arXiv:2301.02290v1 [math.GM] 5 Jan 2023

三角模糊数上的平均函数

RobertoDíaz[a]、Aldryn Aparcana[b]、Diego Soto[c]、Nicolás Zumelzu[c]、José Canumán[d]、Alvaro Mella[c]、Edmundo Mansilla[c] 和 Benjamín Bedregal[e]

[a]洛斯拉戈斯大学精确科学系，智利奥索尔诺[b]圣路易斯·贡萨加国立大学理学院，秘鲁伊卡[c]麦哲伦大学数学与物理系，智利蓬塔阿雷纳斯[d]麦哲伦大学计算机工程系，智利蓬塔阿雷纳斯[e]北里奥格兰德联邦大学计算机科学与应用数学系，巴西纳塔尔

摘要

模糊数上的容许序是对模糊数上一个基本且广为人知的偏序进行细化后得到的全序。本文定义了三角模糊数（即 TFN）的容许序，并研究其算术运算的一些基本性质，以及这些性质与该容许序之间的关系。此外，我们还引入三角模糊数上的平均函数概念，并研究向量空间的一种广义结构。特别地，我们考虑三角模糊数的情形。

关键词： 三角模糊数、模糊数上的序、容许序、向量空间。

1. 引言

Zadeh 在 [1] 中提出了模糊集的概念，用以形式化并建模语言中的模糊性和不准确性，例如温度、年龄和速度。文献中引入了一类称为模糊数的模糊集，

*通讯作者：nicolas.zumelzu@umag.cl电子邮箱： roberto.diaz@ulagos.cl, aldryn.aparcana@unica.edu.pe,disoto@umag.cl, nicolas.zumelzu@umag.cl, jose.canuman@umag.cl, alvaro.mella@umag.cl, edmundo.mansilla@umag.cl 和 bedregal@dimap.ufrn.br(Roberto Díaz[a]、Aldryn Aparcana[b]、Diego Soto[c]、Nicolás Zumelzu[c]、José Canumán[d]、Alvaro Mella[c]、Edmundo Mansilla[c] 和 Benjamín Bedregal[e])

提交至 *xxxxxxxx* 的预印本 *2023*年*1*月*9*日

[1] 用于表示不精确而非精确的量，这与传统数学中的情况不同。这一结构已在大量研究中得到探讨，相关研究致力于模糊数的算术运算及其他相关概念和性质（参见 [2, 3, 4]）。此外，也有多种针对模糊数或其子类提出的偏序（全序和非全序），例如 [5, 6, 7, 8]中的研究。最近，Zumelzu 等人在 [9], 中，基于模糊集理论扩展背景下的容许序概念（见 [10, 11, 12, 13], ），提出了模糊数的容许序概念，将其定义为能够细化 Klir 和 Yuan 在 [4]中所提出之序的全序。

谈到向量空间，我们必须强调数学家们为定义并公理化这一概念所付出的艰辛努力。其中，我们可以看到 [14], ，他通过定义复数以及四元数的运算，使向量空间的一个主要元素——几何向量——得以定义，后来 [15]。众所周知，矩阵理论源自线性方程组；矩阵的定义及其性质，在这些定义中隐含地提供了一个向量空间的例子。在 [16] 中，向量空间中的若干关键概念得以发展，例如线性相关、线性无关等；此外，还在未对向量空间本身进行形式化的情况下，以向量空间为基础定义了向量的概念，因此在 [17] 中，向量空间的形式定义以公理化方式呈现。

模糊逻辑中有若干种向量空间的扩展，称为模糊向量空间 [18, 19, 20]。关于其应用，例如可见其在认知失调与决策中的应用、用于对购买决策中情绪进行建模的时间模糊向量空间（即 TFVS）、在游戏成瘾方面的应用，以及对医疗决策中时间的建模 [18, 19]。关于有序向量空间的一些推广 [21] ，我们可以看到弱半域上的有序半向量空间 [22]、 n非空集上的维模糊集等 [22, 23, 24, 25, 26]。

也就是说，聚合函数在多个领域中发挥着重要作用，包括模糊逻辑、决策、专家系统、风险分析和图像处理。聚合函数将多个输入值合并为一个能够代表所有输入的输出值。典型示例包括加权平均数、中位数、OWA函数、 t-范数和 t-余范数。不过，还有许多其他聚合函数，而且大多数函数族中都包含无穷多个成员。总体而言，关于聚合函数的研究涉及多个方面，即 [27, 28, 29], 其中，我们可以在多准则决策问

题 [27, 30], 模糊逻辑中的联结词 [27, 31], 图像处理[32, 33, 34, 35], 在物联网中 [36], 分类器集成 [37, 38], 森林火灾检测[30], 电能质量诊断 [39], 基于运动想象的脑机接口 [40], 在医学中用于评估某人患病的风险[41], 通过定义新的聚合函数类别来体现人们对这一主题日益增长的兴趣 [32]。可定义的类别包括预聚合、Choquet积分的变体和OWA函数 [33, 42, 43, 44, 45]。

在这项工作中，我们扩展了平均型函数理论。本文研究的空间是由记作 $\mathfrak{T}(\mathbf{R})^n$ 的模糊三角数的笛卡尔积给出的，并将记作 R 的清晰模糊数域 $\tilde{}$ 作为标量集。我们证明，这个集合满足结合律、交换律以及加法单位元等性质，这些性质既适用于 $\mathfrak{T}(\mathbf{R})^n$ 中元素的加法，也适用于标量与 $\mathfrak{T}(\mathbf{R})^n$ 中元素的乘积。我们引入递增平均型函数的概念，证明其性质并给出若干示例。为了研究这类递增函数，我们通过考察与序相关的算术性质，在模糊三角数上定义了线性序。

本文组织如下：第 2 节在介绍所用符号的同时，回顾后续章节所需的一些基本概念。第 3 节研究算术性质与序。第 4 节介绍三角模糊数上的有序向量空间。第 5 节定义三角模糊数上的平均型聚合函数。此外，我们还给出相关示例及其刻画。

2. 预备知识

本节将介绍模糊数的背景，以及本文后续部分所需的主要概念和结果。设 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，其中 R 为实数集，Q 和 I 分别表示有理数集和无理数集。记号 $<, >, \leq$ or $\geq$表示 R 上的通常序，而 $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ 和 $]a,b[$ 分别表示 R 中的闭区间、右闭区间、右开区间和开区间（见 [46, 47]）。

定义 2.1. *[4]* 定义在非空参考集 X 上的模糊集 A 是一个函数 $A : X \to [0,1]$。

定义 2.2. *[4]* 如果模糊集 A 定义在$\mathbb{R}$ 上并满足以下条件，则称其为模糊数

(i) A 是正规的，即上确界 $A(x) = 1; _{x\in\mathbb{R}}$

(ii) ${}^{A}/_{\alpha}$ 对每个 $\alpha \in]0,\ 1]$都是一个闭区间；

(iii) 支撑集 A，即 A 的支撑集是有界的，

其中，${}^{A}/_{\alpha}$ 是 A 的 α 水平（或 α 截集）。

模糊数 A 是清晰模糊数，或简称清晰数，当且仅当存在$r \in \mathbf{R}$，使得对每个 $x \neq r$，$A(r) = 1$ 且 $A(x) = 0$。此时，我们将 A 记作 $\widetilde{r}$。最后，F (R) 表示所有模糊数的集合，而$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$R、Q 和 I 分别表示所有清晰模糊数的集合，其中 $r \in$R、$r \in$ Q 和 $r \in$I。

命题 2.1。 *[2]*令 A，$B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$，则对每个 $x \in \mathbb{R}$ 定义的模糊集 $A+B$、$A-B$、$A\cdot B$ 和 $A \div B$ 为

1. $(A+B)(x) = \sup\limits_{x=y+z} \min\{A(y), B(z)\},$
2. $(A-B)(x) = \sup\limits_{x=y-z} \min\{A(y), B(z)\},$
3. $(A\cdot B)(x) = \sup\limits_{x=yz} \min\{A(y), B(z)\},$
4. $(A \div B)(x) = \sup\limits_{x=\frac{y}{z}} \min\{A(y), B(z)\},\ since\ 0 \notin \operatorname{supp} B,$

是一个模糊数。

定义 2.3。 *[4]* 模糊数 A 称为三角模糊数，简称 三角模糊数，如果存在 $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$，使得 $a \le b \le c$ 并且

$$A(x) = \begin{cases} 1, & if\ x = b, \\ \frac{x-a}{b-a}, & if\ x \in\ ]a, b[, \\ \frac{c-x}{c-b}, & if\ x \in\ ]b, c[, \\ 0, & other\ cases. \end{cases}$$

本文用三元组 (a,b,c) 表示模糊三角数，并用 $\mathfrak{T}(\mathbf{R})$ 表示所有三角模糊数构成的集合，即

$$\mathfrak{T}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : A \text{ is a triangular fuzzy numbers}\}.$$

注意，每个满足 $a \le b \le c$ 的三元组 $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ 表示一个三角模糊数 .

命题 2.2. *[2]*若 $A = (a_1, b_1, c_1)$ 和 $B = (a_2, b_2, c_2)$ 是 $\sim\mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 中的元素，且 $\widetilde{r} \in \mathbb{R}$，则

1. $A + B = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$,
2. $A - B = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2)$,
3. $\widetilde{r}A = \begin{cases} (ra_1, rb_1, rc_1) \ , \ if\ r \ge 0, \\ (rc_1, rb_1, ra_1) \ , \ if\ r < 0. \end{cases}$

即集合 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 在加法、减法和数乘下封闭。注意 $(-1)A = -A = -(a_1, a_2, a_3) = (-a_3, -a_2, -a_1)$。

推论 2.1. 设 A 是一个模糊数。则 $\underbrace{A + A + \ldots + A}_{n\text{次}} = \widetilde{n}A$。

注 2.1. 三角模糊数的乘法和除法，即 $A \cdot B$ 和 $A \div B$，仅当 A 或 B 是清晰模糊数时，结果才是三角模糊数（显然，在除法的情况下，$\in$ 不属于支撑集 B 时，$0 \notin$）。

注 2.2. 三角模糊数的加法满足交换律和结合律。此外，加法对乘法满足分配律，反之亦然，其中乘法由命题 *2.2* 给出。另请注意，清晰模糊数在加法和乘法运算下与实数域同构，因此也构成一个域。

定义 2.4. 设 $A = (a_1,\ b_1,\ c_1)$ 和 $B = (a_2,\ b_2,\ c_2)$ 是两个三角模糊数。我们定义关系 $\le_N$ 为

$$A \le_N B \ \textit{if and only if}\ a_1 \le a_2 \ \textit{and}\ b_1 \le b_2 \ \textit{and}\ c_1 \le c_2.$$

我们记作 $A <_N B$ 当 $A \ne B$时，即 $a_1 \ne a_2$ 或 $b_1 \ne b_2$ 或 $c_1 \ne c_2$。

定义 2.4 推广了通常的实数序，因为在限制为清晰模糊数时，两者一致。值得注意的是，这一关系是 Klir 和 Yuan 在模糊数上定义的偏序在三角模糊数上的限制。下文中，我们将 [9] 中引入的模糊数容许序定义改编到三角模糊数的情境中。

定义 2.5. 设 $\preceq_N$ 和 $\preceq$ 是定义在三角模糊数上的两个序。若满足以下条件，则称序 $\preceq$ 关于$\langle \mathfrak{T}(\mathbb{R}) \preceq_N \rangle$为容许序：

(i) $\preceq$ 是 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$上的线性序；

(ii) 对于所有 $A, B \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})$，当 $A \preceq_N B$时， $A \preceq B$。

3. 容许序

本节着重证明 $\mathfrak{T}$(R) 上存在一个容许序，并研究该线性序在加法和减法运算方面所满足的性质。

定义 3.1. 设(a_1, b_1, c_1)和(a_2, b_2, c_2)是两个三角模糊数。定义关系 $\leq_{\mathrm{OT}}$ 如下：

$$(a_1, b_1, c_1) \leq_{\mathrm{OT}} (a_2, b_2, c_2) \ \textit{if and only if} \begin{cases} b_1 < b_2, \ \textit{or} \\ b_1 = b_2 \ \textit{and} \ c_1 < c_2, \ \textit{or} \\ b_1 = b_2 \ \textit{and} \ c_1 = c_2 \ \textit{and} \ a_1 \leq a_2. \end{cases}$$

我们记作 $A <_{\mathrm{OT}} B$，当 $A \leq_{\mathrm{OT}} B$ 且 $A \neq B$ 时，即 $a_1 \neq a_2$ 或 $b_1 \neq b_2$ 或 $c_1 \neq c_2$。

命题 3.1。关系 $\leq_{\mathrm{OT}}$ 是 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 上的容许序。

证明。设 $A = (a_1, b_1, c_1)$、$B = (a_2, b_2, c_2)$、$C = (a_3, b_3, c_3) \in \mathfrak{T}$(R)。1. 自反性：由定义 3.1 可直接得出。2. 反对称性：设 $A \leq_{\mathrm{OT}} B$ 和 $B \leq_{\mathrm{OT}} A$。若 $b_1 \neq b_2$，则 $A <_{OT}$ B 或 $B <_{OT}$ A，但不能同时成立。若 $b_1 = b_2$ 且 $c_1 \neq c_2$，则 $A <_{OT} B$ 或 $B <_{OT} A$，但不能同时成立。若 $b_1 = b_2$ 且 $c_1 = c_2$ 且 $a_1 \neq a_2$，则 $A <_{OT} B$ 或$B <_{OT} A$，但不能同时成立。因此，$a_1 = a_2$、$b_1 = b_2$ 和 $c_1 = c_2$。3. 传递性：若 $A \leq_{\mathrm{OT}} B$ 且 $B \leq_{\mathrm{OT}} C$，则

1. $b_1 < b_2$ 或（$b_1 = b_2$ 且 $c_1 < c_2$）或（$b_1 = b_2$ 且 $c_1 = c_2$ 且 $a_1 \le a_2$），

2. $b_2 < b_3$ 或（$b_2 = b_3$ 且 $c_2 < c_3$）或（$b_2 = b_3$ 且 $c_2 = c_3$ 且 $a_2 \le a_3$）。

该证明包含 9 个步骤，不过这里我们将演示其中 4 个。步骤 1：如果 $b_1 < b_2$，那么 $b_1 < b_3$，因此（a_1，b_1，c_1）$<_{\mathrm{OT}}$（a_3，b_3，c_3）。步骤 2：如果 $b_1 < b_2$ 且 $b_2 = b_3$ 且 $c_2 < c_3$，那么 $b_1 < b_2 = b_3 \le c_2 < c_3$，因此（$a_1$，$b_1$，$c_1$）$\le_{\mathrm{OT}}$（$a_3$，$b_3$，$c_3$）。步骤 3：如果 $b_1 < b_2$ 且 $b_2 = b_3$ 且 $c_2 = c_3$ 且 $a_2 \le a_3$，那么 $b_1 < b_3$。步骤 4：如果 $b_1 = b_2$ 且 $c_1 = c_2$ 且 $a_1 \le a_2$ 且 $b_2 = b_3$ 且 $c_2 < c_3$，那么 $a_1 \le a_2 \le b_1 = b_2 = b_3 \le c_1 = c_2 < c_3$。因此，$c_1 < c_3$。所以（$a_1$，$b_1$，$c_1$）$\le_{OT}$（$a_3$，$b_3$，$c_3$）。

4. 全序性：设 $(a_1, b_1, c_1) \neq (a_2, b_2, c_2)$。则 $a_1 \neq a_2$ 或 $b_1 \neq b_2$ 或 $c_1 \neq c_2$。因此，根据定义 3.1 以及实数的三歧性：对于任意两个实数，x 和 y，$x < y$ 或 $y > x$ 或 $x = y$，可得 $(a_1, b_1, c_1) <_{OT} (a_2, b_2, c_2)$ 或 $(a_2, b_2, c_2) <_{OT} (a_1, b_1, c_1)$。

5. 细化：设 $(a_1, b_1, c_1) \le_N (a_2, b_2, c_2)$。若 $A = B$，则由于 $\le_{\mathrm{OT}}$ 具有自反性，我们有 $(a_1, b_1, c_1) \le_{\mathrm{OT}} (a_2, b_2, c_2)$。若 $(a_1, b_1, c_1) \le_N (a_2, b_2, c_2)$，则根据定义 2.4，我们有 $a_1 \le_N a_2$ 和 $b_1 \le_N b_2$ 和 $c_1 \le_N c_2$ 和 $(a_1 \neq a_2$ 或 $b_1 \neq b_2$ 或 $c_1 \neq c_2)$。于是，若 $b_1 \neq b_2$，则 $b_1 < b_2$；但若 $b_1 = b_2$ 和 $c_1 \neq c_2$，则 $b_1 = b_2$ 和 $c_1 < c_2$。最后，若 $b_1 = b_2$ 和 $c_1 = c_2$ 和 $a_1 \neq a_2$，则 $b_1 = b_2$ 和 $c_1 = c_2$ 和 $a_1 < a_2$。由此，$A \le_{\mathrm{OT}} B$。

这样便证明了该命题。 □

定义 3.2. 设 $A \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})$。那么，

~1. A 是 OT-正的，当且仅当 $A >_{OT} 0$。

~2. A 是 OT-负的，当且仅当 $A <_{OT} 0$。

在 $\mathfrak{T}$(R)中，形如（$-a, 0, a$）且满足 $a \le 0$ 的元素称为0-等腰三角模糊数，记为 $\mathfrak{T}(\mathrm{R})_0$，表示所有0-等腰三角模糊数的集合。特别地，$\widetilde{0} = (0, 0, 0)$属于 $\mathfrak{T}(\mathrm{R})_0$。

OT-三歧律，适用于 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$。 若 $A \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 则下列陈述中有且仅有一个为真：

1. A 是 OT正的；
2. A 是 OT负的；
~3. $A = 0$。

证明。 显然，因为 $\leq_{\mathrm{OT}}$ 是三角模糊数上的线性序。 □

注意，在不成立的三歧律情形下，考虑自然序而不是 $\leq_{OT}$。

命题 3.2。 设 (a,b,c) 为一个 三角模糊数。则，(a,b,c) 是 OT-正的，当且仅当 $b>0$ 或 $(0=b<c)$。同样地，(a,b,c) 是 OT-负的，当且仅当 $b<0$ 或 $a<b=c=0$。

证明。 由上述定义可直接得出。 □

推论 3.1。 设 $A\in\mathfrak{T}(\mathbb{R})$。如果 A 是 OT-负的，则 $-A$ 是 OT-正的。我们注意到，逆命题一般不成立。

例 3.1。 设 $(-1,0,1)$ 是 OT-正的。注意， $-(-1,0,1)=(-1,0,1)$也同样是 OT-正的。

推论 3.2。 设 $A\in\mathfrak{T}(\mathbb{R})_0$。若 $A\neq\widetilde{0}$，则 $-A$ 是 OT正的。

命题 3.3。 若 $A\in\mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 则 $A-A\in\mathfrak{T}(\mathbb{R})_0$。

证明。 设 $A=(a,b,c)\in\mathfrak{T}(\mathbf{R})$。则 $(a,b,c)-(a,b,c)=(a-c,0,c-a)$，即 $c-a=-a+c=-(a-c)$，但 $a<c$，因此 $c-a>0$。由此证明了该命题。 □

下面的推论给出了超加逆元的一个性质。

推论 3.3。 设 A 是一个三角模糊数。则 $A-A\geq_{OT}0$。此外， $A-A=0$当且仅当 A 是清晰数。

Pr命题 3.4. 设 A,B 是两个 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$。 $A\leq_{\mathrm{OT}}B$ 当且仅当 $B-A\geq_{\mathrm{OT}}\widetilde{0}$。

证明。 设 (a_1,b_1,c_1)、(a_2,b_2,c_2) 属于 $\in\mathfrak{T}(\mathbf{R})$，且 $(a_1,b_1,c_1)\leq_{\mathrm{OT}}(a_2,b_2,c_2)$。若 $b_1<b_2$，则 $0<b_2-b_1$。若 $b_1=b_2$ 且 $a_1\leq c_1<c_2$，则 $0<c_2-a_1$。若 $b_1=b_2$， $c_1=c_2$ 且 $a_1\leq a_2$，则 $c_2-a_1\geq 0$。注意，当情形 $c_2-a_1=0$ 时，则$\sim a_1=b_1=c_1=a_2=b_2=c_2$。因此，若 $A\leq_{\mathrm{OT}}B$，则 $B-A\geq_{\mathrm{OT}}0$。根据定义 2.3 和 3.1，不难看出逆命题也成立。 □

注释 *3.1.* 在 *[48]* 中提出的序 $\leq$ 不满足上述性质，因为 *(1,2,3)* $\prec$ *(1,2,4)*，且 *(1,2,4)* $-$ *(1,2,3)* $=$ *(−2,0,3)* $\prec\widetilde{0}$。

定理 3.1. 设 A 和 B 属于 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$。如果 A 和 B 是 OT-正的，那么$A+B$ 也是 OT-正的。

证明。 设 $A=(a_1,b_1,c_1)$ 和 $B=(a_2,b_2,c_2)$ 是两个 OT-正 $\mathfrak{T}$(R)。于是，由命题 3.2 可得 $b_1\geq 0, b_2\geq 0, c_1>0$ 和 $c_2>0$。因此，(1) 若$b_1>0$或 $b_2>0$，则 $b_1+b_2>0$。(2) 若 $b_1=b_2=0$，则 $b_1+b_2=0$，并且由于$\sim c_1>0$和 $c_2>0$，因此 $c_1+c_2>0$。所以，两种情况下都有 $A+B>_{OT}0$。 □

定理 3.2。 设 A、 B 和 C 属于 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$。若 $A\leq_{\mathrm{OT}}B$，则 $A+C\leq_{\mathrm{OT}}B+C$。

证明。 设 $A=(a_1,b_1,c_1)$、 $B=(a_2,b_2,c_2)$ 和 $C=(a_3,b_3,c_3)$ 是三个三角模糊数。若 $A\leq_{\mathrm{OT}}B$，则有以下几种情况

1. $b_1<b_2$ 或 2. $b_1=b_2$ 且
$c_1<c_2$ 或 3. $b_1=b_2$ 且 $c_1=c_2$
且 $a_1\leq a_2$。

对于第一种情况，我们有：若 $b_1<b_2$，则 $b_1+b_3<b_2+b_3$。因此 $A+C\leq_{\mathrm{OT}}B+C$。其他情况类似。

由此证明了命题。 □

推论 3.4. 设 A、 B C和 D 为三角模糊数。若 $A\leq_{\mathrm{OT}}B$ 且 $C\leq_{\mathrm{OT}}D$，则 $A+C\leq_{\mathrm{OT}}B+D$。

~**命题 3.5.** 设 A 和 B 为两个三角模糊数，且 $\tilde{r}\in\mathbb{R}$。

~*1.* 若 $A\leq_{\mathrm{OT}}B$ 且 $\tilde{r}\geq_{\mathrm{OT}}0$，则 $\tilde{r}A\leq_{\mathrm{OT}}\tilde{r}B$,
~*2.* 若 $A\leq_{\mathrm{OT}}B$ 且 $\tilde{r}\leq_{\mathrm{OT}}0$，则 $\tilde{r}A\geq_{\mathrm{OT}}\tilde{r}B$。

证明。 显然。 □

定义 3.3。 给定 A、 B 属于 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$，我们定义：

1. 最大值：

$$\mathrm{Max}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A,B\}=\begin{cases}A, \ if\ B\leq_{\mathrm{OT}}A;\\ \ or\\ B, \ if\ A\leq_{\mathrm{OT}}B.\end{cases}$$

2. 最小值：

$$\mathrm{Min}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A,B\} = \begin{cases} B, \ \textit{if } B \leq_{\mathrm{OT}} A; \\ \ \textit{or} \\ A, \ \textit{if } A \leq_{\mathrm{OT}} B. \end{cases}$$

注 3.2。 代数 $(\mathcal{F}(\mathbb{R})\ +)$ 和 $(\mathcal{F}(\mathbb{R})\ \cdot)$不是可逆交换幺半群（参见 *[25,* 第 *7]* 页）。另一方面，$(\mathcal{F}(\mathbb{R})\ +,\cdot)$ 按 *[25]* 的定义并非半环。

4. 三角模糊空间

由整数$n \geq 1$ 个三角模糊数组成的 n元组（$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$）称为 n 维点或 n维向量。在这种情况下，三角模糊数 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 称为该向量的坐标或分量。所有 n维向量的集合称为 n元组的向量空间，或简称为 n 空间。我们用 $\mathfrak{T}(\mathbf{R})^n$表示该空间。在 Ð→ Ð→Ð→本文中，我们通常用 $A, B, C, \ldots$ 表示向量，并用相应字母 $A, B, C, \ldots$ 表示分量，其下标取自{1, ..., n}。因此，我们写作

$$\overrightarrow{A} = (A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n).$$

为了将 $\mathfrak{T}(\mathbf{R})^n$转化为代数系统，我们引入两种向量运算，称为加法和标量乘法。这里的“标量”一词是清晰模糊数的同义词。

定义 4.1。 向量 $-\overrightarrow{A}$ 和 $-\overrightarrow{B}$ 属于 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})^n$。和 $-\overrightarrow{A}+-\overrightarrow{B}$ 定义为将对应分量相加所得到的向量：

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots, A_n + B_n).$$

~ ——→——→如果 $\widetilde{r} \in \mathbb{R}$，则将 $\widetilde{r}A$ 或 $A\widetilde{r}$定义为将 A 的每个——→分量乘以 $\widetilde{r}$所得到的向量：

$$\widetilde{r}\overrightarrow{A} = (\widetilde{r}A_1, \widetilde{r}A_2, \widetilde{r}A_3, \ldots, \widetilde{r}A_n)$$

根据这个定义，很容易验证这些运算具有以下性质

命题 4.1. 向量加法满足交换律，

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A},$$

并满足结合律

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}.$$

标量乘法满足结合律，$\tilde{r}(\tilde{t}-\vec{A}) = (\tilde{r}\tilde{t})-\vec{A}$ 并满足两个分配律

$$\tilde{r}(\vec{A} + \vec{B}) = \tilde{r}\vec{A} + \tilde{r}\vec{B},$$

and

$$(\tilde{r} + \tilde{t})\vec{A} = \tilde{r}\vec{A} + \tilde{t}\vec{A}.$$

Ð→证明。 我们只证明交换律和分配律。设 A 和 Ð$\vec{B}$ 是两个 $\mathfrak{T}(\mathrm{R})^n$ 和 $\tilde{r} \in \tilde{}\mathrm{R}$。对于交换律，我们有

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} =& (A_1 + B_1, A_2 + B_2, ..., A_n + B_n)\\ =& (B_1 + A_1, B_2 + A_2, ..., B_n + A_n)\\ =& \vec{B} + \vec{A}.\end{aligned}$$

另一方面，对于分配律，我们得到

$$\begin{aligned}(\tilde{r} + \tilde{t})\vec{A} =& ((\tilde{r} + \tilde{t})A_1, (\tilde{r} + \tilde{t})A_2, ..., (\tilde{r} + \tilde{t})A_n)\\ =& (\tilde{r}A_1 + \tilde{t}A_1, \tilde{r}A_2 + \tilde{t}A_2, ..., \tilde{r}A_n + \tilde{t}A_n) \text{ by Remark 2.2}\\ =& (\tilde{r}A_1, \tilde{r}A_2, ..., \tilde{r}A_n) + (\tilde{t}A_1, \tilde{t}A_2, ..., \tilde{t}A_n)\\ =& \tilde{r}(A_1, A_2, ..., A_n) + \tilde{t}(A_1, A_2, ..., A_n)\\ =& \tilde{r}\vec{A} + \tilde{t}\vec{A}.\end{aligned}$$

对于其余性质的证明，我们采用与上述类似的论证。至此证明完毕。

□

~**注 4.1.** 所有分量均为0 的向量称为零向量，记作$-\vec{0}$。它具有如下性质：对于每个向量$-\vec{A}$，都有$-\vec{A} + -\vec{0} = -\vec{A}$；换言之，$-\vec{0}$是向量加法的单位元。向量$(-\tilde{1})-\vec{A}$——→ ——→也记作 $-A$，称为 A 的相反向量。请注意，等式$-\vec{A} + (--\vec{A}) = -\vec{0}$通常并不成立。对此，只需考虑

$-\vec{A} \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})^n$ 我们从推论 *3.3* 得到$-\ \vec{A} - -\vec{A} = (A_1 - A_1, ..., A_n - A_n)$ $A_i - A_i >_{OT} \widetilde{0}$，只要 A_i 不是清晰数。另请注意$-\ \vec{A}\widetilde{0} = -\vec{0}$，并且对所有$-\ \vec{A} \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})^n$，都有$-\vec{A}\widetilde{1} = -\vec{A}$。因此，赋予定义 *4.1* 中的加法和数乘后，$\mathfrak{T}(\mathbb{R})^n$在清晰模糊数域上并非向量空间。尽管如此，按照 *Vasantha Kandasamy [25]* 和 *[22]*的意义，它是一个半向量空间。

定义 4.2. 设$(A_1, A_2, ..., A_n)$和$(B_1, B_2, ..., B_n)$属于 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})^n$。我们将关系 $\leq_{\mathrm{OT}^n}$ 定义为

$$(A_1, A_2, ..., A_n) \leq_{\mathrm{OT}^n} (B_1, B_2, ..., B_n) \Longleftrightarrow \begin{cases} A_1 \leq_{\mathrm{OT}} B_1 \ and \\ A_2 \leq_{\mathrm{OT}} B_2 \ and \\ \quad \vdots \\ A_n \leq_{\mathrm{OT}} B_n. \end{cases}$$

命题 4.2. 设$-\ \vec{A} \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})^n$。则$-\ \vec{A} - -\vec{A} \geq_{OT^n} -\vec{0}$。

证明。 由注 4.1 可直接得出。 □

集合 $\mathfrak{T}(\mathbf{R})_0^n$表示形如（$A_1$, ..., A_n）的元素组成的集合，使得对所有 $i = 1, ...n$，均有 $A_i \in \mathfrak{T}(\mathbf{R})_0$。

命题 4.3. 若$-\ \vec{A} \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})^n$，则$-\ \vec{A} - -\vec{A} \in \mathfrak{T}(\mathbb{R})_0^n$。

证明。 由命题 3.3 和注 4.1 可直接得出。 □

5. 三角模糊数上的平均函数

定义 5.1. 若函数 $E : \mathfrak{T}(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 满足以下条件，则称其为 OT-递增函数:

$$E(\vec{A}) \leq_{\mathrm{OT}} E(\vec{B})$$

—→ —→只要 $A \leq_{\mathrm{OT}^n} B$成立即可。类似地，我们可以定义 OT-递减函数。

设函数 $E : \mathfrak{T}(\mathbf{R})^n$ Ð→ $\mathfrak{T}(\mathbf{R})$。如果 E 是函数型平均（简称 OT-FTA），则它是 OT-递增的，且对于每个 A_1, ..., $A_n \in \mathfrak{T}(\mathbf{R})$,

$$\mathrm{Min}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_1, ..., A_n\} \leq_{\mathrm{OT}} E(A_1, ..., A_n) \leq_{\mathrm{OT}} \mathrm{Max}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_1, ..., A_n\}.$$

定义 5.2. 如果对于每个 A *in* $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$, $E : \mathfrak{T}(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 上的函数 $E(A, ..., A) = A$，则称该函数为幂等函数。

命题 5.1. 设 E 是一个 $E:\mathfrak{T}(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathbb{R})$。如果 E 是 OT-递增的，则以下陈述等价:

(i) E 是幂等的;

(ii) E 是一个 *OT-FTA*。

证明。$(i) \Rightarrow (ii)$ 任取 A_1, ..., A_n 属于 $\mathfrak{T}$(R)。记 $A_i = \mathrm{Min}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\}$ 和 $A_j = \mathrm{Max}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\}$。根据单调性

$$A_i = E(A_i, ..., A_i) \leq_{\mathrm{OT}} E(A_1, ..., A_n) \leq_{\mathrm{OT}} E(A_j, ..., A_j) = A_j.$$

因此

$$\mathrm{Min}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\} \leq_{\mathrm{OT}} E(A_1, ..., A_n) \leq_{\mathrm{OT}} \mathrm{Max}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ 显然。 □

定义 5.3。 令 A_i 在 $\mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 上对所有 $i = 1$, ..., n。

(i) 算术平均数

$$M_a(A_1, ..., A_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \div \widetilde{n}.$$

(ii) 加权算术平均数

$$M_w(A_1, ..., A_n) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i A_i,$$

有 $\widetilde{i} = 1, ..., n$ 以及 $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i = 1$。其中 $\widetilde{a}_i \geq_{\mathrm{OT}} 0$ 对所

命题 5.2. 函数 $M_w:\mathfrak{T}(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 是一个 OT-*FTA*。

证明。 设 $A_i = \mathrm{Min}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\}$ 和 $A_j = \mathrm{Max}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\}$ 是两个 $\mathfrak{T}$(R)。根据单调性

$$A_i = A_i \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i \leq_{\mathrm{OT}} M_w(A_1, ..., A_n) \leq_{\mathrm{OT}} M_w(A_j, ..., A_j) = A_j \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i = A_j.$$

因此

$$\mathrm{Min}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\} \leq_{\mathrm{OT}} M_w(A_1, ..., A_n) \leq_{\mathrm{OT}} \mathrm{Max}_{\leq_{\mathrm{OT}}}\{A_k; k = 1, ..., n\}.$$

因此，根据命题 5.1，我们得到 M_w 是一个 OT-FTA。 □

推论 5.1. 函数 $M_a:\mathfrak{T}(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathbb{R})$ 是一个OT-*FTA*。

参考文献

[1] L. A. Zadeh，模糊集，《Information and Control》8 (3) (1965) 338–353。[2] D. Dubois，H. Prade，模糊数上的运算，《International Journal of Systems Science》9 (6) (1978) 613–626。[3] M. Hanss，《应用模糊算术：工程应用导论》，Springer Science & Business Media，2005。[4] G. Klir，B. Yuan，《模糊集与模糊逻辑：理论与应用》，第 4 卷，Prentice Hall，新泽西州，1995。[5] T. da Cruz Asmus，G. P. Dimuro，B. R. C. Bedregal，关于双人区间值模糊贝叶斯博弈，《International Journal of Intelligent Systems》32 (6) (2017) 557–596。[6]P. Prokopowicz，J. M. Czerniak，D. Mikolajewski，L. Apiecionek，D. Slezak（编），《有序模糊数理论与应用——致敬 Witold Kosiński教授》，模糊性与软计算研究第 356 卷，Springer，2017。[7] A. Roldán-López-de-Hierro，C. Roldán，F. Herrera，一种模糊数排序的新方法及其在真实经济数据中的应用，《Fuzzy Sets and Systems》353 (2018) 86–110。[8] W. Wang，Z. Wang，定义在全体模糊数集合上的全序，《Fuzzy Sets and Systems》243 (2014) 131–141。[9] N. Zumelzu，B. Bedregal，E. Mansilla，H. Bustince，R. Diaz，模糊数上的容许序，《IEEE Transactions on Fuzzy Systems》30 (11) (2022) 4788–4799。[10] H. Bustince，J. Fernández，A. Kolesárová，R. Mesiar，利用聚合函数生成区间的线性序，《Fuzzy Sets and Systems》220 (2013) 69–77。[11] A. A. De Lima，E. S. Palmeira，B. Bedregal，H. Bustince，多维模糊集，《IEEE Transactions on Fuzzy Systems》29 (8) (2021) 2195–2208。

[12] L. De Miguel, H. Bustince, B. Pekala, U. Bentkowska, I. A. da Silva, B. R. C. Bedregal, R. Mesiar, G. Ochoa, 《使用容许线性序的区间值 Atanassov 直觉模糊 OWA 聚合及其在决策中的应用》, IEEE《模糊系统汇刊》24 (6) (2016) 1586–1597。[13] M. Matzenauer, R. Reiser, H. Santos, B. Bedregal, H. Bustince, 《应用于决策问题的典型犹豫模糊蕴涵容许全序策略》, International Journal of Intelligent Systems 36 (5) (2021) 2144–2182。[14] W. R. Hamilton, 《四元数讲义：系统阐述一种新的数学方法；其原理于1843年提交爱尔兰皇家科学院，此后成为一系列讲座的主题，并于1848年及随后几年在都柏林三一学院礼堂讲授：附有大量说明图示，并包含若干几何与物理应用》, Hodges and S mith，1853。[15] A. Cayley, 《II. 矩阵理论回忆录》, 《伦敦皇家学会哲学汇刊》(148) (1858) 17–37。[16] H. Grassmann, 《线性扩张论：数学的一个新分支，通过对数学其他分支以及静力学、力学、磁学和晶体学的应用加以阐释》, 第1卷，O. Wigand，1844。[17] G. Peano, 《线性微分方程的级数积分》, 《都灵科学院学报》22 (1887) 437–446。[18] J. Colloc, 《Fvsoomm：一种用于决策中人格、认知失调和情绪的模糊向量空间模型与方法》, 《Information》11 (4) (2020) 229。[19] J. Colloc, R. A. Yameogo, P. F. Summons, Y. Shen, M. Park, J. E. Aronson, 《Epice：一种用于医疗决策时间建模的情绪模糊向量空间》, 载于：第1届国际物联网与机器学习会议论文集，2017，第1–7页。

[20] A. Katsaras, D. B. Liu, 《模糊向量空间与模糊拓扑向量空间》, 数学分析与应用杂志 58 (1) (1977) 135–146。[21] R. Cristescu, 《有序向量空间与线性算子》, Routledge, 1976。[22] T. Milfont, I. Mezzomo, B. Bedregal, E. Mansilla, H. Bustince, 《配备容许序的 n维有序向量上的聚合函数及其在多准则群体决策中的应用》, 国际近似推理杂志 137 (2021) 34–50。[23] T. Costa, Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwick, G. N. Silva, 《广义区间向量空间与区间优化》, 信息科学 311 (2015) 74–85。[24] W. Vasantha Kandasamy, 《半域上的半向量空间》, Zeszyty Nauwoke Politechniki 17 (1993) 43–51。[25] W. V. Kandasamy, 《Smarandache半环、半域与半向量空间》, Infinite Study, 2002。[26] R. M. Rodríguez, B. Bedregal, H. Bustince, Y. Dong, B. Farhadinia, C. Kahraman, L. Martínez, V. Torra, Y. Xu, Z. Xu, F. Herrera, 《犹豫模糊集在决策信息融合中的地位与前景分析：迈向高质量进展》, 信息融合 29 (2016) 89–97。[27] G. Beliakov, H. B. Sola, T. C. Sánchez, 《平均函数实用指南》, Springer, 2016。[28] G. P. Dimuro, H. Bustince, J. Fernandez, R. Mesiar, B. Bedregal, 《预聚合函数的新结果：引入（轻型）预t-范数》, 载于：2017年国际模糊系统协会联合第17届世界大会暨第9届软计算与智能系统国际会议 (IFSA-SCIS), IEEE, 2017, 第1–6页。[29] R. Yang, L. Jin, D. Paternain, R. R. Yager, R. Mesiar, H. Bustince, 《利用不确定性变换处理基本不确定信息的若干涉及偏好的聚合模型》, 智能与模糊系统杂志 39 (1) (2020) 325–332。

[30] T. da Cruz Asmus、G. P. Dimuro、B. Bedregal、J. A. Sanz、R. Mesiar、H. Bustince, 《面向双变量聚合过程的区间不确定性传播控制及宽度受限区间值重叠函数的引入》, Fuzzy Sets and Systems 441 (2022) 130–168。[31] R. H. S. Reiser、B. R. C. Bedregal、M. Baczynski, 《聚合模糊蕴涵》, Information Sciences 253 (2013) 126–146。[32] A. F. Roldán-López-de-Hierro、C. Roldán、H. Bustince、J. Fernández、I. Rodriguez、H. Fardoun、J. Lafuente, 《聚合函数的仿射构造方法》, Fuzzy Sets and Systems 414 (2021) 146–164。[33]G. P. Dimuro、J. Fernández、B. Bedregal、R. Mesiar、J. A. Sanz、G. Lucca、H. Bustince, 《Choquet积分推广的现状：从聚合与预聚合到有序方向单调函数》, 信息融合 57 (2020) 27–43。[34] M. Galar、A. Jurio、C. Lopez-Molina、D. Paternain、J. Sanz、H. Bustince, 《用于立体匹配中RGB颜色通道融合的聚合函数》, Optics Express 21 (1) (2013) 1247–1257。[35] L. González-Jaime、M. Nachtegael、E. Kerre、H. Bustince, 《在噪声去除滤波器融合中使用幂等函数》, 载于：知识工程与管理，Springer，2014，第495–507页。[36] L. de Souza Oliveira、A. Argou、R. Dilli、A. C. Yamin、R. Reiser、B. R. C. Bedregal, 《探索模糊集共识分析在物联网资源排序中的应用》, 人工智能工程应用 109 (2022) 104617。[37] T. V. V. Batista、B. R. C. Bedregal、R. M. Moraes, 《基于重叠函数和准重叠函数的Choquet积分构建多层分类器集成》, 神经计算 500 (2022) 413–421。[38] V. S. Costa、A. D. S. Farias、B. R. C. Bedregal、R. H. N. Santiago、A. M. de Paula Canuto, 《使用广义混合函数组合分类器集成中的多种算法》, 神经计算 313 (2018) 402–414。

[39] D. H. Nolasco、F. B. Costa、E. S. Palmeira、D. K. Alves、B. Bedregal、T. O. Rocha、R. L. Ribeiro、J. C. Silva，《基于重叠函数推理方法的基于小波和模糊逻辑的电能质量诊断系统：交流微电网案例研究》，人工智能工程应用 85 (2019) 284–294。[40] J. Fumanal-Idocin、Y.-K. Wang、C.-T. Lin、J. Fernández、J. A. Sanz、H. Bustince，《使用信号导出和聚合函数的基于运动想象的脑机接口》，IEEE《控制论汇刊》(2021)。[41] E. Saleh、A. Valls、A. Moreno、P. Romero-Aroca、V. Torra、H. Bustince，《学习模糊规则模型中用于聚合的模糊测度》，载于：人工智能决策建模国际会议，Springer，2018，第114–127页。[42] H. Bustince、R. Mesiar、J. Fernández、M. Galar、D. Paternain、A. H. Altalhi、G. P. Dimuro、B. R. C. Bedregal、Z. Takác，《d-Choquet积分：基于不相似度的Choquet积分》，Fuzzy Sets and Systems 414 (2021) 1–27。[43] G. Lucca、J. A. Sanz、G. P. Dimuro、B. R. C. Bedregal、H. Bustince，《一种用于调整 α 参数的方案，适用于模糊规则分类系统中的C$_\alpha$ C积分》，《自然计算》19 (3) (2020) 533–546。[44] G. Lucca、J. A. Sanz、G. P. Dimuro、B. R. C. Bedregal、R. Mesiar、A. Kolesárová、H. Bustince，《预聚合函数：构造及其应用》，IEEE《模糊系统汇刊》24 (2) (2016) 260–272。[45] C. Zhu、L. Jin、R. Mesiar、R. R. Yager、D. Paternain、H. Bustince，《用于决策与评价的诱导有序加权平均聚合的嵌套式表述范式》，International Journal of Intelligent Systems 34 (11) (2019) 3046–3057。[46] T. M. Apostol，《微积分学》，第1卷和第2卷，2007。

[47] W. Rudin，数学分析原理p学原理ysis，第3卷，McGraw-Hill纽约，1964年。

[48] V. Rosas, B. Bedregal, J. Canumán, R. Díaz, E. Mansilla, N. Zumelzu, 《一种适用于三角模糊数的新全序及其应用》，载于：Anais do VI Workshop-Escola de Informática Teórica，SBC，阿雷格里港，南里奥格兰德州，巴西，2021年，第17–24页。doi:10.5753/weit.2021.18917。