arXiv:2301.02271v1 [cond-mat.stat-mech] 5 Jan 2023

量子振子正则系综对随机度规的响应

Z. Haba 理论物理研究所，弗罗茨瓦夫大学，
50-204 弗罗茨瓦夫，Plac Maxa Borna 9，波兰，电子邮件：zbigniew.haba@uwr.edu.pl

2023年1月9日

摘要

我们计算了量子振子正则系综对奇异随机度规的磁化率。若度规的协方差为 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-4\alpha}$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$，则配分函数按温度幂次展开时会出现非整数指标。

1 引言

众所周知，不规则区域中的动力学可能是混沌的；反过来，混沌运动也可能具有分形吸引子 [1][2]。分形区域中的扩散会体现出其分形维数，而该维数通常不是自然数[3][4][5][6]。不规则区域中粒子的正则系综的热力学取决于该区域的谱维数 [7]。在这种情况下，热力学性质（例如临界指数）可能是非整数维数的函数。长期以来，分形几何一直与量子引力联系在一起 [5][8][9]。量子引力可以表述为随机几何。人们认为，量子引力会因度规在短距离处呈现“泡沫状”行为而形成分形几何 [10]。随机图形的这类不规则形状正是分形几何的基础 [6]。有人提出，普朗克尺度上的不规则度规可能会改变量子场在短距离处的行为 [5][10][11]。

本文研究随机奇异度规（或随机位置依赖质量）中的量子振子。我们定义了相对于度规的磁化率：当度规是正则随机场时，它可展开为逆温度 β 的幂级数。我们证明，若随机度规是奇异的，则磁化率可展开为 β 的非整数次幂。众所周知，振子系综可作为场论的一种近似。

振子的量子统计力学将类似于有限温度下的量子场论。

我们考虑一个围绕自由理论（简谐振子）进行微扰的哈密顿量 H_γ

$$H_\gamma = H + \gamma H_1. \tag{1}$$

温度为 $\beta^{-1} = k_B T$（其中 k_B 为玻尔兹曼常数）时，可观测量 $\mathcal{A}$ 的统计期望值定义为

$$< \mathcal{A} >_\beta = Z_\gamma^{-1} Tr\Big(\exp(-\beta H_\gamma)\mathcal{A}\Big), \tag{2}$$

其中配分函数为

$$Z_\gamma = Tr\Big(\exp(-\beta H_\gamma)\Big). \tag{3}$$

对于较小的 γ，我们可以展开为（保留 γ 的一阶项）

$$Z_\gamma = Z_0 - \gamma \int_0^\beta ds Tr\Big(\exp(-\beta H) \exp(sH) H_1 \exp(-sH)\Big).$$

根据配分函数，我们可以定义其他热力学函数，例如内能 U

$$U_\gamma = -\partial_\beta \ln Z_\gamma. \tag{4}$$

对 H_1 的磁化率可定义为

$$\chi_\beta = \partial_\gamma (Z_\gamma)_{|\gamma=0}. \tag{5}$$

我们可以使用展开式

$$\exp(sH) H_1 \exp(-sH) = H_1 + s[H, H_1] + ...$$

在式（5）中可以看出，对于较小的 β

$$\chi_\beta = \partial_\gamma (Z_\gamma)_{|\gamma=0} = -\beta Tr\Big(\exp(-\beta H) H_1\Big). \tag{6}$$

对于频率为 ω 的简谐振子（减去基态能量），H_0 有

$$\ln Z_0 = -\ln(1 - \exp(-\beta\omega)) \tag{7}$$

and

$$U = -\partial_\beta \ln Z_0 = \omega(\exp(\beta\omega) - 1)^{-1} \simeq \beta^{-1} \tag{8}$$

对于较小的 β（高温）。

如果这些振子是腔体中电磁场的模式，那么$\omega = |\mathbf{k}|c$，其中 c 是光速，$\mathbf{k}$ 是腔体中的波矢。在这种情况下，式（7）—（8）中对模式求和。修正后的热力学 [7] 源于分形几何腔体中修正后的模式分布。

我们考虑满足以下条件的哈密顿量 H： 其相似变换

$$\hat{H} = \Omega^{-1} H \Omega \tag{9}$$

给出一个扩散过程的生成元（$\exp(-\beta \hat{H})$ 是一个马尔可夫半群）。

根据我们的假设

$$(\exp(-\beta \hat{H})\psi)(\xi) = E[\psi(\xi_\beta(\xi))], \tag{10}$$

其中， ξ 是振子的坐标， $\xi_\beta(\xi)$ 是一个从 ξ 出发的马尔可夫过程，期望值 $E[...]$ 取在该过程的路径上。在我们的模型中，我们考虑 $\xi = (\mathbf{x}\ X) \in R^{n+d}$，并假设 $H_1 = V(P)$（动量的函数）。于是，根据公式（6）

$$\begin{aligned} &Tr\Big(\exp(-\beta \hat{H})V(P)\Big) \\ &= (2\pi)^{-d} E\Big[\delta(\mathbf{x}_\beta(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \exp(iP(X_\beta - Y)) < Y|V(P)|X > \Big] d\mathbf{x} dX dY dP, \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$< Y|V(P)|X >= (2\pi)^{-d} \int dK \exp(iK(Y - X))V(K). \tag{12}$$

因此

$$Tr\Big(\exp(-\beta \hat{H})V(P)\Big) = (2\pi)^{-d} \int E\Big[\delta(\mathbf{x}_\beta(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \exp(iP(X_\beta - X))\Big] V(P) d\mathbf{x} dX dP. \tag{13}$$

2 振子的统计力学

让我们考虑 R^{n+d} 坐标 ξ^A 以及如下形式的扩散算子（对重复指标求和）

$$\hat{H} = -\tfrac{\sigma^2}{2} g^{AB} \partial_A \partial_B + \omega_A \xi^A \partial_A + \tfrac{\omega_p}{2} g^{CD} \partial_C g_{AB} \xi^A \xi^B \partial_D. \tag{14}$$

借助

$$\Omega = \exp\Big(-\frac{\omega_A}{2\sigma} g_{AB} \xi^A \xi^B\Big)$$

我们得到式（9）的哈密顿量 H

$$\begin{aligned} &H = -\tfrac{\sigma^2}{2} g^{AB} \partial_A \partial_B + \tfrac{\omega_A^2}{2} g_{AB} \xi^A \xi^B \\ &+\sigma \tfrac{\omega_C}{8} g^{CD} \partial_C g_{RM} \xi^M \xi^R \partial_D g_{AB} \xi^A \xi^B - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_A \omega_A. \end{aligned} \tag{15}$$

我们将坐标 $\xi = (\mathbf{x}\ X)$ 分为两类：$\mathbf{x}$ 和 X，其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 且 $X \in R^d$。为了简化模型，我们假设只有 X 坐标与随机度规（或随机质量）耦合。因此，$(g^{AB}) = (1, g^{\mu\nu})$，并且在 $g^{\mu\nu}(\mathbf{x})$ 中，对 X 的依赖可以忽略不计（$\mathbf{x}$ 的坐标 x_j 带有拉丁指标 $j = 1, ..., n$，而 X 的坐标带有希腊指标 $\mu = n+1, .., n+d$）。我们可以设想一种只依赖于某些坐标的随机质量分布（从而产生度规）。为简化模型，我们假设 $\omega_j = \nu$ 和 $\omega_\mu = \omega$。如果 ω_A 是腔体中无质量场的模，且腔体是边长为 L_A 的长方体，那么 $\omega_A = c\frac{2\pi n_A}{L_A}$，其中 n_A 是整数。我们可以安排模型，使得 ω_j 很小，从而式（14）中含有 $\omega_j = \nu$ 的非线性项可以忽略。于是，$\hat{H}$ 的形式为

$$\hat{H} = -\tfrac{\sigma^2}{2}\nabla^2_{\mathbf{x}} + \nu\mathbf{x}\nabla_{\mathbf{x}} + \tfrac{\omega}{2}\nabla_{\mathbf{x}} g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \nabla_{\mathbf{x}} - \tfrac{\sigma^2}{2} g^{\mu\nu}(\mathbf{x})\partial_\mu\partial_\nu + \omega X^\mu \partial_\mu, \quad (16)$$

其中

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu}.$$

With

$$\Omega = \exp\Big(-\frac{1}{2}\nu\sigma^{-1}\mathbf{x}^2 - \frac{1}{2}\omega\sigma^{-1} g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \Big) \quad (17)$$

相似变换 (9) 给出

$$\begin{array}{l} H = -\tfrac{\sigma^2}{2}\nabla^2_{\mathbf{x}} + \tfrac{1}{2}\nu^2\mathbf{x}^2 + \sigma\tfrac{\omega}{8}\nabla_{\mathbf{x}} g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \nabla_{\mathbf{x}} g_{\sigma\rho} X^\sigma X^\rho \\ -\tfrac{\sigma^2}{2} g^{\mu\nu}(\mathbf{x})\partial_\mu\partial_\nu + \tfrac{1}{2}\omega^2 g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu - \tfrac{d}{2}\omega - \tfrac{n}{2}\nu. \end{array} \quad (18)$$

$\exp(-t\hat{H})$ 可根据方程 (10) 由随机方程 [12] 的解表示

$$d\mathbf{x}_t = -\nu\mathbf{x}_t dt - \frac{\omega}{2}\nabla_{\mathbf{x}} g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu + \sigma d\mathbf{b}_t, \quad (19)$$

$$dX^\mu_t = -\omega X^\mu_t dt + \sigma e^\mu_a(\mathbf{x}_t) dB^a_t, \quad (20)$$

其中，我们用标架场（四标架）e 表示度规 g

$$g^{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_a. \quad (21)$$

$(\mathbf{b}_t, B_t)$ 是 R^{n+d} 上的布朗运动，即均值为零、协方差为

$$E[b^j_t b^l_s] = min(t, s)\delta^{jl}$$

（B_t也类似）。为了对度规取期望值，我们需要方程（20）的显式解。对于 $\mathbf{x}_t$，我们只需要对 t 中的行为作一些估计。不过，为了使论证简单起见，我们忽略方程（19）中的非线性项（我们假设 $e^\mu_a = \delta^\mu_a + \kappa\epsilon^\mu_a$，其中 κ 是一个

小参数，那么 $\nabla g \simeq \kappa$）。忽略非线性项后，方程（19）在初始条件 $\mathbf{x}$ 下的解为

$$\mathbf{x}_t = \exp(-\nu t)\mathbf{x} + \sigma \int_0^t \exp(-\nu(t-s))d\mathbf{b}_s. \tag{22}$$

式（20）的解为

$$X_t^\mu = \exp(-\omega t)X^\mu + \sigma \int_0^t \exp(-\omega(t-s))e_a^\mu(\mathbf{x}_s)dB_s^a. \tag{23}$$

$\exp(-\beta \hat{} H)$ 的核 K 可通过傅里叶变换表示

$$\begin{aligned} &K_\beta(\mathbf{x}, X; \mathbf{y}, Y) = (2\pi)^{-d} \int dPE\Big[\delta(\mathbf{x}_\beta(\mathbf{x}) - \mathbf{y}) \exp\Big(iP(\exp(-\beta\omega)X \\ &+\sigma \textstyle\int_0^\beta \exp(-\omega(\beta-s))e_a(\mathbf{x}_s)dB^a - Y)\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{24}$$

3 随机度规

我们假设 e_a^μ 是均值为 δ_a^μ 的高斯变量

$$e_a^\mu = \delta_a^\mu + \kappa\epsilon_a^\mu \tag{25}$$

其中

$$< \epsilon_a^\mu(\mathbf{x})\epsilon_c^\nu(\mathbf{x}') >= \delta_{ac}^{\mu\nu} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{26}$$

我们计算式（13）和（24）中的高斯积分（为简便起见，取 $\delta_{ac}^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}\delta_{ac}$）

$$\begin{aligned} &< \exp(iP(\exp(-\omega\beta)X + \sigma \textstyle\int_0^\beta \exp(-\omega(\beta-s))e_a(\mathbf{x}_s)dB^a)) > \\ &= \exp\Big(iP\exp(-\omega\beta)X - \tfrac{1}{2} < (PQ_\beta)^2 > + i\sigma P_\mu \textstyle\int_0^\beta \exp(-\omega(\beta-s))dB_s^\mu\Big)) \\ &= \exp\Big(- \tfrac{1}{2}\kappa^2 P_\mu P_\nu \textstyle\int_0^\beta \int_0^\beta \exp(-\omega(\beta-s))\exp(-\omega(\beta-s'))G(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s'})dB_s^\mu dB_{s'}^\nu \\ &+iP\exp(-\omega\beta)X + i\sigma P_\mu \textstyle\int_0^\beta \exp(-\omega(\beta-s))dB_s^\mu\Big). \end{aligned} \tag{27}$$

在公式（27）中，我们使用了 ϵ的高斯期望值公式

$$< \exp(iP_\mu Q_\beta^\mu) >= \exp(-\frac{1}{2} < (P_\mu Q_\beta^\mu)^2 >) \tag{28}$$

with

$$P_\mu Q_t^\mu = P_\mu \sigma \int_0^t \exp(-\omega(t-s))\epsilon_a^\mu(\mathbf{x}_s)dB_s^a \equiv F_t. \tag{29}$$

利用伊藤微积分，这个表达式可以用另一种方式表示 [12][14]

$$\int dF_t^2 = 2\int F_t dF_t + \int dF_t dF_t, \tag{30}$$

其中有（此处 $P^2 = P_\mu P^\mu$）

$$dF_t dF_t = d\kappa^2 G(\mathbf{0}) P^2 dt. \tag{31}$$

接下来，我们考虑一个奇异协方差 G。为此，我们首先将 ϵ_a^μ 视为正则化随机场。然后，移除正则化。为了使 $H\psi$ 成为定义良好的随机场，我们需要对 H 进行正规序，具体为

$$: g^{\mu\nu} :=: e_a^\mu(\mathbf{x}) e_a^\nu(\mathbf{x}) := e_a^\mu(\mathbf{x}) e_a^\nu(\mathbf{x}) - \kappa^2 < \epsilon_a^\mu(\mathbf{x}) \epsilon_a^\nu(\mathbf{x}) > .$$

方程（27）指数中的正规序消去了方程（30）右侧的第二项$d\kappa^2 G(0) P^2 t$，而其中的第一项（即 $\int_0^\beta F_s dF_s$）则变成了一个时间序积分（这类表达式的重整化在量子电动力学中也有出现 [15][16]）。由于方程（27）中的正规序

$$< (PQ_t)^2 > \to < (PQ_t)^2 > - tP^2 \kappa G(0) d \tag{32}$$

并且由于减项（32），我们可以定义 exp(−tH) 对测试函数 ψ （在动量空间中快速衰减）的作用，使得 exp(−Ht)ψ 成为定义良好的随机场。对平移不变随机场 e_a^μ(x) 取平均并进行重整化（32）后，我们可以用傅里叶变换将 $<$ exp(−β : H :)$\psi >$ 写成

$$\begin{aligned}
&(< \exp(-\beta : H :) > \psi)(\mathbf{x}, X) = \\
&E\Big[\delta(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{y}) \exp\Big(- \kappa^2 P_\mu P_\nu \int_0^\beta \exp(-\omega(\beta - s)) dB_s^\mu \int_0^s dB_{s'}^\nu \exp(-\omega(\beta - s')) G(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s'}) \\
&+ i\sigma P_\mu \int_0^\beta \exp(-\omega(\beta - s)) dB_s^\mu + iP \exp(-\omega\beta) X)\Big)\Big] \psi(\mathbf{y}, P) dP d\mathbf{y}.
\end{aligned} \tag{33}$$

在 $\kappa = 0$ 处，我们有

$$\begin{aligned}
&Z_0 = Tr(\exp(-\beta H_0)) = \int d\mathbf{x} dX < \exp(-\beta H_0) > (\mathbf{x}, X; \mathbf{x}, X) = \\
&(2\pi)^{-d} \int dP d\mathbf{x} dX E\Big[\delta(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}) \exp(iP((\exp(-\omega\beta) - 1)X + i\sigma P \int_0^\beta \exp(-\omega(\beta - s)) dB_s))\Big] \\
&= \int K_\beta^{(0)}(\mathbf{x}, X; \mathbf{x}, X) d\mathbf{x} dX,
\end{aligned} \tag{34}$$

其中， $H^{(0)}$ 是非耦合谐振子的哈密顿量， $K^{\,0}$ 是众所周知的简谐振子的迈勒核。因此，在 $\kappa = 0$ 处我们得到公式（7）。我们关注由与随机度规相互作用产生的作为微扰的 κ项。在公式（33）中，我们应用了关于B_s 和 $\mathbf{b}_s$ 的恒等式（即双方具有相同的概率分布）

$$B_s = \sqrt{\lambda} B_{\frac{s}{\lambda}}. \tag{35}$$

重新缩放后

$$\mathbf{x}_{s'} = \exp(-\nu s') \mathbf{x} + \sqrt{\lambda} \int_0^{\frac{s'}{\lambda}} \exp\Big(- \lambda\nu(\frac{s'}{\lambda} - \tau)\Big) d\mathbf{b}_\tau. \tag{36}$$

很容易看出，对于式（22）中的小 t（在式（36）中令 $\lambda = s'$）

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x} + \sqrt{t}\mathbf{q}_t, \tag{37}$$

其中 $\mathbf{q}_t \simeq \mathbf{a} + \mathbf{c}\sqrt{t} + ...$，且 $|\mathbf{a}| > 0$，当 t 较小时成立。对于具有随机度规 g（见式（26））的式（19）的解，我们只需假设这种标度行为。在式（33）中，我们按照式（36）（其中 $\lambda = s$）对布朗运动 $B_{s'}$ 和 $\mathbf{x}_{s'}$ 进行重新标度，随后对 B_s 和 $\mathbf{x}_s$ 使用 $\lambda = \beta$ 进行重新标度。经过这样的变量变换后，公式（33）中依赖于 κ 的部分的积分为

$$\exp\Big(-\tfrac{1}{2}\kappa^2\beta P_\mu P_\nu \int_0^1 \exp(-\beta\omega(1-s))dB_s^\mu \int_0^s \exp(-\beta\omega(1-s'))G(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s'})dB_{s'}^\nu\Big), \tag{38}$$

其中 $0 \le s' \le s \le 1$，$\mathbf{x}_s = \mathbf{x} + \sqrt{\beta}\mathbf{q}_s$，以及 $\mathbf{x}_{s'} = \mathbf{x} + \sqrt{\beta}\tilde{\mathbf{q}}_{s'}$，其中 $\mathbf{q}_s \neq 0$ 且 $\tilde{\mathbf{q}}_s \neq 0$，当 $\beta = 0$ 时成立。我们考察协方差（对 $\alpha > 0$ 的上界将在本节末讨论）

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-2\alpha}. \tag{39}$$

于是，由式（38）可知，当 β 较小时

$$G(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s'}) = \beta^{-\alpha} g(\beta, s, s'), \tag{40}$$

其中 $s' \le s \in [0,1]$ 且 $g \simeq A + C\beta$（其中 $A > 0$），当 β 较小时成立。因此，式（33）具有如下形式

$$\begin{aligned} &E\Big[\exp\Big(iP((\exp(-\omega\beta) - 1)X - \int_0^\beta \exp(-\omega(\beta - s))dB)\Big) \\ &\times \exp\Big(-\kappa^2\beta^{1-\alpha}P_\mu P_\nu f^{\mu\nu}(\beta)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{41}$$

其中，$|f^{\mu\nu}(\beta)P_\mu P_\nu|$ 由一个常数从下方界定。

现在我们可以估计度规场（26）中配分函数的行为（注意：$g^{\mu\nu}: -<: g^{\mu\nu}: >$ 具有协方差 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-4\alpha}$，如果 ϵ_a^μ 具有协方差（39））。我们有

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} + 2\kappa\epsilon_\nu^\mu + \kappa^2\epsilon_a^\mu\epsilon_a^\nu. \tag{42}$$

哈密顿量（16）的形式为 $H = H_0 + \kappa\mathcal{H}_1 + \kappa^2\mathcal{H}_2$。由式（27）可见，对配分函数 Z 的贡献为 κ^2量级。我们考虑 $H_\gamma = H + \gamma V(P)$，则在近似（6）下

$$\partial_\gamma Z_\gamma = Tr(\exp(-\beta H)V(P)). \tag{43}$$

配分函数在式 (41) 中的反常（分数）依赖关系 $\beta^{1-\alpha}$ 是与奇异度规场耦合的特征。对于较小的 β（高温），我们可以计算磁化率 (6) 对度规的 κ^2 阶导数

$$\partial_{\kappa^2}\partial_\gamma Z_{|\kappa=\gamma=0} = \beta^{1-\alpha} E\Big[P_\mu P_\nu f^{\mu\nu}(\beta)\delta(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}) \\ \exp(iP(\exp(-\omega\beta)-1)X + i\sigma P\int_0^\beta \exp(-\omega(\beta-s))dB_s))\Big]\beta V(P)d\mathbf{x}dXdP \tag{44}$$

and

$$\partial^2_{\kappa^2}\partial_\gamma Z_{|\kappa=\gamma=0} = \beta^{2-2\alpha} E\Big[\Big(P_\mu P_\nu f^{\mu\nu}(\beta)\Big)^2\delta(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}) \\ \exp(iP(\exp(-\omega\beta)-1)X + i\sigma P\int_0^\beta \exp(-\omega(\beta-s))dB_s))\Big]\beta V(P)d\mathbf{x}dXdP. \tag{45}$$

当 κ 和 β 较小时，配分函数可展开为关于 β 的非整数次幂

$$\partial_\gamma Z_{\kappa^2} = \partial_\gamma Z_0 + \kappa^2\chi_1\beta\beta^{1-\alpha} + \kappa^4\chi_2\beta\beta^{2-2\alpha} + ... \tag{46}$$

其中 χ_1 和 χ_2 为某些常数。

我们仍需估计式（43）—（46）中的积分。积分（43）可用式（13）中的核表示。式（13）中的期望值经过重整化（32）后，涉及式（33）中的时间序随机积分，而该积分不是正定的。因此，若要使式（43）中的期望值有限，V（P）必须比任意 R 的 exp($-RP^2$) 衰减得更快（对于较大的 P，式（44）—（46）中的导数对 V（P）的衰减提出的要求较宽松）。随机积分在 $f_{\mu\nu}P^\mu P^\nu$ 的定义中仍存在收敛性问题。这个随机积分的形式为

$$P_\mu P_\nu \int_0^\beta dB_s^\mu \int_0^s dB_{s'}^\nu G(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s'}). \tag{47}$$

利用公式 [13]，可以用普通积分估计式（47）中的随机积分（关于多重随机积分（33）和（47）的更精确估计，可参见文献 [17]）

$$E\Big[\Big(\int F dB_s\Big)^{2k}\Big] \le C_k E\Big[\int F^{2k} ds\Big] \tag{48}$$

其中包含某些常数 C_k。式(48)右端涉及 Ornstein–Uhlenbeck过程 (22) [18]，其转移函数可用 Mehler 公式表示。在式(48)中进行计算时，对于较小的 β，我们可以将 Ornstein–Uhlenbeck过程 $\mathbf{x}_s$ 近似为布朗运动，其转移函数为$p(s, \mathbf{x}) = (2\pi s)^{-\frac{n}{2}}\exp(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2s})$。然后，式(47)中的积分可估算为（将式(48)使用两次，并取 $k=1$）

$$\int ds ds' \int d\mathbf{x} p(s-s', \mathbf{x})|\mathbf{x}|^{-4\alpha} < \infty \tag{49}$$

如果 $2\alpha < 1$。若 $2k\alpha > 1$，展开式 (46) 必须在 k 阶截断，因为估计式 (48) 右端为无穷大。

4 展望

一些近似计算 [8][9][11] 表明，量子引力场在短距离处的奇点可能不同于正则奇点；后者在 n 维空间中具有 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-n+2}$ 的形式（其中 $n=4$对应于式 (39) 中的 $\alpha=\frac{1}{2}$ ）。文献 [19][20] 基于宇宙微波背景测量讨论了物理时空的分形维数，并得出观测时空维数偏离物理四维的若干限制。量子引力的效应可能在短距离处或高能量下（在宇宙学中，高能量与高温相关）被观测到。式 (44)–(46) 中配分函数展开式的非整数指标，可能表明量子引力与天体物理学中的某些极端过程相关（这些过程或许可以通过引力波干涉仪在量子层面进行检验 [21]）。根据式 (14) 和 (23)，随机质量分布模型等价于随机扩散率模型，因此在凝聚态物理学中颇受关注 [22][23]。复杂系统（例如分子或晶体）的配分函数 (46) 或其他热力学函数若表现出反常行为，可能意味着这些系统中存在随机质量或随机度规。

参考文献

[1] J.D. Farmer、E. Ott和J.A. Yorke，混沌吸引子的维数，Physica D7,153(1983年)[2]E.A. Novikov，间歇性对湍流统计特征及崩解系数尺度相似性的影响，Phys.Fluids, A2,814(1990年)[3] J.R. Banavar和J.F. Willemsen，分形上的扩散概率密度，Phys.Rev.B30,6778(1984年)[4] G.V. Dunne，分形上的热核与ζ函数，J.Phys.A45,374016(2012年)[5] S. Carlip，量子引力中的维数与维数约化，Class.Quant.Grav.34,193001(2017年)[6] B.B. Mandelbrot，《自然的分形几何》，Freeman，旧金山，1983年[7] E. Akkermans、G.V.Dunne和A. Teplyaev，分形上的光子热力学，Phys.Rev. Lett.105,230407(2010年)

[8] J. Ambjorn、J. Jurkiewicz和R.Loll，宇宙的谱维数依赖于尺度，Phys.Rev.Lett.95,171301(2005)[9] P. Horava，量子引力中宇宙在 Lifshitz 点的谱维数，Phys.Rev.Lett.102,161301(2009)[10] L.Crane和L. Smolin，时空泡沫背景上的广义相对论重整化，Nucl.Phys.B267,714(1986)[11] Z.Haba，与尺度不变引力相互作用产生的普适短距离正则行为，Phys.Lett.B528,129(2002)[12] N. Ikeda和S. Watanabe，《随机微分方程与扩散过程》，阿姆斯特丹，北荷兰，1981年[13]I.I. Gikhman和A.V. Skorohod，《随机微分方程》，Springer，纽约，1972[14] B. Simon，《泛函积分与量子物理》，Academic，纽约，1979[15] V. Betz和F. Hiroshima，路径空间上含双重随机积分的Gibbs测度，Inf.Dim.Anal.Quant.Prob. Rel.Topics,12,135(2009)[16] S. Albeverio和S. Kusuoka，布朗桥上二维随机 holonomy 的基本估计，J.Funct.Anal.127,132(1994)[17] E. Carlen和P. Kree，L^p 迭代随机积分的估计，Ann.Probab.19,354(1991)[18] S. Chandrasekhar，物理学与天文学中的随机问题，Rev.Mod.Phys.15,1 (1943)[19] F. Caruso和V. Oguri，宇宙微波背景谱与分形空间维数的上限，Astroph.Journ.694,151(2009)[20] G. Amelino-Camelia、F. Brighenti、G. Gubitosi和G. Santos，量子时空的热维数，Phys.Lett.B76748(2017)

[21] M. Parikh、F. Wilczek 和 G. Zahariade，《引力波探测器中引力的量子化印记》，Physical Review D 104，046021（2021）[22] R. Metzler 和 J. Klafter，《异常扩散指南：分数阶动力学方法》，Physics Reports 339，1（2000）[23] V. Sposini、A.V. Chechkin、F. Seno、G. Pagnini 和 R. Metzler，《随机微分方程中的随机扩散率：布朗运动但非高斯扩散的两种模型比较》，New Journal of Physics 20，043044（2018）