arXiv:2301.02285v1 [math.AC] 5 Jan 2023

正则序列的主分解

THOMAS POLSTRA

Abstract. 设 R 是一个诺特环，且 $x_1, \dots, x_t$ 是 R 中的可置换正则元素序列。那么存在一个有限素理想集 Λ 和一个自然数 C，使得对于所有 $n_1, \dots, n_t$，都存在一个主分解 $(x_1^{n_1}, \dots, x_t^{n_t}) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\ell$，满足 $\sqrt{Q_i} \in \Lambda$ 且 $\sqrt{Q_i}^{C(n_1+\cdots+n_t)} \subseteq Q_i$ 对所有 $1 \leq i \leq \ell$ 均成立。

1. 引言

交换代数中理想的主分解，对应于代数几何中闭子概形分解为不可约子空间。设 R 是一个诺特环，$I \subseteq R$ 是一个理想。根据 [Swa97] 的主要结果，存在一个整数 C，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个主分解

$$I^n = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\ell$$

使得 $\sqrt{Q_i}^{Cn} \subseteq Q_i$ 对所有 $1 \leq i \leq \ell$ 都成立。Swanson 定理在重数理论中有应用，[Cut13、Cut14、Cut15、Das21、CRMn22], 一致符号幂拓扑问题，[Swa00、ELS01、HH02、HKV09、HK19、GHM20], 以及紧闭理论中的局部化问题，[Hun00、Vra00、SS97、Din09]。

Swanson 的证明首先将问题化归到 I 由一个非零因子主生成的情形。事实上，扩张 Rees 代数 $S := R[It, t^{-1}]$ 具有这样的性质：t^{-1} 是非零因子，且 $I^n = (t^{-1}S)^n \cap R$。如果 $(t^{-1}S)^n = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\ell$ 是 $(t^{-1}S)^n$ 的一个适当主分解，那么 $I^n = (Q_1 \cap R) \cap \cdots \cap (Q_\ell \cap R)$ 就是 I^n 的一个具有所需性质的主分解。我们的主要结果将 Swanson 定理推广到由可置换正则序列生成的理想。

定理 1.1. 设 R 是一个诺特环，且 $x_1, \dots, x_t$ 是一个可置换正则序列。存在一个有限素理想集 Λ 和一个常数 C，使得对于每个 $n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}$，都存在一个主分解

$$(x_1^{n_1}, \dots, x_t^{n_t}) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\ell$$

使得对于所有 $1 \leq i \leq \ell$，$\sqrt{Q_i} \in \Lambda$ 和 $\sqrt{Q_i}^{C(n_1+\cdots+n_t)} \subseteq Q_i$。

[Swa97] 的方法与 Huneke 一致 Artin-Rees 定理 [Hun92] 中的技巧相似。其他人也在不依赖这类技术细节的情况下重新证明了 Swanson 定理，参见 [Sha00、Sha98、Yao02、Yao06]，其中给出了涉及理想的幂之乘积及其整闭包的更一般分解结论。与这些方法类似，本文从根本上仅依赖标准的 Artin-Rees 引理 [AM69，命题 10.9],以及内射包理论，[BH93，第 3 节2]。

Polstra 得到了美国国家科学基金会 DMS 资助项目 #2101890 的部分资助。1

2. Primary Decompositions of Regular Sequences

设 $I \subseteq R$ 为一个理想， $x \in R$ 为一个元素。根据 Artin-Rees 引理，存在一个常数 C，使得 $(x) \cap P^{h+C} = ((x) \cap P^C)P^h \subseteq xP^h$ 对所有 h 都成立，参见 [AM69，命题 10.9]。

引理 2.1. 设 R 是一个诺特环，且 $x \in R$ 是一个非单位元。设 $P \in$ 为 R 的素谱，且 $E = E_R(R/P)$。取 C 使得对所有 $h \in \mathbb{N}$，均有 $(x) \cap P^{h+C} \subseteq xP^h$。若 $\varphi\colon R \to E$ 是一个 R-线性映射，且满足 $P^h\varphi = 0$，则存在一个 R-线性映射 $\psi\colon R \to E$，使得

- $\varphi = x\psi$;
- $P^{h+C}\psi = 0$.

证明。我们假设选取 C 使得对所有整数 h，均有 $(x) \cap P^{h+C} \subseteq xP^h$。特别地，存在自然满射

$$\frac{R}{(x) \cap P^{h+C}} \to \frac{R}{xP^h}.$$

因此存在包含关系

$$\mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{xP^h}, E\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(\frac{R}{(x) \cap P^{h+C}}, E\right).$$

等价地，

$$(0 :_E xP^h) \subseteq (0 :_E ((x) \cap P^{h+C})).$$

进一步地，存在自然包含

$$\frac{R}{(x) \cap P^{h+C}} \subseteq \frac{R}{(x)} \oplus \frac{R}{P^{h+C}}.$$

因此存在自然满射

$$(0 :_E (x)) + (0 :_E P^{h+C}) \twoheadrightarrow (0 :_E ((x) \cap P^{h+C})).$$

总之，若

$$\lambda \in \mathrm{Hom}_R(R/xP^h, E) \cong (0 :_E xP^h) \subseteq (0 :_E ((x) \cap P^{h+C}))$$

则存在

$$\lambda' \in \mathrm{Hom}_R(R/(x), E) \cong (0 :_E (x))$$

and

$$\psi \in \mathrm{Hom}_R(R/P^{h+C}, E) \cong (0 :_E P^{h+C})$$

使得 $\lambda = \lambda' + \psi$。

模 E 是单射的，因此存在 λ 使得 $\varphi = x\lambda$，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\cdot x} & R \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \swarrow{\scriptstyle \lambda} & \\ E & & \end{array}$$

由于 $P^h\varphi = 0$，我们有 $xP^h\lambda = 0$。因此可以写成 $\lambda = \lambda' + \psi$，使得 $x\lambda' = 0$且 $P^{h+C}\psi = 0$。因此， $\varphi = x\lambda = x\psi$ 和 $\psi\colon R \to E$ 具有所需的性质。□

采用以下记号：设 $\underline{x} = x_1, \ldots, x_t$ 是诺特环 R 的一个元素序列，且 $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^{\oplus t}$。

- $\underline{x}^{\underline{n}} = x_1^{n_1}, \ldots, x_t^{n_t}$;
- $e_i \in \mathbb{N}^{\oplus t}$ 是一个元素，其第 i 个坐标为 1，其余坐标均为 0;
- $\underline{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^{\oplus t}$;
- 如果 $\underline{n}' \in \mathbb{N}^{\oplus t}$，那么 $\underline{n} \cdot \underline{n}'$ 表示 $\underline{n}$ 与 $\underline{n}'$的点积。特别地，元素$\underline{n} - (\underline{n} \cdot e_i - 1)e_i$ 是 $\mathbb{N}^{\oplus t}$ 中的元素，它由将 $\underline{n}$的第 i 个坐标替换为数字 1 得到。

注意，若 $x_1, \ldots, x_t$是可置换正则序列，且 $\underline{n} \in \mathbb{N}^{\oplus t}$，则 $(\underline{x}^{\underline{n}+e_i}) : x_i = (\underline{x}^{\underline{n}})$。

定理 2.2. 设 R是一个诺特环，$\underline{x} = x_1, \ldots, x_t$是一个可置换正则序列。固定一个有限的素理想列表 Λ，其中 Λ允许出现重复的素理想，并取一个嵌入

$$\frac{R}{(\underline{x})} \xhookrightarrow{\varphi_{\underline{1}}} \bigoplus_{P \in \Lambda} E_R(R/P).$$

取 C 足够大，使得对于所有 $P \in \Lambda$、$h \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le t$，$P^{C|\underline{1}|}\varphi_{\underline{1}} = 0$ 和 $(x_i) \cap P^{h+C} \subseteq x_i P^h$。那么对于所有 $\underline{n} \in \mathbb{N}^{\oplus t}$，存在一个嵌入

$$\frac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}})} \xhookrightarrow{\varphi_{\underline{n}}} E_{\underline{n}}$$

使得 $E_{\underline{n}} \cong \left(\bigoplus_{P \in \Lambda} E_R(R/P)\right)^{\ell_{\underline{n}}}$，其中某个整数 $\ell_{\underline{n}}$ 满足，且对于所有 $P \in \Lambda$，$P^{C|\underline{n}|}\varphi_{\underline{n}} = 0$.

证明。由归纳法，我们可以假设已经构造了内射模 $E_{\underline{n}}$，对所有 $\underline{n} \le \underline{n}'$ 以及映射 $\varphi_{\underline{n}} : R/(\underline{x}^{\underline{n}}) \hookrightarrow E_{\underline{n}}$，使得 $P^{C|\underline{n}|}\varphi = 0$；为构造$E_{\underline{n}'+e_i}$ 以及映射 $\varphi_{\underline{n}'+e_i} : R/(\underline{x}^{\underline{n}'+e_i}) \hookrightarrow E_{\underline{n}'+e_i}$，使得 $P^{C|\underline{n}'+e_i|}\varphi_{\underline{n}'+e_i} = 0$。更进一步，我们假设 $E_{\underline{n}}$ 由对所有 $\underline{n} \le \underline{n}'$ 的 $\bigoplus_{P \in \Lambda} E_R(R/P)$ 的直和构成。

由于$\underline{x}$ 是可置换正则序列，因此存在短正合列

$$0 \to \frac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}'})} \xrightarrow{\cdot x_i} \frac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}+e_i})} \xrightarrow{\pi} \frac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}'-(\underline{n}'\cdot e_i-1)e_i})} \to 0.$$

将引理 2.1 应用于 $E_{\underline{n}'}$ 的每个不可约直和项，可得到一个映射 $\psi_{\underline{n}'} : R/(\underline{x}^{\underline{n}'+e_i}) \to E_{\underline{n}'}$，使得 $P^{C|\underline{n}'+e_i|}\psi_{\underline{n}'} = 0$，并且下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \dfrac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}'})} & \xrightarrow{\cdot x_i} & \dfrac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}'+e_i})} & \xrightarrow{\pi} & \dfrac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}'-(\underline{n}'\cdot e_i-1)e_i})} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\underline{n}'}} & \swarrow{\scriptstyle \psi_{\underline{n}'}} & \downarrow{\scriptstyle (\psi_{\underline{n}'}, \varphi_{\underline{n}'-(\underline{n}'\cdot e_i-1)e_i}\circ\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\underline{n}'-(\underline{n}'\cdot e_i-1)e_i}} & & \\
0 & \longrightarrow & E_{\underline{n}'} & \longrightarrow & E_{\underline{n}'} \oplus E_{\underline{n}'-(\underline{n}'\cdot e_i-1)e_i} & \longrightarrow & E_{\underline{n}'-(\underline{n}'\cdot e_i-1)e_i} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

不难验证，$\varphi_{\underline{n}'+e_i} := (\psi_{\underline{n}'}, \varphi_{\underline{n}'-(\underline{n}'\cdot e_i-1)e_i} \circ \pi)$ 是一个单射映射，且$P^{C|\underline{n}+e_i|}\varphi_{\underline{n}'+e_i} = 0$。□

推论 2.3（正则序列的 Swanson 定理）。设 R 是一个诺特环，且$\underline{x} = x_1, \ldots, x_t$是一个可置换正则序列。存在一个有限素理想集 Λ和一个常数 C，使得对所有$\underline{n} \in \mathbb{N}^{\oplus t}$，都存在一个主分解

$$(\underline{x}^{\underline{n}}) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_\ell$$

使得对所有 $1 \le i \le \ell$，$\sqrt{Q_i} \in \Lambda$ 且 $\sqrt{Q_i}^{C|\underline{n}|} \subseteq Q_i$。3

证明。固定 $\underline{n} \in \mathbb{N}^{\oplus t}$. 。由定理 2.2，存在一个常数 C，其不依赖于 $\underline{n} \in \mathbb{N}^{\oplus t}$，以及一个有限素理想集 $\Lambda_{\underline{n}}$，允许 $\Lambda_{\underline{n}}$ 中出现重复素数，并且存在一个嵌入

$$\varphi_{\underline{n}} : \frac{R}{(\underline{x}^{\underline{n}})} \hookrightarrow \bigoplus_{P \in \Lambda_{\underline{n}}} E(R/P)$$

使得对所有 $P \in \Lambda_{\underline{n}}$，$P^{C|\underline{n}|}\varphi_{\underline{n}} = 0$。令 $\pi : R \longrightarrow R/(\underline{x}^{\underline{n}})$ 和 $\pi_P : \bigoplus_{P \in \Lambda_{\underline{n}}} E(R/P) \to E(R/P)$ 为自然满射。于是

$$(\underline{x}^{\underline{n}}) = \bigcap_{P \in \Lambda} \operatorname{Ker}(\pi_P \circ \varphi_{\underline{n}} \circ \pi)$$

是 $(\underline{x}^{\underline{n}})$ 的一个主分解，因为存在嵌入

$$\frac{R}{\operatorname{Ker}(\pi_P \circ \varphi_{\underline{n}} \circ \pi)} \hookrightarrow E(R/P).$$

此外，$P^{C|\underline{n}|} \subseteq \operatorname{Ker}(\pi_P \circ \varphi_{\underline{n}} \circ \pi)$，因为 $P^{C|\underline{n}|}\varphi = 0$。 □

References

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald: 《交换代数导论》，Addison-Wesley 出版公司，马萨诸塞州雷丁—伦敦—安大略省唐米尔斯，1969。MR0242802 (39 #4129)[BH93] W. Bruns and J. Herzog: Cohen-Macaulay 环，《剑桥高等数学研究丛书》第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。MR1251956 (95h:13020)[CRMn22] Y. Cid-Ruiz and J. Montaño: 理想的分次族的混合重数，《代数杂志》590 (2022)，394–412。4332034[Cut13] S. D. Cutkosky: 理想的分次族相关的重数，《代数与数论》7 (2013)，第9期，2059–2083。3152008[Cut14] S. D. Cutkosky: 理想的分次族与线性系的渐近重数，《数学进展》264 (2014)，55–113。3250280[Cut15] S. D. Cutkosky: 渐近重数，《代数杂志》442 (2015)，260–298。3395062[Das 21] S. Das: 分次代数的 ε 重数，《纯粹与应用代数杂志》225 (2021)，第10期，论文编号106670，21页。4207331[Din09] T. T. Dinh: 理想的 Frobenius 幂的主分解的增长，《代数杂志》321 (2009)，第3期，829–846。2488554[ELS01] L. Ein, R. Lazarsfeld, and K. E. Smith: 光滑簇上的一致有界与符号幂，《数学发明》144 (2001)，第2期，241–252。1826369[GHM20] E. Grifo, C. Huneke, and V. Mukundan: 预期复现率与理想的符号幂，《伦敦数学学会杂志》（第2辑）102 (2020)，第2期，453–469。4171422[HH 02] M. Hochster and C. Huneke: 理想的符号幂与普通幂的比较，《数学发明》147 (2002)，第2期，349–369。1881923[Hun92] C. Huneke: 诺特环中的一致有界，《数学发明》107 (1992)，第1期，203–223。1135470[Hun00] C. Huneke: 理想的 Frobenius 幂的饱和，第28卷，2000，5563–5572页，纪念 Robin Hartshorne 专刊。1808589[HK19] C. Huneke and D. Katz: 阿贝尔扩张中的一致符号拓扑，《美国数学会汇刊》372 (2019)，第3期，1735–1750。3976575[HKV09] C. Huneke, D. Katz, and J. Validashti: 符号拓扑与阿基拓扑的一致等价，《伊利诺伊数学杂志》53 (2009)，第1期，325–338。2584949[Sha 00] R. Y. Sharp: 内射模与主分解的线性增长，《美国数学会会刊》128 (2000)，第3期，717–722。1641105[Sha98] R. Y. Sharp: 整闭包的主分解的线性增长，《代数杂志》207 (1998)，第1期，276–284。1643102

[SS97] K. E. Smith and I. Swanson：伴随素理想增长的线性界，《通信代数》25 (1997)，第10期，3071–3079。1465103[Swa97] I. Swanson：理想的幂。主分解、Artin-Rees 引理与正则性，《数学年刊》307 (1997)，第2期，299–313。1428875[Swa00] I. Swanson：理想拓扑的线性等价，《数学杂志》234 (2000)，第4期，755–775。1778408[Vra00] A. Vraciu：分次仿射代数上 Frobenius 像的局部上同调，《代数杂志》228 (2000)，第1期，347–356。1760968[Yao02] Y. Yao：主分解：相容性、独立性与线性增长，《美国数学会会刊》130 (2002)，第6期，1629–1637。1887009[Yao06] Y. Yao：主分解。II. 主分量与线性增长，《纯粹与应用代数杂志》205 (2006)，第1期，226–242。2193199

Department of Mathematics, University of Alabama, Tuscaloosa, AL 35487 USA电子邮件地址：tmpolstra@ua.edu