arXiv:2301.02273v2 [astro-ph.HE] 4 Apr 2023

无碰撞高-β 等离子体中的微观物理修正磁声模

S. Majeski[1]†, **M. W. Kunz**[1,2], **和 J. Squire**[3]1普林斯顿大学天体物理科学系，佩顿楼，普林斯顿，新泽西州 08544，美国2普林斯顿等离子体物理实验室，邮政信箱 451，普林斯顿，新泽西州 08543，美国3奥塔哥大学物理系，北达尼丁坎伯兰街 730 号，达尼丁 9016，新西兰

(compiled on 5 April 2023)

借助混合动理学模拟和解析理论，我们描述了高-β 无碰撞等离子体中长波长非传播模（NP 模）和快磁声波的非线性行为，特别关注它们对动力学微观不稳定性的激发及其响应。NP 模的垂直压力平衡偏振使等离子体 β 增加的区域出现垂直压强超过平行压强的情况。当模振幅为 $|\delta B/B_0| \gtrsim 0.3$时，这种过量会激发镜像不稳定性。粒子被这些微尺度镜像结构散射，阻碍渡越时间阻尼的非线性饱和，确保大振幅 NP 模继续衰减至小振幅。在渐近大波长下，我们预测镜像模诱导的散射将强到足以完全中断渡越时间阻尼，使压强扰动各向同性化，并将无碰撞 NP 模转变为磁流体力学（MHD）熵模。在快波中，当波幅满足 $|\delta B/B_0| \gtrsim 2\beta^{-1}$时，波动的压强各向异性会同时驱动镜像不稳定性和火hose不稳定性。诱导的粒子散射会延迟激波形成，并导致类似 MHD 的波动动力学。结合此前关于自中断阿尔芬波和自维持离子声波的研究，我们的结果为低碰撞率、高-β等离子体（如星系团内介质、辐射低效吸积流和近地太阳风）中的电磁湍流新理论奠定了基础。

1. 引言

1.1. 背景与研究动机

宇宙中近一半的重子物质以高温、稀薄的等离子体状态存在，其中库仑碰撞相对罕见，宇宙磁场则极大地影响着组成粒子的运动轨迹。例子包括暖热星系际介质，其数密度为 $n \gtrsim 10^{-6}$ cm^{-3}，温度为$T \sim 10^5$–10^7 K；以及星系团的星系团内介质，其数密度为 $n \gtrsim 10^{-3}$ cm^{-3}，温度为 $T \sim 10^7$–10^8 K。诸如银河系中心超大质量黑洞周围的辐射低效吸积流，以及充斥行星际空间的太阳风，都是尺度较小的例子；这些系统的特点是碰撞平均自由程较长、粒子回旋半径较小。这些系统的一个关键特征是，即使磁能远小于热压，动量和热量的输运相对于磁场方向仍具有各向异性，

† 联系邮箱：smajeski@princeton.edu

也即 $\beta \doteq 8\pi nT/B^2 \gg 1$。这种空间各向异性直接源于粒子分布函数的速度空间各向异性；粒子—粒子碰撞十分罕见，使这种各向异性得以存在，而粒子主要沿着局域磁场方向运动，则塑造了这种各向异性。在高-β 等离子体中，这种受磁场偏向的偏离局域热力学平衡的状态，会对大尺度的“流体”尺度和小尺度的等离子体动力学“微观”尺度都产生重要的动力学影响。本文聚焦于高-β 等离子体的热力学与流体动力学之间这种多尺度联系。具体而言，我们通过阐明长波长磁声模的非线性行为，并将研究结果与关于阿尔芬涨落和声学涨落的相关研究相结合，证明即使是基础波动这类等离子体动力学中的教科书式例子，在弱碰撞、高-β 等离子体中也存在根本性差异。

1.2. 压强各向异性、微观不稳定性和无碰撞阻尼

无碰撞和弱碰撞等离子体中的粒子，其运动受到绝热不变量的约束；而在高碰撞磁流体力学等离子体中，这些绝热不变量通常会被破坏。尽管等离子体物理学中最常考虑的绝热不变量有三个，其中两个——与横磁场回旋运动相关的磁矩 μ ，以及与沿磁场反弹运动相关的反弹不变量 $\mathcal{J}$ ——所对应的频率通常足够高，因此即使存在一定程度的碰撞，这些不变量仍可近似守恒。为描述集体行为，这些不变量通常被改写为双绝热关系 $p_\perp/nB$ 和 $p_\parallel B^2/n^3$；如果密度 n 和磁场强度 B相对于周期性（回旋或反弹）运动变化缓慢，则沿等离子体流动，这些量会随时间保持守恒。在这种情况下，热压 p 被分解为沿磁场方向和横跨磁场方向的分量，分别为$p_\parallel$ 和 $p_\perp$ ；这是因为每个不变量分别与粒子运动的不同分量相关。从本质上说，无碰撞或弱碰撞等离子体中的随机热运动，会因其沿磁场还是横跨磁场而受到不同的限制。它们相对于磁场的动力学重要性也可以分别定义为 $\beta_\perp \doteq 8\pi p_\perp/B^2$ 和 $\beta_\parallel \doteq 8\pi p_\parallel/B^2$。在众多空间和天体物理环境中，等离子体密度和磁场强度的自然变化，加上近似的双绝热不变量，会导致压强各向异性 $\Delta \doteq p_\perp/p_\parallel - 1 \neq 0$ 的形成。在高-β 等离子体中，热压远大于磁能，即使偏离热各向同性（$|\Delta| \ll 1$）的程度很小，也可能足以使压强各向异性具有与磁能相当的作用（即 $\beta|\Delta| \sim 1$）。

压强各向异性发挥这一重要作用的两种机制是改变磁力线张力，以及触发快速增长的动力学微观不稳定性。前一种机制的一个例子是一种称为“阿尔芬波中断”的过程（Squire 等 2016，2017年，*b*），其中，振幅满足（$\delta B_\perp/B$）$^2 \gtrsim 2/\beta$ 的线偏振阿尔芬波会绝热地产生足够大的压强各向异性，使回复磁张力归零，从而阻止波的传播。本文主要关注大尺度压缩涨落；在高 ββ等离子体中，磁张力对这类涨落几乎无关紧要。因此，我们主要关注压强各向异性与离子拉莫尔尺度动理学不稳定性之间的联系，特别是火hose不稳定性和镜像不稳定性。

满足 $\beta_\parallel\Delta \lesssim -2$ 的压力各向异性等离子体中会触发火hose不稳定性。这个阈值通常称为“流体火hose”阈值，对应于恢复性的磁张力与负压强各向异性产生的去稳定化黏性应力之间的精确平衡。

[1] 在这种情况下，当磁场中存在微小的垂直涨落时，过大的平行压强会产生离心力，作用于磁力线弯曲处。当压强各向异性足够负时，磁张力无法稳定地平衡这种力，弯曲便会迅速增长（Parker 1958；韦杰诺夫与萨格杰耶夫 1958），且长度尺度越小，增长越快（直至离子拉莫尔尺度，此时有限拉莫尔半径效应会使其稳定；肯尼尔与萨格杰耶夫 1967；戴维森与 V¨olk 1968；Yoon 等人 1993；Hellinger 与 Matsumoto 2000）。在受驱动系统中，不稳定的压强各向异性通过两种机制共同调节：粒子与这些弯曲结构发生俯仰角散射，以及增长的磁扰动所伴随的补偿性正压强各向异性（Schekochihin 等人 2008；罗辛等人 2011；Kunz 等（2014a））。相反，当过大的正压强各向异性满足 $\beta_\perp \Delta \gtrsim 1$ 时，会触发镜像不稳定性（Barnes 1966；长谷川 1969）。在这种情况下，增强的垂直压强能够向外推挤磁场强度局部减弱的区域，从而形成离子拉莫尔尺度的“磁镜”。这些磁镜通过守恒 μ，共振地约束俯仰角较大的粒子（$v_\perp > v_\parallel$）（例如，Southwood & Kivelson 1993）。这些共振粒子的各向异性热能会进一步增强对磁力线的向外推力，使涨落（以及由此产生的约束镜力）继续增长，直到磁镜两端弯曲得十分剧烈，粒子得以从其尖锐边缘发生俯仰角散射，进而调节压强各向异性（Kunz 等（2014a）；Riquelme 等（2015）；林孔等人 2015）。

孔茨 等（2020）证明，这些动理学不稳定性会干扰长波长、平行传播离子声波（离子声波）的无碰撞阻尼。也就是说，满足 $|\delta n/n| \gtrsim 2/\beta$ 的离子声波振幅会产生足够大的压强各向异性，从而驱动火hose和镜像不稳定性；与之相关的散射和俘获会阻碍维持朗道共振，而朗道共振正是此类波能够发生原本强烈衰减的条件。其结果是波动动力学得以自我维持，并呈现出弱碰撞等离子体的特征：离子分布函数接近麦克斯韦分布，沿磁场热流类似于其布拉金斯基形式（但在大振幅磁镜显著抑制粒子输运的区域除外），且各种热力学量之间的关系比动理学情形更具“流体”特征。

1.3. 非传播模、快波和斜传播离子声波

本研究结合了阿尔fv´én 波与离子声波中的一些特性，研究无碰撞磁声模——即非传播模（见 §2）、快波（见 §3），以及在较有限程度上研究斜向离子声波（见附录 C）。我们研究垂直传播极限下的快波；在此极限下，磁张力和无碰撞阻尼不起作用，但相关的涨落 B 和 n 会驱动不稳定的压强各向异性。另一方面，非传播模是高度斜向的垂直压力平衡结构，其中无碰撞渡越时间阻尼（或称“Barnes 阻尼”；Barnes 1966）决定了模态的全部动力学。Barnes 阻尼是一种 Landau(1946)

[1]在某些条件下，阈值要求较低的共振斜向火hose不稳定性可能占据主导地位，其阈值为 $\beta_\parallel \Delta \lesssim -1.4$ (Hellinger & Matsumoto 2000；A.F.A. Bott *et al.*，准备中）。事实上，我们对满足 $|\delta B/B_0| \gtrsim 2/\beta$ 条件的长波长快波所做的模拟中，确实出现了这些条件；特别参见 §3.2 和图 19 。然而，由于本文研究的磁声涨落均不会发生自中断，因此 -2 与 -1.4 之间的差异在动力学上影响甚微；我们通常将‘火hose阈值’统称为 -2。

阻尼：斜向扰动造成磁场强度的正弦涨落（磁“镜像”），共振俘获 μ-守恒粒子，并对其导引中心做功，从而将自由能从电磁扰动转移给粒子。当 β取较大值时，非传播模的阻尼率相对较慢，阻尼过程的非线性饱和可能在模态衰减显著之前发生。在这种情况下，与模态近共振的俘获粒子会在相空间中重新排列，使粒子的速度分布函数 $f(v_\parallel)$ 在相速度 $v_\parallel \sim 0$) 附近变平（例如，Zakharov &Karpman 1963）。一旦 $(\partial f/\partial v_\parallel)|_0 \sim 0$，分布函数便无法再通过重新排列粒子获得更多自由能，阻尼过程也就停滞下来。这种相空间位置的交换发生在一个反弹时间内，$\sim \Omega^{-1}$ ，也就是（刚好）被俘获的粒子绕其约束磁镜完整运行一周所需的时间。模态振幅越大，其反弹时间就越短，因此非线性饱和确保大振幅非传播模比小振幅非传播模寿命更长。这里的核心问题是，与这些模态相关的压强各向异性在多大程度上会影响其特性和寿命。

2. 非传播模：非线性饱和的抑制

2.1. 理论

2.1.1. 模型方程和假设

在长波长条件下，NP 模式的线性演化可在漂移动力学近似下进行解析处理。在这种近似中，所有相关的时间和长度尺度都远大于粒子回旋运动对应的尺度，且粒子的速度分布函数呈回旋对称。我们采用这一框架，并进一步将电子视为无质量、用于中和电荷的等温流体，其温度为常数 T_{e}。[2] 在该模型中，磁力线的速度，也即垂直流体流动，由 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移速度 $\boldsymbol{u}_\perp$描述。与该漂移相对应的垂直特异速度，记为 $\boldsymbol{w}_\perp$，描述了相对于磁力线和流体流动的垂直粒子运动，同时满足磁矩 $\mu \doteq m_{\mathrm{i}} w_\perp^2/2B$ 守恒。沿局部磁场方向的粒子速度分量记为 $v_\parallel$。

接下来，我们求解相对于空间均匀的“背景”离子速度分布函数 $F_0(v_\parallel,\ w_\perp)$ 的小扰动 $\delta f(t,\ \boldsymbol{r},\ v_\parallel,\ w_\perp)$ 的演化。平行（$\parallel$）和垂直（$\perp$）坐标方向是相对于均匀背景磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 固定的。假设等离子体中的空间变化仅由具有波数 $k_\parallel$ 和 $k_\perp$ 的正弦扰动引起，则相关方程的线性化形式为漂移动理学 Vlasov 方程，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}k_\parallel v_\parallel\right)\left(\delta f+\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\frac{w_\perp}{2}\frac{\partial F_0}{\partial w_\perp}\right)+\frac{e}{m_{\mathrm{i}}}\delta E_\parallel\frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel}-\mathrm{i}k_\parallel\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\frac{w_\perp^2}{2}\frac{\partial F_0}{\partial v_\parallel}=0; \qquad (2.1a)$$

[2]采用等温电子，是为了与使用Pegasus++ 混合动理学粒子网格代码所进行的模拟保持一致（见§2.2）；不过，在某些弱碰撞等离子体（如星系团内介质）中，这一假设也有物理依据：电子的碰撞足以使其保持近麦克斯韦分布，同时运动足够快，因而沿受扰磁力线可近似视为等温（例如，Kunz 2011）。这一假设也与次级极限下无碰撞压缩涨落的陀螺动理学理论相符（$(m_e/m_i)^{1/2} \ll 1$）：该理论预言，若电子的平衡分布函数各向同性，则由于快速传导，电子将呈现压强各向同性，并沿磁力线保持等温（见§2.5.2 节，孔茨 *et al.* 2015）。

描述漂移速度演化的力方程，

$$\frac{\mathrm{d}u_\perp}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{i}k_\perp}{m_\mathrm{i}n_0}\left(\delta p_{\perp\mathrm{i}} + T_\mathrm{e}\delta n\right) - \mathrm{i}k_\perp v_\mathrm{A}^2\frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \mathrm{i}k_\parallel v_\mathrm{A}^2\frac{\delta B_\perp}{B_0}; \tag{2.1b}$$

描述扰动磁场 $\delta\boldsymbol{B}$ 平行和垂直分量的理想感应方程，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta B_\parallel}{B_0} = -\mathrm{i}k_\perp u_\perp \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta B_\perp}{B_0} = \mathrm{i}k_\parallel u_\perp; \tag{2.1c}$$

以及描述平行电场的广义欧姆定律，

$$\delta E_\parallel = -\mathrm{i}k_\parallel\frac{T_\mathrm{e}}{e}\frac{\delta n}{n_0}. \tag{2.1d}$$

扰动数密度和垂直离子压力分别为

$$\delta n \doteq \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\,\delta f \quad \text{and} \quad \delta p_{\perp\mathrm{i}} \doteq \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\,\frac{1}{2}m_\mathrm{i}w_\perp^2\delta f, \tag{2.2}$$

分别为，其中 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{v} = 2\pi w_\perp \mathrm{d}w_\perp \mathrm{d}v_\parallel$。其他符号具有通常的含义：$e$为元电荷，$m_\mathrm{i}$ 为离子质量，而 $v_\mathrm{A} \doteq B_0/(4\pi m_\mathrm{i}n_0)^{1/2}$ 为阿尔芬速度，定义为 B_0，均匀背景密度为 n_0（即 F_0的零阶矩）。注意，$u_\perp$ 并非扰动分布函数的显式矩，必须根据（2.1b）独立演化。将漂移动理学方程、描述漂移速度的流体方程与冻结磁场结合起来，通常称为“动理学磁流体力学”（Kulsrud 1964年、1983年）。

此时，我们认为 F_0 是一个静止、各向同性的麦克斯韦–玻尔兹曼分布，$F_0 = F_\mathrm{M}(v)$，其中 $\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\,F_\mathrm{M}(v) = n_0$ 且 $\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\,m_\mathrm{i}v^2F_\mathrm{M}(v) = 3n_0T_{\mathrm{i}0} \doteq 3p_{\mathrm{i}0}$。这不仅简化了分析，也确保背景分布函数本身在动理学上不稳定。随后即可对方程（2.1a）关于时间直接积分，得到

$$\begin{aligned}\delta f(t, w_\perp, v_\parallel) = {}& \delta f(0, w_\perp, v_\parallel)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\parallel v_\parallel t} \\ & - \int_0^t \mathrm{d}t'\,F_\mathrm{M}(v)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\parallel v_\parallel (t-t')}\left[\mathrm{i}k_\parallel v_\parallel\frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta n(t')}{n_0} - \frac{w_\perp^2}{v_{\mathrm{th,i}}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\delta B_\parallel(t')}{B_0}\right],\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $v_{\mathrm{th,i}} \doteq (2T_{\mathrm{i}0}/m_\mathrm{i})^{1/2}$ 是离子热速度。式（2.3）右端第一项表示粒子沿（未扰动）磁场自由流动，对初始扰动产生的平行相位混合。如果 $\delta f(0, w_\perp, v_\parallel) \propto F_\mathrm{M}(v)$，对该项积分并配方后可知，初始扰动分布函数的任意矩都会按 $\exp[-(k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}t/2)^2]$衰减。式（2.3）中的第二项描述等离子体对感生平行电场（$\propto\delta n/n_0$）和磁镜力（$\propto\delta B_\parallel/B_0$）的自洽响应。我们首先计算并讨论这一本征模响应，随后再求取式（2.3）的二阶矩，并计算§2.1.3中的时间依赖压强各向异性。

2.1.2. *NP* 模式的本征模响应

如果我们取涨落振幅与 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ 成正比，其中复频率为 ω，则将（2.1）合并后得到的色散关系可写为

$$D(\zeta) \doteq \left(\omega^2 - k^2v_\mathrm{A}^2\right)\left[1 + \frac{T_{\mathrm{i}0}}{T_\mathrm{e}} + \zeta Z(\zeta)\right] + k_\perp^2 v_{\mathrm{th,i}}^2\,\zeta Z(\zeta)\left[1 + \frac{T_{\mathrm{i}0}}{T_\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\zeta Z(\zeta)\right] = 0, \tag{2.4}$$

其中 $\zeta \doteq \omega/|k_\parallel| v_{\mathrm{th,\,i}}$ 是无量纲相速度，而 $Z(\zeta)$ 是等离子体色散函数。括号中的第一项描述了磁压和磁张力共同产生的恢复力，表明我们考察的是磁声模。事实上，在（$m_\mathrm{e}/m_\mathrm{i}$）的极限下，将方括号中的相应乘法因子置零，即可得到兰道阻尼离子声波的色散关系。（2.4）中的最后一项与 $k_\perp^2 v_{\mathrm{th,\,i}}^2$ 成正比，将这些阿尔芬响应与声学响应耦合起来；该项的存在可追溯至（2.3）中的最后一项，即代表镜力的项，因此通过渡越时间阻尼引入了该模态的无碰撞阻尼。

为了分离 NP 模式，我们特别关注高度倾斜的波数（$k_\perp \gg k_\parallel$）和低频率（$\zeta \ll 1$）。在此极限下，式（2.4）中的等离子体色散函数可近似为 $Z(\zeta) \approx \mathrm{i}\sqrt{\pi}$，并且我们可以通过忽略 ζ^2 阶的项，进一步简化色散关系。由此得到 NP 模式衰减率的近似表达式：

$$\zeta \simeq -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\pi}\beta_{\mathrm{i}0}}\frac{k^2}{k_\perp^2}, \quad \text{where} \quad \beta_{\mathrm{i}0} = \frac{8\pi p_{\mathrm{i}0}}{B_0^2} = \frac{v_{\mathrm{th,i}}^2}{v_\mathrm{A}^2}. \tag{2.5}$$

要使 $\zeta \ll 1$ 满足式（2.5），我们要求 $\beta_{\mathrm{i}0} \gg 1$，这与我们对高-$\beta$ 等离子体的研究兴趣十分契合。通过对动理学方程（2.1a）取矩，可以进一步了解 NP 模式的性质，例如 δn、$\delta p_{\perp,\,\mathrm{i}}$ 和 $\delta B_\parallel$ 之间的比例关系：

$$\frac{\delta n}{n_0} = -\zeta Z(\zeta)\left[1 + \frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\big(1 + \zeta Z(\zeta)\big)\right]^{-1}\frac{\delta B_\parallel}{B_0} \simeq -\frac{1}{\beta_0}\frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{\delta B_\parallel}{B_0}, \tag{2.6a}$$

$$\frac{\delta p_{\perp\mathrm{i}}}{p_{\mathrm{i}0}} = -\frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta n}{n_0} + 2\,\frac{\omega^2 - k^2 v_\mathrm{A}^2}{k_\perp^2 v_{\mathrm{th,i}}^2}\frac{\delta B_\parallel}{B_0} \simeq \left(2 + \frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\right)\frac{\delta n}{n_0}, \tag{2.6b}$$

其中 $\beta_0 \doteq \beta_{\mathrm{i}0}(1 + T_\mathrm{e}/T_{\mathrm{i}0})$。后一个方程表明，当 $k_\parallel \ll k_\perp$ 时，近似的垂直压力平衡成立，因为此时

$$\delta p_{\perp\mathrm{i}} + \delta p_\mathrm{e} + \frac{\delta B^2}{8\pi} \simeq -\frac{k_\parallel^2}{k_\perp^2}\frac{\delta B^2}{4\pi} \ll \frac{\delta B^2}{4\pi}. \tag{2.6c}$$

此外，平行离子压力扰动表示为

$$\frac{\delta p_{\parallel\mathrm{i}}}{p_{\mathrm{i}0}} = -\frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta n}{n_0} - 2\zeta^2\big(1 + \zeta Z(\zeta)\big)\left(\frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta n}{n_0}\right) \simeq -\frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta n}{n_0}, \tag{2.6d}$$

因此 $\delta p_{\parallel\mathrm{i}} + \delta p_\mathrm{e} \simeq 0$。方程（2.5）和（2.6）突出了 NP 模式的一些基本特性，即它不发生振荡，在高 β 下衰减缓慢，并且其对磁场强度和密度的扰动呈反相关。

阻尼率背后的物理机制主要是渡越时间磁泵：兰道共振粒子（严格来说，是它们的导引中心）被磁场中的斜向扰动形成的大尺度磁镜俘获在其中，并从镜力中提取能量。由于在 $|B|$ 增加的区域（较低 $v_\parallel$ 粒子）中受到加热的粒子数，多于在 $|B|$

减少的区域（较高 $v_\parallel$ 粒子）中受到冷却的粒子数，因此它们通过回旋加速获得净加热。在较高的等离子体 β 下，这一差异较小，因此阻尼率具有β^{-1} 依赖性。[3]

这种无碰撞阻尼容易发生非线性饱和，此时阱中的粒子通过 μ 守恒探索其可用的相空间；由于反弹时间各不相同，它们会使原始麦克斯韦分布发生相混合，并使磁阱中的分布函数变平，在 $v_\parallel \sim 0$周围形成一个平台。这有效地提高了共振粒子的等离子体 β，阻尼率也随之大幅减弱。由于 NP 模式在高 β下的衰减率较慢，非线性饱和发生得相对较快，其速率与热粒子的反弹频率相当，

$$\Omega_\mathrm{b} \doteq \frac{1}{2} k_\parallel v_{\mathrm{th,i}} \left| \frac{\delta B_\parallel}{B_0} \right|^{1/2}. \tag{2.7}$$

尽管大多数粒子以大致这一频率反弹，但几乎处于俘获边缘的粒子由于穿越磁阱边缘所需的时间较长，反弹速度慢得多。因此，平台由内向外形成，其最大范围取决于俯仰角，并由$|v_\parallel|/w_\perp < \sqrt{|B_\mathrm{max}|/|B_\mathrm{min}| - 1}$决定。对于$|\delta B_\parallel/B_0| \gtrsim \beta_{\mathrm{i}0}^{-2}$，反弹频率（2.7）将大于衰减率（2.5），因此非线性饱和将起重要作用。由于我们关注的是具有 $\beta \gg 1$的等离子体，即使是振幅通常被视为“线性”的模态，在发生非线性饱和之前也只会衰减少许，这意味着这些结构应该能够长期存在。除非某种过程能够在 $\lesssim \Omega_\mathrm{b}^{-1}$ 的时间尺度上侵蚀扰动分布函数中的共振平台。

2.1.3. 压强各向异性的产生与镜像不稳定性的触发

特征　模（2.6）意味着离子中的无量纲压强各向异性为

$$\Delta_\mathrm{NP} \simeq 2\left(1 + \frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\right)\frac{\delta n}{n_0} \simeq -\frac{2}{\beta_{\mathrm{i}0}}\frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{\delta B_\parallel}{B_0}. \tag{2.8}$$

这表明，对于 $\delta B_\parallel/B_0 \sim 1$，NP 模式所伴随的压强各向异性足以激发火hose不稳定性和镜像不稳定性；前者发生在 $\delta B_\parallel > 0$ 的区域，后者发生在 $\delta B_\parallel < 0$ 的区域。有两点因素使这一结论变得复杂。

第一个复杂之处在于：当分布函数的初始扰动受到粒子的各向异性相位混合时，会产生额外的压强各向异性。粒子可以沿磁力线自由流动，但无法横跨磁力线。为说明这一效应，

---

[3]背景压强各向异性（ $\Delta_0 > 0$，例如与双麦克斯韦分布相关的情形$F_0 = F_{\mathrm{bi\text{-}M}}(v_\parallel,\ w_\perp)$，会进一步降低线性 NP 模态的衰减率，因为它增加了磁槽中大俯仰角粒子的数量。从数学上看，背景压强各向异性越接近镜像阈值，NP 模态的衰减率就越趋近于零，此时（2.5）会乘上一个因子（$p_{\parallel\mathrm{i}0}/p_{\perp\mathrm{i}0}$）^{2}（$1 - \beta_{\perp\mathrm{i}0}\Delta_0$）。这种背景压强各向异性使膨胀磁力线在能量上“代价”更低（以维持垂直压力平衡），从而（部分）抵消磁场强度涨落的阻尼。如果这些大俯仰角粒子的聚集导致垂直压强超过磁压所能稳定平衡的程度（*viz.* $\beta_{\perp\mathrm{i}0}\Delta_0 > 1$），波谷就必须加深以作补偿。随着加深的波谷中的共振粒子通过回旋加速冷却损失能量，这一过程会不断加剧，最终导致镜像不稳定性（Southwood & Kivelson 1993；Kunz *et al.* 2015）。本文仅关注压强各向异性对磁声模稳定性和演化的影响，并通过设定 *fluctuation-driven*，排除背景等离子体本身已经处于动理学不稳定状态的可能性 $\Delta_0 = 0$。

让我们回到扰动分布函数的时间相关解，即方程（2.3），并假设在 $t = 0$ 时，等离子体中存在一个等温且压强平衡的扰动，其满足

$$\delta f(0, w_\perp, v_\parallel) = \frac{\delta n(0)}{n_0} F_\mathrm{M}(v) = -\frac{2}{\beta_0}\frac{\delta B_\parallel(0)}{B_0} F_\mathrm{M}(v). \tag{2.9}$$

这一初始条件保证，粒子自由流且等离子体逐渐进入 NP 本征模时产生的压强各向异性，是自洽地产生的，而非人为加入的。利用初始条件（1/2）$m_\mathrm{i} w_\perp^2$ 和$m_\mathrm{i} v_\parallel^2$ 矩之差，对（2.3）与初始条件（2.9）进行计算，可得时间依赖的压强各向异性的下列表达式：

$$\begin{aligned}\Delta_\mathrm{NP}(t) = {}& 2\left(\frac{k_\parallel v_{\mathrm{th,i}} t}{2}\right)^2 \mathrm{e}^{-(k_\parallel v_{\mathrm{th,i}} t/2)^2}\left(1 + \frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\right)\frac{\delta n(0)}{n_0} \\ &+ \int_0^t \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{-[k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}(t-t')/2]^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\delta B_\parallel(t')}{B_0} \\ &+ 2\int_0^t \mathrm{d}t' \left[\frac{k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}(t-t')}{2}\right]^2 \mathrm{e}^{-[k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}(t-t')/2]^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta n(t')}{n_0} + \frac{\delta B_\parallel(t')}{B_0}\right].\end{aligned} \tag{2.10}$$

所有涉及组合$k_\parallel v_{\mathrm{th},\ \mathrm{i}} t/2$ 的项，描述了相混合对扰动分布函数各阶矩的阻尼效应，这是由沿 $v_\parallel$方向产生精细尺度结构所致。正如 孔茨等人（2020，其方程（3.7））所述，（2.10）右侧第一项刻画了粒子运动各向异性导致的瞬态压强各向异性：磁化粒子沿磁场自由流动，却不横跨磁场自由流动，因此 $w_\perp^2$ 和 $v_\parallel^2$ 矩的 $\delta f(\mathbf{0})$ 相混合方式不同。（2.10）中的积分项刻画了模态被激发并随时间衰减时，绝热不变量所驱动的压强各向异性。正是这一对 $\Delta_\mathrm{NP}(t)$ 的贡献包含了本征模的压强各向异性，即方程（2.8）。

(2.10)中的积分可以通过数值方法计算（见附录A），并确定 $\Delta_\mathrm{NP}(t)$，对应给定的初始模振幅

$$\alpha \doteq \left|\frac{\delta B_\parallel(0)}{B_0}\right|. \tag{2.11}$$

结果显示在图1(a) 中，所选参数值为 $T_\mathrm{e}/T_{\mathrm{i}0}$。的初始上升$\Delta_\mathrm{NP}$ 是由两种效应共同造成的：初始扰动密度的各向异性相混合，以及系统逐渐进入 NP 本征模时绝热产生的压强各向异性。经过约一个模态平行波长对应的热穿越时间后，本征模形成；图中 Δ_NP 的缓慢指数衰减反映了该模态的 Barnes 阻尼。（这种缓慢衰减之上叠加的较高频振荡，是由初始条件激发的快模造成的，代表围绕垂直压力平衡的快速振荡。）在 $\Delta_\mathrm{NP}(t)$ 的 $\beta_{\mathrm{i}0} \gg 1$极限下，将阻尼本征模（2.6$a$）代入方程（2.10）中的时间积分，可得到近似解析解。结果为

$$\Delta_\mathrm{NP}(t) \simeq 2\tau^2 \mathrm{e}^{-\tau^2}\left(1 + \frac{T_\mathrm{e}}{T_{\mathrm{i}0}}\right)\frac{\delta n(0)}{n_0} - \left(\mathrm{erf}(\tau) - \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\right)\frac{2}{\beta_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta B_\parallel(t)}{B_0} \tag{2.12a}$$

$$= -\left[2\tau^2 \mathrm{e}^{-\tau^2} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\zeta\tau}\left(\mathrm{erf}(\tau) - \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\right)\right]\frac{2}{\beta_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta B_\parallel(0)}{B_0}, \tag{2.12b}$$

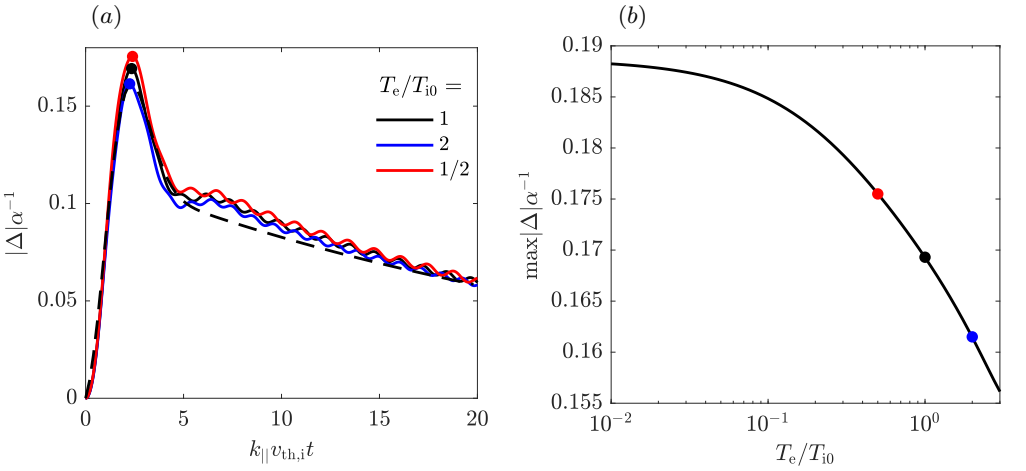


图1：（a）利用附录A中提出的方法，求得线性 NP 模态的均方根压强各向异性随时间变化的解，其中波数为$k_\parallel$，无量纲初始振幅为 $\alpha \doteq \delta B_\parallel(0)/B_0$，对于 $\beta_{i0} = 16$ 以及不同的 T_e/T_{i0}。初始调整后出现的小幅振荡，是等温压强平衡初始条件趋于 NP 本征模时产生的快波所致。近似解析解（2.12）以虚线表示。（b最大压强各向异性（除以 α）随 T_e/T_{i0}的变化；标出了其在 $T_e/T_{i0} = 1/2$、1 和 2 处的取值。

其中 $\tau \doteq k_\parallel v_{th,i} t/2$。方括号中的项在早期时间呈 $\sim 2\tau^2 + \tau/\sqrt{\pi}$ 的变化趋势，这表明等离子体可能会在时间 $t_m \sim (\sqrt{\alpha} k_\parallel v_{th,i})^{-1}$ 变得镜像不稳定，该时间与反弹频率（2.7）的倒数相当。随后，模态缓慢地呈指数衰减。通过令 $\exp(-2i\zeta\tau) \simeq 1$，并对 τ 求最大值，可估算压强各向异性的最大值（2.12b）。结果是，最大压强各向异性 $\simeq 2.6\alpha\beta_{i0}^{-1}$（参见（2.8））出现在 $k_\parallel v_{th,i} t \simeq 2.3$。图1($a$) 中的虚线描绘了近似解（2.12），显然与完整解吻合良好。

使用（2.8）确定 NP 模式动理学稳定性时遇到的第二个问题，与该模态如何扰动垂直和沿磁场方向的等离子体 β参数有关；这些参数会影响火hose与镜像不稳定性阈值。利用（2.6）以及 $\delta B_\perp = -(k_\parallel/k_\perp)\,\delta B_\parallel$，可得

$$\beta_{\parallel i} \simeq \beta_{i0}\left(1 + 2\frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{\delta B_\parallel^2}{B_0^2}\right)^{-1}\left[1 - \frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{1}{\beta_{i0}}\frac{T_e}{T_{i0}}\left(1 + \frac{T_e}{T_{i0}}\right)^{-1}\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right], \tag{2.13a}$$

$$\beta_{\perp i} \simeq \beta_{i0}\left(1 + 2\frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{\delta B_\parallel^2}{B_0^2}\right)^{-1}\left[1 - \frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{1}{\beta_{i0}}\left(2 + \frac{T_e}{T_{i0}}\right)\left(1 + \frac{T_e}{T_{i0}}\right)^{-1}\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right]. \tag{2.13b}$$

在 $\beta_{i0} \gg 1$的极限下，这两个表达式中的最后一项都可以舍去。将结果与（2.8）结合可得

$$\beta_{\parallel i}\Delta_{NP} \approx \beta_{\perp i}\Delta_{NP} \approx -2\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\left(1 + 2\frac{\delta B_\parallel}{B_0} + \frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{\delta B_\parallel^2}{B_0^2}\right)^{-1}. \tag{2.14}$$

方程（2.14）表明，不可能产生足够负的压强各向异性，使等离子体因火hose而失稳。在 $\Delta_{NP} < 0$区域中，等离子体 β也会降低，因此各向异性越负（当

越大 $\delta B_\parallel > 0$），火hose阈值（$\approx -2/\beta_{\parallel \mathrm{i}}$）就离得越远。事实上，对 2.14）右侧进行最小化，可得 $\delta B_\parallel > 0$时，$\beta_\mathrm{i}\Delta_\mathrm{NP}$ 的最小值为 $\approx -(1+|k/k_\perp|)^{-1} > -1/2$。相比之下，在 $\delta B_\parallel < 0$ 区域中，等离子体会产生正的压强各向异性，因此更容易达到降低后的镜像阈值（$\approx 1/\beta_{\perp \mathrm{i}}$）。令（2.14）右侧等于 1，并求解 $\delta B_\parallel = -|\delta B_\parallel|$，即可得到触发镜像不稳定性的 NP 模式振幅阈值：

$$\left|\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right| \gtrsim 0.3 \quad \text{(NP mode amplitude threshold)} \tag{2.15}$$

满足这一判据时，我们预计动力学不稳定等离子体区域将局限于 $\delta B_\parallel < 0$ 所在之处，并且其中会存在离子拉莫尔尺度镜像结构。

牢记这些预测，我们现在确定这些镜像不稳定区域的空间范围，并讨论其中不断增长的镜像模如何演化以调节压强各向异性。

2.1.4. 镜像不稳定性对压强各向异性的调节

在 §2.1.3 中，我们表明，若从等温压力平衡状态开始，满足 $\delta B_\parallel < 0$ 的等离子体会在 $\bar{t}_\mathrm{m} \sim (\sqrt{\alpha} k_\parallel v_{\mathrm{th},\,\mathrm{i}})^{-1}$ 时变得镜像不稳定。当 $\alpha \gtrsim 0.3$（即不稳定性可能发生时），这一时间与 NP 模式建立压强各向异性所需的时间尺度相当（见图 1）。因此，我们可以将镜像不稳定性视为叠加在一种原本缓慢衰减的正压强各向异性之上，该各向异性满足（2.14），且 $\delta B_\parallel < 0$。不稳定性的最大增长率取决于局部压强各向异性超出不稳定性阈值的程度，即 $\Lambda_\mathrm{m} \doteq \Delta - \beta_{\perp\mathrm{i}}^{-1} > 0$。在渐近极限 $\beta_{\perp\mathrm{i}}\Lambda_\mathrm{m} \ll 1$ 下，镜像不稳定性的最大增长率及其对应波数为（Hellinger 2007年；A.F.A. Bott 等，准备中）

$$\gamma_\mathrm{m}/\Omega_\mathrm{i} \approx 0.07\beta_{\perp\mathrm{i}}\Lambda_\mathrm{m}^2, \quad k_{\parallel,\mathrm{m}}\rho_\mathrm{i} \approx 0.2\beta_{\perp\mathrm{i}}\Lambda_\mathrm{m}, \quad k_{\perp,\mathrm{m}}\rho_\mathrm{i} \approx 0.6(\beta_{\perp\mathrm{i}}\Lambda_\mathrm{m})^{1/2}. \tag{2.16}$$

然而，由于不稳定性参数 $\beta_{\perp\mathrm{i}}\Lambda_\mathrm{m}$ 对 NP 模式振幅的依赖十分敏感（见 (2.14)），当 $\alpha \in [0.4, 0.9]$时，其取值范围为 ~ 1 至 ~ 100，因此只有极边缘不稳定的 NP 模态（即 $\alpha \approx 0.3$）才满足推导 (2.16) 时所采用的排序。当 $\beta_{\perp\mathrm{i}}\Lambda_\mathrm{m} \gtrsim 1$ 时的增长率和波数，可通过针对双麦克斯韦分布等离子体直接数值求解线性化 Vlasov–Maxwell 方程得到；式 (2.14) 则给出了给定 NP 模式振幅 α时的压强各向异性（A.F.A. Bott，私人通信）。所得增长率和波数随 α 的变化如图2（a）所示。（绘制此图时，我们采用了 $\beta_{\mathrm{i}0} = 16$ 和 $k_\perp/k_\parallel = 4$；只要满足 $\beta_{\mathrm{i}0} \gtrsim 10$ 和 $(k/k_\perp)^2 \approx 1$，所示数值对这两个参数均不敏感。）随着 α 增大，这些量趋近于经验值

$$\gamma_\mathrm{m}/\Omega_\mathrm{i} \approx 0.2\Lambda_\mathrm{m}, \quad k_{\parallel,\mathrm{m}}\rho_\mathrm{i} \approx 0.6, \quad k_{\perp,\mathrm{m}}\rho_\mathrm{i} \approx 1.2. \tag{2.17}$$

要使镜像不稳定性与 NP 模式的线性演化相关，必须满足两个条件。首先，镜像增长率必须远大于 NP 模式衰减的速率（2.5），即 $\gamma_\mathrm{m}\sqrt{\pi\beta_\mathrm{i}} \gg k_\parallel v_{\mathrm{th},\,\mathrm{i}}$。对于具有平行波长 $\lambda_\parallel \gtrsim 10^3\rho_\mathrm{i}$的不稳定 NP 模式而言，这一条件在高$\beta$ 等离子体中似乎显然成立。第二个条件是，镜像模必须确实能容纳在镜像不稳定区域的长度范围内，即$2\pi/k_{\parallel,\mathrm{m}} \lesssim \ell_\mathrm{mirror}$。我们通过考察 NP 模式中何处的量（2.14）大于 1，来估算ℓ_mirror：

$$\Lambda_\mathrm{m} \simeq \frac{1}{\beta_{\mathrm{i}0}}\left(-1 - 4\frac{\delta B_\parallel}{B_0} - \frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{\delta B_\parallel^2}{B_0^2}\right) \gtrsim 0. \tag{2.18}$$

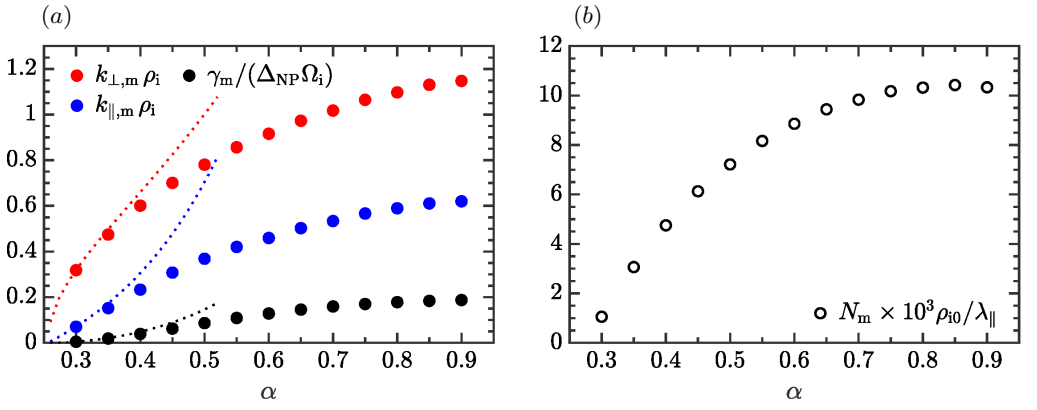


图2：(*a*) 增长率为 γ_m 的最快增长镜像模的垂直（$k_{\perp,\mathrm{m}}$）和沿平行方向（$k_{\parallel,\mathrm{m}}$）的波数，均根据线性 Vlasov–Maxwell 理论，采用不稳定性参数 Λ_m 计算；该参数对应于在 $\beta_{\mathrm{i}0}=16$ 等离子体中具有 $\alpha\doteq|\delta B_\parallel/B_0|$ 和$k_\perp/k_\parallel=4$ 的 NP 模式（见（2.18））。只要 $\beta_{\mathrm{i}0}\gtrsim 10$ 和 $(k/k_\perp)^2\approx 1$，这些值对 $\beta_{\mathrm{i}0}$ 和 $k_\perp/k_\parallel$ 的依赖都很弱。虚线对应渐近表达式（2.16），其适用条件为 $\beta_{\perp\mathrm{i}}\Lambda_\mathrm{m}\ll 1$。(*b*) NP 模式在波长为 $\lambda_\parallel$ 、振幅为 α 时，其 $\delta B_\parallel<0$ 区域内镜像模的预测数量 N_m （见（2.20））。

由于特征向量的各个领先阶分量均为实数，我们可以取 $\delta B_\parallel=-\alpha B_0\cos(k_\parallel x+k_\perp y)$（我们的模拟中即采用这种形式；参见 §2.2）。根据假设 $k_\perp\gg k_\parallel$，可知 $\delta B_\perp\ll\delta B_\parallel$，因此磁力线处处近似为直线，俘获粒子往返运动时所经过的路径也近似平行于 $\boldsymbol{B}_0$。然后，取（2.18）中适当的根，以确保镜像不稳定振幅对应的反余弦有定义，可得波中镜像不稳定部分的长度满足

$$\ell_\mathrm{mirror}\approx\frac{\lambda_\parallel}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{2-\sqrt{4-k^2/k_\perp^2}}{\alpha}\right)\doteq f_\mathrm{m}\lambda_\parallel. \tag{2.19}$$

对于 $\alpha\approx 0.3$–0.9 和 $k_\parallel\ll k_\perp$, $f_\mathrm{m}\approx 0.1$–0.4，随后可容纳于 ℓ_mirror 内的最大增长镜像数量为

$$N_\mathrm{m}\approx\frac{f_\mathrm{m}}{4}\left(\frac{k_{\parallel,\mathrm{m}}\rho_\mathrm{i}}{2\pi}\right)\left(\frac{\lambda_\parallel}{\rho_\mathrm{i}}\right). \tag{2.20}$$

在撰写（2.20）时，我们加入了一个额外因子 $\approx 1/4$，以考虑到镜像不稳定区域内的压强各向异性预计并非均匀，因此整个 ℓ_mirror 不太可能都充满具有相同波长的镜像模；我们通过考察所提出的混合动理学模拟中不稳定 NP 模式形成的散射镜像模的空间范围，经验性地确定了这一专用因子 $\approx 1/4$ §2.2中。对 N_m 所作的进一步也是最后一项修正，考虑了镜像不稳定区域内的离子拉莫尔半径 $\rho_\mathrm{i}\propto\sqrt{T_{\perp\mathrm{i}}/B}$ 大于$\rho_{\mathrm{i}0}$这一事实，主要原因是局部磁场强度降低。利用（2.6）将 $\delta T_{\perp\mathrm{i}}$ 表示为 $\delta B_\parallel$的函数，并在 $\approx 1/2$ 中乘以因子 α，以近似考虑非均匀性导致的 α 有效减小

在镜像不稳定区域内的 $\delta B_\parallel$，我们得到

$$\frac{\rho_\mathrm{i}}{\rho_\mathrm{i0}} \approx \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta_\mathrm{i0}}\frac{k^2}{k_\perp^2}\right)^{1/2}\left(1 - \alpha + \frac{k^2}{4k_\perp^2}\alpha^2\right)^{-1/2}. \tag{2.21}$$

利用 $k_\parallel \sim m\rho_\mathrm{i}$ 取自图2(*a*)，我们可以组合式（2.18）–（2.21），预测给定 N_m 时的 $\lambda_\parallel/\rho_\mathrm{i0}$、$\alpha$以及 NP 模式在 $k_\parallel/k_\perp$ 处的 $\beta_\mathrm{i0} \gg 1$。

这一过程的结果如图2(*b*)中的空心圆所示。值得注意的是，对于 N_m，镜像模的数量基本不受 NP 模式振幅影响，因此，在振幅为 $\alpha \gtrsim 0.4$的 NP 模式的镜像不稳定区域内可以容纳多个镜像模。然而，在临界振幅 $\alpha \approx 0.3$下，如果 $\lambda_\parallel \sim 10^3\rho_\mathrm{i0}$，预测只能容纳一个或许两个镜像模。在这种情况下，镜像不稳定性可能无法有效调节压力各向异性。

总之，我们预测，具有 $\alpha \gtrsim 0.4$ 和 $\lambda_\parallel \gtrsim 10^3\rho_\mathrm{i0}$ 的 NP 模式应能够维持大量镜像不稳定涨落。

2.1.5. 镜像不稳定性诱导的有效碰撞率

现在，我们尝试估算这些镜像不稳定扰动磁力线所引发的有效碰撞频率。为此，我们借鉴 Newman（2020）关于带电粒子在拉莫尔尺度磁场不规则结构区域内发生俯仰角扩散的论述。首先，我们推测，离子每次与单个镜像模边缘相遇，都会使等离子体的温度各向异性$\mathcal{A} \doteq w_\perp^2/2 - v_\parallel^2$ 降低 χ 的比例（此处，上横线表示对离子分布函数取平均）。按照 Newman（2020）的做法，我们将 χ 定义为 $(3/2)\sin^2\vartheta$，其中 ϑ 是受扰磁力线的局部偏转角。我们估算 $\sin^2\vartheta \approx (\delta B_{\perp,\mathrm{m}}/B)^2 \approx (k_{\parallel,\mathrm{m}}/k_{\perp,\mathrm{m}})^2(\delta B_{\parallel,\mathrm{m}}/B)^2$，，并利用先前关于镜像不稳定性非线性演化的研究结果；这些结果表明，在通过强烈的俯仰角散射达到饱和之前，镜像模的振幅可增长至$|\delta B_{\parallel,\mathrm{m}}/B| \approx 1/3$（Kunz 等（2014a）；Riquelme 等（2015）；Sironi 和 Narayan（2015））。由此可得

$$\chi \approx 0.2\,(k_{\parallel,\mathrm{m}}/k_{\perp,\mathrm{m}})^2. \tag{2.22}$$

为求得有效碰撞频率 ν_eff，接下来我们将 χ 乘以典型粒子单位时间内遇到的拉莫尔尺度镜像模数量。对于振幅为 $\alpha \gtrsim 0.4$ 的 NP 模式，粒子能够穿过 NP 模式中 $|B|$ 增强区的判据是 $|v_\parallel|/w_\perp \gtrsim \sqrt{4/3}$。换言之，~~对于~~粒子速度近麦克斯韦分布的情形，大多数粒子将被限制在 NP 模式的波谷中，那里应存在离子拉莫尔尺度镜像结构；它们每经过一个反弹时间，便会两次穿越这片镜像不稳定区域。在这种情况下，每个被俘获粒子在每个穿越时间 $\Delta t \approx \pi\Omega^{-1}$ b 内都会遇到 N_m 个散射镜像。离子各向异性的平均变化率于是为

$$\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} \approx -\frac{\chi}{\pi}N_\mathrm{m}\Omega_\mathrm{b}\mathcal{A} \doteq -\nu_\mathrm{eff}\mathcal{A}, \tag{2.23}$$

其中，在最后一个等式中，我们引入了有效碰撞频率 ν_eff。综合（2.7）和（2.18）–（2.23），可得

$$\nu_\mathrm{eff} \approx 0.003\,\mathcal{G}\Omega_\mathrm{i0}, \tag{2.24a}$$

其中

$$\mathcal{G} \doteq k_{\parallel,\mathrm{m}}\rho_\mathrm{i}\left(\frac{k_{\parallel,\mathrm{m}}}{k_{\perp,\mathrm{m}}}\right)^2\left(\alpha - \alpha^2 + \frac{k^2}{4k_\perp^2}\alpha^3\right)^{1/2}\cos^{-1}\left(\frac{2 - \sqrt{4 - k^2/k_\perp^2}}{\alpha}\right) \tag{2.24b}$$

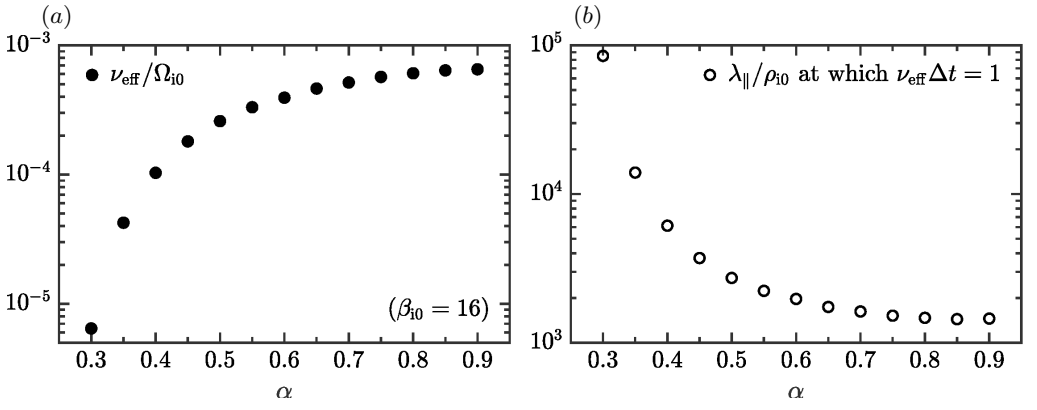


图 3：（a）NP 模式的预测散射频率 $\nu_{\rm eff}$（见（2.24））， 由镜像不稳定性引起，NP 模式的振幅为 α，采用图 2（a）中的 $k_{\parallel,\ {\rm m}}\rho_{\rm i}$ 值。（b）满足 $\nu_{\rm eff}\Delta t \geqslant 1$ 的 NP 模式的最小平行波长 $\lambda_\parallel$ ，其中$\Delta t=\pi\Omega^{-1}$ b 。这类模态应当包含镜像模，其散射频率与穿越时间相当。两个面板中的数据均对应于 $\beta_{\rm i0}=16$ 和 $k_\perp/k_\parallel=4$；只要满足 $\beta_{\rm i0}\gtrsim 10$ 和 $(k/k_\perp)^2\simeq 1$，所示数值对这两个参数均不敏感。

is a 仅是 NP 模式的振幅和波数倾斜角的函数。

方程（2.24）指出，预测的 $\nu_{\rm eff}$ 与 NP 模式的波长无关，并随 α 增大而增大；这些关键特征将在 §2.2.6 中检验（并得到证实）。图 3（a）显示了在 $\beta_{\rm i0}=16$ 和 $k_\perp/k_\parallel=4$ 条件下，预测的 $\nu_{\rm eff}$ 对 α 的依赖关系；只要满足 $\beta_{\rm i0}\gtrsim 10$ 和 $(k/k_\perp)^2\approx 1$，所示数值对这两个参数均不敏感。预测的碰撞频率从 $\alpha=0.9$ 逐渐降至 0.5，随后急剧下降一个数量级以上，在$\alpha=0.3$处降至 $\nu_{\rm eff}\lesssim 10^{-5}\Omega_{\rm i0}$ 。在面板（b）中，我们绘出了满足 $\nu_{\rm eff}\Delta t\geqslant 1$ 的 NP 模式的最小平行波长 $\lambda_\parallel$ ，其中 $\Delta t=\pi\Omega^{-1}$ b。此类模态应当包含镜像模，其散射频率与穿越时间相当。请注意，对于 $\alpha=0.3$，要使散射频率大于穿越时间的倒数， $\lambda_\parallel/\rho_{\rm i0}$ 必须为 $\gtrsim 10^5$。解读 §§2.2.3 和 2.2.6 中给出的模拟结果时，值得牢记这些数值。

2.1.6. *NP* 模式非线性饱和的抑制

一旦 $\nu_{\rm eff}$ 与反弹频率相当，诱导散射便会使离子分布函数各向同性化，其速度快于非线性饱和维持 $\delta f(v_\parallel)$ 在 $v_\parallel\sim 0$附近的平台的速度。在这种情况下，非线性饱和会受到抑制，NP 模式应以与（2.5）（Johnston 1971年）相当的速率恢复衰减。在衰减过程中，模振幅最终会降至触发镜像不稳定性的临界阈值（2.15）以下，而镜像模本身也将变为短波长衰减 NP 模。在镜像不稳定性阈值附近，这些短波长 NP 模衰减得非常缓慢，因此，即使大尺度 NP 模在形式上已不再具有镜像不稳定性，相关的磁场强度涨落仍会在一段时间内保持非线性。因此，我们推测，NP 模将持续衰减，直到镜像涨落（及其诱导散射）有足够时间消散。或许除 NP 模波长渐近趋于无限长的情况外

因此，NP 模降至阈值以下与其非线性饱和重新建立之间应存在一段延迟。

前述论证表明，高β 等离子体中的无碰撞 NP 模式存在三种截然不同的状态：(i) 当模振幅满足 $|\delta B_\parallel/B_0| < 0.3$时，相关的压强各向异性不足以触发镜像不稳定性，因此该模会经历缓慢的 Barnes 阻尼，直到分布函数在 $v_\parallel \sim 0$附近变平，使阻尼在非线性过程中饱和。因此，这些压力平衡结构的寿命很长。(ii) 当 $|\delta B_\parallel/B_0| \gtrsim 0.3$时，压强各向异性会在 $\delta B_\parallel < 0$ 的区域触发镜像不稳定性，并最终引入有效碰撞率；对于足够大的 NP 模式波长，该碰撞率会抑制非线性平台的维持。因此，线性衰减恢复，直至 NP 模式衰减至远低于其振幅阈值。(iii) 由于诱导散射率（2.24）不随 NP 模式波长变化，因此可以预期，当$\nu_{\rm eff} \gg k_\parallel v_{\rm th}$时，在极长波长下会出现第三种流体类状态，i 并且无碰撞阻尼会彻底停止。我们将在§2.2.6中讨论这种第三种状态是否可实现，并推测其行为。

2.2. 数值结果

2.2.1. 求解方法和初始条件

为检验 §2.1 中提出的理论，并探究镜像不稳定性充斥的 NP 模态的非线性演化，我们采用混合动理学粒子网格代码 Pegasus++ (孔茨等，2014*b*；Arzamasskiy 等，准备中）。Pegasus++ 利用一组带正电的宏粒子演化离子分布函数 $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$，这些粒子与自洽电磁场相互作用 $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r})$ 以及 $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r})$。这些场则在离散网格上演化，遵循法拉第定律和广义欧姆定律；后者包含感应电场、霍尔效应，以及由（假定为无质量的）电子流体中的压力梯度引起的热电场。后者确保准中性。为简单起见，我们采用电子的等温状态方程，温度为 $T_{\rm e} = T_{\rm i0}$。将磁场插值到宏粒子所在位置，以及将宏粒子的相空间信息沉积到网格上，均采用二阶精度的三角形插值模板。

NP 模式的所有模拟均在二维网格上进行，该网格沿平均磁场方向延伸 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\hat{\boldsymbol{x}}$，并覆盖一个完整的 NP 模式波长 $L_x \times L_y = \lambda_\parallel \times \lambda_\perp$。后者的范围为 $\lambda_\parallel = 1000\rho_{\rm i0}$ 至 $4000\rho_{\rm i0}$，纵横比为 $\lambda_\parallel/\lambda_\perp = 4$ 或 8。在改变这两个维度时，横向维度从不小于 $250\rho_{\rm i0}$，从而确保 NP 模式与任何离子拉莫尔尺度不稳定性之间具有足够的尺度分离。在所有运行中，空间分辨率为 $\Delta x = \Delta y \simeq 0.3\rho_{\rm i0}$，每个网格单元的宏粒子数为$10^4$ 或 5×10^3（后者仅用于我们最大的模拟）；这些数值与此前发表的碰撞less Alfv´én 波（Squire 等 2017*a*）和离子声波（孔茨 等 2020）Pegasus 模拟中所采用的数值相近，这些模拟研究的是易发生火hose/镜像不稳定性的等离子体。为减小网格尺度的有限粒子数噪声对 NP 模式演化及粒子轨迹的影响，对离子分布函数的计算矩应用了数字低通滤波器。

在 $t = 0$，我们使用矢势扰动磁场

$$\boldsymbol{A}(x, y) = -\frac{\alpha B_0}{|k|}\sin(k_\parallel x + k_\perp y)\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{2.25}$$

其中，$k_\parallel = 2\pi/\lambda_\parallel$、$k_\perp = 2\pi/\lambda_\perp$和 α 是量化该模态的无量纲数

振幅 度。要激发 NP 模式，与之相关的磁压变化 e,

$$\frac{\delta B^2}{8\pi} = -\frac{\alpha B_0^2}{8\pi}\cos(k_\parallel x + k_\perp y)\left[\frac{2k_\perp}{|k|} - \alpha\cos(k_\parallel x + k_\perp y)\right], \tag{2.26}$$

必须恰好由等离子体垂直压强的一个扰动来平衡（参见（2.6*c*））。为使后者的初始化相对简单，我们选择不从精确的 NP 本征模开始，而是从等离子体密度的等温扰动开始 δn，此时扰动后的垂直压强为$\delta p_\perp = \delta n\,(T_{\mathrm{i}0} + T_{\mathrm{e}})$。用（2.26）平衡此表达式，并求解 δn，即可得到初始离子分布函数

$$f(0,x,y,v) = F_{\mathrm{M}}(v)\left\{1 + \frac{\alpha}{\beta_0}\cos(k_\parallel x + k_\perp y)\left[\frac{2k_\perp}{|k|} - \alpha\cos(k_\parallel x + k_\perp y)\right]\right\}. \tag{2.27}$$

在这种情况下，模拟区域内的初始总压强（磁压强与热压强之和）为常数，且等于（$B_0^2/8\pi$）$(1+\beta_0)$；请注意，$\beta_0 \doteq \beta_{\mathrm{i}0}(1 + T_{\mathrm{e}}/T_{\mathrm{i}0})$。从压强各向同性等离子体出发的优点在于，任何产生的压强各向异性都是自洽地产生的，而非人为加入的。这也与求得 $\Delta_{\mathrm{NP}}(t)$ 的解析解时所作的假设一致，见方程（2.10）。

在我们的模拟中，除两组外，均设置 $\beta_{\mathrm{i}0} = 16$，该值足够大，使我们能够与§2.1中推导出的渐近表达式进行比较，但又不会大到无法捕捉 NP 线性衰减率的完整衰减时间。我们改变 $\alpha \in [0.1, 0.8]$，使其涵盖触发镜像不稳定性的预测 NP 振幅阈值（2.15）。我们特别关注 $\lambda_\parallel = 2000\rho_{\mathrm{i}0}$、$\lambda_\perp = 500\rho_{\mathrm{i}0}$和 $\alpha = 0.8$这一情形，并将其称为基准情形。此外，我们还进行了另外两组运行，一组设置为 $\beta_{\mathrm{i}0} = 4$，另一组设置为 $\beta_{\mathrm{i}0} = 36$，两者均取 $\alpha = 0.8$、$\lambda_\parallel = 1000\rho_{\mathrm{i}0}$和 $\lambda_\perp = 250\rho_{\mathrm{i}0}$。

下文中，$\langle\cdot\rangle$表示在整个区域内进行的空间平均；$\langle\cdot\rangle_{\mathrm{m}}$表示在 NP 模态的镜像不稳定区域内进行的空间平均；$\langle\cdot\rangle_k$表示沿 y方向进行的空间平均，同时考虑波前位置的变化（以使区域内所有受扰动和未受扰动部分对齐）。后者称为“波前平均”；请注意，它保持x坐标（沿 $\boldsymbol{B}_0$方向）不变。

2.2.2. 基准运行的总体演化

我们首先通过基准运行来讨论Pegasus++ 的结果，并将其与§2.1中提出的一些预测进行对照。这些预测包括 NP 模式的激发及其随后发生的线性无碰撞阻尼、其非线性饱和、在模态中 $\delta B_\parallel < 0$ 所在区域同时产生镜像不稳定的压强各向异性，以及饱和的拉莫尔尺度镜像模以高于反弹频率的速率散射俘获离子的俯仰角后，线性阻尼重新开始。图 4 通过展示 NP 模式振幅随时间的变化，说明了这些演化阶段。从等温压强平衡初始条件迅速调整后，NP 模式出现，并以线性速率（黑线）衰减约一个反弹时间 $\Omega^{-1}{}_{\mathrm{b}}$。紧接着，随着非线性饱和开始，衰减停滞（蓝线）。图 5显示，与此同时，NP 模式在 $\delta B_\parallel < 0$ 所在区域产生了较大的正压强各向异性，而其他区域的压强各向异性几乎为零，这与预测（2.14）（虚线）一致。可以看到，镜像不稳定区域（图 $\langle\beta_{\perp\mathrm{i}}\Delta\rangle_k$ 5中虚线以上的）占据了 NP 模式波长的 ∼40%，这与 2.19）在 $\alpha = 0.8$ 时的结果一致。正是在这一镜像不稳定区域中，磁场在离子拉莫尔尺度上产生了中等振幅的斜向强度涨落，这些涨落

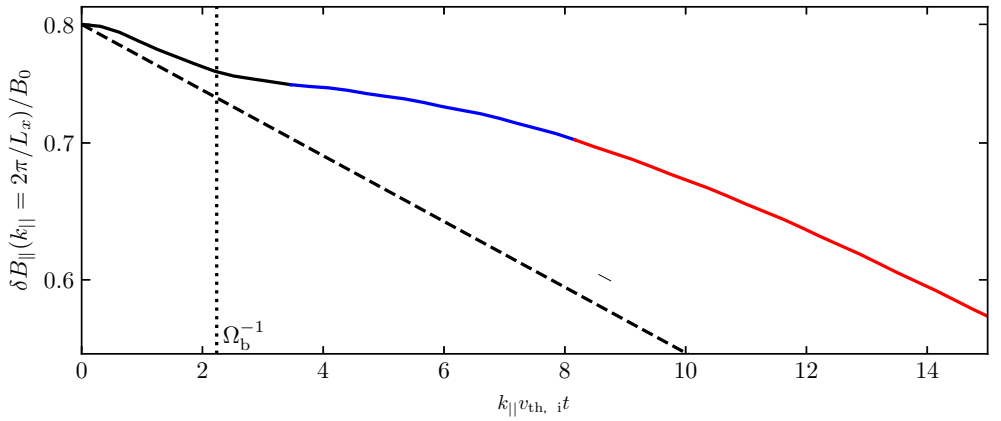


图 4：基准运行中 NP 模式的磁场强度扰动振幅随时间的变化，并标示和以不同颜色编码预测演化的不同阶段。虚线表示压力各向同性等离子体中 NP 模式的线性衰减率（ 2.5），其中 $\beta_{\rm i0} \gg 1$。相关讨论见 §2.2.2 。

在图 6中清晰可见。最强的涨落约占盒子长度的四分之一，其振幅与平均场相当。磁力线的相关扭曲最终以与反弹频率相当的速率散射粒子（见图 7及§2.2.3 中的相关讨论）。因此，NP 模式振幅进入“受抑饱和”阶段（图 4，红线）；在此期间，镜像诱导碰撞性使非线性平台逐渐消退，Barnes 阻尼随之恢复。[4]

在 §2.2的其余部分中，我们将更详细地考察这些阶段，以及它们对模振幅和尺度分离的依赖性；首先讨论镜像模诱导的散射及其对 NP 模式压强各向异性的影响。

2.2.3. 有效碰撞率：粒子散射和俘获

图7展示了基准运行中镜像诱导的有效碰撞率 $\nu_{\rm eff}$ 随时间的演化，其计算方法遵循 Kunz 等人（2014a、2020）、Melville 等人（2016）和 Squire 等人（2017a）所用的方法。具体而言，追踪每个粒子的磁矩$\sim 10^4$ ，并监测其是否发生至少达 $\kappa = 1.2$ 倍的变化（既包括突变，也包括累积变化；Kunz 等，2020 使用这一标准测量不稳定离子声波中的火hose/镜像诱导散射）。记录发生这些变化的时间间隔 τ 以及变化发生的位置，并使用 $\nu_{\rm eff} \doteq (\ln\ \kappa)^2/\langle\tau\rangle$，根据平均散射时间$\langle\tau\rangle$ 计算空间相关的有效碰撞频率 $\nu_{\rm eff}$ 。此外，还使用 $\kappa \in [1.1, 1.5]$进行了这项计算，结果没有显著差异。

底部面板显示了盒平均有效碰撞率（黑线）和波前平均有效碰撞率的最大值（红线）随时间的变化。两者在镜像不稳定性的初始阶段都迅速增长，随后达到准稳态，其中最大值为 $\max(\langle\nu_{\rm eff}\rangle_k) \approx 0.0035\Omega_{\rm i0} \approx 2.5\Omega_{\rm b}$。我们发现，

[4]我们未能在面外分量中辨别出高于噪声底的任何涨落B_z，而这类涨落本应表明存在离子回旋不稳定性（例如，Gary & Lee 1994）。然而，在以下运行中出现了这类涨落：$\beta_{\rm i0} = 4$ 和 $\alpha = 0.8$；在这个较低的 $\beta_{\rm i0}$值下，离子回旋阈值与镜像阈值相当（例如，Hellinger *et al.* 2006）。尽管如此，NP 模式在后续演化过程中并未表现出明显差异。

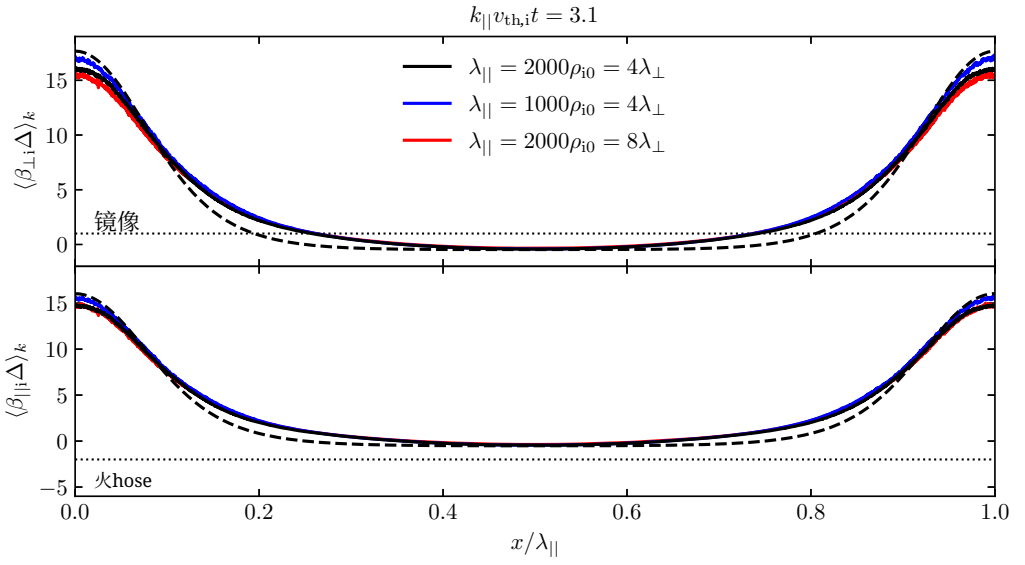


图 5：当压强各向异性接近其最大值时，$\beta_{\perp\mathrm{i}}\Delta$ 和 $\beta_{||\mathrm{i}}\Delta$ 在$k_{\parallel}v_{\mathrm{th,\ i}}t = 3.1$处的波前平均剖面，与线性本征模的理论预测（2.14）进行比较，适用于 $\alpha = 0.8$ 和不同 NP 模式波长 $\lambda_{\parallel}$ 以及 $\lambda_{\perp}$。基准运行对应于黑色实线。$\beta_{\mathrm{i}}\Delta$ 远超镜像阈值的正值出现在 $\delta B_{\parallel} < 0$的区域。其他位置则通过降低 β_{i} 来补偿负压强各向异性，以避免激发火hose不稳定性。

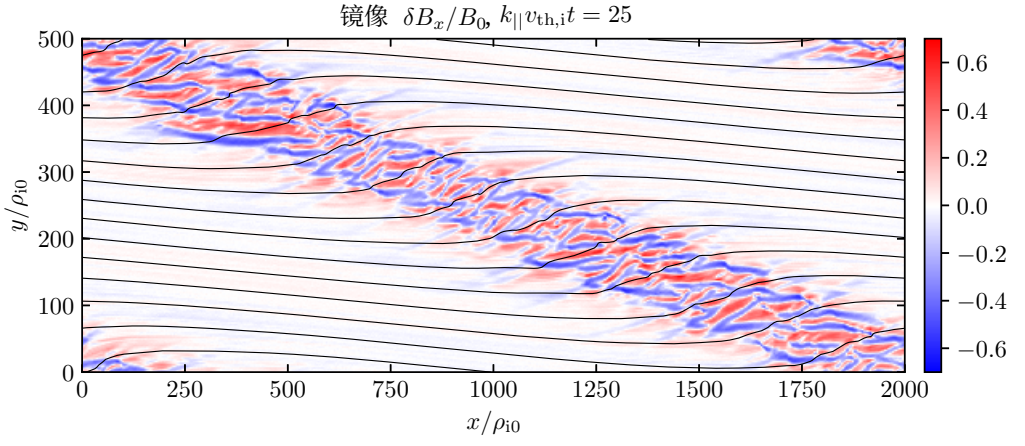


图 6：基准运行中 $k_{\parallel}v_{\mathrm{th,i}}t = 25$ 时的磁场扰动 x 分量，已滤除与 $\alpha = 0.8$ NP 模式相关的波数。此时，镜像不稳定性已完全进入非线性阶段，导致磁场方向发生大振幅、短波长偏转，从而使粒子发生俯仰角散射。

散射率达到这一稳态所需的时间尺度基本不受 NP 模式波长的影响，不过随着 α 减小，该时间尺度会有所增加，这是因为镜像不稳定性的线性增长率较低。顶部面板所示的波前平均碰撞性的时空图表明，最大

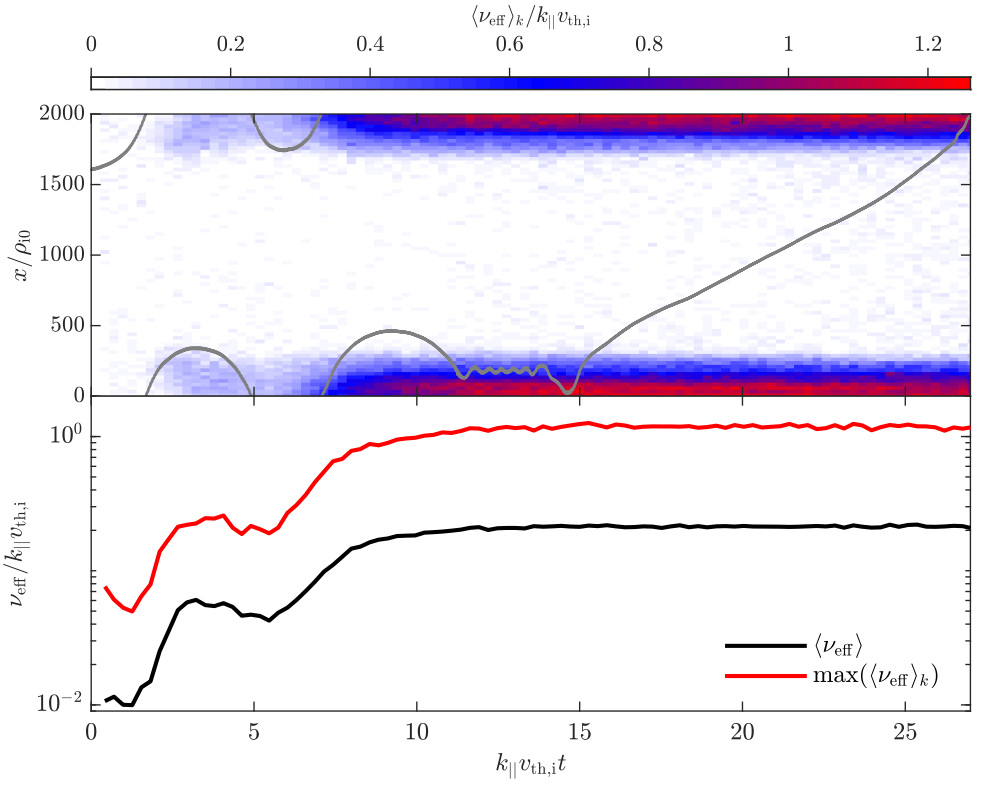


图7：基准运行中由镜像不稳定性导致的有效碰撞率 $\nu_{\rm eff}$，其中 $\alpha = 0.8$ 和 $\lambda_{||} = 2000\rho_{i0} = 4\lambda_{\perp}$。上图：$\langle\nu_{\rm eff}\rangle_k$ 的时空图（彩色）。灰线表示一条示意性粒子轨迹，展示了共振反弹，随后粒子被俘获在镜像涨落中，最终散射出与 NP 模式的共振。下图：随时间变化的盒平均（黑色）和最大波前平均（红色）碰撞频率。

的取值 $\nu_{\rm eff}$ 局限于镜像不稳定区域的中心，该区域边界附近的值略小，因为那里的镜像振幅较小（参见图6）。由于模振幅足够大，大多数等离子体粒子都被约束在 $\delta B_{||} < 0$ 的区域内，因此很大一部分热等离子体都受到这种碰撞率的影响。例如，当 $\alpha = 0.8$时，俯仰角满足$|v_{||}|/w_{\perp} \leqslant \sqrt{\max(B)/\min(B)} - 1 \approx 2.8$ 的粒子若不受碰撞影响，便会受到镜像约束。在这些区域之外，等离子体是稳定的，碰撞率很低；因此，盒平均碰撞率比最大值低五倍以上。上图还以灰线显示了单个受追踪粒子的路径。初始演化过程显示，粒子在 $\delta B_{||} < 0$ 区域内反弹。当镜像涨落达到非线性振幅后，粒子会暂时被俘获在一个不断增长的镜像中。最终，粒子在俯仰角上的散射足够大，从而解除俘获并穿过 $\delta B_{||} > 0$ 区域，打破其与 NP 模式的共振。

2.2.4. 压强各向异性的演化

图8 上图显示了基准运行中波前平均值的最大值随时间的演化 Δ 和 $\beta_{\perp i}\Delta$ 。

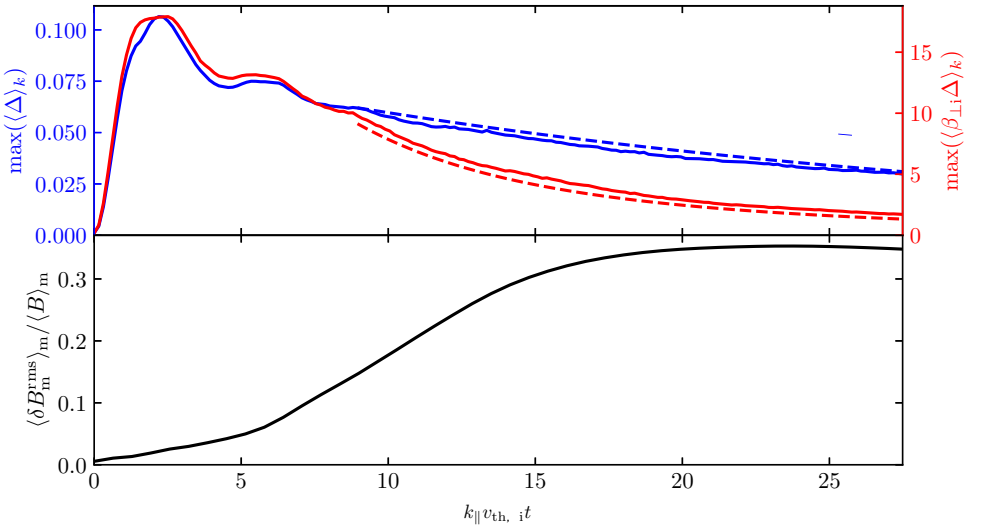


图8：上：基准运行中，波前平均 Δ （蓝色实线）和 $\beta_{\perp i}\Delta$ （红色实线）随时间的最大值。$\langle\Delta\rangle_k$ 的演化与预测的线性演化（蓝色虚线）吻合良好，这表明 $\beta_{\perp i}\Delta$ 的快速下降主要是由于 NP 模式恢复衰减，以及镜像涨落增长导致 $\beta_{\perp i}$ 降低。下：镜像涨落的均方根振幅，在镜像不稳定区域内取平均，并以该区域平均“背景”（即导引场加 NP 模式）磁场强度归一化。镜像不稳定性的增长与 $\langle\beta_{\perp i}\Delta\rangle_k$的下降同时发生。

下图描绘了镜像涨落均方根振幅的增长情况，该振幅是在 $\delta B_\parallel < 0$ 所对应的镜像不稳定区域内取平均，并以该区域内平均“背景”（即导引场加NP模态）磁场强度归一化。涨落增长到足以散射粒子，并使NP模态恢复线性衰减，从而令压强各向异性衰减。事实上，$\langle\Delta\rangle_k$ 与线性预测（2.12）相近，此处以蓝色虚线表示。同样，$\langle\beta_{\perp i}\Delta\rangle_k$ 可用（2.14建模，方法是将$\delta B_\parallel/B_0 = -\alpha$替换为 $\exp(-i\zeta k_\parallel v_{th,i}t)$，其中 ζ 是线性特征值（2.5）。图8中的红色虚线描绘了这一表达式；我们从$k_\parallel v_{th处开始衰减,\ i}t = 9$并设定 $\alpha = 0.68$ ，以计入（暂时的）非线性饱和所造成的延迟。在更大的尺度分离下，我们预计镜像模诱发的俯仰角散射会更快，能够比线性衰减更有效地调节压强各向异性；届时，该模态将不再类似于无碰撞线性NP特征模（见§2.2.6）。

镜像模的增长会改变 NP 模式剖面的形状，如图9所示。图中展示了基准运行在 $k_\parallel v_{th,\ i}t = 3$、6、11 和 27 时 $\beta_{\perp i}\Delta$ 的波前平均剖面演化。镜像不稳定性活跃区域内的剖面已变平，尽管该模态似乎仍接近线性本征模，图8对此有所体现。 $\beta_{\perp i}\Delta$ 的降低速度远快于 Δ 自身的线性衰减，这凸显了 $\beta_{\perp i}$ 在实现边际稳定性方面的重要作用。这进一步支持了这样的观点：镜像涨落并非直接作用于各向异性以实现 $\beta_{\perp i}\Delta = 1$，而是使 NP 模式得以衰减，并使 Δ 和 $\beta_{\perp i}$ 均能比原本更快地达到边际稳定性。

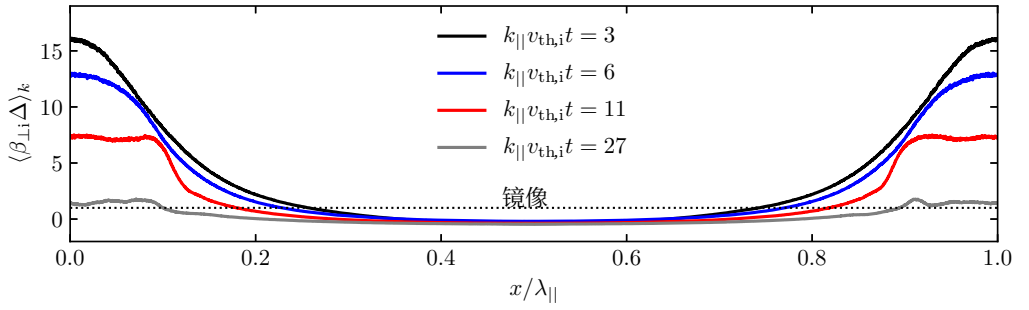


图9： $\beta_{\perp\mathrm{i}}\Delta$的波前平均剖面的时间演化。图中展示了四个时刻：初始衰减阶段调整至NP本征模后不久（黑线）；NP 模式衰减达到饱和的中间时刻（蓝线）；镜像模变为非线性并以足够快的速度散射粒子、从而抑制NP模式饱和之后（红线）；以及之后 $\beta_{\perp\mathrm{i}}\Delta$ 降低到足以使镜像模处于边际稳定状态时（灰线）。

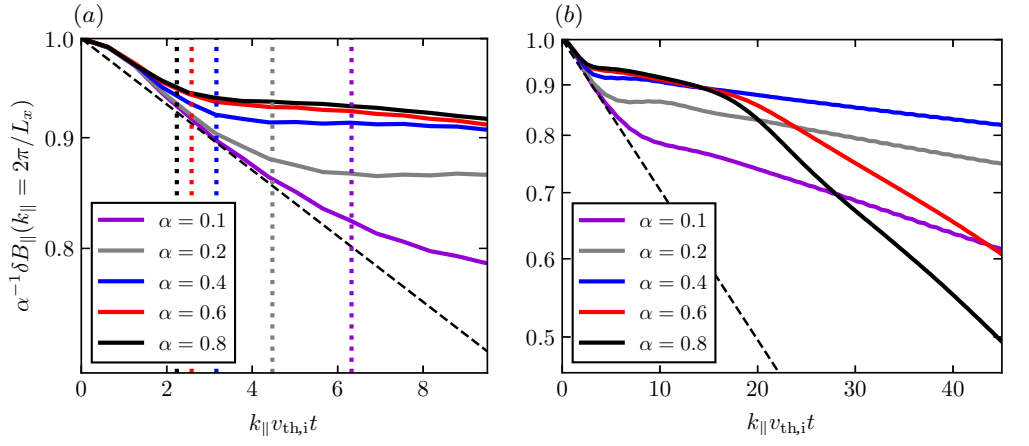


图 10：NP 模式的磁场强度扰动幅度相对于其初始值的归一化结果随时间的变化，针对 $\lambda_{||} = 1000\rho_{\mathrm{i}0} = 4\lambda_{\perp}$ 及不同的 α。（a）早期阶段，此时NP模式经过约一个反弹时间后发生非线性饱和 $\sim\Omega^{-1}$ b （垂直点线；见（2.7））。虚线表示线性衰减率（2.5）。（b）晚期阶段，显示振幅$\alpha \geqslant 0.6$下非线性饱和受到抑制。

2.2.5. 非线性饱和的抑制与渡越时间阻尼的恢复

不同 NP 模式振幅下非线性饱和与镜像诱导碰撞性的影响见图10。出于计算成本考虑，这些运行采用了 $\lambda_{||} = 1000\rho_{\mathrm{i}}$，而非基准值 $2000\rho_{\mathrm{i}}$。我们使用傅里叶变换选取背景场盒尺度波长扰动的幅值（即 NP 模式的振幅），并将其绘制为随时间变化的曲线。在面板（a）中展示了演化的初始阶段：起初呈现线性衰减，衰减率与预测值（2.5）相近（以黑色虚线表示），且近似不受 α影响。大约经过一个反弹时间（以同色点线标出）后，衰减开始停滞，模振幅趋于恒定值。对于较大的模振幅，这种非线性饱和会更早出现，趋势

具有 $\alpha^{-1/2}$ 反弹时间的标度关系（见（2.7））。在振幅 $\alpha \gtrsim 0.4$下，非线性饱和保留了超过 90% 的原始模振幅，这表明高 β 下的大振幅无碰撞 NP 模可能具有相当长的寿命。

图 10(*b*) 展示了这些模态在更长时间尺度内的行为。对于振幅$\alpha \leqslant 0.4$，非线性饱和仍然存在，线性衰减率此后不再出现。相比之下，$\alpha = 0.6$ 和 0.8 NP 模中较大的压强各向异性会产生振幅足够大的镜像涨落，从而干扰非线性平台的维持。随后，这些模态能够进一步衰减，并通过平台生成与俯仰角散射之间的平衡，将磁能转化为粒子能量。在$\alpha = 0.8$时，线性衰减率完全恢复。$\alpha = 0.6$ 情况下的衰减率略低，这是因为镜像诱导散射率相对于 $k_{\parallel} v_{\mathrm{th,i}}$较慢；在更大的尺度分离 $\lambda_{\parallel} = 2000\rho_{\mathrm{i0}}$ 下（未显示），$\alpha = 0.6$ 的线性衰减率完全恢复。值得注意的是，这些运行所用的 $\lambda_{\parallel}$ 值是基准运行中该值的一半，而镜像模诱导的散射使衰减恢复至接近线性水平的时间，以 Ω_{i0}为单位时却相同。因此，在远大于我们目前能够模拟的尺度分离下，我们预计快速的镜像增长及其相关的粒子散射几乎会立即侵蚀非线性平台。

我们的最后一项证据表明，非线性平台在亚临界 NP 模式振幅下得以维持，而在超临界振幅下遭到侵蚀；这也是最直接的证据。在图11中，我们展示了在$\delta B_{\parallel} < 0$ 区域内测得的离子速度分布函数 $f(v_{\parallel}, w_{\perp})$，并减去了双麦克斯韦拟合；这些数据来自两次运行，两次运行均具有 $\lambda_{\parallel} = 4\lambda_{\perp}$，且分别具有 $\alpha = 0.4$（左列）或 0.8（右列）。这些分布函数是在两个时段内取时间平均得到的，每个时段的持续时间为 $4(k_{\parallel} v_{\mathrm{th,i}})^{-1}$，中心时刻分别为$k_{\parallel} v_{\mathrm{th,i}} t = 5.4$（上排）和$k_{\parallel} v_{\mathrm{th,i}} t = 21$（下排）。在 $\alpha = 0.4$ 运行中，离子俯仰角较大且被充分俘获的区域内，分布相对于双麦克斯韦分布有所降低，这表明平行分布在 $v_{\parallel} \sim 0$附近变平。这一特征在$k_{\parallel} v_{\mathrm{th,i}} t = 21$之后仍然存在，也是图 10 中所见衰减停滞的原因。在$\alpha = 0.8$ 运行中，早期分布函数中观察到的变平现象随后消失，使渡越时间阻尼得以恢复（见图4）。事实上，在较高的 $w_{\perp}$、靠近 $v_{\parallel} = 0$处，相空间密度显著增强；我们推测，阻尼恢复使俘获粒子进一步受到回旋加热，导致分布函数的 $w_{\perp}$ 尾部出现少量非热粒子。请注意，早期变平区域的宽度随振幅显著增大，这符合俘获判据 $|v_{\parallel}|/w_{\perp} < \sqrt{|B_{\max}|/|B_{\min}| - 1}$的预期。

2.2.6. 对尺度分离的依赖

由（2.24）预测的有效碰撞频率表明，如果初始 NP 模式振幅和波数倾斜角保持不变，那么增大模态的波长应该不会影响碰撞频率。这可以改写为热穿越时间与碰撞频率之间更直观的关系，$\nu_{\mathrm{eff}}/(k_{\parallel} v_{\mathrm{th,\ i}}) \propto \lambda_{\parallel}$。图12 展示了若干不同 NP 模式波长、波数倾斜角和振幅下，箱体平均有效碰撞频率的最大值（经$k_{\parallel} v_{\mathrm{th,\ i}}$ 归一化）。在两种波数倾斜角下，测量值均与比例关系的预期吻合良好。这一证据表明，在波长进一步增大时，碰撞频率相对于穿越时间仍会继续增加。请注意，$\alpha = 0.6$的实测碰撞性约为 $\alpha = 0.8$的一半，这与图3（*a*）所示的预测定性一致，即 NP 模式振幅减小时散射应减弱。模拟中满足 $\alpha = 0.4$ 和 $\lambda_{\parallel} = 1000\rho_{\mathrm{i0}}$

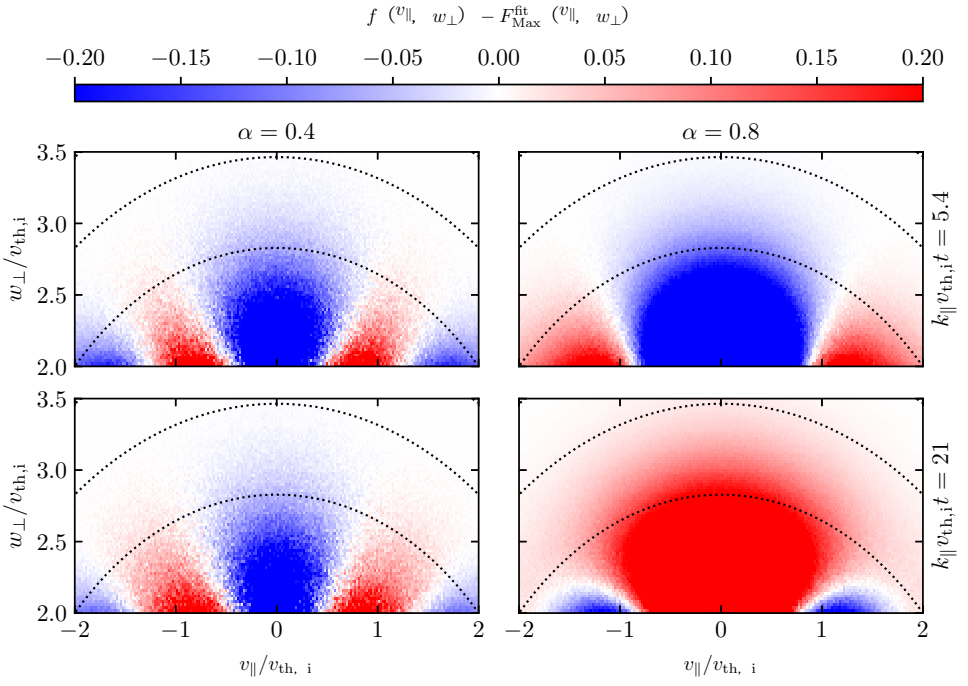


图11：在 $\delta B_\parallel < 0$区域内测得的离子速度分布函数 $f(v_\parallel,\ w_\perp)$，减去双麦克斯韦拟合后，来自两个模拟，其 $\lambda_\parallel = 4\lambda_\perp$ 且分别具有 $\alpha = 0.4$ （左列）或 0.8（右列）。面板的上（下）排对应时间 $k_\parallel v_{\rm th,\ i} t = 5.4\ (= 21)$。为显示细节，色标允许达到饱和。虚线表示总能量的等值线，$w_\perp^2 + v_\parallel^2 = \text{const}$。

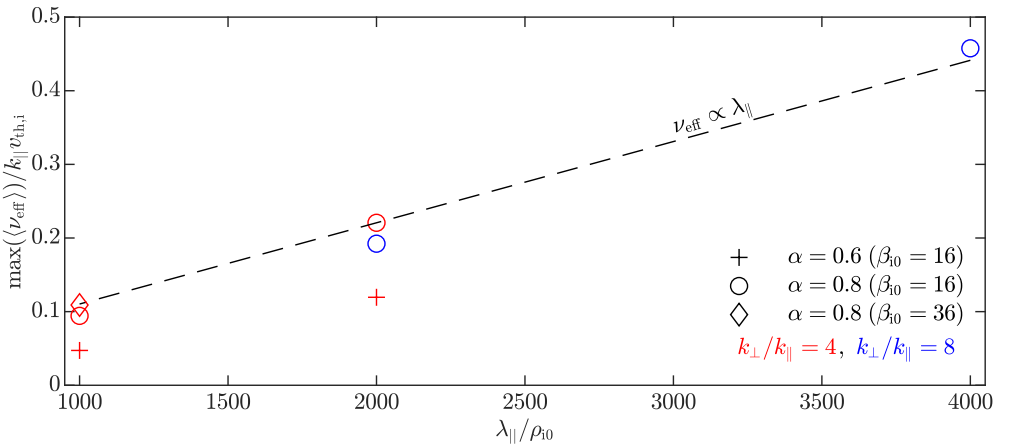


图 12：测得的镜像诱导有效碰撞频率最大值$\nu_{\rm eff,\ max}$ 随 NP 模式波长的变化，针对 $\beta_{i0} = 16$，涵盖两种不同的波数倾斜角和两种不同的初始振幅（还包括另一次具有 $\alpha = 0.8$、$\beta_{i0} = 36$和$\lambda_\parallel/\rho_{i0} = 1000$ 的运行）。图中显示了预测的标度关系 $\nu/(k_\parallel v_{\rm th,\ i}) \propto \lambda_\parallel$ （黑色虚线），并以基准情形归一化（ $\lambda_\parallel = 2000\rho_{i0}$ 处的红圈）。

其非线性饱和未受镜像模干扰，这也与图 3(*b*) 中的预测一致。最后，在 $\alpha = 0.8$, $\lambda_\parallel/\rho_{\mathrm{i}0} = 1000$，以及 $\beta_{\mathrm{i}0} = 36$ （红色菱形）条件下测得的碰撞性，与其他条件相同的 $\beta_{\mathrm{i}0} = 16$ 运行（红色圆圈）中的碰撞性相当，这与理论预期（2.24）一致，即 ν_{eff} 应当独立于 $\beta_{\mathrm{i}0}$，适用于 $\beta_{\mathrm{i}0} \gtrsim 10$。[5]

正如 §2.1.6 中的推测，$\nu_{\mathrm{eff}}/(k_\parallel v_{\mathrm{th,i}})$ 随 $\lambda_\parallel$ 呈线性标度，这表明在 NP 模波长足够长时，可能存在流体类状态。为了研究这种状态（尽管只能近似研究），我们考察了恒定俯仰角散射率下 NP 模的线性衰减率，如图 13 所示。附录B介绍了确定该衰减率的详细方法；请注意，对于所有散射率，频率的实部均为零，即该模态保持非振荡状态。图的左侧，碰撞频率较小，此时恢复为无碰撞NP模；右侧，碰撞频率较大，该模态则变为 MHD 熵模。MHD 熵模与动力学NP模相似，同样没有实频率，但在完全有碰撞的极限下，它只涉及密度扰动。对于所采用的 $k_\perp/k_\parallel = 4$ 和 $\beta_{\mathrm{i}0} = 16$ 数值，这两种状态之间的转变发生在 $\nu \approx 3k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}$。利用高 β 和 $k \simeq k_\perp$ 下的渐近展开，可以证明，转变碰撞性近似按 $\nu \sim (3/4)\sqrt{\beta_{\mathrm{i}}}k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}$ 标度。对于 $\alpha \gtrsim 0.6$，取 $\nu_{\mathrm{eff}}/\Omega_{\mathrm{i}0} \sim (3\text{–}6) \times 10^{-4}$ （见图 3 和 12），我们估计，转变到有碰撞区需要满足尺度分离 $\lambda_\parallel/\rho_{\mathrm{i}0} \gtrsim 10^4\sqrt{\beta_{\mathrm{i}0}}$。在此条件下，镜像模诱导的散射既会使压力扰动各向同性化，也会阻止共振粒子持续从波中汲取能量，从而降低衰减率，并使无碰撞NP模转变为 MHD 熵模（至少在镜像模持续以高于 $\sim\sqrt{\beta_{\mathrm{i}}}k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}$ 的速率散射粒子的期间如此）。遗憾的是，除非尺度分离极大（例如，对于我们的参数，$\lambda_\parallel/\rho_{\mathrm{i}0} \gtrsim 10^5$），否则衰减率不会比 $\nu = 0$ 情况下慢多少。由于缺乏可负担的数值模拟来检验这一点，[6]我们只能推测，在渐近波长下，衰减率的降低会使这些 NP结构再次得以长时间存在，就像它们在低于阈值时非线性饱和的对应结构一样。

2.3. *NP* 模式关键结果总结

为方便读者，现将我们对磁化高-β、无碰撞等离子体中 NP 模式的研究所得的主要发现总结如下：

- 当模振幅 $|\delta B_\parallel/B_0| \gtrsim \beta_{\mathrm{i}0}^{-2}$ 时，NP模的渡越时间（Barnes）阻尼会在发生显著无碰撞衰减之前非线性饱和。
- NP本征模偏振近乎垂直的压力平衡确保产生大幅正的 $\beta_{\mathrm{i}}\Delta$ 以及幅度很小的负的 $\beta_{\mathrm{i}}\Delta$。
- 当振幅超过阈值 $|\delta B_\parallel/B_0| \approx 0.3$ 时，与

[5]在 $\beta_{\mathrm{i}0} = 4$ 运行中测得的有效碰撞率满足 $\max(\langle\nu_{\mathrm{eff}}\rangle) \simeq 0.027k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}$，该数值高于预测值，原因在于离子回旋不稳定性驱动的拉莫尔尺度磁扰动产生了额外散射，并且预测值（2.24）仅在 $\beta_{\mathrm{i}0} \gtrsim 10$时准确。[6]要在 $\beta_{\mathrm{i}0} = 16$ 实现这一点，需要使平行波长约为我们最大规模模拟所采用值的 40× 倍。由于计算成本为 $\propto(\lambda_\parallel/\rho_{\mathrm{i}0})^2$（计及尺度分离增大时所需运行时间按比例延长），完成此类运行将需要 $\sim 10^9$ CPU 小时。

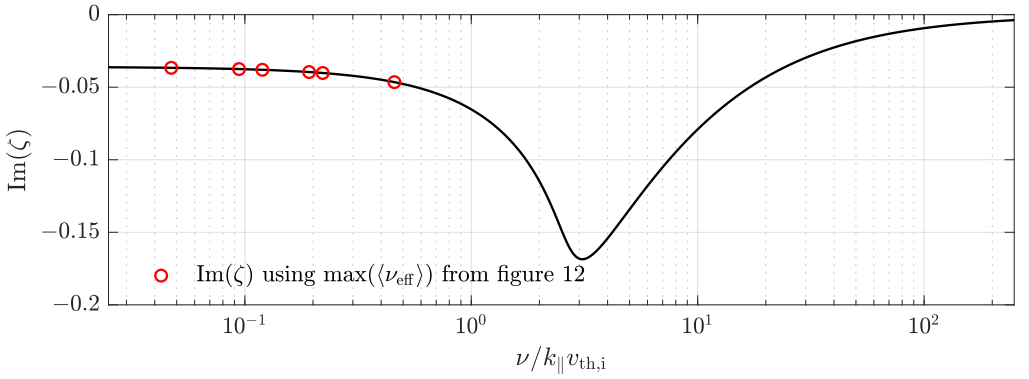


图13：由 Landau 流体 CGL-MHD 方程（B1）得到的 NP 模式线性衰减率（详见附录 B ）。通过数值计算，得到无量纲（复）频率$\zeta \doteq \omega/(|k_\parallel| v_{\mathrm{th,\,i}})$ 随碰撞性 $\nu/(|k_\parallel| v_{\mathrm{th,\,i}})$ 的变化，其中参数为$k_\perp = 4|k_\parallel|$，$\beta_{\mathrm{i}0} = 16$，以及 $T_{\mathrm{e}} = T_{\mathrm{i}0}$。红色圆圈标出混合动理学模拟中测得的最大盒平均散射率（见图12）。

NP本征模相关的压强各向异性会发生镜像不稳定性；等离子体火炬不稳定性始终不会发生。

- 一旦增长的镜像涨落进入非线性阶段，它们便会按照（2.24）对粒子进行俯仰角散射，且散射率与 NP 模式波长无关。
- 对于满足 $\sqrt{\beta_{\mathrm{i}}} \gtrsim \nu/(k_\parallel v_{\mathrm{th,\,i}}) \gtrsim |\delta B_\parallel/B_0|^{1/2}$ 的波长，诱导散射的速度仅足以侵蚀非线性平台，导致该模态恢复到接近线性（无碰撞）衰减率的衰减速度。

- 在满足 $\nu/(k_\parallel v_{\mathrm{th,\,i}}) \gg \sqrt{\beta_{\mathrm{i}}}$ 的较长波长下，渡越时间阻尼将完全中断。我们预测，在此极限下，该模态的行为将更接近磁流体力学熵模态。

3. 快模：波陡峭化与黏性阻尼

3.1. 理论

3.1.1. 模型方程与假设

无碰撞快磁声波在许多方面都比其不传播的对应波简单，尤其是在波矢几乎垂直于背景磁场时，即 $k_\perp \gg k_\parallel$。在此极限下，无碰撞阻尼极弱，磁张力在模态传播中几乎不起作用。事实上，对于严格垂直传播（$k_\parallel = 0$），由于磁化粒子的跨磁场输运受限，在长波长下完全不存在 Landau 阻尼和 Barnes 阻尼。在这种情况下，除了压强各向异性外，无需关于这些模态的其他动理学信息；它们完全可以用双绝热 MHD 描述——该模型通过对漂移动理学系统取前三阶流体矩（见附录 B）并忽略热通量而得。令 $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{y}}$ 和 $\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\,\partial/\partial x$，这些

方程为

$$\frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} = -n\frac{\partial u_\perp}{\partial x}, \tag{3.1a}$$

$$m_\mathrm{i} n\frac{\mathrm{D}u_\perp}{\mathrm{D}t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_{\perp\mathrm{i}} + p_\mathrm{e} + \frac{B^2}{8\pi}\right), \tag{3.1b}$$

$$\frac{\mathrm{D}B}{\mathrm{D}t} = -B\frac{\partial u_\perp}{\partial x}, \tag{3.1c}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{p_{\perp\mathrm{i}}}{nB}\right) = 0, \tag{3.1d}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{p_{\parallel\mathrm{i}}B^2}{n^3}\right) = 0, \tag{3.1e}$$

其中 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t \doteq \partial/\partial t + u_\perp\partial/\partial x$。尽管式（3.1$b$）的右端与平行压强无关，因此无需使用式（3.1$e$）来闭合这组方程，但式（3.1$e$）仍有助于计算快波压强各向异性。与§2中一样，我们采用一个简单的电子状态方程，$p_\mathrm{e} = nT_\mathrm{e}$，其中 T_e 为常数。[7]

下文中，我们将针对无碰撞磁化等离子体中的快波传播，解析研究其两个特征，并采用 $k_\parallel = 0$这一简单但具有说明性的情形。首先，我们将证明，与标准（压强各向同性）磁流体力学相比，双绝热 MHD 中此类波的非线性陡峭化更快；这直接源于与 $T_\perp$ 和 B 相关的 μ 守恒之间的比例关系，见式（3.1d）。其次，我们将说明由此产生的压强各向异性如何使等离子体产生火hose和镜像不稳定性。随后，我们将估算这些不稳定性在等离子体中引入的有效散射频率，并讨论压强各向异性受到的相应调节如何影响快波的特征。

接下来，将（3.1）线性化，以得到快波的色散关系和本征模，这很有用。对具有密度 n_0、各向同性离子压强 $p_{\mathrm{i}0}$和磁场强度 B_0的均匀背景等离子体进行扰动，可得

$$\frac{\delta p_{\perp,\mathrm{i}}}{p_{\mathrm{i}0}} = 2\frac{\delta B}{B_0} \qquad \text{and} \qquad \frac{\delta p_{\parallel\mathrm{i}}}{p_{\mathrm{i}0}} = \frac{\delta n}{n_0} = \frac{\delta B}{B_0}. \tag{3.2}$$

这些方程表明，密度和压强各向异性与磁场强度正相关，而平行离子温度保持不变。该双绝热（“da”）快波的色散关系为

$$\omega = k_\perp v_\mathrm{A}\sqrt{1 + \beta_{\mathrm{i}0}\left(1 + \frac{T_\mathrm{e}}{2T_{\mathrm{i}0}}\right)} \doteq k_\perp v_{\mathrm{ms,da}}, \tag{3.3}$$

因此，整体速度为 $u_\perp = v_{\mathrm{ms,\ da}}(\delta B/B_0)$。作为比较，单绝热（“sa”）磁流体力学中快波的色散关系为

$$\omega = k_\perp v_\mathrm{A}\sqrt{1 + \beta_{\mathrm{i}0}\left(\frac{\Gamma}{2} + \frac{T_\mathrm{e}}{2T_{\mathrm{i}0}}\right)} \doteq k_\perp v_{\mathrm{ms,sa}}, \tag{3.4}$$

其中，Γ 是离子的绝热指数。磁场强度与

[7]若电子也以双绝热方式响应，只会使快波对应的压强各向异性加倍，并使 $T_\mathrm{e}/2T_{\mathrm{i}0} \to T_\mathrm{e}/T_{\mathrm{i}0}$ 代入（3.3）。

双绝热模型中的密度成正比，这意味着$v_{\mathrm{ms,\ da}} > v_{\mathrm{ms,\ sa}}$。这种增强将使双绝热快波比单绝热快波更快地形成激波，尤其是在较高的 β 下。

3.1.2. 双绝热与单绝热磁流体力学中的波陡峭化

对于扰动量会决定波传播速度的波，可能会发生陡峭化。尤其是，大振幅波会使波峰与波谷之间的传播速度产生显著差异；预计双绝热和单绝热磁流体力学中的快波都会出现这种情况。本节将对系统 (3.1) 进行一系列变换，以量化这一效应。在继续之前，先使用 Alfv´én 速度 $v_{\mathrm{A}} = B_0/(4\pi m_{\mathrm{i}} n_0)^{1/2}$ 和波长 λ 对各量重新归一化，如下所示：$u_\perp = \widetilde{u}_\perp v_{\mathrm{A}}$、$B = \widetilde{B} B_0$、$n = \widetilde{n} n_0$、$x = \widetilde{x}\lambda$、$t = \widetilde{t}\lambda/v_{\mathrm{A}}$ 和 $p_{\perp,\,\mathrm{i}} = \widetilde{p}_{\perp\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} n_0 v_{\mathrm{A}}^2$。我们还注意到，若扰动~满足 $\delta\widetilde{n} = \delta B$ at $t = 0$，则这两个量在所有时间内都将保持相等（见方程 (3.1a) 和 (3.1c)）；因此，我们可以用 $\delta\widetilde{B}$ 取代 $\delta\widetilde{n}$。[8] 另一方面，若 $\delta\widetilde{B}$ 很小，且其在 $\widetilde{p}_{\perp,\,\mathrm{i}}$ 和 $\widetilde{n}$ 中对应的扰动由 (3.2) 给出，则方程 (3.1d) 变为

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{t}}\left(\frac{\widetilde{p}_{\perp,\mathrm{i}}}{\widetilde{n}\widetilde{B}}\right) \approx -\widetilde{u}_\perp \frac{\beta_{\mathrm{i}0}}{2}\frac{\partial(\delta\widetilde{B})^2}{\partial\widetilde{x}} \sim \mathcal{O}\big[(\delta\widetilde{B})^3\big]. \tag{3.5}$$

因此，当 $\delta\widetilde{B}$ 取到二阶时，若初始条件为本征模，我们可将 $\widetilde{p}_{\perp,\,\mathrm{i}} = (\beta_{\mathrm{i}0}/2)\widetilde{B}^2$ 视为状态方程。

在这些条件下，可以将方程（3.1）合并，得到以下方程组：

$$\frac{\partial}{\partial\widetilde{t}}\begin{bmatrix}\widetilde{u}_\perp\\ \delta\widetilde{B}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\widetilde{u}_\perp & 1+\beta_{\mathrm{i}0}\left(1+\dfrac{T_{\mathrm{e}}/2T_{\mathrm{i}0}}{1+\delta\widetilde{B}}\right)\\ 1+\delta\widetilde{B} & \widetilde{u}_\perp\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}}\begin{bmatrix}\widetilde{u}_\perp\\ \delta\widetilde{B}\end{bmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

定义 $\boldsymbol{W} = [\widetilde{u}_\perp, \delta\widetilde{B}]^{\mathrm{T}}$，方程（3.6）可改写为 $\partial_{\widetilde{t}}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{W})\partial_{\widetilde{x}}\boldsymbol{W} = 0$，其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{W})$ 为演化矩阵。首先求出 $l^{(i)}$ 的特征值和左本征向量$\boldsymbol{L}^{(i)}$，然后可通过特征方程求解该方程组，其表达式为 $\boldsymbol{L}^{(i)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{W} = 0$。沿着满足 $\mathrm{d}\widetilde{x}/\mathrm{d}\widetilde{t} = l^{(i)}$的时空轨迹，这些特征方程成立。然而，由于我们的状态方程仅在波幅的二阶近似下有效，因此演化矩阵及其特征值中只需保留一阶项。因此，我们将特征方程展开至一阶并积分，得到以下组合：

$$\eta_\pm = \widetilde{u}_\perp \pm \widetilde{v}_{\mathrm{ms,da}}\delta\widetilde{B} \tag{3.7}$$

沿着.....近似保持恒定

$$\left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}}\right)^{\pm} = \frac{\eta_+ + \eta_-}{2} \pm \widetilde{v}_{\mathrm{ms,da}}\left[1 + \frac{1+\beta_{\mathrm{i}0}}{4\widetilde{v}_{\mathrm{ms,da}}^3}(\eta_+ - \eta_-)\right]. \tag{3.8}$$

[8]这种化简等价于假设绝热指数为 $\Gamma = 2$。事实上，将这一分析的结果与采用等温电子的磁流体力学处理进行比较时，代入$\Gamma = 2$ 即可恢复双绝热结果（见（3.12）和（3.13）。

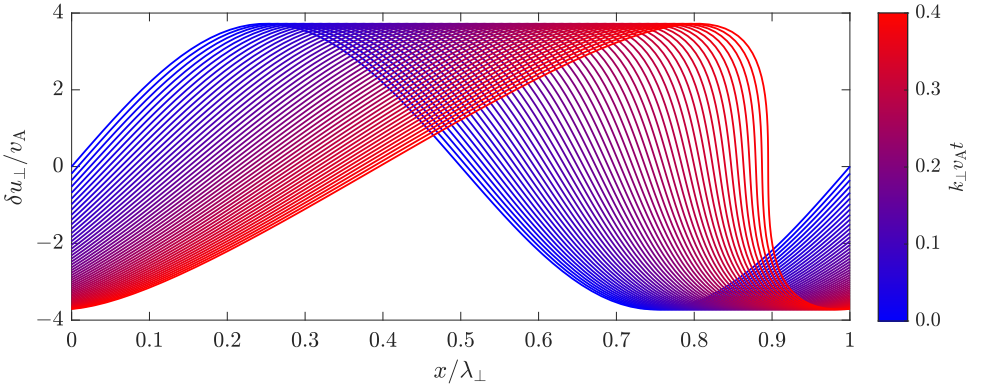


图14：快波陡峭化问题的近似解（3.11），其初始振幅为 $\alpha = 0.3$ 且 $\beta_{\mathrm{i}0} = 25$。该解刚开始形成激波，表明激波形成时间为 $k_\perp v_\mathrm{A} t_\mathrm{s} \sim 0.4$。

这些可以重新表述为两个非线性平流方程，[9]

$$\frac{\partial \eta_\pm}{\partial \widetilde{t}} + \left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}}{\mathrm{d}\widetilde{t}}\right)^{\pm} \frac{\partial \eta_\pm}{\partial \widetilde{x}} = 0. \tag{3.9}$$

注意，若初始条件为快本征模的初始条件（如先前在断言 $\delta B = \delta \widetilde{n}$ 对所有时间均成立时所假设的那样$\widetilde{\ }$），则 $\eta_- = 0$ 对所有时间均成立。因此，我们得到

$$\frac{\partial \eta_+}{\partial \widetilde{t}} + \left[\frac{\eta_+}{2} + \widetilde{v}_{\mathrm{ms,da}}\left(1 + \frac{1+\beta_{\mathrm{i}0}}{4\widetilde{v}^3_{\mathrm{ms,da}}}\eta_+\right)\right]\frac{\partial \eta_+}{\partial \widetilde{x}} = 0, \tag{3.10}$$

$\widetilde{u}_\perp$ 的解由特征线法给出，如下所示

$$\widetilde{u}_\perp(\widetilde{t},\widetilde{x}) = \delta\widetilde{u}_{\perp 0}\left(\widetilde{t},\widetilde{x} - \widetilde{v}_{\mathrm{ms,da}}\widetilde{t}\left[1 + \delta\widetilde{B}_0(\widetilde{x}_\mathrm{i}) + \frac{1+\beta_{\mathrm{i}0}}{2\widetilde{v}^2_{\mathrm{ms,da}}}\delta\widetilde{B}_0(\widetilde{x}_\mathrm{i})\right]\right), \tag{3.11}$$

其中，下标“0”表示初始值，而 x_i 是某条给定特征线源点的 x 位置。

一个大振幅双绝热快波的时变解如图14所示。该解仅在激波形成之前严格成立；激波形成时间可通过在导数取得最大负值的位置 l^+ 处计算本征值 x_0来确定：

$$t^{\mathrm{da}}_\mathrm{s} = \left[l^+(x_0)\right]^{-1} \approx \left[\alpha k_\perp v_{\mathrm{ms,da}}\left(1 + \frac{v^2_\mathrm{A}}{v^2_{\mathrm{ms,da}}}\frac{1+\beta_{\mathrm{i}0}}{2}\right)\right]^{-1}, \tag{3.12}$$

$\widetilde{\ }$其中 $\alpha \doteq \delta B(0)$ 是初始快波波幅。应将这一双绝热（‘da’）激波形成时间与单绝热磁流体力学中的相应时间进行比较

[9]这一过程类似于推导磁流体力学方程数值解的近似黎曼求解器时所采用的方法（例如，Stone *et al.* 2008）。通常，在对特征方程积分时，会假设左本征向量为常量。这里，我们保留 δB 在 $\boldsymbol{L}$ 中的一阶项，以更准确地解析波陡峭化。细心的读者会注意到，这些表达式无法直接变换回式（3.6）的近似形式。这种方法着重于$\boldsymbol{A}$的特征，因此能够准确近似式（3.6）的主导阶行为以及$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量；这与直接展开$\boldsymbol{A}$ 本身并截断高于 $\delta\widetilde{B}$一阶修正项的部分形成对比。

等离子体，其中 $pn^{-\Gamma} = p_0 n_0^{-\Gamma}$。在多种条件下，磁流体力学等离子体中的快波陡峭化这一一般问题已得到深入研究（Hada& Kennel1985；¨Odblom 1998；Sujith2005）。采用与双绝热快波相似的过程，我们得出单绝热（'sa'）激波形成时间

$$t_{\rm s}^{\rm sa} \approx \left[\alpha k_\perp v_{\rm ms,sa}\left(1 + \frac{v_{\rm A}^2}{v_{\rm ms,sa}^2}\frac{1+\Gamma(\Gamma-1)\beta_{\rm i0}/2}{2}\right)\right]^{-1}. \tag{3.13}$$

Si在高3.12）和（3.13）处取 β，并令 $T_{\rm e} = T_{\rm i0}$ 和 $\Gamma = 5/3$，可得 s

$$k_\perp v_{\rm A} t_{\rm s}^{\rm da} \approx \frac{\sqrt{6}}{4\alpha\sqrt{\beta_{\rm i0}}} \quad \text{and} \quad k_\perp v_{\rm A} t_{\rm s}^{\rm sa} \approx \frac{12\sqrt{3}}{29\alpha\sqrt{\beta_{\rm i0}}} \simeq 1.17 k_\perp v_{\rm A} t_{\rm s}^{\rm da}. \tag{3.14}$$

因此，单绝热激波形成时间大于双绝热激波形成时间。当 $T_{\rm e}/T_{\rm i0} = 0$ 时，两者之比达到最大值 $\simeq$1.23；当 $T_{\rm e} \gg T_{\rm i0}$ 时，该比值趋近于 1。这一增大是双绝热磁流体力学中磁场强度与垂直（离子）压强直接相关所致，这种相关性会放大模态传播速度的局部变化。

3.1.3. 压强各向异性及其受动理学不稳定性的调节

与 NP 模式不同，快波在传播过程中会产生波动的压强各向异性。因此，当 β足够大时，火hose不稳定性和镜像不稳定性都可能被触发。当$\delta p_{\perp,\,\rm i}$和$\delta p_{\parallel,\,\rm i}$由（3.2）给出时，触发火hose不稳定性和镜像不稳定性的振幅阈值为

$$\left|\frac{\delta B}{B_0}\right| \gtrsim \frac{2}{\beta_{\rm i}} \quad \text{(fast-wave amplitude threshold)}. \tag{3.15}$$

在高 β 下，即使是小振幅涨落也能满足这一判据，因此可以使用线性特征向量和未受扰动的 $\beta_{\rm i}$ 来确定阈值。

为了评估这些微观不稳定性是否能够增长，我们将其线性增长率与高 β下快波的线性频率进行比较，$\omega_{\rm fast} \sim k_\perp v_{\rm th,\,i}$。我们采用式（2.16）中的最大镜像不稳定性增长率，并使用最大斜向火hose不稳定性增长率 $\gamma_{\rm f} \approx 0.3\Omega_{\rm i}\Lambda^{1/2}{}_{\rm f}$，其中 $\Lambda_{\rm f} \doteq |\Delta + 2/\beta_{\rm i}|$（尹等，1993; A.F.A. Bott 等，正在准备发表），这两个增长率都适用于我们预计在快波模拟中遇到的近阈值条件。假设$|\delta B/B_0| \gtrsim 2\beta_{\rm i}^{-1}$，我们得到

$$\frac{\gamma_{\rm m}}{\omega_{\rm fast}} \sim 0.01\beta_{\rm i}^{-1}\frac{\lambda_\perp}{\rho_{\rm i}} \quad \text{and} \quad \frac{\gamma_{\rm f}}{\omega_{\rm fast}} \sim 0.1\beta_{\rm i}^{-1/2}\frac{\lambda_\perp}{\rho_{\rm i}}, \tag{3.16}$$

其中 $\lambda_\perp = 2\pi/k_\perp$ 是快波的波长。从式（3.16）可以立即看出，在高 β下，快波波长与离子拉莫尔尺度之间必须有非常大的尺度分离，才能为镜像涨落的增长并进入非线性阶段留出足够时间。火hose不稳定性对 $\beta_{\rm i}$ 的标度关系弱得多，因此会存在这样的波长：镜像对压强各向异性的调节实际上完全不起作用，而火hose调节却很快。正因如此，我们聚焦于Pegasus++模拟，要求 $\beta_{\rm i0} = 25$，以实现镜像和火hose调节。 $\lambda_\perp \gg 10^3\rho_{\rm i0}$

不稳定的拉莫尔尺度涨落最终会增长到一定振幅，此时粒子的俯仰角散射速率足以将压强各向异性维持在边际稳定状态。该速率可通过计算弱碰撞等离子体中小振幅快波所驱动的压强各向异性来估算（遵循Braginskii 1965年），并考察需要多大的有效碰撞率 $\nu_{\rm eff}$ 才能维持

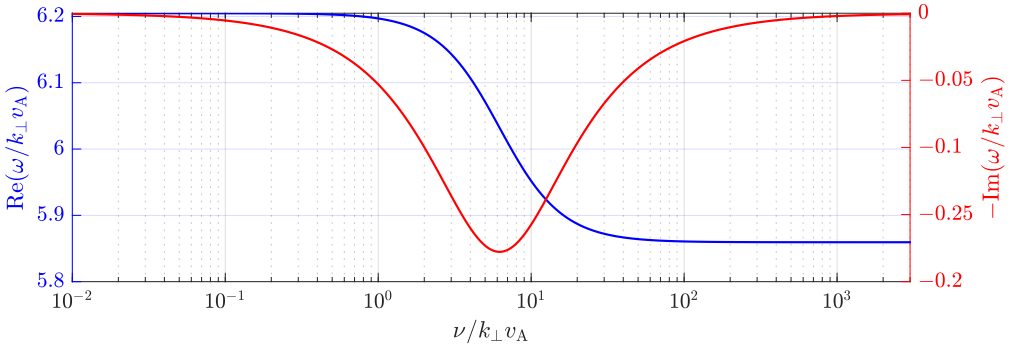


图15：色散关系（3.18）的精确解，对应于碰撞频率为 $k_\parallel = 0$ 的等离子体中的快波 ν，$\beta_{\mathrm{i}0} = 25$，以及 $T_\mathrm{e}/T_{\mathrm{i}0} = 1$。

$|\Delta| \sim 2\beta_{\mathrm{i}0}^{-1}$。若前者在有碰撞区由 $\Delta \sim -(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})/\nu_\mathrm{eff} \sim (k_\perp v_\mathrm{ms}/\nu_\mathrm{eff})|\delta B/B_0|$ 给出，则极限碰撞度为

$$\nu_\mathrm{eff} \sim k_\perp v_\mathrm{ms} \frac{\beta_\mathrm{i}}{2} \left|\frac{\delta B}{B_0}\right|. \tag{3.17}$$

请注意，它显式依赖于快波的尺度；这是快波的压强各向异性持续受涨落波驱动所导致的间接结果。这与非周期NP模的情况大不相同：在该模态中，压强各向异性是垂直压力平衡的关键特征，却会通过渡越时间阻尼随时间衰减。

3.1.4. 黏性阻尼与有碰撞传播

有效碰撞性（3.17）的估算表明，快波的行为会因波幅而异。例如，若 $|\delta B/B_0| \gg 2\beta_{\mathrm{i}0}^{-1}$，则推得的碰撞性可能足够大，使快波进入有碰撞的 Braginskii-MHD 区（$\nu \gg \omega$）。尽管目前缺乏依据，但为便于说明，我们假设这种碰撞性在空间中均匀分布。将各向同性化碰撞项 $-\nu\Delta p/nB$ 和 $\nu\Delta p B^2/n^3$ 分别加入（3.1d）和（3.1e）右端，然后对所得方程组进行线性化，即可得到任意 ν 下的快波色散关系。我们发现：

$$\omega^3 - i\nu\omega^2 - \omega k_\perp^2 v_\mathrm{ms,da}^2 + i\nu k_\perp^2 v_\mathrm{ms,sa}^2 = 0. \tag{3.18}$$

(3.18) 的数值解如图 15 所示。在无碰撞极限 $\nu \to 0$ 下，可恢复以双绝热快波速度传播的情况；取 $\nu \to \infty$ 则可恢复以单绝热快波速度传播的情况。在 $\nu \sim \mathrm{Re}(\omega) \sim k_\perp v_{\mathrm{th,i}}$ 的中间值下会出现黏性阻尼，此时系统处于双绝热与单绝热状态之间的转变区域，散射率与波的振荡频率相当。阻尼率始终远小于波的振荡频率。

色散关系（3.18）、振幅阈值（3.15）以及预测的有效碰撞频率（3.17）表明，高β等离子体中垂直传播的快模具有三种行为状态。对于满足$|\delta B/B_0| < 2\beta_{\mathrm{i}0}^{-1}$ 的小振幅，模态会像无碰撞快模一样正常传播，并会陡化，最终在双绝热激波时间 t_s^da内形成激波。在接近阈值的状态下，$|\delta B/B_0| \gtrsim 2\beta_{\mathrm{i}0}^{-1}$，触发的镜像和火hose不稳定性所产生的散射率不会完全达到（3.17）中的数值，不过仍会发生散射

，并造成一定程度的黏性阻尼。波也会陡化并形成激波，但只有部分波长范围内会出现动理学不稳定，因此激波将在双绝热与单绝热激波时间的混合时间尺度上形成。最后，在远高于阈值的振幅下，散射率应由（3.17）给出。黏性阻尼将非常微弱，波的大部分波长范围内都会存在火hose/镜像散射区域，而用单绝热模型来描述激波时间应更为恰当。

现在，我们使用数值模拟来检验这些想法。

3.2. 数值结果

3.2.1. 求解方法和初始条件

由于需要很大的尺度分离，才能获得 $\nu_{\rm eff}$ 火hose与镜像涨落的渐近行为（§3.1.3），我们结合使用 Pegasus++ 和（计算成本低得多的）Landau流体CGL-MHD模拟。所有模拟均以无碰撞本征模（3.2）初始化一个原本呈麦克斯韦分布的等离子体中的快波，即，

$$\begin{gathered}\boldsymbol{B}(0,x)=B_0\big[1+\alpha\sin(k_\perp x)\big]\hat{\boldsymbol{y}},\quad \boldsymbol{u}(0,x)=v_{\rm ms,da}\alpha\sin(k_\perp x)\hat{\boldsymbol{y}},\\ \frac{n(0,x)}{n_0}=\frac{p_{\parallel \rm i}(0,x)}{p_{\rm i0}}=1+\alpha\sin(k_\perp x),\quad \frac{p_{\perp \rm i}(0,x)}{p_{\rm i0}}=\big[1+\alpha\sin(k_\perp x)\big]^2,\end{gathered}\tag{3.19}$$

其中 $k_\perp=2\pi/\lambda_\perp$ 和 α 是表征模振幅的无量纲数。对于 Pegasus++ 运行，网格为二维，并沿传播方向拉长，尺寸为 $L_x\times L_y=\lambda_\perp\times 100\rho_{\rm i0}$。计算域在 y 方向上的尺寸足以捕捉所有相关的火hose与镜像涨落。我们设定 $\beta_{\rm i0}=25$和 $T_{\rm e}=T_{\rm i0}$；与 NP 模式模拟（ $\beta_{\rm i0}$）中采用的数值相比，$\beta_{\rm i0}=16$略大，因此数值积分时间更短（从而节省计算资源），同时不会改变快波的物理特性。空间分辨率和每个网格单元的宏粒子数与 NP 模拟（§2.2.1）相同。本文仅展示一次Pegasus++ 运行的结果，其中 $\lambda_\perp=8000\rho_{\rm i0}$，对应于我们模拟的最大计算域尺寸。我们发现，$\lambda_\perp/\rho_{\rm i0}$ 该值是镜像模能够及时增长，并在波振荡、驱动的压强各向异性反转之前开始散射粒子所需的最小值。

在随文给出的 Landau流体模拟中，完整的CGL-MHD方程采用一种新的黎曼求解器求解。该求解器应用于有限体积 Athena++ 模拟代码的一个版本中（Stone 等 2008），并包含 Landau流体热通量（J. Squire 等，准备中）。这些方程见附录B；在我们选定的几何构型下，它们化为（3.1）。对于这些运行，$\beta_{\rm i0}$ 在 1 到 100 之间变化，以研究激波时间的方差。根据研究重点是波陡峭化和激波形成（$\nu=0$），还是不稳定性诱发的散射效应，将“限制器”碰撞性 $\nu_{\rm lim}$ 设为 0 或 $\alpha\beta_{\rm i0}k_\perp v_{\rm ms,\ da}$。该反常散射率仅在区域内压强各向异性会导致动理学不稳定的区域中激活，即在 $\beta_{\rm i}\Delta\leqslant -2$ 和 $\beta_{\rm i}\Delta\geqslant 1$的区域；其他地方则为零。它通过在 $p_\perp$ 和 $p_\parallel$的演化方程右端加入与 $-\nu_{\rm lim}\Delta p$ 成正比的项，使等离子体压强各向同性化；在动理学系统中，镜像或火hose涨落本来也会产生这一作用。

与§2中一样，$\langle\cdot\rangle$ 表示在整个区域内进行的空间平均，而 $\langle\cdot\rangle_k$ 表示沿波前进行的空间平均（在本例中，沿 y 方向）。

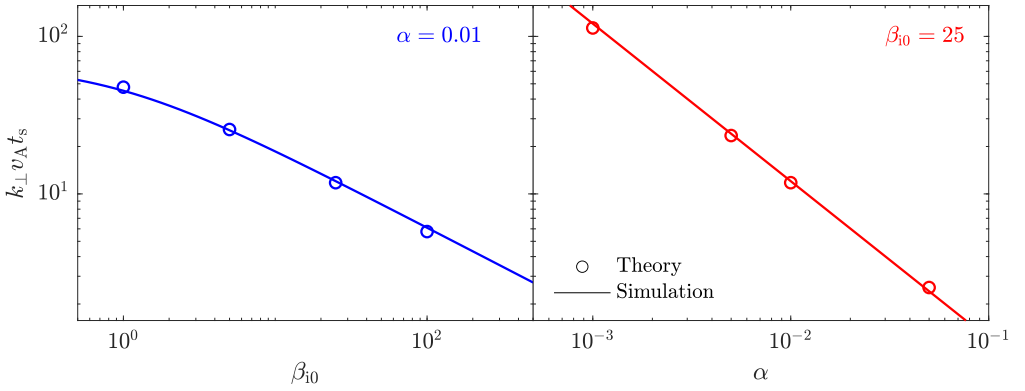


图16：双绝热快波的激波形成时间与 β_{i0} 和 α 的关系。该快波由 CGL-MHD模拟计算得出（曲线），并使用（3.12）进行解析预测（圆圈）。估计模拟波在最大密度梯度的变化率降至其峰值的一半以下时形成了激波。

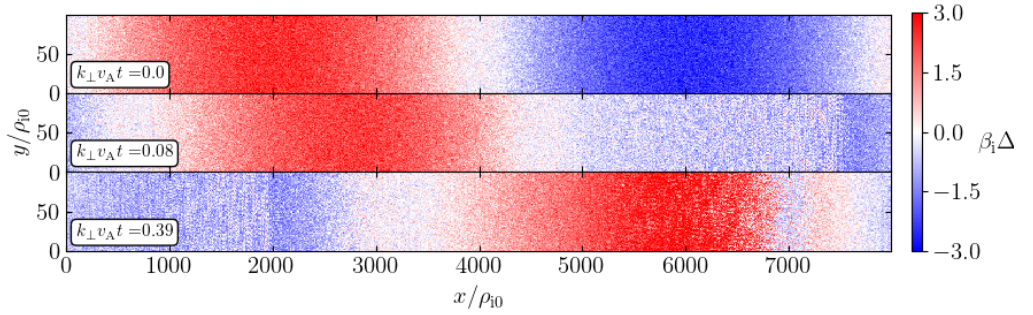
3.2.2. 波陡峭化与激波形成

我们的首要目标是检验关于激波形成时间的表达式（3.12） t_{so}。我们通过改变 β_{i0} 和波幅 α 来进行参数扫描，使用关闭微观不稳定性限制散射的 CGL-磁流体力学代码。在模拟的每个时间步，我们都会在整个区域内计算局部密度梯度（取四个网格单元的平均值），并记录其最大值，以此衡量波陡峭化的程度。随着快波逐渐变陡，该最大梯度的增长率不断增加，直到激波形成，区域内的最大梯度开始趋于平台。我们将数值计算得到的激波形成时间定义为该最大梯度的变化率降至其自身峰值一半以下时对应的时间。将所得时间与图3.12）中的预测进行比较，结果见图14。检验对 β_{i0} 的依赖关系时（蓝色，左图），扰动幅度设为 $\alpha = 0.01$；检验对波幅的依赖关系时（红色，右图），$\beta_{i0} = 25$。

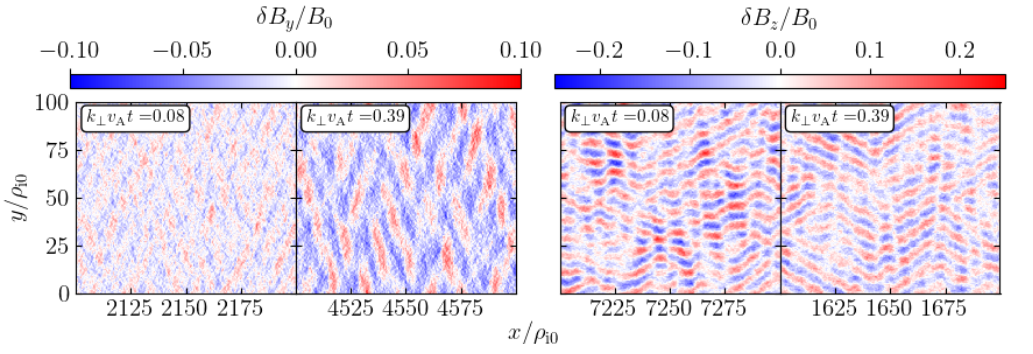
总体而言，（3.12）与数值计算所得的激波形成时间吻合得相当好。差异较小，这是由于最大梯度趋于平台的速率不同，以及激波形成后梯度最大值的细微涨落所致（该值不一定会达到完全稳态）。或许并不意外，在高 β 且 $v_{ms,\,da} \approx v_A\sqrt{3\beta_{i0}/2}$的情况下，波穿越时间与激波形成时间之比为 $t_{cross}/t_{s,\,da} \approx 4\alpha/3$。这意味着激波形成前传播的波长数仅取决于模振幅。

3.2.3. 压强各向异性的产生与动理学不稳定性的触发

在激波形成之前，线性化涨落（3.2）表明，当快波振幅满足 $|\delta B/B_0| \gtrsim 2/\beta_i$ 时，将会出现足以触发镜像不稳定性和火hose不稳定性的压强各向异性。对于这些超临界振幅，按照（3.16），波前应会携带快速增长的火hose涨落和增长较慢的镜像涨落。为了检验这一设想，我们进行了大规模 Pegasus++ 模拟，参数详见 §3.2.1；初始波幅 $\alpha = 0.1$ 和 $\beta_{i0} = 25$。



(a) Pegasus++ 模拟中，碰撞无关快波的压强各向异性与离子贝塔值的乘积。图中显示，磁力线的压缩和稀疏产生符号相反、随波前移动的各向异性。负压强各向异性受到火hose调节而发生一定的往复振荡，导致在最后一个时间帧中 Δ 额外反转。



(b) 放大区域显示了 δB_y 和 δB_z，其中已去除背景快波的贡献。请注意，平均场沿 y 方向。左侧的一组面板中，镜像不稳定性具有倾斜取向，且在 $\delta B_\parallel = \delta B_y$中占主导；它在快波压缩的共动区域内从 $k_\perp v_A t = 0.08$ 增长至 0.39，增长相对缓慢。右侧一组面板中的火hose不稳定性主要呈倾斜取向，并迅速增长后达到饱和；较小振幅的平行火hose出现在 δB_x （未显示）。这些火hose涨落位于镜像模下游，此处快波 $\delta B < 0$。

图17

图 17（a）展示了快波在空间中传播时三个不同时刻（$k_\perp v_A t = 0.0$、0.08、0.39）产生的压强各向异性；请注意，所绘区域的纵横比远非 1，且平均磁场沿 y 方向）。起初，波中的正、负压强各向异性大小相等。不久之后，由于（主要为斜向的）火hose不稳定性迅速增长，不稳定的负各向异性显著减小。正压强各向异性并未出现相应的下降，实际上还比初始值略有增加。这可能是因为，负各向异性区域的快速变化扰动了波，使其偏离本征模；而由于镜像增长相对缓慢，正压强各向异性一侧并未受到程度相当的调节。图 17（b）放大展示了两个独立共动区域中出现的相应磁场涨落；在这两个区域中，等离子体分别处于镜像不稳定（左）或火hose不稳定（右）状态。为突出这些涨落，已去除快波的大尺度贡献。在 $k_\perp v_A t = 0.08$ 时，斜向火柴束涨落强烈且呈非线性；平行火柴束涨落则

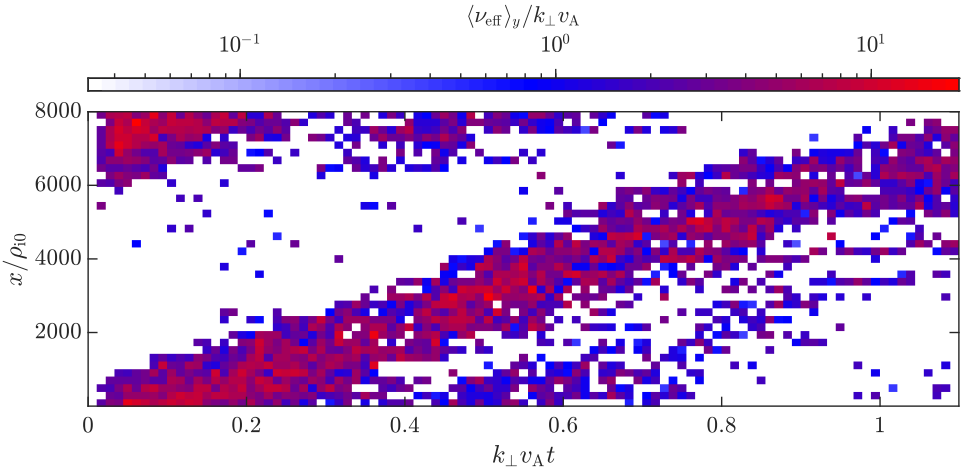


图18：在Pegasus++ 快波中测得的有效碰撞频率时空图。模拟参数为 $\beta_{\rm i0}=25$，$\alpha=0.1$和 $T_e/T_{\rm i0}=1$；将这些数值代入（3.17）可得 $\nu_{\rm eff}\approx 16k_\perp v_{\rm A}$。

在 δB_x 中也有出现，但占主导地位的并非此现象（未显示）。此时，镜像涨落刚刚显现，略高于噪声水平。然而，在最后一帧（$k_\perp v_{\rm A} t=0.39$）中，高度倾斜的镜像模已在约由 $x/\rho_{\rm i0}\in[4000,5000]$所界定的区域内增长至较大振幅。此次模拟达到的尺度分离（$L_x/\rho_{\rm i0}=8000$）是我们能够观测到强度与镜像火hose对应模相当的镜像涨落的最低尺度分离；若进一步增大尺度分离，则会带来相当大的计算开销。

3.2.4. 有效碰撞率：粒子散射

按照 §2.2.3，我们通过追踪数千个离子宏粒子，并测量其 μ 发生统计变化且变化幅度达到或超过 1.2 倍的频率，确定了图 17 所示快波的有效碰撞率。图 18 展示了散射率随沿波位置（$x/\rho_{\rm i0}$）和时间（$k_\perp v_{\rm A} t$）的变化。强散射区域与火hose模相关；这些模几乎瞬间出现，并随波谷一同传播。散射区域留下的轨迹表明，波谷以 $\approx 6v_{\rm A}$ 的速度移动，这与 $\beta_{\rm i0}=25$ 的快模预期相符。在这次模拟中，火hose不稳定性迅速调节压强各向异性，从而引发往复振荡。往复振荡会在一段短时间内暂时驱动更高的正压强各向异性，因此增强镜像增长；这一过程始于 $kv_{\rm A} t\approx 0.4$。火hose不稳定区域内测得的散射率，与 $\beta_{\rm i0}=25$ 且 $\alpha=0.1$ 和 $T_{\rm e}=T_{\rm i0}$ 的快波所预测的渐近散射率相当，即 即 $\nu_{\rm eff}\approx 16k_\perp v_{\rm A}$ （见（3.17））。在此情况下，镜像不稳定性也会以平均每 $k_\perp v_{\rm A}$ 的速率散射粒子，但这些散射区域的连贯性要弱得多，且与正压强各向异性的峰值并不重合。这种延迟增长是模拟中可实现的尺度分离有限所致；在快波穿越时间内，这种尺度分离仅勉强足以让镜像模增长至非线性水平。

诱导散射对快波压强各向异性的影响如图 19所示，其中展示了 $\langle\beta_{\rm i}\Delta\rangle_y$ 与图 17相同时间的情况。火hose不稳定性会在极短时间内调节负各向异性，使其达到接近

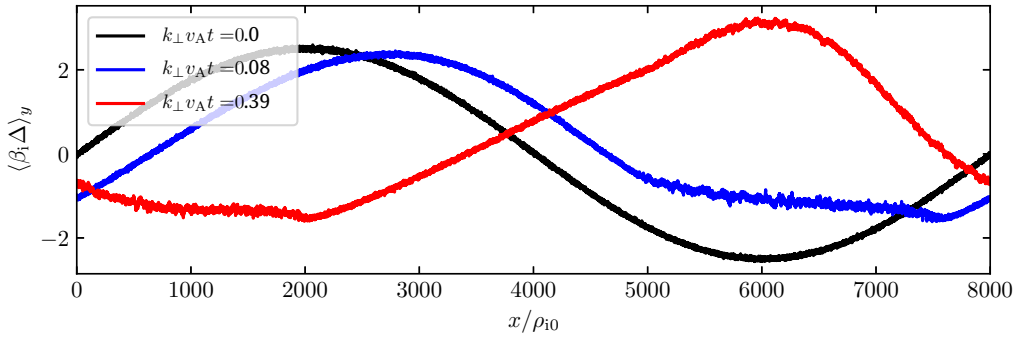


图19：波前平均 $\beta_i \Delta$ 在与图 17 相同的时间帧中快波内。火hose不稳定性产生的压强各向异性调节维持 $\beta_i \Delta \gtrsim -1.4$，而镜像涨落导致该模态在 $\beta_i \Delta \approx 1$ 上方出现一定畸变，但无法将正各向异性完全调节至临界不稳定值。陡峭化波产生正压强各向异性的速率增加，以及微观不稳定性对各向异性调节的不对称性，导致所示最后时间点的正压强各向异性增强。

斜传播阈值 $\beta_i \Delta \simeq -1.4$的值。这种调节仍在持续，但镜像不稳定的一侧却未出现相应的调节。正如预期的那样，波形也有所陡峭化，但正各向异性并未降至接近临界镜像稳定性。若要让镜像涨落将正压强各向异性调节至边际稳定性，它们相对于快波穿越时间必须增长得更快；方程（3.16）表明，可以通过进一步增大 $\lambda_\perp/\rho_{i0}$ （超过 $\lambda_\perp/\rho_{i0} = 10^4$），或许也可以通过减小 β_{i0} 来实现（不过在这种情况下，振幅阈值（3.15）会增大，因此需要更大的快波振幅，而这几乎会立即引发激波）。遗憾的是，使用 Pegasus++模拟如此大的尺度分离，成本高得难以承受。因此，从这里开始，我们改用带有压力各向异性限制器的 CGL-MHD 代码。[10]

3.2.5. 黏性阻尼和碰撞陡峭化

为了研究尺度分离趋于无穷大时快波的行为，我们采用 Landau流体CGL-MHD代码。这些模拟使用的 β参数比Pegasus++ 运行中使用的参数更大，$\beta_{i0} = 100$ 而不是 25，且 $\alpha = 0.2$。这些参数的优点是，快波的大部分区域在初始时都高于不稳定性的阈值，同时波的振幅仍大致处于线性范围。如§3.2.1所述，该代码仅在等离子体的动力学不稳定区域内引入用户指定的恒定散射率。我们根据初始模振幅，按照（3.17）设定该散射率。实际上，该散射率应随振幅一起衰减，因此，我们的处理无法精确再现更严格的动力学计算所得到的结果。

在图 20中，展示了 CGL-MHD 快波的传播和非线性陡峭化。图 20(a) 的上方面板显示了三个不同时刻垂直于背景场的整体流体速度，呈现出陡峭化过程，而波幅没有显著变化。这表明在与激波形成时间尺度相当的时间尺度内，并未发生显著的黏性耗散

[10]与 NP 模式的衰减率一样，快波陡化时间也随波长线性增加，此处波长为 $\lambda_\perp$，因此总成本按 $\propto (\lambda_\perp/\rho_{i0})^2$ 的关系缩放。尺度分离为 $\lambda_\perp/\rho_{i0} = 10^4$ 的 Pegasus++ 模拟需要 $\gtrsim 10^7$ CPU 小时。

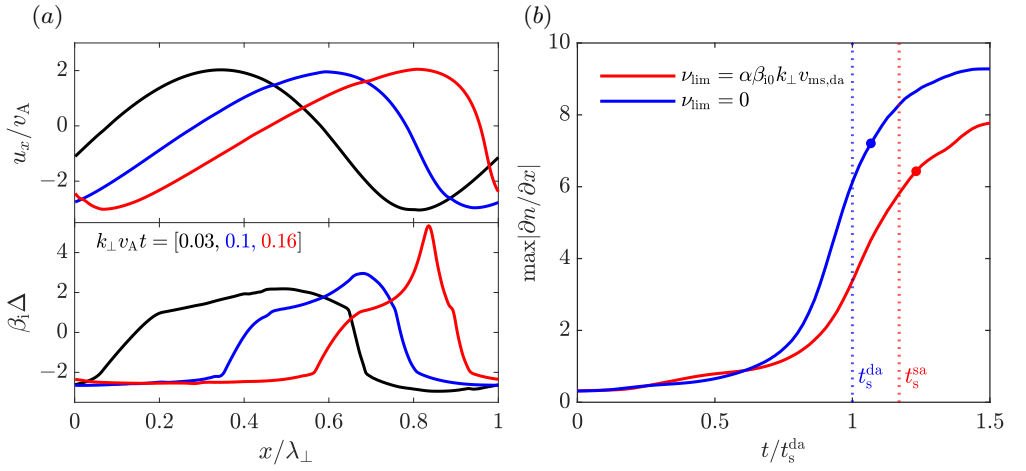


图20：（a）一个 $\alpha = 0.2$ 快波的传播，其 $\beta_{i0} = 100$ 和 ν_{lim} 由（3.17）设定。上图显示了流体速度中的波陡峭化，在激波形成的时间尺度内没有明显的黏性衰减。下图显示压强各向异性受到调节，接近镜像和火hose阈值。由于陡峭化波前中正压强各向异性的快速产生，$\beta_i\Delta$ 中出现一个峰值。（b）在同一 $\alpha = 0.2$的区域内发现的最大密度梯度，$\beta_i = 100$快波与一个具有 $\nu_{lim} = 0$的等效运行进行比较。预测的激波时间标记为 t_s^{da}和 t_s^{sa}，而采用与图14 相同的方法检测到的激波时间用圆形标记表示。单绝热情形下最大梯度的增长持续时间比双绝热情形更长，这表明激波形成有所延迟。

（如 (3.18) 所预测）。下方面板显示了同一时刻波的压强各向异性，并乘以 β_i。与没有极限碰撞度时的情况相比，各向异性显著降低，尤其是在火hose不稳定侧，尽管它并未完全受限于不稳定性阈值。特别是，从 $k_\perp v_A t \approx 0.1$开始，正压强各向异性的峰值变得十分明显。这是波陡峭化的结果：波前处的陡峭梯度产生正 Δ 的速度远快于尾迹中的缓慢衰减产生负 Δ的速度，也快于我们的（恒定）极限碰撞度所能调节的速度。图 20(b) 展示了本次运行中密度梯度绝对值最大值的演化，并与一次具有 $\nu_{lim} = 0$的可比运行结果并列对照。横坐标为以双绝热激波时间归一化的模拟时间 t_s^{da}（见 (3.12)）。我们使用与图 16相同的检测方法计算了每次运行的激波时间；图中的实心圆标出了这些时间，它们与无碰撞和有碰撞情形下分别预测的 t_s^{da}和 t_s^{sa}吻合得相当不错。两次运行陡峭化速率的差异可解释为 ν_{lim} 促使快波的演化更接近磁流体力学，而非无碰撞情形。波峰处的碰撞各向同性化（波峰也是运动最快的区域）有效地改变了离子的局部绝热指数，减缓了陡峭化过程，使结果与 t_s^{sa}的吻合度高于与 t_s^{da}的吻合度。因此，由诱发的微观不稳定性所致，大振幅、高 β无碰撞快波的所有基本特征都趋近于单绝热磁流体力学。

4. 总结与讨论

对微观物理不稳定磁声模的这项研究，为一项系统性研究画上了句号。该研究考察了无碰撞、高-β 等离子体中的孤立波，始于自中断 Alfv´én 波的发现，随后又展示了自维持声波。总之，通过绝热不变量的作用、由此产生的压强各向异性，以及快速增长的微尺度动理学不稳定性的激发.....

- 无碰撞线偏振 Alfv´én 波，其振幅满足 $(\delta B_\perp/B_0)^2 \gtrsim 2/\beta_{i0}$ 会延缓自身传播，并促使自身发生黏性衰减 (Squire 等人2016、2017*a*);

- 无碰撞离子声波，其振幅满足 $|\delta n/n| \gtrsim 2/\beta_{i0}$ 可避免原本强烈的朗道阻尼，并以类似弱碰撞流体中声波的方式传播 (孔茨 等人 2020);

- 振幅满足 $|\delta B_\parallel/B_0| \gtrsim 0.4$ 且波长为$\lambda_\parallel \gtrsim 10^4\beta_0^{1/2}\rho_{i0}$ 的无碰撞NP模预计会停止渡越时间阻尼，并表现得类似于磁流体力学熵模（已有研究表明，在较短波长下，这些大振幅NP模会通过渡越时间阻尼衰减；弱镜像诱导碰撞性可使渡越时间阻尼持续存在，从而抵御其非线性饱和）（本文）；并且

- 振幅满足$|\delta B/B_0| \gtrsim 2/\beta_{i0}$ 且波长为$\lambda_\perp \gg 10^2\beta_{i0}\rho_{i0}$ 的无碰撞快波会获得有效绝热指数 $5/3$ ，因此以单绝热速率传播并发生非线性陡峭化（本文）。

尽管本文对孤立本征模行为的关注范围略显狭窄，但这一简单论证表明，微尺度物理会有效筛选高-β 等离子体中允许出现的宏观尺度涨落类型；这一点对于观测到的空间和天体物理系统，以及电磁湍流理论，都具有广泛意义。前者最直接的应用对象是近地太阳风。例如，Verscharen等人（2016）利用线性理论推测，太阳风中的压缩涨落可能通过绝热地产生压强各向异性来驱动等离子体不稳定性，从而使太阳风质子发生“无碰撞各向同性化”。我们的研究从第一性原理出发，为这一观点提供了定量支持。随后，Verscharen等人（2017）利用Wind航天器的数据，测量了1 au处太阳风中压缩涨落的偏振，发现观测到的本征模关系最符合磁流体力学慢模，而非无碰撞慢模。Coburn等人（2022）从不同角度探讨了同一问题：他们测量太阳风中压缩模的色散关系，并确定哪种散射率最能再现这些关系。他们得出结论，其波动测量所预测的平均自由程比库仑碰撞确定的平均自由程小 $\sim 10^3$ 倍，并发现测得涨落的色散关系最接近Braginskii-磁流体力学慢模的色散关系。这两项观测结果在本文的框架下都能得到自然解释，至少对于那些具有 $\beta \gtrsim 1$ 、且经测量发现受火hose与镜像不稳定性阈值约束的太阳风区域而言（Kasper等人 2002年；Hellinger等人 2006；Bale等人 2009年；Chen等人 2016）。

只要强电磁湍流中的非线性交互涨落仍保留其线性本征模的某些特征，上述结论就会使人质疑，磁流体力学和陀螺动力学湍流理论中的一些公认基石是否适用于高 Goldreich & Sridhar 1995；Lithwick & Goldreich 2001；Schekochihin 等 2009；

Schekochihin 2022）等离子体。例如，每个涨落都会以依赖于振幅、波长和偏振的方式产生并响应压强各向异性，因此，认为惯性区压缩涨落只是被阿尔芬波级联被动混合、进而不会对阿尔芬涨落产生反作用，这种看法值得怀疑。同样，较短波长的涨落会处于由许多波长长得多的涨落集合产生的斑块状但局部均匀的压强各向异性之中，并受到其影响，这意味着湍流级联不再严格局域。尽管已有研究采用简化的（陀螺动力学）模型探讨背景压强各向异性如何影响电磁动理学湍流（Kunz 等人 2015、2018），但这些研究既未探讨这种潜在的非局域性，也未纳入动理学不稳定涨落及其相关反常散射的影响。目前尚不清楚，所有这些额外物理效应在由特征线性频率与非线性频率之间逐尺度“临界平衡”所支配的湍流级联中会如何发挥作用。这一强湍流的组织原则似乎即使在强压强各向异性存在时也依然成立（尽管形式有所改变）（Bott 等人 2021；Squire 等人 2023）。通常被认为在能量上彼此解耦的级联之间的相互作用，以及这种耦合对能量恒定通量、相互作用的局域性和临界平衡普适性的影响，都值得研究。Arzamasskiy 等人（2023）近期在这方面取得了一些进展，他们通过混合动理学模拟表明，具有（$\delta B_\perp/B_0)^2 \gtrsim 2/\beta_{\mathrm{i}0}$ 的强阿尔芬湍流会自洽地产生与级联驱动尺度相当的平行黏性尺度，并涉及与离子拉莫尔尺度动理学不稳定性激发相关的空间非局域能量传递。将压缩涨落纳入这项研究将很有启发性，不仅有助于理解其动力学，也有助于了解湍流能量如何分配到离子与电子加热中（参见 Kawazura 等人 2020）。尽管如今已阐明无碰撞高-β 等离子体中孤立波的性质，但显然还有许多工作有待开展。

致谢

S.M. 和 M.W.K. 获得了美国国家科学基金会职业奖（编号 1944972）的部分资助。J.S. 获得了卢瑟福探索奖学金 RDF-U001804 的资助，该奖学金由皇家学会 Te Ap$^-$arangi 管理。高性能计算资源由以下机构提供：德克萨斯大学奥斯汀分校德克萨斯高级计算中心提供的 Stampede2 配额 TG-AST160068 和 Frontera 配额 AST20010；以及普林斯顿大学 PICSciE-OIT TIGRESS高性能计算中心与可视化实验室。本研究使用了极限科学与工程发现环境（XSEDE），该环境由美国国家科学基金会拨款（编号 ACI-1548562）支持。作者感谢 Archie Bott、Eliot Quataert、Alex Schekochihin，以及在维也纳沃尔夫冈·泡利研究所举行的第 13 届等离子体动理学工作会议与会者所提供的有益讨论，并感谢三位匿名审稿人提出的深刻意见，使本文的表述更加完善。M.W.K. 还感谢格勒诺布尔行星学与天体物理研究所（IPAG）在本研究完成期间给予的热情接待和访学支持。

附录 A. 线性 KMHD 的 Hermite–Laguerre 解

在本附录中，我们详细说明计算线性 NP 模态产生的随时间变化的压强各向异性的数值方法。任务是对系统进行积分——

（2.1）数值求解，所用初始条件需恰当选取。在给出这些条件之前，我们对（2.1b）求时间导数，并利用（2.1c）得到以下关于 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 漂移速度的波动方程：

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+k^2v_{\mathrm{A}}^2\right)u_\perp=-\frac{\mathrm{i}k_\perp}{m_{\mathrm{i}}n_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta p_{\perp\mathrm{i}}+T_{\mathrm{e}}\delta n). \tag{A 1}$$

该方程右端通过对线性化的 Vlasov 方程取零阶矩和二阶矩来计算（2.1a）。假设背景为各向同性麦克斯韦分布，$F_0=F_{\mathrm{M}}(v)$，并利用（2.1c）和（2.1d）改写电力和磁镜力后，方程（2.1a）可化简为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}k_\parallel v_\parallel\right)\delta f+\left(\mathrm{i}k_\perp u_\perp\frac{w_\perp^2}{v_{\mathrm{th,i}}^2}+\mathrm{i}k_\parallel v_\parallel\frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{i}0}}\frac{\delta n}{n_0}\right)F_{\mathrm{M}}=0. \tag{A 2}$$

方程（A1）和（A2）按如下方法进行数值求解。

我们将 $v_\parallel$ 对 δf 的依赖关系用厄米多项式 H_n 表示，将其对 $w_\perp^2$ 的依赖关系用拉盖尔多项式 L_m 表示：

$$\delta f(t,k_\parallel,k_\perp,v_\parallel,w_\perp)=F_{\mathrm{M}}(v)\sum_{m,n=0}^{\infty}g_{m,n}H_n\left(\frac{v_\parallel}{v_{\mathrm{th,i}}}\right)L_m\left(\frac{w_\perp^2}{v_{\mathrm{th,i}}^2}\right). \tag{A 3}$$

该谱分 解使得所需的矩可简单地计算为

$$\frac{\delta n}{n_0}=g_{0,0},\quad \frac{\delta p_{\perp\mathrm{i}}}{p_{\mathrm{i}0}}=g_{0,0}-g_{1,0},\quad \frac{\delta p_{\parallel\mathrm{i}}}{p_{\mathrm{i}0}}=g_{0,0}+4g_{0,2}, \tag{A 4}$$

从而（A1）变为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+k^2v_{\mathrm{A}}^2\right)\frac{u_\perp}{v_{\mathrm{th,i}}}=-\frac{\mathrm{i}k_\perp v_{\mathrm{th,i}}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(1+\frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{i}0}}\right)g_{0,0}-g_{1,0}\right]. \tag{A 5}$$

由于厄米多项式和拉盖尔多项式分别关于高斯权重和指数权重构成正交归一基，方程（A2）可以很容易地转换到厄米–拉盖尔空间，得到

$$\frac{\mathrm{d}g_{m,0}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}g_{m,1}+\mathrm{i}(\delta_{m,0}-\delta_{m,1})k_\perp u_\perp=0, \tag{A 6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}g_{m,1}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}\left(2g_{m,2}+\frac{1}{2}g_{m,0}\right)+\mathrm{i}\frac{T_{\mathrm{e}}}{2T_{\mathrm{i}0}}\delta_{m,0}g_{0,0}=0, \tag{A 6b}$$

$$\frac{\mathrm{d}g_{m,n}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}\left[(n+1)g_{m,n+1}+\frac{1}{2}g_{m,n-1}\right]=-\nu n^4g_{m,n},\quad n\geqslant 2. \tag{A 6c}$$

请注意，表示扰动分布函数的平行相位混合的 $k_\parallel v_\parallel\delta f$ 会将不同的厄米矩耦合在一起，这代表了$v_\parallel$中细尺度结构的生成。由于磁场会抑制跨越磁场的相混合，因此不会向更高阶的 $w_\perp$ 矩级联，只需要前两个拉盖尔多项式（$m=0$，1）即可。在（A 6c）的右侧，我们附加了一个四阶超碰撞算子；将碰撞算子限制在 $n\geqslant 2$ 上可保证数目和动量守恒。之所以加入超碰撞性，是因为可用的厄米多项式数量有限，因此必须在某处截断级数。若采用硬截断，任意将最后一个$v_\parallel$矩设为零，除非采用碰撞性来确保与平行相位混合相关的速度空间级联

（即扰动分布函数的速度空间级联）在到达最后一个已解析矩之前衰减至零振幅。

我们使用 Fortran 90 编写了代码，以求解（A5）和（A 6）。使用半隐式克兰克–尼科尔森方法求解方程（A 6），并在时间上更新 δf；随后将矩 $g_{0,0}$和 $g_{1,0}$ 代入（A5），通过时间中心差分更新漂移速度。存储 $g_{m,n}$ 和 $u_\perp$ 的离散时间轴彼此错开，以确保所有导数均处于适当的中心位置。更新 $g_{m,n}$ 所需的矩阵求逆通过托马斯三对角矩阵算法（TDMA）完成。

对于初始条件，我们从等温压力平衡出发，其中 $g_{1,0} = g_{0,2} = 0$ 和 $g_{0,0} \neq 0$ （但取值任意）。选择这一设定的原因将在 §2.2.1 中讨论。这些初始条件会迅速过渡到NP本征模：通过激发小振幅（相对于 NP 模式的振幅而言）快波来促成这一调整。该初始条件下 NP 模式的线性演化见图1 ，并将在 §2.1.3中讨论。

附录B：具有任意散射频率的磁声模

为获得任意ν下动理学磁流体模的线性色散关系，我们必须采用一种能够准确描述绝热不变量、热通量和碰撞各向同性化效应的模型。一种此类模型由Chew 等人（1956年）方程给出，并加入碰撞各向同性化项，且通过所谓的Landau流体热通量（Snyder 等人1997）闭合。假设电子等温，这些方程为：

$$\frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{D}t} = -n\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}, \tag{B 1a}$$

$$m_\mathrm{i} n\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = -\boldsymbol{\nabla}\left(p_{\perp\mathrm{i}} + nT_\mathrm{e} + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{b}}\hat{\boldsymbol{b}}\left(\Delta p_\mathrm{i} + \frac{B^2}{4\pi}\right)\right], \tag{B 1b}$$

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{B}}{\mathrm{D}t} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}, \tag{B 1c}$$

$$nB\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{p_{\perp\mathrm{i}}}{nB}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(q_{\perp\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{b}}\right) - q_{\perp\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} - \frac{1}{3}\nu\Delta p_\mathrm{i}, \tag{B 1d}$$

$$\frac{n^3}{B^2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{p_{\parallel\mathrm{i}}B^2}{n^3}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(q_{\parallel\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{b}}\right) + 2q_{\perp\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} + \frac{2}{3}\nu\Delta p_\mathrm{i}, \tag{B 1e}$$

ˆ 其中 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t \doteq \partial/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}$是整体速度 $\boldsymbol{u}$的对流导数， $\boldsymbol{b} \doteq \boldsymbol{B}/B$是沿局域磁场方向的单位矢量， $\Delta p_\mathrm{i} \doteq p_{\perp\mathrm{i}} - p_{\parallel\mathrm{i}}$ 是有量纲的离子压力各向异性， ν 是各向同性化碰撞频率，而$q_{\parallel\mathrm{i}}$ 和$q_{\perp\mathrm{i}}$ 分别表示沿磁场方向的平行和垂直离子热流。对于离子温度$\delta T_{\parallel\mathrm{i}}$、 $\delta T_{\perp\mathrm{i}}$和磁场强度$\delta B_\parallel$的线性扰动，其平行波数为 $k_\parallel$，后者可取自Snyder 等人（1997）的方程（48）和（49）：

$$q_{\parallel\mathrm{i},k} = -\frac{4nv_{\mathrm{th}\parallel,\mathrm{i}}^2}{2\sqrt{\pi}|k_\parallel|v_{\mathrm{th}\parallel,\mathrm{i}} + (3\pi-8)\nu}\,\mathrm{i}k_\parallel\delta T_{\parallel\mathrm{i}}, \tag{B 2}$$

$$q_{\perp\mathrm{i},k} = -\frac{nv_{\mathrm{th}\parallel,\mathrm{i}}^2}{\sqrt{2\pi}|k_\parallel|v_{\mathrm{th}\parallel,\mathrm{i}} + 2\nu}\left(\mathrm{i}k_\parallel\delta T_{\perp\mathrm{i}} + \mathrm{i}k_\parallel T_{\perp i}\Delta_\mathrm{i}\frac{\delta B_\parallel}{B}\right). \tag{B 3}$$

这些“3+1”热通量能够准确再现无碰撞极限下动理学磁流体模的线性 Landau–Barnes阻尼（Snyder等 1997，§VIII），并且

呈现出类似于 Braginskii (1965年) 在碰撞极限下得到的形式。由于当 $\nu \lesssim |k_\parallel| v_{\mathrm{th,\,i}}$ 时，Braginskii-MHD 无法准确描述线性热通量，因此采用 Landau流体CGL方程来描述这些模态在任意 ν 下的线性传播，从而弥合完全无碰撞（$\nu = 0$）与弱碰撞（$\nu \gg k_\parallel v_{\mathrm{th,\,i}}$）之间的差距。值得注意的是，在没有热通量和碰撞性的情况下，方程（B1d）和（B 1e）保证了与拉莫尔回旋和弹跳运动相关的绝热不变量 μ 和 $\mathcal{J}$ 守恒。与 Vlasov方法相比，采用 Landau流体CGL方程的优点之一是，前者不依赖等离子体色散函数 $\mathcal{Z}(\zeta)$；该函数对 $\zeta \doteq \omega/|k_\parallel| v_{\mathrm{th,\,i}}$ 的依赖关系只有在渐近极限 $\zeta \gg 1$ 和 $\zeta \ll 1$下才能用解析形式表示。相反，“3+1”热通量可在所有频率下为这些模态导出多项式色散关系。因此，如果要推导斜向IAW的频率和阻尼率的解析表达式（当 $T_\mathrm{e}/T_{\mathrm{i}0} \sim 1$时，其具有 $\zeta \sim 1$ ），便可轻松实现。

继续进行线性分析时，我们假设背景压力各向异性为零，忽略所有非线性项，并对（B 1）–（B3）在空间和时间上进行傅里叶变换，从而得到 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t \to -\mathrm{i}\omega$ and $\boldsymbol{\nabla} \to \mathrm{i}\boldsymbol{k}$。结果是一个简单的代数方程组，其中一些解如图21所示。总共有 8 个模态，对应 8 个唯一的时间导数（$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 确定了 $\delta\boldsymbol{B}_\perp$的一个分量）。图21中未展示的模态包括阿尔芬波（它们对应于 $\zeta = \pm\beta_0^{-1/2}\,\mathrm{i}$ 处的直线）和两个快波（见图15）。考虑到 CGL-MHD 中热压分裂为两个分量，因此比碰撞MHD多出一个时间导数，理应存在一个在碰撞极限下消失的模态。事实上，分岔后，斜向IAW的一个分支变为非传播模态，其阻尼率约为 ν ，当 $\nu \to \infty$时如此。这种强阻尼源于该模态的极化：其垂直和垂直方向的压强扰动方向相反，并满足 $|\delta p_\perp| \gg |\delta p_\parallel|$ （当 $k_\perp \gg k_\parallel$时）。因此，我们在图 21中将这一模态称为“各向异性模”：即使在 ν任意大时，它仍保持各向异性，导致阻尼越来越快。

在某些情况下，NP 模式被认为是 MHD 慢磁声模在无碰撞极限下的表现（例如 Verscharen 等人 (2017年)），因此常被称为无碰撞慢模。这可能是因为 Braginskii-磁流体力学色散关系预测，在 足够低时慢模不传播，而且当 时仍不传播。实际上，在碰撞性足够低时，慢模会再次传播，而 NP 模式更适合被视为 MHD 熵模的动理学扩展。在 MHD 熵模中，平行动量方程不允许存在压力扰动，只允许密度扰动。然而，在散射率较低时，压力会分解为场平行分量和垂直分量，并可实现垂直压力平衡（见（B1b））。认为 NP 模式与 MHD 熵模而非慢模相连，或许更为妥当，因为这也避免了色散关系不同分支之间的简并。仔细观察图 21 可知，存在一个频带，在该频带内，NP 模式和斜向离子声模的实频率均为零。若 MHD 慢模转变为 NP 模式，那么这一分支就必须与动理学熵模相交，且两者的衰减率相同，从而发生简并。因此，在论述高-β 等离子体中超过阈值的 NP 模式的行为时，我们认为，在尺度分离非常大、因而 $\nu/|k_\parallel| v_{\mathrm{th\,i}}$ 也很大时，NP 模式将更接近 MHD 熵模。

斜向离子声波（IAW）也值得特别关注，尤其是因为它存在一个非传播带，该带始于 $\nu \sim k_\parallel v_{\mathrm{th,\,i}}$ 附近。有些自相矛盾的是，

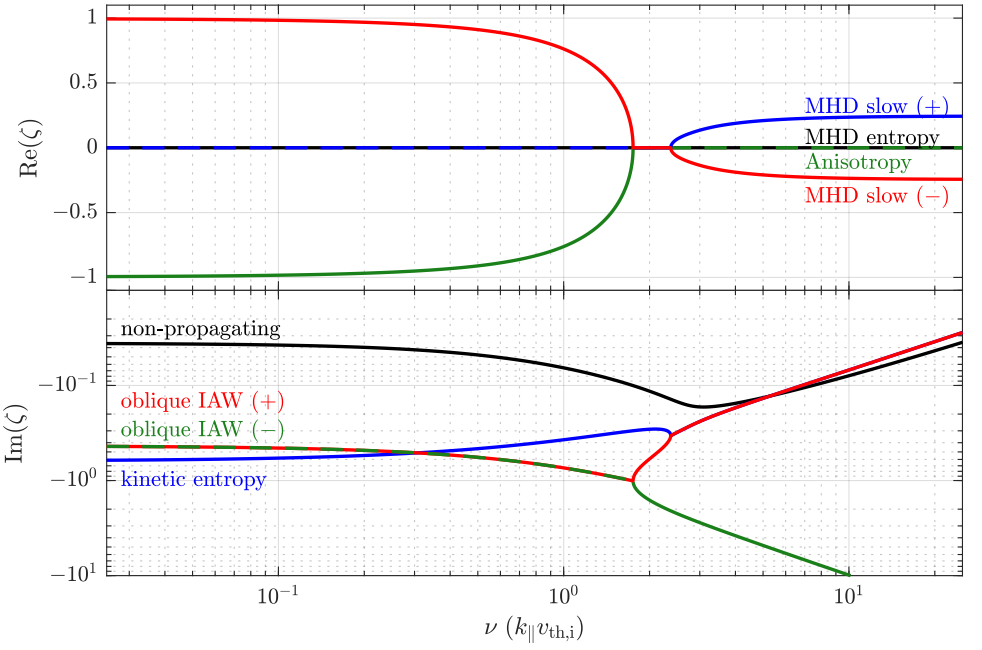


图21：Landau 流体 CGL-MHD 方程（B1）的线性色散关系。无量纲（复）频率 $\zeta \doteq \omega/|k_\parallel|v_{\mathrm{th,\,i}}$ 是通过数值计算得到的，作为碰撞性 $\nu/|k_\parallel|v_{\mathrm{th,\,i}}$ 的函数，取值为 $k_\perp = 4|k_\parallel|$、$\beta_{\mathrm{i0}} = 16$ 和 $T_\mathrm{e} = T_{\mathrm{i0}}$。

它是 MHD 慢模的无碰撞延拓，尽管在高 β 时，其传播速度会快于阿尔fv´én速度。即使在无碰撞的 Landau流体CGL模型中，该模态的频率也无法用一个简单的通式来表示。不过，在 $k_\perp \gg k_\parallel$ 和 $\beta \gg 1$ 且 $T_\mathrm{e} = T_{\mathrm{i0}}$ 的极限下，可以数值求得色散关系；我们发现 $\zeta \approx 1 - 0.43\mathrm{i}$。因此，该模态的色散关系与其平行传播变体非常相似，尤其是其快速阻尼的特性。对 $k_\perp \gg k_\parallel$ 的渐近分析表明，当 $\beta \gtrsim 7.1$ 时，该模态会出现非传播带；该现象发生的大致散射频率范围满足 $\nu/k_\parallel v_{\mathrm{th,\,i}} \in [2,(3/4)\sqrt{\beta}]$。当 $\beta \sim \mathcal{O}(1)$ 及更小时，Braginskii慢模会随着 $\nu \to 0$ 平滑过渡为斜向IAW。然而，在高 β 时，该模态的两个传播部分之间会形成越来越大的间隙。对于任何 β，平行传播IAW都不会出现这一现象。

附录 C. 斜传播离子声波与微观不稳定性

在不平行于背景磁场传播的无碰撞流体磁流体模中，我们尚未在高β 等离子体和微观不稳定性的背景下讨论一种模态：斜向IAW。鉴于斜传播离子声波与平行传播的对应波具有许多相似特征（§B），将孔茨等人(2020的结果推广到斜向情形不需要做出重大改动。即使这些波横穿背景磁场传播，在高 β 条件下，它们仍主要由平行压强扰动驱动。因此，磁张力基本不起作用，也不会像线偏振阿尔芬´波那样发生中断型过程。此外，斜向IAW会产生等量的正、负压力各向异性（不像NP 模式那样存在压力平衡）。因此，

镜像不稳定性和火hose不稳定性都可能由该模态触发。斜传播离子声波与平行离子声波之间唯一显著的差异，是斜向模态的色散关系在 ν 的某些取值下存在非传播带。为了解这一差异会如何影响不稳定性诱发的散射作用下的传播，我们进行了与§3.1.3中类似的分析。

我们的首要任务是确定振幅上限：超过此上限后，斜传播离子声波中的各向异性压力扰动会同时受到镜像不稳定性和火hose不稳定性的影响。取 $k_\perp \gg k_\parallel$ 和 $\beta \gg 1$ 极限，斜传播离子声波中的平行和垂直温度扰动为

$$\frac{\delta T_\parallel}{T_{\mathrm{i}0}} \approx -\left[2+\left(1+\mathrm{i}\frac{k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}}{\omega\sqrt{\pi}}\right)^{-1}\right]\left(1+2\mathrm{i}\frac{k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}}{\omega\sqrt{\pi}}\right)^{-1}\frac{\delta B_\parallel}{B_0}, \tag{C 1a}$$

$$\frac{\delta T_\perp}{T_{\mathrm{i}0}} \approx \left(1+\mathrm{i}\frac{k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}}{\omega\sqrt{\pi}}\right)^{-1}\frac{\delta B_\parallel}{B_0}. \tag{C 1b}$$

代入$\omega/k_\parallel v_{\mathrm{th,\,i}} \approx 1-0.43\mathrm{i}$，方程（C1）给出离子压力各向异性$\Delta = (1.88-3.03\mathrm{i})(\delta B_\parallel/B_0)$。这意味着，斜传播离子声波触发火hose不稳定性和镜像不稳定性的振幅阈值为：

$$\left|\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right| \gtrsim \frac{1}{\beta_{\mathrm{i}}} \quad \text{(oblique IAW amplitude threshold)}. \tag{C 2}$$

我们认为，超过此阈值后，微观不稳定性引起的散射将达到维持边际稳定性所需的程度，即 $\Delta \sim \beta_{\mathrm{i}}^{-1}$。按照处理快模时采用的相同逻辑，该散射率为

$$\nu \sim \mathrm{Re}\left[3\omega\beta_{\mathrm{i}}\left(\frac{\delta B_\parallel}{B_0}-\frac{2}{3}\frac{\delta n}{n_0}\right)\right] \approx 3.7 k_\parallel v_{\mathrm{th,i}}\beta_{\mathrm{i}}\left|\frac{\delta B_\parallel}{B_0}\right|. \tag{C 3}$$

与快波的情况一样，上述极限碰撞度表达式仅在 $\nu \gg \omega$ 的极限下才成立。振幅阈值处几乎满足这一约束，因此即使模态振幅只有几个 β_{i}^{-1}，这一散射率也很可能是一个良好的近似。

如今已知诱导散射率的标度关系，我们可以回到图 21所示的色散关系，推测微观不稳定性可能如何改变斜传播离子声波的传播。回想附录 B，当 $\beta_{\mathrm{i}} \gtrsim 7.1$ 时，若 $\nu/k_\parallel v_{\mathrm{th,\,i}} \in [2,(3/4)\sqrt{\beta}]$，斜传播离子声波便不再传播。有效散射率的形式（取决于 $\delta B_\parallel$）表明，斜传播离子声波的最终命运取决于初始扰动的振幅。对于振幅处于 $\beta^{-1} \lesssim |\delta B_\parallel/B_0| \lesssim \beta^{-1/2}$范围内的情况，斜传播离子声波将成为不传播的黏性阻尼模态；而振幅高于 $|\delta B_\parallel/B_0| \gtrsim \beta^{-1/2}$ 时，它将成为类布拉金斯基传播声波。后一个状态基本上就是孔茨等人(2020)针对平行传播IAW所得出的结果。前一种中等振幅的极限在高 β 下愈发重要，因为其适用范围会扩大。然而，在 $\beta \lesssim 10$ 的等离子体中（例如太阳风），这一范围要么极窄，要么不存在，因此其演化会更接近平行传播IAW。与所有情况一样，只有当波相关的压强各向异性被驱动至超过微观不稳定性阈值时，微观不稳定性及其诱导散射的作用才会持续。

REFERENCES

Arzamasskiy, L. Kunz M. W. Squire J. Quataert E. & Schekochihin A. A. , , , 2023 *Phys. Rev. X* , , , , 无碰撞高 β 等离子体中的动理学湍流。 , 即将出版（ arXiv:2207.05189 ）。Bale, S. D., Kasper, J. C., Howes, G. G., Quataert, E., Salem, C. & Sundkvist, D. 2009太阳风中质子温度各向异性不稳定性阈值附近的磁涨落功率。 *Phys. Rev. Lett.* **103** (21), 211101。Barnes, A. 1966磁流体波的无碰撞阻尼。 *Phys. Fluids* **9**, 1483。Bott, A. F. A., Arzamasskiy, L., Kunz, M. W., Quataert, E. & Squire, J. 2021膨胀的湍流无碰撞等离子体中的自适应临界平衡与火hose不稳定性。*Astrophys. J. Lett.* **922** (2), L35。Braginskii, S. I. 1965 等离子体中的输运过程。 *Rev. Plasma Phys.* **1**, 205。Chen, C. H. K., Matteini, L., Schekochihin, A. A., Stevens, M. L., Salem, C. S., Maruca Kunz , B. A., , M. W. & Bale, S. D. 2016 太阳风中火hose与镜像不稳定性阈值的多组分测量。 *Astrophys. J. Lett.* **825**, L26。Chew, G. F., Goldberger, M. L. & Low, F. E. 1956 不存在粒子碰撞时的玻尔兹曼方程与单流体磁流体方程。 *Proc. Roy. Soc. London* , . *Ser. A* **236** 112

Coburn, J. T., Chen, C. H. K. & Squire, J. 2022 太阳风质子有效平均自由程的测量。 *J. Plasma Phys.* **88** (5), 175880502。Davidson, R. C. & Völk, H. J. 1968 园艺软管不稳定性的宏观准线性理论。 *Phys. Fluids* **11**, 2259。Gary, S. P. & Lee, M. A. 1994 离子回旋各向异性不稳定性及质子各向异性与质子β之间的反相关。 *J. Geophys. Res.* **99** (A6), 11297。Goldreich, P. & Sridhar, S. 1995 迈向星际湍流理论。2：强Alfv´én湍流。 *Astrophys. J.* **438**, 763。Hada, T. & Kennel, C. F. 1985 太阳风中慢波的非线性演化。*J. Geophys. Res.* **90** (A1), 531。Hasegawa, A. 1969磁层中的漂移镜像不稳定性。 *Phys. Fluids* **12**, 2642。Hellinger, P. 2007 *Phys. Plasmas* 关于阈值附近线 **14** 082105

性镜像不稳定性的评论。 , .Hellinger, P. & Matsumoto, H. 2000 新型动理学不稳定性：斜向Alfv´én火hose。*J. Geophys. Res.* **105**, 10519。Hellinger, P., Trávníček, P., Kasper, J. C. & Lazarus, A. J. 2006 太阳风质子温度各向异性：线性理论与WIND/SWE观测。 *Geophys. Res. Lett.* , L .Johnston, **33** 09101

G. L. 1971 库仑碰撞对维持朗道阻尼的主导影响。 *Phys. Fluids* **14**, 12。Kasper, J. C., Lazarus, A. J. & Gary, S. P. 2002 WIND/SWE观测到的太阳风质子温度各向异性的火hose约束。 *Geophys. Res. Lett.* **29**, 1839。Kawazura, Y., Schekochihin, A. A., Barnes, M., TenBarge, J. M., Tong, Y., Klein, K. G. & Dorland W. 2020 , 压缩驱动的天体物理陀螺动理学湍流中的离子与电子加热。 *Phys. Rev. X* **10** (4), 041050。Kennel, C. F. & Sagdeev, R. Z. 1967 高 β 等离子体中的无碰撞激波：1。*J. Geophys. Res.* **72** (13), 3303。Kulsrud, R. M. 1964 。载于 *Teoria dei plasmi* （编者：M. N. Rosenbluth） , 第54页。学术出版社。Kulsrud, R. M. 1983 等离子体的磁流体描述。载于 *Basic Plasma Physics: Selected Chapters*, *Handbook of Plasma Physics Volume 1* 1 , （编者：A. A. Galeev和R. N. Sudan） , 第页。Kunz, M. W. 2011 具有各向异性动量与热输运的热分层星系团内介质的动力学稳定性。 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **417**, 602。Kunz, M. W., Abel, I. G., Klein, K. G., & Schekochihin, A. A. 2018 天体物理陀螺动理学：离子尺度及更大尺度上压力各向异性等离子体中的湍流。*J. Plasma Phys.* **84** (2), 715840201。Kunz, M. W., Schekochihin, A. A., Chen, C. H. K., Abel, I. G. & Cowley, S. C. 2015 压力各向异性天体物理等离子体中的惯性区动理学湍流。 *J. Plasma* ( ), . *Phys.* **81** 5 325810501

Kunz, M. W., Schekochihin, A. A. & Stone, J. M. 2014*a* 无碰撞剪切等离子体中的火hose与镜像不稳定性。 *Phys. Rev. Lett.* **112** (20), 205003.Kunz, M. W., Squire, J., Schekochihin, A. A. & Quataert, E. 2020 无碰撞高-β 等离子体中的自持声波。 *J. Plasma Phys.* **86** (6), 905860603.Kunz, M. W., Stone, J. M. & Bai, X.-N. 2014*b* Pegasus：用于天体物理等离子体动力学的新型混合动理学粒子网格代码。 *J. Comput. Phys.* **259**, 154.Landau, L. 1946 *Zh. Exp. Teor. Fiz. (English* 关于电*translation: 1946, J. Phys. U.S.S.R., 10, 25)* **16** 574
子等离子体的振动。 , .Lithwick, Y. & Goldreich, P. 2001 星际等离子体中的可压缩磁流体湍流。 *Astrophys. J.* **562**, 279.Melville, S., Schekochihin, A. A. & Kunz, M. W. 2016 剪切无碰撞等离子体中由压强各向异性驱动的微湍流与磁场演化。 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **459**, 2701.Newman, W. I. 2020 无碰撞环境中的带电粒子各向同性化：湍流磁场作为随机游走的通道。 *J. Plasma Phys.* **86** (3), 175860301.Ödblom, A. 1998 *Phys. Lett. A* 温热磁**249** 1 2 93
化等离子体中激波的形成。(–), .Parker, E. N. 1958 低密度各向异性电离气体中的动力学不稳定性。*Phys. Rev.* **109**, 1874.Rincon, F., Schekochihin, A. A. & Cowley, S. C. 2015 非线性镜像不稳定性。*Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **447**, L45.Riquelme, M. A., Quataert, E. & Verscharen, D. 2015高β天体物理与日球层等离子体中持续驱动的镜像不稳定性和离子回旋不稳定性的粒子网格模拟。 *Astrophys. J.* **800**, 27.Rosin, M. S., Schekochihin, A. A., Rincon, F. & Cowley, S. C. 2011 弱碰撞等离子体中平行火焰软管不稳定性与陀螺热不稳定性的非线性理论。*Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **413**, 7.Schekochihin, A. A. 2022 磁流体动力学湍流：一篇带有偏见的综述。 *J. Plasma Phys.* **88** (5), 155880501.Schekochihin, A. A., Cowley, S. C., Dorland, W., Hammett, G. W., Howes, G. G., Quataert , E. & Tatsuno, T. 2009 天体物理陀螺动理学：磁化弱碰撞等离子体中的动理学与流体湍流级联。 *Astrophys. J. Supp. Ser.* , . **182** 310
Schekochihin, A. A., Cowley, S. C., Kulsrud, R. M., Rosin, M. S. & Heinemann, T. 2008 天体物理等离子体中火焰软管与镜像涨落的非线性增长。*Phys. Rev. Lett.* **100** (8), 081301。Sironi, L. & Narayan, R. 2015无碰撞吸积流中离子回旋不稳定性引起的电子加热。I. 压缩驱动不稳定性与电子加热机制。*Astrophys. J.* **800**, 88.Snyder, P. B., Hammett, G. W. & Dorland, W. 1997 无碰撞磁流体动力学的Landau流体模型。 *Phys. Plasmas* **4**, 3974.Southwood, D. J. & Kivelson, M. G. 1993 镜像不稳定性。I——线性不稳定性的物理机制。 *J. Geophys. Res.* **98**, 9181.Squire, J., Kunz, M. W., Arzamasskiy, L., Johnston, Z., Quataert, E. & Schekochihin, A. A. 2023 弱碰撞等离子体湍流中的压强各向异性与黏性加热。 *arXiv e-prints* arXiv:2303.00468Squire, J., Kunz, M. W., Quataert, E. & Schekochihin, A. A. 2017*a* 高-等离子体中剪切阿尔芬波的大振幅波动中断的动理学模拟。( ), .Squire, J., Quataert, E. & Schekochihin, A. A. 2016 高β低碰撞率等离子体中阿尔芬扰动振幅的严格上限。 *Astrophys. J.* **830**, L25.Squire, J., Schekochihin, A. A. & Quataert, E. 2017*b* 高β低碰撞率等离子体中剪切阿尔芬波的振幅上限与非线性阻尼。( ), .Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F. & Simon, J. B. 2008 Athena：用于天体物理磁流体动力学的新型代码。 *Astrophys. J.* **178** (1), 137.

Sujith, R. I. 2005 磁流体力学激波的形成：面积与密度变化的影响。 *Phys. Plasmas* **12** (5), 052116。Vedenov, A. A. & Sagdeev, R. Z. 1958 载于 *Plasma Physics and Problems of Controlled Thermonuclear Reactions* 278 (编者 M. A. Leontovich)，第页。苏联科学院出版社，莫斯科。Verscharen, D., Chandran, B. D. G., Klein, K. G. & Quataert, E. 2016 压缩涨落与等离子体不稳定性导致太阳风质子发生无碰撞各向同性化。 *Astrophys. J.* **831**, 128。Verscharen, D., Chen, C. H. K. & Wicks, R. T. 2017 关于太阳风中的动力学慢模、流体慢模与压力平衡结构。 *Astrophys. J.* **840**, 106。Yoon, P. H., Wu, C. S. & de Assis, A. S. 1993 有限离子回旋半径对高β等离子体中火焰软管不稳定性的影响。 *Phys. Fluids B* **5**, 1971年。Zakharov, V. E. & Karpman, V. I. 1963 关于等离子体波阻尼的非线性理论。 *Sov. J. Exp. Theor. Phys.* **16**, 351.