仅是一致的，而且还具有有限模型，也就是说，能否在有限时间内或借助有限资源考察这些模型。本文证明，蕴含半群的（有限）表示问题是不可判定的。我们的结果有两个值得关注之处。首先，蕴含半群在某种意义上代表了蕴含次结构逻辑的一种极限情形；据我们所知，人们尚未提出这些逻辑的有限表示可判定性问题，更遑论从本文所探讨的角度加以研究。这表明，未来可以沿着所谓次结构关系代数的方向展开研究，探讨将关系代数中的布尔基底弱化为其他剩余代数所产生的影响。Peter Jipsen 和 Nikolaos Galatos 已在这一领域开展研究 [5] [4]，而 [13]，则从另一个角度探讨了这一问题：其中所考虑的签名包含两个剩余运算和一个半群运算，实际上是著名的兰贝克演算的一个模型（因此，该代数与无穷多个次结构逻辑的基系统建立了联系）。其次，我们的结果有助于推进一项研究计划，以更好地理解在受限签名下进行运算对关系代数所产生的影响。我们尤其希望弄清楚，当转向关系代数标准表述的子签名时，可表示性会受到怎样的影响 [6]。

2 预备知识

本节介绍二元关系的代数结构与运算符的定义。首先定义 Abbott 的蕴涵代数。

定义1. 蕴涵代数[3] $\mathfrak{A}$ 是一个二元组（$A, \rightarrow$），其中 A 是一个集合，$\rightarrow$是定义在 A 上的二元运算，满足以下性质：

[3] 也称为塔斯基代数。

(i)（$a \to b$）$\to a = a$（收缩）(ii)（$a \to b$）$\to b =$（$b \to a$）$\to a$（拟交换性）(iii) $a \to$（$b \to c$）$= b \to$（$a \to c$）（交换）

显然，由于蕴涵代数类可由方程定义，因此它构成一个簇。我们将此类称为 IA。Abbott 在 [1] 中指出了这些代数的一个巧妙性质。

命题 2（Abbott）。设 $\mathfrak{A} = (A, \to)$ 是一个蕴涵代数。我们可以隐式定义常数 1，使得 $a \to a$，且 $b \to 1 = 1$ 和 $1 \to b = b$ 对所有 $b \in A$ 均成立。

这也给出了

命题 3。对于蕴涵代数 $(A, \to)$，我们可以将偏序定义为

$$a \leq b \Leftrightarrow (a \to b) = 1$$

证明。设 $a + b = (a \to b) \to b$。根据拟交换性，它是交换的；根据收缩律，它是幂等的；由命题 2 可知 1 是其最大元；并且可以证明它是结合的（见 [1][定理 12]）。因此，$a + b = b$ 构成一个偏序。注意，若 $a + b = b$，则 $a \to b = a \to ((a \to b) \to b) = (a \to b) \to (a \to b) = 1$。若 $a \to b = 1$，则 $(a \to b) \to b = 1 \to b = b$。□

定义 4. 设 $\top \subseteq X \times X$ 是一个二元关系。定义 $\mathfrak{A}(\top) = (\wp(\top) \to)$，其中 $\to$ 表示下文定义的真布尔蕴涵

$$a \to b = (\top \setminus a) \cup b$$

可以验证，$\mathfrak{A}(\top) \in$ IA。尽管 $\top$ 通常是任意极大元关系，但这并非二元关系上的 $\to$ 运算的唯一可能解释。若要求 $\top = X \times X$，则称蕴涵算子是绝对的；否则称其为相对的。

当且仅当 $\mathfrak{A} \in$ IA 可嵌入某个 $\mathfrak{A}(\top)$（其中 $\top \subseteq X \times X$）时，我们称 $\mathfrak{A} \in$ IA 是可表示的。该嵌入（通常记作 h）称为一个表示。若 $\mathfrak{A}$ 可嵌入 $\mathfrak{A}(\top)$，且 $\top$ 是基于有限基底 X，则称 $\mathfrak{A}$ 也是有限可表示的。

蕴涵代数的另一种标准表示形式是 $\mathfrak{A} = (A, \to, 1)$。不过，对于任意 a，常数 1 都可以定义为 $a \to a$。此外，准交换公理是这样一个事实的推论：$(a \to b) \to b$ 等价于 $a + b$ 的布尔并。

命题 5. 设 $\mathfrak{A} = (A, \to) \in$ IA 可通过 h 表示。则对于任意 $a, b \in A$，有 $h((a \to b) \to b) = h(a) \cup h(b)$ 且 $h(1) = h(a \to a) = \top$。

证明。由于 $1 = a \to a$ 和 h 是一个表示，我们得到 $h(1) = h(a \to a) = h(a) \to h(a) = (\top \setminus h(a)) \cup h(a) = \top$。

由 h 是一个表示、德摩根律以及 $a \cap \top = a$，我们还可得$h((a \to b) \to b) = (h(a) \to h(b)) \to h(b) = \top \setminus ((\top \setminus h(a)) \cup b) \cup h(b) = (h(a) \cap (\top \setminus h(b))) \cup h(b) = (h(a) \cup h(b)) \cap ((\top \setminus h(b)) \cup h(b)) = (h(a) \cup h(b)) \cap \top = h(a) \cup h(b)$.□

现在我们将注意力转向：向签名中加入一个半群运算(;)后会发生什么。

定义 6. 蕴含半群 $\mathfrak{S}$ 是一个元组 $(S, \to, ;)$，其载体集为 S，且 $\to$是在 S 上的二元运算，其中

(i) $(S, \to)$ 是一个蕴涵代数 (ii) $(S, ;)$ 是一个半群 (iii) $((a \to b) \to b)$; $c = (a; c \to b; c) \to b; c$ (左拟加法性) (iv) $c; ((a \to b) \to b) = (c;\ a \to c;\ b) \to c;\ b$ (右拟加法性)

蕴含半群的类称为 ISG。与 IA 类似，我们也考察载体集为二元关系集的结构。

定义 7. 设 $\top \subseteq X \times X$ 是一个传递二元关系。定义 $\mathfrak{S}(\top) = (\wp(\top) \to, ;)$，其中 $\to$ 解释为真布尔蕴涵，; 解释为真关系合成，其定义如下

$$a; b = \{(x, z) \mid \exists y \in X : (x, y) \in a, (y, z) \in b\}$$

再次检查 $\mathfrak{S}(\top) \in$ ISG 相对简单；注意，由于 $\top$ 的传递性，它们对复合封闭。与 IA 类似，若 $\mathfrak{S} \in$ ISG 可嵌入某个传递的 $\top$ （其基集有限）上的 $\mathfrak{S}(\top)$, 则它是（有限）可表示的。

3 蕴涵代数的基本理论、斯通表示与可判定性

现在我们介绍蕴涵代数的基本理论。蕴涵代数是上一节所讨论的蕴含半群的蕴涵片段。我们首先考察更一般的正蕴涵代数，它涵盖了蕴涵代数。最后，我们将给出蕴涵代数的一个表示定理，为我们在第 4 节中的构造提供依据。 [4]

这里的公理体系主要见于 [1] 和 [12]，并作了一些勘误与修改。他们对蕴涵代数的表述相当不同：Abbott 倾向于采用等式表示，而 Rasiowa 则使用准等式定义。

定义 8（Rasiowa 2）。正蕴涵代数[5] （正 IA）是一个三元组 $(A, \to, 1)$[6],，其中集合 A 和 $\to$ 满足：

[4] 蕴涵代数的表示结果似乎早已为 Diego [2], 所知，也可能为 Abbott [1], 所知；但 Rasiowa 在 [12]中给出了完整证明。代数逻辑的不同传统中，其他一些人很可能也早已知道这一结果。[5] 也称为希尔伯特代数。[6] 采用这种公理化方式时，不能从签名中省略 1。另一种做法是用 $a \to a$ 替换 1，并添加一个额外公理，如 $a \to a = b \to b$所示。

(P1) $a \to (b \to a) = 1$(P2) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$(P3) 若 $a \to b = 1$ 且 $b \to a = 1$，则 $a = b$(P4) $a \to 1 = 1$

以下引理不加证明地陈述。证明请参见 [12]。

命题 9（Rasiowa 2(1)）。在任意正蕴涵代数中，满足以下条件：若 $a \to b = 1$ 且 $a = 1$，则 $b = 1$。此外，若 $a = 1$，则对任意 $b \in A$，都有 $b \to a = 1$。

命题 10（Rasiowa 2.2）。对于任意正蕴涵代数 $\mathfrak{A}$，对所有 a、$b \in A$，我们可以在 A 上定义偏序 $\leq$，如下：

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \to b = 1$$

并且对于偏序集（A, $\leq$）中的所有极大元 c，都有 $1 = c \to c$。

命题 11（Rasiowa 2.3）。以下结论在任意正蕴涵代数中成立：

(1) 若 $a \leq b \to c$，则 $b \leq a \to c$ (2) $a \leq (a \to b) \to b$ (3) $1 \to a = a$
(4) 若 $b \leq c$，则 $a \to b \leq a \to c$ (5) 若 $a \leq b$，则 $b \to c \leq a \to c$ (6) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$

命题 12（分配律）。在任意（正）蕴涵代数 $\mathfrak{A} = (A, \to, 1)$ 中，我们有 $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$

证明。由 (P1) 和命题 10，我们有 $b \leq a \to b$。应用命题 11(5)(6)，得到 $(a \to b) \to (a \to c) \leq b \to (a \to c) = a \to (b \to c)$。因此，$a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$ 由 (P2) 和命题 10 可得。

蕴涵代数满足分配律的证明见 [1,定理 5]。□

现在我们证明，蕴涵代数类包含于正蕴涵代数类之中。尽管 Abbott 或 Rasiowa 的著作中没有以下命题，但它隐含在关于蕴涵代数、正蕴涵代数和蕴涵代数的已发表结果中。

命题 13. 任意蕴涵代数 $(A, \to)$ 都是正蕴涵代数。

证明。(P1) 由交换公理和命题 2 得出，更具体地说$a \to (b \to a) = b \to (a \to a) = b \to 1 = 1$。(P2) 由命题 12 和命题 2 得出。对于 (P3)，由命题 3 可知蕴涵代数中的偏序具有反对称性。最后，(P4) 直接由命题 2 得出。□

命题 14. 任意满足以下条件的正蕴涵代数 $(A, \to)$

$$(a \to b) \to a = a$$

对于所有的 $a, b \in A$ 都是蕴涵代数。[7]

证明。为证明另一个方向，设 $(A, \to, 1)$ 是满足 $(a \to b) \to a = a$ 的正蕴涵代数。蕴涵代数的第一条公理 $(a \to b) \to a = a$ 已假定加入该代数，而第三条公理 $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ 可由命题 11(6) 得到。为证明第二条公理：$(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$，注意到 $a \to b \leq 1 = (b \to b) = (b \to a) \to (b \to b) = b \to ((b \to a) \to b)$，这是由命题 10 和命题 11(6) 得出的。由命题 11(1)，有 $b \leq (a \to b) \to ((b \to a) \to b)$，因此由命题 11(1) 和 (3) 可得 $(a \to b) \to b \leq ((a \to b) \to (a \to b)) \to ((b \to a) \to b) = 1 \to ((b \to a) \to b) = ((b \to a) \to b)$。通过完全类似的论证，$(a \to b) \to b \leq (b \to a) \to a$。因此 $(a \to b) \to b = (b \to a) \to a$，如所需。□

为了铺垫 Stone 型表示定理，我们定义一些必要的概念，例如蕴涵滤子的概念。

定义 15（Abbott）。一个（正）蕴涵代数 $\mathfrak{A} = (A, \to)$ 的蕴涵滤子是满足以下条件的子集 $F \subseteq A$：

(i) $1 \in F$ (ii) 若 $a \in F$ 且 $a \to b \in F$，则 $b \in F$

定义 16。若蕴涵滤子 F 满足 $F \neq A$，则称其为真蕴涵滤子。若一个真蕴涵滤子不是两个与其不同的真蕴涵滤子的交集，则称其为不可约；形式化地说：若对于任意两个真蕴涵滤子 F_1, F_2，只要 $F = F_1 \cap F_2$，就有 $F = F_1$ 或 $F = F_2$，则称 F 不可约。最后，若真蕴涵滤子 F 满足：对于所有 $a, b \in A$，若 $a + b \in F$（或等价地，$(a \to b) \to b \in F$），则 $a \in F$ 或 $b \in F$，则称其为素。

Stone 类表示定理的证明按以下步骤进行。证明过程请参见 [12]。

命题 17（Rasiowa 1.8）。[8] 若任意（正）蕴涵代数 $\mathfrak{A} = (A, \to)$ 对所有 $a, b, c \in A$ 满足以下条件之一：

(F1) $(a \to (b \to c)) \to a \to b) \to (a \to c)) = 1$

[7] 请注意，收缩恒等式无法由公理 (P1)–(P4) 证明；可使用 Mace4 找到一个反例。[8] Rasiowa 对蕴涵代数（她在其著作中讨论的最弱代数）陈述了这一结果。由于所有蕴涵代数都是正蕴涵代数，而所有正蕴涵代数都是蕴涵代数，因此我们可以将她的结果专用于当前情形。

（F2）$(a \to b) \to (a \to (b \to c)) \to (a \to c)) = 1$

那么，对于 $\mathfrak{A}$ 中的每个蕴涵滤子 F 以及每个 $a \in A$，集合 $F_a* = \{x \in A : a \to x \in F\}$ 是一个蕴涵滤子。此外，如果对于所有 a、$b \in A$：$a \to (b \to a) = 1$，那么 F_a* 是包含 F 和 a 的最小蕴涵滤子。

命题 18（Rasiowa 3.4）。如果 $(A, \to)$ 是一个（正）蕴涵代数，那么对于每个蕴涵滤子 F 以及每个元素 $a \in A$，集合 $F_a* = \{x \in A : a \to x \in F\}$ 是包含 F 和 a 的最小蕴涵滤子。

命题 19（Rasiowa 6.1）。蕴涵代数中的蕴涵滤子是素的，当且仅当它是不可约的。

引理 20（Rasiowa 1.4）。如果 F_0 是蕴涵代数 $\mathfrak{A}$ 中的一个蕴涵滤子，且对于某个 $a_0 \in \mathfrak{A}$ 有 $a_0 \notin F_0$，那么存在一个不可约蕴涵滤子 G，使得 $F_0 \subset G$ 且 $a_0 \notin G$。

由引理 20 和命题 19 可立即得到：

推论 21. 若 F 是蕴涵代数 $\mathfrak{A}$ 中的一个蕴涵滤子，且 $a \notin F$ 对某个 $a \in \mathfrak{A}$ 成立，则存在一个素蕴涵滤子 G，使得 $F \subset G$ 且 $a \notin G$。

接下来这个推论是我们证明的，因为上述引用的文献中都没有出现过它，而且表示定理需要用到它。

推论 22. 设 F 是蕴涵代数 $\mathfrak{A} = (A, \to)$ 的一个蕴涵滤子，且对某个 a，$a \to b \notin F$，$b \in A$ 成立。那么存在一个素蕴涵滤子 G：$F \subseteq G$，使得 $a \in G$ 且 $b \notin G$。

证明. 设 F_a* 是由滤子 F 和 a 生成的蕴涵滤子。假设 $a \to b \notin F$。若 $b \in F_a*$，则根据 F_a* 的定义有 $a \to b \in F$。这与我们的假设 $a \to b \notin F$ 矛盾；因此 $b \notin F_a*$，并对 F_a* 和 b 应用推论 21，可得一个素滤子 G，使得 $F_a* \subseteq G$ 且 $b \notin G$。显然，$a \in G$ 且 $F \subseteq G$。□

于是，作为推论 22 和命题 19 的直接推论，我们得到：

推论23. 设 F 是蕴涵代数 $\mathfrak{A} = (A, \to)$ 的一个蕴涵滤子，且对于某个 a、$b \in A$，有 $a \to b \notin F$。则存在一个不可约蕴涵滤子 G：$F \subseteq G$，使得 $a \in G$ 且 $b \notin G$。

最后是最重要的表示定理。Rasiowa 针对不可约蕴涵滤子 [12]，给出了这一结果；根据她的等价性结果，也可以使用素蕴涵滤子或极大蕴涵滤子来表述。

定理 24（Rasiowa 7.1）。对于任意蕴涵代数 $\mathfrak{A} = (A, \to)$，都存在一个单态射 h，从任意带有 $|X| \geq A$ 的空间 X 到 $(\wp(X) \to)$。

由此可知，每个蕴涵代数都同构于一个集合的蕴涵代数。由于本文着重讨论表示，我们从这一结论 [1,2,12] 得出一个推论：

推论 25. 对任意蕴涵代数 $\mathfrak{A}$，如果 A 是有限的，那么 $\mathfrak{A}$ 有一个有限表示。

证明. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个有限蕴涵代数。根据定理 24 $\mathfrak{A}$ 同构于代数 $\mathfrak{A}\prime$，其中 h，且 $\mathfrak{A}\prime = (\wp(X)\ \rightarrow)$，这是一个集合构成的蕴涵代数。现在，若 $|X| = A$，则 $|\wp(X)| = 2^{|A|}$，因而是有限的。这意味着 $h(\mathfrak{A})$，即 $\mathfrak{A}\prime$ 在 h 下的子代数，是有限的。因此，我们有 $h(\mathfrak{A})$ 是一个有限蕴涵代数（由 h 和 $\mathfrak{A}$ 诱导），从而 h 是 $\mathfrak{A}$ 的一个有限表示。□

现在，本文其余部分的重点围绕蕴含半群的（有限）表示判定问题展开。对于 IA，该问题定义如下：

定义 26. 蕴涵代数的（有限）表示判定问题是一种判定问题，其输入为一个载体集（有限）的蕴涵代数。当且仅当该代数是（有限）可表示的时，它才是肯定实例。

本节最后，我们指出：

推论 27. IA 是有限公理化的。

推论 28. IA 的（有限）表示问题是可判定的。

4 蕴含半群的不可判定性结果

本节将基于 [8,11,7] 中的结果，证明若干关于蕴含半群的判定问题是不可判定的。我们首先定义表示判定问题和有限表示判定问题。

定义 29. 蕴含半群的（有限）表示判定问题，是一个以载体集有限的蕴含半群为输入的判定问题。当且仅当该半群（有限）可表示时，它才是一个肯定实例。

正如我们在第 2 节中提到的，一个结构是否可表示，也取决于我们如何解释常数 1。这里我们证明，在这两种情况下，（有限）判定问题都是不可判定的。

4.1 绝对蕴涵的表示问题

我们首先考察绝对蕴涵的情形，即要求对于某个（有限）基集 X，$\top = X \times X$。

定义 30. 蕴含幺半群 $\mathfrak{M} = (M, 1', \to, ;)$ 是一个代数，其中 $(M, \to, ;)$ 是蕴含半群，且 $1'$ 是运算 ; 的幺半群单位元。对于某个传递且自反的 $\top \subseteq X \times X$，我们定义 $\mathfrak{M}(\top) = (\wp(\top)\ 1', \to, ;)$，其中 $\to$ 和 ; 分别是真关系蕴含与复合，而 $1'$ 是 X 的真关系恒等关系，定义为 $1' = \{(x, x) \mid x \in X\}$。

在 $[8, \text{第 } 4]$ 节中，给出了由平方消去偏群构造布尔幺半群的方法 $\mathfrak{G}$。其蕴含幺半群约化记作 $\mathfrak{M}(\mathfrak{G}) = (M, 1', \to, ;)$。根据 $[8, \text{命题 } 5.1, \text{例 } 6.2]$ $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ 可表示（在有限基集上），当且仅当 $\mathfrak{G}$ 可嵌入某个（有限）群。

由于群嵌入问题和有限群嵌入问题对于有限结构都是不可判定的 [3]，由此可知，（有限）表示判定问题是不可判定的。因此，如果我们证明 $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ 的 ISG 约化可（有限）表示，当且仅当 $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ 可表示，就证明了（有限）可表示性是不可判定的。正向蕴含显然成立。但我们必须考察这样一种情况：放宽要求，不再将 $1'$ 表示为真正的关系恒等元，并证明即使将 $1'$ 视为真正的关系恒等元，这仍足以使该结构保持（有限）可表示。

假设我们有一个从 $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ 到 $\mathfrak{S}(\top)$ 的嵌入 h，也就是说，这是一个保持 $\to$、; 的单射，但不一定保持 $1'$。

引理 31. 若 $(x, y) \in h(1')$，则 $(y, x) \in h(1')$。

证明. 假设 $(y, x) \notin h(1')$。这意味着 $(y, x) \in h(1' \to 0) = h(\overline{1'})$。由 $(x, y) \in h(1')$ 与 $(y, x) \in h(\overline{1'})$ 的复合可得 $(x, x) \in h(\overline{1'})$；再将其与 $(x, y) \in h(1')$ 复合，可得 $(x, y) \in h(\overline{1'})$。由于 $(x, y) \in h(1')$ 且 $(x, y) \in h(\overline{1'}) = h(1' \to 0)$，我们还可得 $(x, y) \in h(0)$。经过一系列复合，我们还可得 $(y, x) \in h(0)$；并且由于 $0 \leq 1'$，我们也可得 $(y, x) \in h(1')$，从而得出矛盾。□

引理 32. $h(1')$ 是一个等价关系。

证明。由引理 31 可知，$h(1')$ 具有对称性。此外，由于所有 $(x, x) \in h(\top)$，必定存在一个 z 作为 $1'$ 的见证；$\top = \top$。因此，$(x, z) \in h(1')$ 且 $(z, x) \in h(1')$，将它们复合可得 $(x, x) \in h(1')$，所以 $h(1')$ 具有自反性。最后，由于 $1' = 1'$；$1'$，我们还可知 $h(1')$ 是传递的。□

引理 33. 对所有 $x, x', y, y' \in X$，若 (x', x)、$(y, y') \in h(1')$，则对于所有$a \in \mathfrak{M}(\mathfrak{G})$，有 $(x, y) \in h(a) \Leftrightarrow (x', y') \in h(a)$。

证明。若 $(x, y) \in h(a)$，则由 (x', x)、$(y, y') \in h(1')$ 以及 $1'; a; 1' = a$ 的复合可得 $(x, y') \in h(a)$。由引理 31，我们还可得 (x, x')、$(y', y) \in h(1')$，因此同理，若 $(x, y') \in h(a)$，则 $(x, y) \in h(a)$。□

定理 34. 当 $\to$ 被解释为绝对蕴涵时，ISG 的（有限）表示判定问题是不可判定的。

证明. 由引理 32， $h(1')$ 是一个等价关系，因此我们可以定义 $h' : \mathfrak{M}(\mathfrak{G}) \to X/h(1')$，其中

$$h'(a) = \{([x]_{h(1')}, [y]_{h(1')}) \mid (x, y) \in h(a)\}$$

并证明 h' 确实是从 $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ 到 $\mathfrak{M}(X \times X)$ 的嵌入。

根据引理 33，我们知道，如果 $(x, y) \in h(a)$，那么对于任意 $x' \in [x]_{h(1')}$ $y' \in [y]_{h(1')}$，都有 $(x', y') \in h(a)$。

任取 $a \leq b$。于是存在 $(x, y) \in h(a) \setminus h(b)$。由此可得 $([x]_{h(1')}\ [y]_{h(1')}) \in h'(a)$；如果 $([x]_{h(1')}\ [y]_{h(1')}) \in h'(b)$ 成立，那么这意味着存在某个 $(x', y') \in h(b)$，使得 $(x, x') \in h(1')$ 且 $(y', y) \in h(1')$，这也意味着 $(x, y) \in h(b)$。因此， h' 是单射。

每个复合都由 h 中该复合见证的等价类见证；并且，如果 $(x, y) \in h(a)$ 且 $(y', z) \in h(b)$，其中 $y' \in [y]_{h(1')}$，我们也有 $(y, y') \in h(1')$，因此得到复合 $(x, z) \in h(a; 1'; b) = h(a; b)$。因此， h' 正确地表示了 ;。最后， $1'$ 也被正确地表示为一对等价类：它们属于 $h'(1')$ 当且仅当它们是同一个等价类。

由此我们证明了，若存在从 $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ 到 $\mathfrak{S}(X \times X)$ 的嵌入，那么也存在从 $\mathfrak{M}(G)$ 到 $\mathfrak{M}(X' \times X')$ 的嵌入，其中 $X' = X/h(1')$。此外，若 X 是有限的，则 X' 也是有限的。显然，若 $\mathfrak{M}(G)$ 嵌入 $\mathfrak{M}(X \times X)$，那么通过同一个嵌入，它也嵌入 $\mathfrak{S}(X \times X)$。结合 [8] 中给出的结果可知，ISG 的（有限）表示判定问题是不可判定的。□

4.2 相对蕴含的表示问题

现在，我们证明相对蕴含也有同样的结果。

定义 35. 布尔半群是一个元组 $\mathfrak{B} = (B, 0, 1, -, +, ;)$，它是一种代数结构，其中 S 是载体集

(i) $(B, 0, 1, -, +)$ 是布尔代数 (ii) $(B, ;)$ 是半群 (iii) ; 对 $+$ 是可加的 (iv) $0; a = a; 0 = 0$

与 类似，我们将布尔半群类记作 BSG，并称一个布尔半群是可表示的，当且仅当对于某个传递的 $\top \subseteq X \times X$，它嵌入到 $\mathfrak{B}(\top) = (\wp(X \times X)\ \emptyset, \top, -, +, ;)$ 中，其中 $-a$ 被解释为适当的布尔否定 $\top \setminus a$， $+$ 被解释为适当的布尔并 $\cup$，而 ; 被解释为适当的关系合成。

布尔半群的（有限）表示问题的定义方式与蕴含半群的相同。[7, 定理11. 2] 表明，布尔半群的表示问题是不可判定的； [11, 定理 2.5]表明，布尔半群的有限表示问题也是不可判定的。由此可知，蕴含半群的（有限）表示问题同样不可判定。

请注意，上述结果要求签名中定义一个运算 $\cdot$，但与 IA 中的 $\top$ 类似，$\cdot$ 在 BSG 中可由项定义为 $a \cdot b = -(-a + -b)$。

引理 36。设 $\mathfrak{S} = (S, \to, ;)$ 是一个蕴含半群，其中包含某个元素 0，使得对于所有 $a \in S$，我们有 $0 \leq a$，且 $0; a = a; 0 = 0$。若 $\mathfrak{S}$ 可通过某个表示 h 表示，则存在 h' 的一个表示，使得 $\mathfrak{S}$ 中 $h'(0) = \emptyset$。若 h 定义在有限基集上，则 h'也如此。

证明。令 $h(\mathfrak{S})$ 为由 h 针对某个 $\top \subseteq X \times X$定义的真结构。由于 h 是一个表示，对于每一对 $a \not\leq b \in S$，都存在一个判别对 $(\iota, o) \in \top$，使得 $(\iota, o) \in h(a) \setminus h(b)$。

定义 $X^{\iota,\ o}$ 为

$$X^{\iota,o} = \left\{ x \in X \mid \Big(x = \iota \vee (\iota, x) \in \top \Big) \wedge \Big(y = o \vee (y, o) \in \top \Big) \right\}$$

$\top^{\iota,\ o}$ 为 $\top \cap (X^{\iota,\ o} \times X^{\iota,\ o})$，以及一个映射 $h^{\iota,\ o} \colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}(\top^{\iota,\ o})$，其中 $h^{\iota,\ o}(a) = h(a) \cap \top^{\iota,\ o}$。

首先注意，$h^{\iota,o}(0) = \emptyset$。假设存在一对 $(x, y) \in h^{\iota,o}(0)$。若 $x = \iota$，则有 $(\iota, y) \in h^{\iota,o}(0)$；否则，$(\iota, x) \in h(1) = \top$，因此 $(\iota, y) \in h(0)$，因为 $1;\ 0 = 0$ 且 h 保持复合。类似地，若 $y = o$，则得到 $(\iota, o) \in h(0)$；否则，将 $(\iota, y) \in h(0)$ 与 $(y, z) \in h(1)$ 复合，得到 $(\iota, o) \in h(0)$。由于$b \geq 0$，这意味着 $(\iota, o) \in h(b)$，这与 (ι, o) 是 $a \not\leq b$ 的判别对这一事实矛盾。

现在来检验 $h^{\iota,o}$ 是否保持复合。假设 $(x, y) \in h^{\iota,o}(a;\ b)$。这意味着存在 $z \in X$，使得 $(x, z) \in h(a)$ 且 $(y, z) \in h(b)$。若 $x = \iota$，则显然有 $(x, \iota) \in h(1) = \top$。否则，将 $(\iota, x) \in h(1)$ 与 $(x, y) \in h(a)$ 复合，得到 $(\iota, y) \in h(1) = \top$，因为 $1;\ a \leq 1$。类似地，$(y, o) \in \top$，因此 $y \in X^{\iota,o}$。由此得到 $(x, z) \in h^{\iota,o}(a)$，$(y, z) \in h^{\iota,o}(b)$，并且我们已证明$h^{\iota,o}(a; b) \subseteq h^{\iota,o}(a);\ h^{\iota,o}(b)$。$h^{\iota,o}(a; b) \supseteq h^{\iota,o}(a);\ h^{\iota,o}(b)$ 这一事实可由 (x, y)、$(y, z) \in \top^{\iota,o}$ 推出；此时 $x, z \in X^{\iota,o}$，且我们有 $(x, z) \in \top^{\iota,o}$。因此 $h^{\iota,o}$ 保持复合。

我们有 $h^{\iota,\ o}(a) \neq h^{\iota,\ o}(b)$ 作为 $(\iota, o) \in \top^{\iota,\ o}$。运算 $\to$ 被$h^{\iota,\ o}$ 保持，因为对于所有 $(x, y) \in \top^{\iota,\ o}$，都有 $(x, y) \in h(a) \iff (x, y) \in h^{\iota,\ o}(a)$。最后，$|X^{\iota,\ o}| \leq |X|$。因此我们得出结论，$h^{\{\iota, o\}}$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个同态，它能区分判别对 $a \not\leq b$。

现在，对每个 $a \not\leq b$，我们选取一个 $\delta(a, b) = (\iota, o)$，使得 $(\iota, o) \in \top$ 是 $a \not\leq b$ 的一个判别对，并令 $\dot\cup$ 表示不交并。一个映射

$$h' : S \to \wp\left(\dot\bigcup\nolimits_{a \not\leq b \in S} \top^{\delta(a,b)} \right)$$
$$h'(c) = \dot\bigcup\nolimits_{a \not\leq b \in S} h^{\delta(a,b)}(c)$$

仍能正确表示；$\to$正确地区分所有对 $a \not\leq b$（即是单射），因此构成一个表示。此外，$h'(0) = \emptyset$ 且其基集的大小有上界 $|S|^2|X|$。□

定理 37。蕴涵半群的（有限）表示判定问题是不可判定的。

证明。我们通过证明 $\mathfrak{B} \in \mathsf{BSG}$ 可表示，当且仅当其 $\langle \to, ; \rangle$-约化 $\mathfrak{S}$ 可表示，来说明这一点。从左到右的蕴含显然成立，因为 $a \to b \in S$ 可通过项定义为 $(-a) + b \in B$。对于从右到左的蕴含，$+, 1$ 可在 $\langle \to, ; \rangle$ 中通过项定义（见命题 5）。根据引理 36，$\mathfrak{B}$ 的 $\langle \to, ; \rangle$-约化可表示，当且仅当它有一个满足 $h(0) = \emptyset$ 的表示。注意，在该表示中，$a \to 0$（对应于布尔半群中的 $-a + 0 = -a$）表示为 $\top \setminus a \cup \emptyset = \top \setminus a$。

由于布尔半群的（有限）表示判定问题是不可判定的，我们得出蕴含半群的相同问题也不可判定。□

5 问题

本节概述一些尚未解决的问题。由第 4 节的结果可知，可表示蕴含半群类不是有限公理化的，也不具有有限表示性质，即该类中并非每个有限可表示的结构都可有限表示。不过，下面还提出了另一个值得关注的判定问题。

问题 38. 由可表示蕴含半群类生成的等式理论中的成员关系是否可判定?

读者可以看到，如果将底元 0 加入签名，那么根据 [7] 中所述布尔半群等式理论的不可判定性，即可推出其不可判定性。这是因为所有项的否定 $-t$ 都可以改写为 $t \to 0$，而所有并 $t + t'$ 都可以改写为 $(t \to t') \to t'$，其中 t、t' 是项。

对于不含底元的可表示蕴含半群类，这个问题仍未解决。证明不可判定性的一种可能方法是使用下面定义的判别项。

定义 39. 判别项 $d(a, b, c)$ 是一个由代数 a, b, c 的元素定义的项，使得对于所有可表示代数 $d(a, b, c)$，$= c$ 若 $a = b$，则 a，否则如此。

尽管判别项的存在并不能保证等式理论成员资格判定问题不可判定，但这本身仍是一个有趣的开放问题。

问题 40. 能否用蕴含半群的语言定义一个判别项?

众所周知，可表示关系代数的子约化构成拟簇。因此，蕴含半群这一类可以用拟方程来刻画。然而，关于可表示蕴含半群这一类所生成的等式理论，仍有一些未解决的问题，列举如下。

问题 41. 可表示蕴含半群这一类是一个簇吗?

问题 42. 由可表示蕴含半群类生成的等式理论是否可以有限公理化?

我们继续考察二元关系上 $\rightarrow$ 运算的其他解释。正如引言部分所提到的，一个有趣的例子是下文定义的弱化关系。

定义 43. 设 $\mathbf{P} = (X, \leq)$ 是一个偏序集。 $R \subseteq X \times X$ 是弱化关系，当且仅当 $\leq; R; \leq \subseteq R$。

在 [4]，中所述的弱化关系代数背景下， $\rightarrow$ 运算可以用一阶项表示为

$$R \rightarrow S = \{(x, y) \mid \forall x', y' : ((x' \leq x \wedge y \leq y' \wedge (x', y') \in R) \Rightarrow (x', y') \in S)\}$$

其中 R, S 是偏序集 $\mathbf{P} = (X, \leq)$ 上的弱化关系。

对 $\rightarrow$ 运算的这种解释产生了可表示弱化蕴含半群这一类；以下性质仍有待解决。

问题 44. 对于可表示弱化蕴涵半群这一类，（有限）表示判定问题是否可判定? 该类是否有限公理化，并且是否具有有限表示性质?

问题 45. 可表示弱化蕴涵半群这一类是否构成一个（判别子）簇? 由该类生成的等式理论是否有限公理化/可判定?

最后，我们指出，可以验证，本文提出的所有结果都可以推广到对偶运算 $\leftarrow$ ：只需为蕴涵代数这一类给出对偶公理，并将否定定义为 $0 \leftarrow a$。

参考文献

1. Abott, J.C.：蕴涵代数。《罗马尼亚社会主义共和国数学科学学会数学通报》11 (59)(1)，3–23 (1967 43679502)，http://www.jstor.org/stable/ 。Diego, A.：关于希尔伯特代数。数学逻辑笔记，南方国立大学数学研究所（1965），https://books.google.co.uk/books?id= AfcSAQAAMAAJ 3. Evans, T.：可嵌入性与字问题。《伦敦数学学会杂志》1(1)，76–80 (1953) 4. Galatos, N., Jipsen, P.：广义双代数与弱化关系代数的结构。《普适代数》81(3)，1–35 (2020) 5. Galatos, N., Jipsen, P.：弱化关系代数与 fl²-代数。载于：关系与代数方法在计算机科学中的国际会议。第 117–133 页。施普林格 (2020)

6. Hirsch, R., Hodkinson, I.：《通过博弈研究关系代数》。爱思唯尔 (2002) 7. Hirsch, R., Hodkinson, I., Jackson, M.：二元关系代数的不可判定性。载于：《科学统一性：致敬 Hajnal Andr´eka 和 Istv´an N´emeti》，第 267–287 页。施普林格 (2021) 8. Hirsch, R., Jackson, M.：作为二元关系的可表示性的不可判定性。《符号逻辑杂志》77(4)，1211–1244 (2012) 9. J´onsson, B., Tsinakis, C.：作为剩余布尔代数的关系代数。《普适代数》30，469–478 (1993) 10. L¨owenheim, L.：关于相对演算中的可能性。《数学年刊》76，447–470 (1915) 11. Neuzerling, M.：格序半群和序补半群可表示性的不可判定性。《普适代数》76(4)，431–443 (2016) 12. Rasiowa, H.：《非经典逻辑的代数方法》。阿姆斯特丹，荷兰：华沙，PWN 波兰科学出版社 (1974) 13. Rogozin, D.：关系代数某些约化的有限表示性质 (2020)。https://doi.org/10.48550/ARXIV.2007.13079，https://arxiv.org/abs/2007 13079 14 . . Tarski, A., Givant, S.R.：《无变量的集合论形式化》。美国数学学会 (1987)