arXiv:2301.02291v1 [math.ST] 5 Jan 2023

根接近单位根的 AR(1)过程的最小绝对偏差估计

马楠楠、桑海林和 GUANGYU Y ANG

Abstract. 我们建立了 AR(1)过程的最小绝对偏差估计量的渐近理论，其中自回归参数满足 $n(\rho_n-1) \to \gamma$，对某个固定的 γ，当 $n \to \infty$时成立。这与 Andrews和Guggenberger（2008）在 $\gamma = 0$ 情形下，以及 Chan和Wei（1987）和 Phillips（1987）在 $\gamma \neq 0$情形下建立的普通最小二乘估计量的结果相对应。我们通过模拟实验验证理论结果，并展示最小绝对偏差估计的稳健性。

1. Introduction

考虑以下 AR(1)过程

$$y_i = \rho y_{i-1} + \epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

其中， ρ 是一个确定性参数， $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是均值为零且方差有限的独立同分布（i.i.d.）随机变量序列。文献已对 ρ 的普通最小二乘（OLS）估计量的渐近性质进行了广泛研究；可参见 Anderson（1959）、White（1958）、Dickey和Fuller（1979）、Phillips（1987）、Chan（2009）、Miao和Shen（2009）及其中的参考文献。为了进一步处理允许过程动态结构出现大幅冲击的数据，例如对资产价格泡沫进行建模，通常要求参数 ρ 依赖于样本量 n。另一方面，为了理解单位根检验通常难以有效区分单位根与根接近但不等于单位根的备择假设这一现象，Bobkoski（1983）和Cavanagh（1985）提出了局部单位根模型，其中参数 ρ 依赖于样本量 n ，并在$n \to \infty$时趋于单位根。此后，许多研究者系统地建立了各种近单位根过程的极限理论。参见 Chan和Wei（1987）、Phillips（1987, 1988）、Phillips和Magdalinos（2007）、Aue和Horv´ath（2007）、Andrews和Guggenberger（2008）、Buchmann和Chan（2013）、Miao 等人（ 2015 ）、 Jiang 等人 （ 2022 ）、 Tanaka （ 2017 ）及其中的参考文献。特别地，关于实证研究，可参见 Stock（1991）；关于近单位根过程的最新理论进展和实证研究，可参见 Phillips（2021）。

近期，Zhou和Lin（2014）以及Wang等人（2020）在最小绝对偏差（LAD）估计框架下研究了自回归参数的统计推断。他们证明，若 $\rho_n \to 1$ and $n|\rho_n - 1| \to \infty$ as$n \to \infty$，那么在弱平稳情形和温和爆炸情形下，最小绝对偏差估计量分别具有正态分布和柯西渐近分布，这

Key words and phrases. 渐近分布；自回归过程；最小绝对偏差估计；局部单位根；单位根检验。

与Giraitis和Phillips（2006）以及Phillips和Magdalinos（2007）建立的普通最小二乘估计量结果互为补充。事实上，由于最小绝对偏差估计具有稳健性，最小绝对偏差估计量最初是在回归参数为常数且扰动项具有无限方差的情形下，于自回归过程研究中提出的。例如，参见Pollard（1991）、Phillips（1991）、Davis等人（1992）以及Li和Li（2009）的论文。特别地，Herce（1996）研究了具有有限方差扰动项的单位根过程中最小绝对偏差估计量的渐近性质，并相应地在该情形下提出了单位根检验，补充了Knight（1989）得到的类似检验。

受上述研究启发，本文旨在建立 AR(1)过程的最小绝对偏差估计量的渐近理论，其中回归参数满足 $n(\rho_n - 1) \to 0$ 或 $n(\rho_n - 1) \to \gamma$，对于某个固定的 $\gamma \neq 0$，当 $n \to \infty$ 时成立。据我们所知，尽管关于 AR(1) 过程的最小绝对偏差估计和单位根检验已有丰富文献，但这方面的研究仍然缺失。研究表明，若 $n(\rho_n - 1) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时成立，则无论在近平稳情形还是近爆炸情形，极限分布都由初始条件主导。M¨uller 和 Elliott（2003）、Phillips 和 Magdalinos（2009）及其参考文献研究了这一现象。我们在近平稳情形下的结果与 Andrews 和 Guggenberger（2008）针对同一模型建立的 OLS估计量理论完全对应。在条件 $n(\rho_n - 1) \to \gamma$ 下，对于某个固定的 $\gamma \neq 0$，当 $n \to \infty$ 时成立，我们在假设 $y_0 = 0$ 下研究最小绝对偏差估计量的渐近理论。这种情形下的研究与 Chan 和 Wei（1987）及 Phillips（1987）建立的 OLS 估计理论互为补充。

本文的结构安排如下。介绍模型后，我们在第 2 节陈述主要结果。第3节报告一些模拟研究，以说明有限样本性能并验证渐近结果。第 4 节给出结论性说明，第 5 节则提供主要结果的证明。其余所有技术性证明见附录。

全文中，符号‘$\to_d$’、‘$\to_p$’和‘$=_d$’分别表示弱收敛、依概率收敛和分布相等；$o_p(1)$表示依概率趋于零；$\mathcal{C}$ 表示标准柯西随机变量，$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$表示均值为 μ 、方差为σ^2的正态随机变量；$[x]$ 表示 x的整数部分；sign(·)是符号函数；$\mathbb{I}_A$ 是集合 A的示性函数，det(M)是矩阵 M的行列式。

2. 主要结果

假设数据 $\{y_i\}$ 由以下一阶自回归模型生成

$$y_i = \rho_n y_{i-1} + \epsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{1}$$

其中，参数 ρ_n 满足 $\rho_n \to 1$ 当 $n \to \infty$时，且噪声 $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 满足以下假设：

(i). $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是均值为零且具有有限方差 σ^2的独立同分布随机变量；(ii). ϵ_1 的中位数为零，并且在 $\mathbb{R}$ 中具有可微密度函数 $f(x)$，满足$f(0) > 0$ 且 $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$。

请注意，从形式上看，数据 $\{y_i\}$ 是一个三角阵，但为简化记号，此处省略了 n 。在上述关于噪声的假设下，还可以研究参数 ρ_n 的估计，其中 $\rho_n \to -1$ 为 $n \to \infty$。为简便起见，本文仅陈述 ρ_n 为正的情形下的结果。

ρ_n 的最小绝对偏差估计量定义为以下极值问题的解

$$\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} = \arg\min_{\rho \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |y_i - \rho y_{i-1}| \right\}. \tag{2}$$

请注意，最小绝对偏差估计量通常没有闭式解；如果目标函数存在平坦区段，估计量也不唯一；例如，参见 Herce（1996）。此外，最小绝对偏差估计量具有稳健性，尤其是不易受到异常值的显著影响。第3节的模拟研究证实了这一点。

2.1. 情形 $n(\rho_n - 1) \to 0$ **当** $n \to \infty$。我们首先考虑参数 ρ_n 满足 $n(\rho_n - 1) \to 0$ 当 $n \to \infty$时的情形。也就是说，自回归参数 ρ_n 非常接近于 1，具体而言， ρ_n 与 1 的距离为$o(n^{-1})$。以下两个定理是这一情形的主要结果。一个针对近平稳情形 $0 < \rho_n < 1$ ，另一个针对近爆炸情形$\rho_n > 1$。

定理2.1（近平稳情形）。对于满足 $0 < \rho_n < 1$ ***and***$n(\rho_n - 1) \to 0$ ***as*** $n \to \infty$ 的模型（*1*），假设 y_0 取决于噪声的全部过去，即 $y_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_n^j \epsilon_{-j}$，则当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\sqrt{\frac{n}{1-\rho_n^2}} \, (\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \frac{\mathcal{C}}{2\sigma f(0)} \tag{3}$$

and

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2} \, (\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(0)}\right). \tag{4}$$

定理2.2（近爆炸情形）。对于满足 $\rho_n > 1$ ***and*** $n(\rho_n - 1) \to 0$ ***as*** $n \to \infty$ 的模型（*1*），假设 y_0 是无限远初始化，即 $y_0 = \sum_{j=0}^{\kappa_n} \rho_n^j \epsilon_{-j}$，其中 $\kappa_n / n \to \infty$ ***and*** $\kappa_n(\rho_n - 1) \to 0$ ***as*** $n \to \infty$，则当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\sqrt{n\kappa_n} \, (\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \frac{\mathcal{C}}{2\sigma f(0)} \tag{5}$$

and

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2} \, (\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(0)}\right). \tag{6}$$

我们对定理 2.1 和 2.2 作一些评论。

注2.1。由于当 $0 < \rho_n < 1$ 时，***AR(1)*** 模型 ***(1)*** 是因果的，因此初始值 y_0 可以表示为线性过程形式 $y_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_n^j \epsilon_{-j}$ 中关于过去信息的线性组合。在相同情况下， $\rho_n \in (-1,1)$ $n(\rho_n - 1) \to 0$ 以及 y_0 取决于噪声的全部过去，*Andrews*和 *Guggenberger*（*2008*）得到了普通最小二乘估计量的极限定理，这些定理与

定理 *2.1* 类似，只是这里出现了 $f(0)$ 。此外，由于 t 型估计量的极限分布在最小绝对偏差估计中包含 $f(0)$ ，在实践中，我们使用以下密度估计量（*Silverman，1986*年）进行统计推断

$$\hat{f}_n(0) := \frac{1}{nb_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y_i - \hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} y_{i-1}}{b_n}\right),$$

其中， b_n 是带宽， $K(\cdot)$ 是核函数，例如高斯核或逻辑斯蒂核。

注2.2。 如前所述，*Zhou*和*Lin*（*2014*年）以及*Wang*等人（*2020*年）研究了满足 $n|\rho_n - 1| \to \infty$ 的 ρ_n 的最小绝对偏差估计，其中初始值 $y_0 = o_p(|\rho_n - 1|^{-1/2})$ 与 $\{\epsilon_i, i \geq 1\}$相互独立。具体而言，他们得到

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{n}{1-\rho_n^2}}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n\right) \to_d \mathscr{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(0)}\right) \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n\right) \to_d \mathscr{N}\left(0, \frac{1}{4f^2(0)}\right) \end{cases} \tag{7}$$

and

$$\frac{\rho_n^n}{\rho_n^2 - 1}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n\right) \to_d \frac{\mathcal{C}}{2\sigma f(0)}, \tag{8}$$

分别适用于弱平稳情形和温和爆炸情形。他们的结果与*Phillips*和*Magdalinos*（*2007*）的经典结果相符，区别仅在于出现了 $f(0)$，这与通常的最小绝对偏差估计类似。

值得指出的是，对于非常接近单位根的过程，定理*2.1*和定理*2.2*表明，在近平稳和近爆炸两种情形下，初始值 y_0 主导最小绝对偏差估计量和 t型估计量的渐近分布，二者分别服从柯西分布和正态分布。此外，由于 $\rho_n \to 1$ 以远快于 $1/n$的速度，针对近平稳情形，根据引理 *5.1*，假设 $y_0 = o_p(|\rho_n - 1|^{-1/2})$ 无法成立，且收敛速度 $\sqrt{n/(1-\rho_n^2)}$ 的阶高于 n，从而扩展了收敛速率谱；而针对近爆炸情形，收敛速度 $\sqrt{n\kappa_n}$ 的阶也高于 n ，这与公式（*8*）中的情况不同。 ——

2.2. 情形 $n(\rho_n - 1) \to \gamma$ 当 $n \to \infty$时。现在考虑局部单位根情形，其中参数 ρ_n 满足 $n(\rho_n - 1) \to \gamma$，对某个固定的 $\gamma \neq 0$，当 $n \to \infty$时成立。我们指出，与该情形不同，在 $n \to \infty$时， $\rho_n \neq 1$ 和 $n(\rho_n - 1) \to 0$ ，初始条件完全支配样本方差 $\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2$的渐近分布；而在本情形中，取决于噪声过去值的初始值并不会实质影响分析方法，因此为简便起见，我们可以假设 $y_0 = 0$ 。

为陈述主要结果，我们首先引入一些记号。对于 $1 \leq i \leq n$，令

$$K_{n,i} := \frac{1}{\sqrt{n}}\rho_n^{i-1-n}\mathrm{sign}(\epsilon_i) \quad \text{and} \quad L_{n,i} := \frac{1}{\sqrt{n}}\rho_n^{n-i}\epsilon_i,$$

并定义

$$K_n(t) := \sum_{i=1}^{[nt]} K_{n,i} \quad \text{and} \quad L_n(t) := \sum_{i=1}^{[nt]} L_{n,i}, \tag{9}$$

对于 $0 \le t \le 1$。如果我们进一步假设 $\sigma^2 = 1$ 和 $\mathbb{E}|\epsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ 对于某个 $\delta > 0$，根据引理 5.3，过程 $\{(K_n(t)\ L_n(t))\ 0 \le t \le 1\}$ 弱收敛到一个连续过程

$$\mathbf{X}(t) = (K(t), L(t)), \quad 0 \le t \le 1 \tag{10}$$

具有独立高斯增量、均值向量为零且协方差矩阵为

$$\Gamma(t) = (\gamma_{ij}(t)) := \begin{pmatrix} \frac{e^{-2\gamma}}{2\gamma}(e^{2\gamma t} - 1) & t\mathbb{E}|\epsilon_1| \\ t\mathbb{E}|\epsilon_1| & \frac{e^{2\gamma}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1. \tag{11}$$

定理 2.3。对于模型（*1*），假设 $y_0 = 0$, $\sigma^2 = 1$, $n(\rho_n - 1) \to \gamma$ 对某个固定的 $\gamma \ne 0$ 成立，当 $n \to \infty$时成立，并且 $\mathbb{E}|\epsilon_1|^{2+\delta} < \infty$ 对某个 $\delta > 0$成立，则当 $n \to \infty$时，我们有

$$n(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \frac{1}{2f(0)} \cdot \frac{\int_0^1 L(t)\,\mathrm{d}K(t)}{\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)} L^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{12}$$

and

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2}\,(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \frac{1}{2f(0)} \cdot \frac{\int_0^1 L(t)\,\mathrm{d}K(t)}{\sqrt{\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)} L^2(t)\,\mathrm{d}t}}. \tag{13}$$

注 2.3。*Zhou*和*Lin*（*2014*）以及*Wang*等人（*2020*）研究了$\rho_n \to 1$ 且当 $n \to \infty$ 时 $n|\rho_n - 1| \to \infty$的情形。在弱平稳情形下，最小绝对偏差估计量的渐近分布的收敛速度介于$(n^{1/2}, n)$ 之间。结合定理*2.1*和定理*2.2*的结果，我们拓宽了最小绝对偏差估计量渐近分布的收敛速率谱。文献中也观察到了 ρ_n 的速度与渐近分布收敛速度之间的类似关系，例如参见*Chan*和*Wei*（*1987*）、*Phillips*（*1987*）、*Phillips*和*Magdalinos*（*2007*）以及*Andrews*和*Guggenberger*（*2008*）。

注2.4. 令

$$\mathscr{D}(\gamma) := \frac{1}{2f(0)} \cdot \frac{\int_0^1 L(t)\,\mathrm{d}K(t)}{\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)} L^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{14}$$

and

$$\mathscr{L}(\gamma) := \frac{1}{2f(0)} \cdot \frac{\int_0^1 L(t)\,\mathrm{d}K(t)}{\sqrt{\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)} L^2(t)\,\mathrm{d}t}}. \tag{15}$$

注意，$\mathscr{D}(\gamma)$ 和 $\mathscr{L}(\gamma)$ 是以参数 γ 为指标的连续分布族。因此，对于情形 $\rho_n = 1 + \gamma/n$，根据引理 *5.3*，当 $\gamma = 0$，即 $\rho_n \equiv 1$ 时，我们有

$$\mathscr{D}(0) = \frac{1}{2f(0)} \cdot \frac{\int_0^1 W_2(t)\,\mathrm{d}W_1(t)}{\int_0^1 W_2^2(t)\,\mathrm{d}t} \quad and \quad \mathscr{L}(0) = \frac{1}{2f(0)} \cdot \frac{\int_0^1 W_2(t)\,\mathrm{d}W_1(t)}{\sqrt{\int_0^1 W_2^2(t)\,\mathrm{d}t}},$$

这里 $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$ 是一个协方差矩阵为

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{E}|\epsilon_1| \\ \mathbb{E}|\epsilon_1| & 1 \end{pmatrix}.$$

这些结果与 *Herce*（*1996*）的主要结果完全对应。*Herce* 在文中讨论了 $\mathscr{D}(0)$ 的结构，它是“单位根”分布与正态分布的尺度混合的组合，并据此构造了基于最小绝对偏差的单位根检验。此外，由于 $\sigma^2 = 1$，我们有 $\mathbb{E}|\epsilon_1| \leq 1$，因此矩阵 Ξ 是半正定的。然而，这里 $\mathscr{D}(\gamma)$ 和 $\mathscr{L}(\gamma)$ 过于复杂，难以进行有效分析，因此我们在第*3*节中进行了一些模拟，以整体展示 $\mathscr{D}(\gamma)$ 和 $\mathscr{L}(\gamma)$ 的分布，并说明它们如何取决于参数 γ。最后，我们还指出，根据 *Herce*（*1996*）的定理 *1*，局部单位根情形下备择假设的收敛速率是最优的，也就是说，其收敛速率与单位根情形相同。

由上述注可知，一个自然的问题是：当 $|\gamma| \to \infty$ 时，$\mathscr{L}(\gamma)$ 的分布是怎样的？事实上，与 Chan和Wei（1987）和 Phillips（1987）中普通最小二乘估计量的情形类似，我们有如下结果。

定理 2.4. 对于模型（*1*），假设当 $n \to \infty$ 时，$y_0 = 0$, $\sigma^2 = 1$, $n(\rho_n - 1) \to \gamma$，其中 $\gamma \neq 0$ 为某个固定值，且对于某个 $\delta > 0$，$\mathbb{E}|\epsilon_1|^{2+\delta} < \infty$，则有

$$2f(0) \cdot \mathscr{L}(\gamma) \to_d \mathscr{N}(0,1), \quad as\ |\gamma| \to \infty. \tag{16}$$

注2.5. 回顾注*2.2*，*Zhou*和*Lin*（*2014*）和 *Wang*等人（*2020*）证明了

$$2f(0) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2} \left(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n\right) \to_d \mathscr{N}\left(0,1\right), \tag{17}$$

对于弱平稳情形，当 $n \to \infty$ 时，$0 < \rho_n < 1$ 和 $n(1-\rho_n) \to \infty$。定理 *2.4* 与定理 *2.3* 一起表明，如果先令 $n(\rho_n - 1) \to \gamma$，然后令$|\gamma| \to \infty$，我们也可以得到渐近正态分布。此外，值得注意的是，尽管定理 *2.4* 对 $\gamma \to \infty$ 和 $\gamma \to -\infty$ 均成立，但这两种情形背后的推理截然不同。事实上，对于较大的负γ，ρ_n 可以认为远小于 *1*，因此模型（*1*）可视为平稳模型，进而渐近正态性成立；对于正 γ，ρ_n 大于 *1*，模型（*1*）是爆炸的。然而，定理 *2.4* 表明渐近正态性仍然成立，这与 *Zhou*和*Lin*（*2014*）和 *Wang*等人（*2020*）讨论的温和爆炸情形不同，即注*2.2*中的公式（*8*）。

3. SIMULATIONS

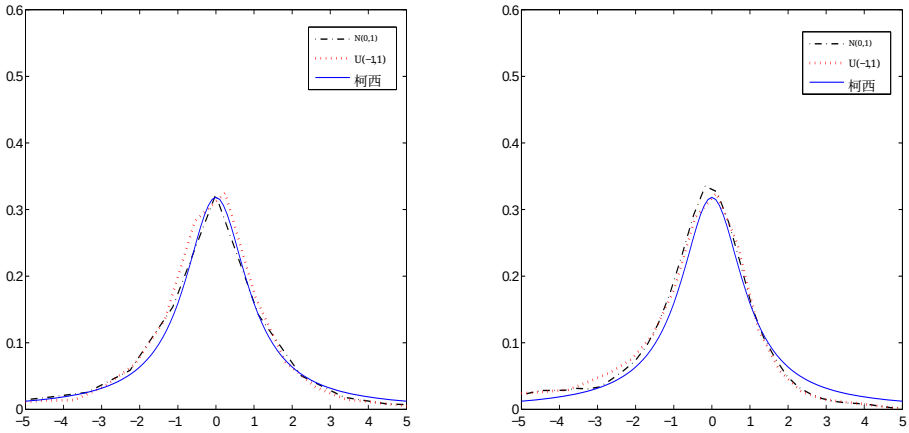
本节通过蒙特卡罗模拟考察主要结果中估计量的有限样本表现。为方便起见，在所有实验中，我们始终假设数据由 AR(1) 模型生成，$y_i = \rho_n y_{i-1} + \epsilon_i$ 其中 $\rho_n = 1 + \gamma n^{-\beta}$，且 $\gamma \in \mathbb{R}$ 和 $\beta \geq 1$。此外，我们还假设扰动项是独立同分布的，并且服从 $\mathscr{N}$(0，1)或 $U(-1,\ 1)$分布。这里，$U(-1,\ 1)$表示区间$(-1,\ 1)$上的均匀随机变量。为估计参数 $f(0)$，我们采用以下密度估计量（Silverman，1986年）

$$\hat{f}_n(0) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y_i - \hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} y_{i-1}}{b_n}\right),$$

其中， $K(\cdot)$为高斯核，与 Matlab 函数 $ksdensity(\cdot,\ 0)$相关联的最优带宽 b_n 由数据自动选择。

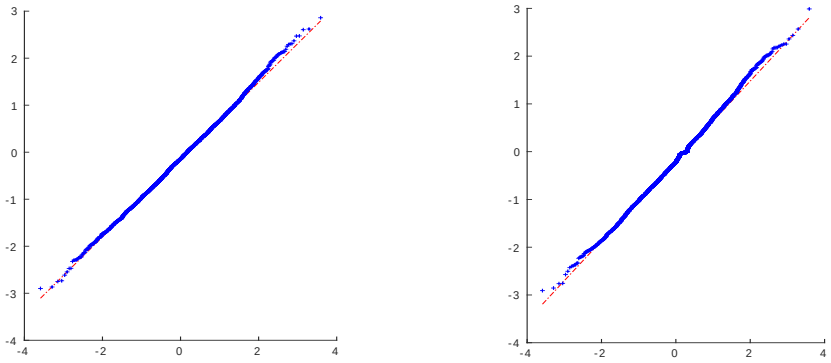
估计量的密度曲线。我们首先考察定理2.1和定理2.2中的模拟。对于近平稳情形，$y_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_n^j \epsilon_{-j}$，真实参数取为$(\gamma,\ \beta) = (-10,\ 2)$，并将标准化估计量记为 $\hat{}\rho_s = 2\sigma \hat{}f_n(0)\sqrt{n}/(1-\rho_n^2)(\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}} - \rho_n)$。对于近爆炸情形，取 $y_0 = \sum_{j=0}^{\kappa_n} \rho_n^j \epsilon_{-j}$、$(\gamma,\ \beta) = (10,\ 2)$、$\kappa_n = [n^{1.3}]$，并将标准化估计量记为 $\hat{}$by $\hat{}\rho_e = 2\sigma f_n(0)\sqrt{n\kappa_n}(\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}} - \rho_n)$。对于两种情形，将 t 型估计量记为$T_n := 2\hat{}f_n(0)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2}\,(\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}} - \rho_n)$。每种情形下，我们以样本量 $n = 1000$ 进行3000次重复模拟。图1显示，$\hat{}\rho_s$ 和$\hat{}\rho_e$的密度曲线与标准柯西随机变量的密度曲线接近。图2通过 Q-Q图证实了 T_n 在近平稳和近爆炸情形下的渐近正态性。

接下来，我们模拟备注 2.4 中定义的极限分布 $\mathscr{D}(\gamma)$ 和 $\mathscr{L}(\gamma)$。令 $\beta = 1$，并假设扰动项为标准正态随机变量，因此 $f(0) = 1/\sqrt{2\pi}$。对于 $\mathscr{D}(\gamma)$，每种情形下均进行 1000 次重复模拟，样本量为$n = 200$；图3展示了不同 γ 下 $2f(0)\mathscr{D}(\gamma)$ 渐近密度曲线的形状。对于 $\mathscr{L}(\gamma)$，每种情形下均进行 1000 次重复模拟，样本量为 $n = 2000$ ($\gamma < 0$) 和 $n = 1000$ ($\gamma > 0$)；图4验证了定理 2.4，即当 $|\gamma| \to \infty$ 时， $2f(0)\mathscr{L}(\gamma)$ 具有渐近正态性，这也展示了 $\gamma \to \infty$ 和 $\gamma \to -\infty$ 之间收敛速度的差异。



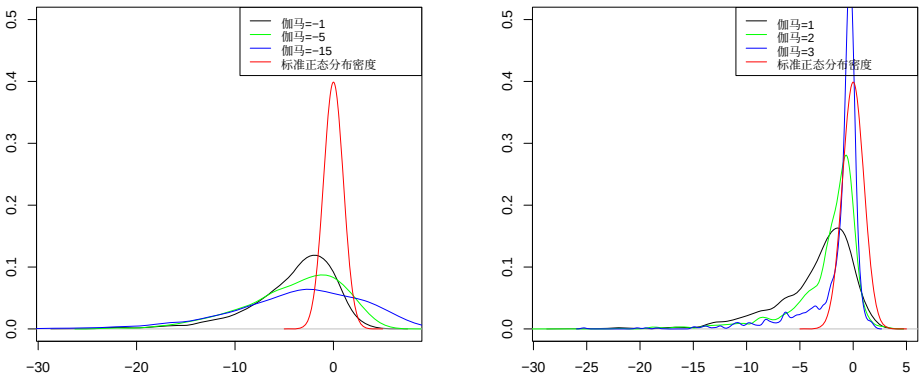
(A) 近稳态情形　　(B) 近爆炸情形

FIGURE 1. 当 $\mathscr{N}$（0，1）和 U（−1，1）创新时，$\hat{}\rho_s$ 和 $\hat{}\rho_e$ 的密度曲线。



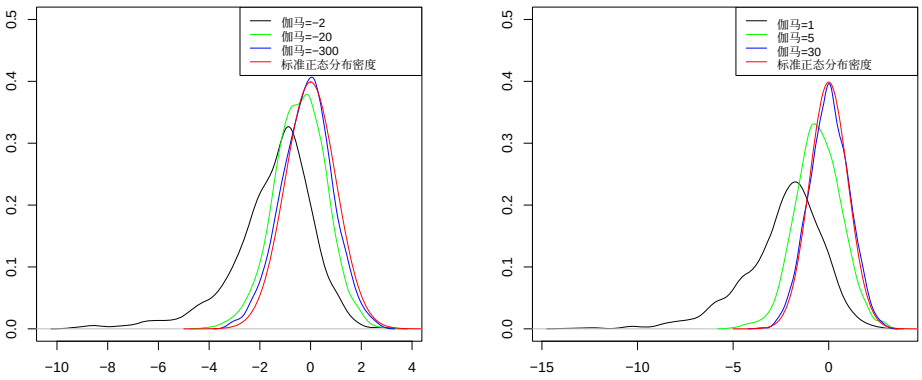
(A) 近平稳情形 (B) 近爆炸情形

FIGURE 2. 统计量的Q-Q图 T_n ， 其中 $\mathcal{N}(0,\ 1)$创新项。



(A) 近平稳情形 (B) 近爆炸情形

FIGURE 3. $2f(0)\mathscr{D}(\gamma)$ 在创新项 $\mathcal{N}(0,\ 1)$ 下的渐近密度曲线。



(A) 近平稳情形 (B) 近爆炸情形

FIGURE 4. $2f(0)\mathscr{L}(\gamma)$ 在 $\mathscr{N}(0,\ 1)$ 创新下的渐近密度曲线。

估计量的准确性。 Andrews和Guggenberger（2008）建立了模型（1）在 $n(\rho_n - 1) \to 0$ and $0 < \rho_n < 1$ 条件下的普通最小二乘估计量渐近理论。这里我们将比较 $\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}}$ and $\hat{}\rho_{\mathrm{OLS}}$这两个估计量的准确性，其中 $\hat{}\rho_{\mathrm{OLS}}$ 表示 ρ_n的OLS估计量。对于近平稳情形，令 $y_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_n^j \epsilon_{-j}$, $\beta = 1.1$, 1。3 和 $\gamma = -5,\ -50$。生成数据时，我们在随机选取的 5% 样本点上各加 10，以构造异常值。在这些实验中，我们分别进行 1000 次重复模拟，每次样本量为 $n = 200$ 或 500，以比较存在和不存在异常值两种情况下 $\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}}$ 和 $\hat{}\rho_{\mathrm{OLS}}$ 的经验均值（EM）、绝对误差（AE）和均方误差（MSE）。在不存在异常值的情况下，表 1 显示 EM 非常接近真实值 ρ_n，且 AE 和 MSE 都很小，这验证了最小绝对偏差估计量对于极接近单位根的模型具有较高的准确性。随着样本量 n 增加，误差（AE 和 MSE）会减小。如果数据中存在异常值，表 2 显示，OLS估计量的误差（AE 和 MSE）远大于最小绝对偏差估计量的误差。此外，OLS估计量偶尔会产生大于 1 的估计值。因此可以得出结论，$\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}}$ 比 $\hat{}\rho_{\mathrm{OLS}}$更稳健。

对于近爆炸情形，我们取 $\kappa_n = [n^{1.3}]$ in $y_0 = \sum_{j=0}^{\kappa_n} \rho_n^j \epsilon_{-j}$，并令$\beta = 1.5$, 1。8, $\gamma = 5,\ 50$。这里参数值的选择保证了$n(\rho_n - 1) \to 0$, $\kappa_n(1 - \rho_n) \to 0$和 $\kappa_n/n \to \infty$，因为 $n \to \infty$。由于不同情形下的 y值尺度相差很大，因此在生成数据时，我们对随机选取的5%样本点各加上最大值绝对值的10倍，以构造异常值。在这些实验中，我们进行了1000次重复模拟，每次的样本量为 $n = 200$ 或500，并研究了有无异常值两种情形下$\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}}$ 和$\hat{}\rho_{\mathrm{OLS}}$ 的经验均值（EM）、绝对误差（AE）和均方误差（MSE）。表3显示，如果数据中没有异常值，EM非常接近真实值 ρ_n ，且AE和MSE都非常小，这验证了

最小绝对偏差估计量和OLS估计量的准确性；而如果数据中存在异常值，从表4可以明显看出，$\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}}$ 比$\hat{\rho}_{\mathrm{OLS}}$更加稳健。

TABLE 1. 近似平稳 AR(1) 过程在 $\mathcal{N}(0,\ 1)$ $U(-1,\ 1)$噪声下的$\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}}$($\hat{\rho}_{\mathrm{OLS}}$)的 AE/EM 和均方误差：无异常值情形。

				ϵ_i			
				$N(0,\ 1)$		$U(-1,\ 1)$	
β	γ	n	ρ_n	AE/EM	MSE	AE/EM	MSE
1.1	-50	200	0.8528	0.0097/0.8431	0.0127	0.0112/0.8416	0.0207
				(0.0083/0.8445)	(0.0083)	(0.0084/0.8445)	(0.0077)
		500	0.9463	0.0037/0.9426	0.0017	0.0049/0.9414	0.0030
				(0.0034/0.9428)	(0.0012)	(0.0036/0.9427)	(0.0012)
	-5	200	0.9853	0.0046/0.9807	0.0010	0.0037/0.9816	0.0011
				(0.0083/0.9770)	(0.0019)	(0.0073/0.9780)	(0.0016)
		500	0.9946	0.0026/0.9920	0.0002	0.0025/0.9921	0.0002
				(0.0033/0.9913)	(0.0003)	(0.0029/0.9917)	(0.0003)
1.3	-50	200	0.9490	0.0072/0.9418	0.0038	0.0101/0.9389	0.0059
				(0.0083/0.9407)	(0.0035)	(0.0096/0.9394)	(0.0035)
		500	0.9845	0.0028/0.9817	0.0005	0.0038/0.9807	0.0008
				(0.0037/0.9808)	(0.0005)	(0.0034/0.9811)	(0.0005)
	-5	200	0.9949	0.0029/0.9920	0.0003	0.0025/0.9924	0.0004
				(0.0065/0.9884)	(0.0011)	(0.0047/0.9890)	(0.0006)
		500	0.9985	0.0018/0.9966	0.0001	0.0018/0.9967	0.0001
				(0.0025/0.9960)	(0.0001)	(0.0019/0.9966)	(0.0001)

TABLE 2. 近似平稳 AR(1) 过程在 $\mathcal{N}(0,\ 1)$ $U(-1,\ 1)$ 噪声下的 $\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}}$($\hat{\rho}_{\mathrm{OLS}}$)的 AE/EM 和均方误差：异常值情形。

				ϵ_i			
				$N(0,\ 1)$		$U(-1,\ 1)$	
β	γ	n	ρ_n	AE/EM	MSE	AE/EM	MSE
1.1	-50	200	0.8528	0.0046/0.8574	0.0015	0.0046/0.8574	0.00009
				(0.0451/0.8979)	(0.0121)	(0.0500/0.9028)	(0.0138)
		500	0.9463	0.0039/0.9501	0.0002	0.0033/0.9495	0.0001
				(0.0320/0.9783)	(0.0052)	(0.0338/0.9801)	(0.0058)
	-5	200	0.9853	0.0015/0.9868	0.0001	0.0013/0.9866	0.0000
				(0.0145/0.9998)	(0.0011)	(0.0150/1.0003)	(0.0012)
		500	0.9946	0.0007/0.9954	0.0000	0.0006/0.9953	0.0000
				(0.0065/1.0011)	(0.0002)	(0.0066/1.0012)	(0.0002)
1.3	-50	200	0.9490	0.0024/0.9514	0.0004	0.0029/0.9519	0.0002
				(0.0297/0.9787)	(0.0046)	(0.0320/0.9810)	(0.0052)
		500	0.9845	0.0016/0.9861	0.0000	0.0013/0.9858	0.0000
				(0.0137/0.9982)	(0.0009)	(0.0140/0.9985)	(0.0010)
	-5	200	0.9949	0.0009/0.9958	0.0000	0.0011/0.9960	0.0001
				(0.0091/1.0040)	(0.0005)	(0.0095/1.0044)	(0.0006)
		500	0.9985	0.0006/0.9990	0.0001	0.0004/0.9989	0.0001
				(0.0040/1.0024)	(0.0001)	(0.0040/1.0025)	(0.0001)

TABLE 3. 近爆炸性 AR(1) 过程在 $\mathcal{N}(0,\ 1)$ $U(-1,\ 1)$ 噪声下的 AE/EM 和 $\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}}(\hat{}\rho_{\mathrm{OLS}})$ 的均方误差：无异常值情形。

				ϵ_i			
				$N(0,\ 1)$		$U(-1,\ 1)$	
β	γ	n	ρ_n	AE/EM	MSE	AE/EM	MSE
1.5	50	200	1.0177	2.2e-5/1.0177	2.5e-9	2.2e-5/1.0177	2.5e-9
				(2.2e-5/1.0177)	(2.5e-9)	(2.2e-5/1.0177)	(2.5e-9)
		500	1.0045	2.8e-5/1.0045	3.9e-9	2.8e-5/1.0045	3.9e-9
				(2.8e-5/1.0045)	(3.9e-9)	(2.8e-5/1.0045)	(3.9e-9)
	5	200	1.0018	-6e-4/1.0012	4.5e-5	-8e-4/1.0009	6.7e-5
				(-e-6/1.0018)	(e-5)	（1.8e-4/1.0019）	(e-5)
		500	1.0004	-3.8e-4/1.00007	1.3e-5	-5.7e-4/0.9999	2.8e-5
				(1.2e-4/1.0006)	(1.5e-6)	(0.0002/1.0007)	(e-6)
1.8	50	200	1.0036	-1.6e-4/1.0034	1.4e-5	-2e-4/1.0034	1.5e-5
				(-5e-5/1.0036)	(3e-6)	(-e-4/1.0035)	(3.7e-6)
		500	1.0007	-2.6e-4/1.0004	9e-6	3.7e-4/1.0003	1.8e-5
				(4e-5/1.0007)	(e-6)	(9e-5/1.0008)	(9e-7)
	5	200	1.0004	-0.0017/0.9986	e-4	-0.0020/0.9984	1.7e-4
				(4e-4/1.0007)	(1.9e-5)	(6e-4/1.0010)	(e-5)
		500	1.00007	-9.6e-4/0.9991	3.9e-5	-0.0011/0.9989	5.7e-5
				(3e-4/1.00036)	(1.6e-6)	(2.7e-4/1.00035)	(9e-7)

TABLE 4. 近爆炸性 AR(1) 过程在 $\mathcal{N}(0,\ 1)$ $U(-1,\ 1)$ 噪声下的异常值情形中，$\hat{}\rho_{\mathrm{LAD}}(\hat{}\rho_{\mathrm{OLS}})$ 的 AE/EM 和均方误差。

				ϵ_i			
				$N(0,\ 1)$		$U(-1,\ 1)$	
β	γ	n	ρ_n	AE/EM	MSE	AE/EM	MSE
1.5	50	200	1.0177	-0.0144/1.0033	0.0020	-0.0140/1.0037	0.0019
				(-0.4835/0.5341)	(2.1195)	(-0.4703/0.5474)	(2.0560)
		500	1.0045	-7.1e-3/0.9974	5.1e-4	-0.0069/0.9976	5e-4
				(-0.5434/0.4610)	(1.9600)	(-0.5345/0.4700)	(1.9105)
	5	200	1.0018	-0.0080/0.9939	3.8e-4	-0.0090/0.9928	4.6e-4
				(-0.7847/0.2171)	(3.1892)	(-0.7748/0.2270)	(3.1400)
		500	1.0004	-0.0064/0.9941	2.5e-4	-0.0074/0.9930	3.2e-4
				(-0.7823/0.2182)	(3.1841)	(-0.7731/0.2273)	(3.1062)
1.8	50	200	1.0036	-0.0033/1.0003	1.2e-4	-0.0038/0.9998	1.5e-4
				(-0.7888/0.2148)	(3.1625)	(-0.7929/0.2108)	(3.1825)
		500	1.0007	-0.0045/0.9962	1.5e-4	-0.0055/0.9952	2.1e-4
				(-0.7930/0.2077)	(3.2306)	(-0.7952/0.2055)	(3.2533)
	5	200	1.0004	-9.6e-3/0.9907	4.8e-4	-9.8e-3/0.9905	5e-4
				(-0.7404/0.2600)	(2.9465)	(-0.7364/0.2640)	(2.9257)
		500	1.00007	-8.4e-3/0.9917	3.8e-4	-9.0e-3/0.9911	4.3e-4
				(-0.7375/0.2625)	(2.9256)	(-0.7394/0.2607)	(2.9476)

4. CONCLUDING REMARKS

本文建立了根接近于 1 的 AR(1)过程的最小绝对偏差估计量的极限理论。参数 ρ_n 满足 $n(\rho_n - 1) \to 0$ 或$n(\rho_n - 1) \to \gamma$，其中 $\gamma \neq 0$为某个固定数，且 $n \to \infty$。研究表明，在第一种情况下，对于近似平稳和近似爆炸过程，最小绝对偏差估计量和 t型统计量分别服从柯西渐近分布和正态渐近分布。该情况下的模拟研究验证了理论结果，并表明这一理论有助于统计推断，而且当数据中存在异常值时，最小绝对偏差估计量具有

稳健性。在 $n(\rho_n - 1) \to \gamma$、其中 $\gamma \neq 0$为某个固定数且 $n \to \infty$的情况下，我们还在假设 $y_0 = 0$ 成立的条件下，建立了最小绝对偏差估计量和 t型统计量的渐近理论。这使我们能够将其与文献中的已有结果联系起来，例如 Chan和Wei（1987年）、Phillips（1987年）和 Herce（1996年）。

总之，我们建立了近单位根过程的最小绝对偏差估计量的渐近理论，与Chan和Wei（1987）、Phillips（1987、1988、2021）、Phillips和Magdalinos（2007）、Andrews和Guggenberger（2008）、Chan（2009）等人关于普通最小二乘估计量的研究结果相对应。本文的结果也完善了Zhou和Lin（2014）以及Wang 等人（2020）对最小绝对偏差估计量的研究。这些作者研究的是 $\rho_n \to 1$ 和 $n|\rho_n - 1| \to \infty$ 随 $n \to \infty$变化的情形。在近平稳情形下，文中最小绝对偏差估计量渐近分布的标准化因子的收敛速率范围为（$n^{1/2}$，n）。我们拓宽了最小绝对偏差估计量渐近分布中标准化因子的速率范围。

5. Proof of main results

我们先对证明作一些说明。众所周知，最小绝对偏差估计的方法是经典方法，由 Pollard（1991）、Davis 等人（1992）、Knight（1989，1998）和 Ling（2005）发展而来。二次泛函 $\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2$ 和 $\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\text{sign}(\epsilon_i)$ 的极限行为在分析中起着关键作用。具体而言，对于极近情形 $n(\rho_n - 1) \to 0$，我们主要遵循Zhou和Lin（2014）以及 Wang 等人（2020）的方法；而在我们的框架下，初始值 y_0 主导着 $\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2$ 的渐近行为，参见引理 5.1 和引理 5.2。对于局部单位根情形，$n(\rho_n - 1) \to \gamma$ 对某个 $\gamma \neq 0$，则需要更多工作。为了处理 $\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\text{sign}(\epsilon_i)\ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2\big)$ 的渐近联合分布，我们需要借助向量值鞅不变性原理，为过程 $\{(K_n(t)\ L_n(t))\ 0 \leq t \leq 1\}$（定义见（9））建立泛函中心极限定理，即引理 5.3。我们指出，尽管 Phillips和Durlauf（1986）（引理 3.1）建立了向量值积分过程样本矩的渐近理论，但其结果在此并不适用，因为回归参数 ρ_n 取决于样本量 n，这使得按（11）定义的协方差矩阵随时间变化。最后，我们利用随机微积分工具得到了引理 5.4 和引理 5.5 中的估计，这是定理 2.4 证明的关键。

在整个证明过程中，我们使用 Knight（1998）的以下恒等式，

$$\text{for } x \neq 0, \quad |x - y| - |x| = -y\text{sign}(x) + 2\int_0^y \big(\mathbb{I}_{\{x \leq s\}} - \mathbb{I}_{\{x \leq 0\}}\big)\,\mathrm{d}s. \tag{18}$$

由模型（1），我们还可以观察到

$$y_i = \rho_n^i y_0 + \sum_{j=1}^{i} \rho_n^{i-j}\epsilon_j, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{19}$$

5.1. 情形 $n(\rho_n - 1) \to 0$ 当 $n \to \infty$时。 在本小节中，我们将证明定理2.1和定理2.2。首先介绍附录中证明的两个引理。

引理 5.1。 *在定理2.1的假设下，我们有*

(1). $\sqrt{1-\rho_n^2}y_0 \to_d \sigma X$; (2). $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{i-1}\text{sign}(\epsilon_i) \to_d Y$; (3). $\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}$最大值$_{1\le i\le n}|y_{i-1}| \to_p 0$;
其中 X 和 Y 是相互独立的标准正态随机变量。

引理 5.2. 在定理*2.2*的假设下，我们有
(1). $\frac{1}{\sqrt{\kappa_n}}y_0 \to_d \sigma U$;(2). $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{i-1}$符号$(\epsilon_i) \to_d V$;(3). $\frac{1}{\sqrt{n\kappa_n}}$最大值$_{1\le i\le n}|y_{i-1}| \to_p 0$;
其中 U 和 V 是 相互独立的标准正态随机变量 变量。

定理***2.1***的证明。 记 $\hat{u}_n = \sqrt{n/(1-\rho_n^2)}(\hat{\rho}_{\text{LAD}} - \rho_n)$ 为.....。则 $\hat{u}_n$ 是下列凸目标函数的极小值点,

$$Z_n(u) = \sum_{i=1}^{n}\left(|\epsilon_i - \sqrt{(1-\rho_n^2)/n}y_{i-1}u| - |\epsilon_i|\right).$$

基于 Davis等（1992年）和 Ling（2005年）的思路，如果我们能够证明，对于每个 u, $Z_n(u)$ 弱收敛到一个具有唯一极小值点 $u_{\min}$ 的随机变量，那么 $\hat{u}_n$ 必定弱收敛到 $u_{\min}$。

由（18），我们将 $Z_n(u)$ 重写如下

$$Z_n(u) = -uA_n + 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i(u), \tag{20}$$

here

$$A_n = \sqrt{(1-\rho_n^2)/n}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\text{sign}(\epsilon_i)$$

and

$$\xi_i(u) = \int_0^{\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}y_{i-1}u}\left(\mathbb{I}_{\{\epsilon_i\le s\}} - \mathbb{I}_{\{\epsilon_i\le 0\}}\right)\mathrm{d}s.$$

接下来，我们分别分析 A_n 和 $\xi_i(u)$ 的渐近性质。由（19），我们可以将 A_n 分解如下

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{(1-\rho_n^2)/n}\sum_{i=1}^{n}\left(\rho_n^{i-1}y_0 + \sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\right)\text{sign}(\epsilon_i) \\ &= \sqrt{(1-\rho_n^2)}y_0\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{i-1}\text{sign}(\epsilon_i) + R_{n,1}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中余项

$$R_{n,1} = \sqrt{(1-\rho_n^2)/n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\,\text{sign}(\epsilon_i).$$

引理 5.1 的部分 (1) 和 (2) 与连续映射定理表明，方程 (21) 中的第一项弱收敛于随机变量 σXY，其中 X 和 Y 是相互独立的标准正态随机变量。

现在，我们证明余项依概率收敛于零。显然，经过简单计算， $\mathbb{E}(R_{n,1}) = 0$ 并且

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_{n,1}^2) &= \frac{1-\rho_n^2}{n}\,\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\,\mathrm{sign}(\epsilon_i)\Big)^2\Big] \\ &= \frac{1-\rho_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\Big)^2\Big] = \frac{n-1}{n}\Big(1-\frac{\rho_n^2-\rho_n^{2n}}{(n-1)(1-\rho_n^2)}\Big)\sigma^2 \to 0\end{aligned}$$

如 $n \to \infty$，其中最后一步由命题 A.1 得出。因此， A_n弱收敛于随机变量 σXY。

现在，我们用鞅方法分析方程 (20) 中的第二项 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i(u)$。将滤过记为 $\mathcal{F}_{n,i} = \sigma(y_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_i)$，其中 $1 \le i \le n$和$n \ge 1$，则可写为

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i(u) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i(u)|\mathcal{F}_{n,i-1}) + R_{n,2},$$

其中余项

$$R_{n,2} = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i(u) - \mathbb{E}(\xi_i(u)|\mathcal{F}_{n,i-1})).$$

是关于滤过 $\{\mathcal{F}_{n,i}, 1 \le i \le n\}$ 的鞅。

根据泰勒公式，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i(u)|\mathcal{F}_{n,i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}y_{i-1}u}\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{\epsilon_i\le s\}} - \mathbb{I}_{\{\epsilon_i\le 0\}}\right)\mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}y_{i-1}u}(F(s)-F(0))\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}y_{i-1}u}\Big(f(0)s + \frac{1}{2}f'(s^*)s^2\Big)\mathrm{d}s \\ &= \frac{u^2 f(0)}{2}\cdot\frac{1-\rho_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}^2 + R_{n,3}, \qquad (22)\end{aligned}$$

其中 $F(\cdot)$ 是 ϵ_1, $s^* \in (0, s)$ 的分布函数，且余项

$$R_{n,3} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}y_{i-1}u}f'(s^*)s^2\mathrm{d}s.$$

我们首先考虑样本方差 $\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}^2$。由方程 (19) 可得，

$$\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}^2 = \sum_{i=1}^{n}\rho_n^{2(i-1)}y_0^2 + \sum_{i=1}^{n}\rho_n^{i-1}\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-j-1}\epsilon_j y_0 + \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-j-1}\epsilon_j\Big)^2. \qquad (23)$$

简单计算可得

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-j-1}\epsilon_j\Big)^2\Big] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{2(i-1-j)}\sigma^2 = \frac{(n-1)\sigma^2}{1-\rho_n^2}\Big(1-\frac{\rho_n^2-\rho_n^{2n}}{(n-1)(1-\rho_n^2)}\Big).$$

注意，根据柯西-施瓦茨不等式，

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{i-1}\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-j-1}\epsilon_j\Big|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\rho_n^{2(i-1)}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-j-1}\epsilon_j\Big)^2,$$

因此，对于式（23）中的第二项，应用 $k_n = n$ 和引理 5.1 的第（1）部分，可得

$$\frac{1-\rho_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{i-1}\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-j-1}\epsilon_j y_0 \to_p 0.$$

同样，对于式（23）中的第三项，有

$$\frac{1-\rho_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-j-1}\epsilon_j\Big)^2 \to_p 0.$$

此外，命题 A.1 和引理 5.1 的第（1）部分结合连续映射定理，推出

$$\frac{1-\rho_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{2(i-1)}y_0^2 \to_d \sigma^2 X^2.$$

因此，我们已经证明

$$\frac{1-\rho_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}^2 \to_d \sigma^2 X^2. \tag{24}$$

下面还需处理余项，$R_{n,2}$ 和 $R_{n,3}$。注意到

$$\begin{aligned}|R_{n,3}| &\le \frac{|u|^3\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|}{3}\left(\frac{1-\rho_n^2}{n}\right)^{3/2}\sum_{i=1}^{n}|y_{i-1}|^3\\ &\le \frac{|u|^3\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|}{3}\left(\frac{1-\rho_n^2}{n}\right)^{3/2}\max_{1\le i\le n}|y_{i-1}|\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}^2,\end{aligned}$$

由方程（24）和引理 5.1 的第（3）部分可知，$R_{n,3}$ 依概率收敛于零。由于 $R_{n,2}$ 是一个鞅，借助 Wang *et al.*（2020）或 Zhou和Lin（2014）的方法，并利用引理 5.1，我们可以证明 $R_{n,2}$ 依概率收敛于零。

综上所述，我们得到

$$\begin{aligned}Z_n(u) &= -uA_n + 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i(u)\\ &= -u\sqrt{(1-\rho_n^2)}y_0\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{i-1}\mathrm{sign}(\epsilon_i) + u^2 f(0)\frac{1-\rho_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{2(i-1)}y_0^2 + o_p(1)\\ &\to_d -u\sigma XY + u^2\sigma^2 f(0)X^2 =: Z(u).\end{aligned}$$

因为 $Z(u)$ 在

$$u_{\min} = Y/(2\sigma f(0)X),$$

根据 Davis 等人 （1992年）的引理 2.2，我们推导出

$$\hat{u}_n = \sqrt{n/(1-\rho_n^2)}(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \frac{1}{2\sigma f(0)}\mathcal{C}.$$

将其与方程（24）结合，并利用连续映射定理，我们完成了定理2.1的证明。□

定理*2.2*的证明. 证明与定理2.1的证明类似。在这种情况下，$\hat{u}_n = \sqrt{n\kappa_n}(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \overline{\rho_n})$，$Z_n(u) = \sum_{i=1}^n \left(|\epsilon_i - (n\kappa_n)^{-1/2} y_{i-1}u| - |\epsilon_i|\right)$，并且在（20）中，

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n\kappa_n}} \sum_{i=1}^n y_{i-1}\mathrm{sign}(\epsilon_i)$$

and

$$\xi_i(u) = \int_0^{y_{i-1}u/\sqrt{n\kappa_n}} \left(\mathbb{I}_{\{\epsilon_i \le s\}} - \mathbb{I}_{\{\epsilon_i \le 0\}}\right) \mathrm{d}s.$$

应用引理 5.2 来证明与定理2.1的证明中相应的项。这里我们仅部分展示假设 $\kappa_n/n \to \infty$and $\kappa_n(\rho_n - 1) \to 0$ as $n \to \infty$ 的作用。考虑归一化样本方差。对于（23）的第三项，我们希望证明

$$\frac{1}{n\kappa_n} \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{i-j-1}\epsilon_j \Big)^2 \to_p 0.$$

通过简单计算，我们得到

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{i-j-1}\epsilon_j \Big)^2\Big] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{2(i-1-j)}\sigma^2 = \frac{(n-1)\sigma^2}{1-\rho_n^2}\Big(1 - \frac{\rho_n^2 - \rho_n^{2n}}{(n-1)(1-\rho_n^2)}\Big).$$

于是，由命题 A.1 可得

$$\frac{1}{n\kappa_n} \cdot \frac{(n-1)\sigma^2}{1-\rho_n^2}\Big(1 - \frac{\rho_n^2 - \rho_n^{2n}}{(n-1)(1-\rho_n^2)}\Big) = O\Big(\frac{n}{\kappa_n}\Big),$$

当 $\kappa_n/n \to \infty$ 趋于 $n \to \infty$ 时，其趋于零。证明完毕。 □

5.2. **情形** $n(\rho_n - 1) \to \gamma$ **当** $n \to \infty$**时**。 在本小节中，我们将证明定理 2.3 和定理 2.4。

首先，我们按照情形$n(\rho_n - 1) \to 0$的证明思路证明定理 2.3。在该情形下，$\hat{u}_n = n(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n)$，且它是下列凸函数的极小值点，

$$Z_n(u) = \sum_{i=1}^n \left(|\epsilon_i - n^{-1}y_{i-1}u| - |\epsilon_i|\right). \tag{25}$$

再次利用 Knight 恒等式 (18)，我们可以将 (25) 中的量 $Z_n(u)$ 改写为恒等式 (20)，其中

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i-1}\mathrm{sign}(\epsilon_i) \tag{26}$$

and

$$\xi_i(u) = \int_0^{n^{-1}y_{i-1}u} \left(\mathbb{I}_{\{\epsilon_i \le s\}} - \mathbb{I}_{\{\epsilon_i \le 0\}}\right) \mathrm{d}s. \tag{27}$$

再次使用 $1 \le i \le n$ 和 $n \ge 1$ 的滤过 $\mathcal{F}_{n,i} = \sigma(y_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_i)$，并写作

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(u) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_i(u)|\mathcal{F}_{n,i-1}) + R_{n,1},$$

其中

$$R_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i(u) - \mathbb{E}(\xi_i(u)|\mathcal{F}_{n,i-1})) \tag{28}$$

是相对于滤过 $\{\mathcal{F}_{n,i}, 1 \le i \le n\}$ 的鞅。按照式 (22) 中相同的论证，

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_i(u)|\mathcal{F}_{n,i-1}) = \frac{u^2 f(0)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 + R_{n,2},$$

其中

$$R_{n,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{n^{-1} y_{i-1} u} f'(s^*) s^2 \mathrm{d}s \tag{29}$$

且 s^* 介于 0 和 s 之间。与定理2.1和定理2.2的证明一样，为了得到 $Z_n(u)$ 的渐近分布，关键是分析 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mathrm{sign}(\epsilon_i) \ \ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2\right)$ 的联合分布。

引理 5.3。 在定理 *2.3* 的假设下，按式 *(9)* 定义的过程 $(K_n(t) \ L_n(t) \ 0 \le t \le 1)$ 弱收敛于按式 *(10)* 定义的连续过程$(\mathbf{X}(t) \ 0 \le t \le 1)$，该过程具有独立高斯增量、均值向量为零，协方差矩阵为式 *(11)* 中定义的 $\Gamma(t)$ 。此外，我们还有

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t) = \int_0^t \Lambda^{1/2}(s) \, \mathrm{d}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(h(s)), \quad 0 \le t \le 1, \tag{30}$$

其中 $\Lambda(\cdot)$ 是由下式给出的半正定矩阵值函数

$$\Lambda(t) = (\lambda_{ij}(t)) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \tanh(2\gamma(1-t)) & \mathbb{E}|\,\epsilon_1|\mathrm{sech}(2\gamma(1-t)) \\ \mathbb{E}|\,\epsilon_1|\mathrm{sech}(2\gamma(1-t)) & 1 + \tanh(2\gamma(1-t)) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1,$$

$\mathbf{B} = (B_1, B_2)$ 是二维标准布朗运动，且

$$h(t) = \frac{1}{\gamma}\big(\sinh(2\gamma) - \sinh(2\gamma(1-t))\big), \quad 0 \le t \le 1.$$

命题 5.1。 在定理 *2.3* 的假设下，当 $n \to \infty$ 时，

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mathrm{sign}(\epsilon_i), \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2\right) \to_d \left(\int_0^1 L(t) \, \mathrm{d}K(t), \int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)} L^2(t) \, \mathrm{d}t\right).$$

证明。 注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\mathrm{sign}(\epsilon_i) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{n-j}\epsilon_j\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \rho_n^{i-1-n}\mathrm{sign}(\epsilon_i) \\ &= \int_0^1 L_n(t) \, \mathrm{d}K_n(t) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{i}\rho_n^{i-j}\epsilon_j\right)^2 \\ &= \int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)}L_n^2(t)\,\mathrm{d}t + R_{n,3},\end{aligned}$$

其中余项

$$R_{n,3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_n^{2(i-n)}L_n^2\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)}L_n^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

根据 Chan 和 Wei（1987年）引理 2.2 证明中的相同论证，我们可以证明 $R_{n,\ 3}\to_p 0$ 当 $n\to\infty$ 时成立。因此，Hansen（1992年）的定理2.1和引理 5.3可立即得到所需结果。□

定理 ***2.3*** 的证明。 回顾本小节开头的分析。注意到 $R_{n,\ 2}$ 在（29）中满足

$$\begin{aligned}2|R_{n,2}| &\le \frac{|u|^3\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|}{3}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}|y_{i-1}|^3 \\ &\le \frac{|u|^3\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|}{3}\frac{1}{n}\max_{1\le i\le n}|y_{i-1}|\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}^2. \qquad (31)\end{aligned}$$

根据命题 5.1 和命题 A.2， $R_{n,\ 2}$ 依概率收敛于零。此外，沿用 Wang等人 （2020年）或 Zhou和Lin（2014年）的相同思路，我们还可以证明 $R_{n,\ 1}$ 在（28）中依概率收敛于零。结合命题 5.1，可得

$$\begin{aligned}Z_n(u) &= -uA_n + 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i(u) \\ &\to_d -u\int_0^1 L(t)\,\mathrm{d}K(t) + u^2 f(0)\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)}L^2(t)\,\mathrm{d}t =: Z(u).\end{aligned}$$

因为 $Z(u)$ 在处有唯一的最小值

$$u_{\min} = \frac{1}{2f(0)}\cdot\frac{\int_0^1 L(t)\,\mathrm{d}K(t)}{\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)}L^2(t)\,\mathrm{d}t},$$

根据 Davis等人（1992年）的引理 2.2,

$$\hat{u}_n = n(\hat{\rho}_{\mathrm{LAD}} - \rho_n) \to_d \frac{1}{2f(0)}\cdot\frac{\int_0^1 L(t)\,\mathrm{d}K(t)}{\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)}L^2(t)\,\mathrm{d}t},$$

如 $n\to\infty$。再次应用连续映射定理和命题 5.1，我们完成了定理 2.3 的证明。□

定理 ***2.4*** 的证明。 将引理 5.3 中定义的矩阵值函数$\Lambda(t)$的平方根记为

$$\Lambda^{1/2}(t) = \begin{pmatrix}\widetilde{\lambda}_{11}(t) & \widetilde{\lambda}_{12}(t)\\ \widetilde{\lambda}_{12}(t) & \widetilde{\lambda}_{22}(t)\end{pmatrix},\quad 0\le t\le 1.$$

于是，根据引理 5.3，我们知道

$$\begin{cases} \mathrm{d}K(t) = \widetilde{\lambda}_{11}(t)\mathrm{d}B_1(h(t)) + \widetilde{\lambda}_{12}(t)\mathrm{d}B_2(h(t)) \\ \mathrm{d}L(t) = \widetilde{\lambda}_{12}(t)\mathrm{d}B_1(h(t)) + \widetilde{\lambda}_{22}(t)\mathrm{d}B_2(h(t)) \end{cases}. \tag{32}$$

此外，根据 Itˆo 积分的时间变换，例如 Øksendal（2005）中的定理 8.5.7，我们可以将方程（32）改写为

$$\begin{cases} \mathrm{d}K(t) = \widetilde{\lambda}_{11}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + \widetilde{\lambda}_{12}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_2(t) \\ \mathrm{d}L(t) = \widetilde{\lambda}_{12}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + \widetilde{\lambda}_{22}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_2(t) \end{cases}, \tag{33}$$

~ ~ ~此处 $B = (B_1, B_2)$ 也是二维标准布朗运动。若记

$$\mathrm{d}\widehat{B}(t) = \frac{\widetilde{\lambda}_{11}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + \widetilde{\lambda}_{12}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_2(t)}{\sqrt{\widetilde{\lambda}^2_{11}(t)h'(t) + \widetilde{\lambda}^2_{12}(t)h'(t)}},$$

那么，根据布朗运动的 Lévy 刻画，例如 Øksendal（2005）中的定理 8.6.1，我们知道 B 是一维标准布朗运动。注意,

$$\widetilde{\lambda}^2_{11}(t)h'(t) + \widetilde{\lambda}^2_{12}(t)h'(t) = e^{-2\gamma(1-t)}, \quad 0 \le t \le 1,$$

因此，随机变量 $\mathscr{L}(\gamma)$ 可表示为

$$2f(0)\cdot\mathscr{L}(\gamma) = \frac{\int_0^1 e^{-\gamma(1-t)}L(t)\,\mathrm{d}\widehat{B}(t)}{\sqrt{\int_0^1 e^{-2\gamma(1-t)}L^2(t)\,\mathrm{d}t}}.$$

现在，接下来的证明将基于 Rootz´en（1980）的定理 1，该定理在附录中重述为定理 A.2。我们需要验证定理 A.2 中的假设。令

$$\varphi_\gamma(t) = 2\gamma e^{-\gamma}e^{-\gamma(1-t)}L(t), \quad 0 \le t \le 1,\ \gamma > 0,$$

and

$$\psi_\gamma(t) = \sqrt{-2\gamma}e^{-\gamma(1-t)}L(t), \quad 0 \le t \le 1,\ \gamma < 0,$$

那么我们得到以下引理，其证明推迟至附录。

引理 5.4. 当 $\gamma \to \infty$,

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t \varphi_\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right| \to_p 0 \tag{34}$$

and

$$\int_0^1 \varphi^2_\gamma(t)\,\mathrm{d}t \to_p \mathscr{N}^2(0,1). \tag{35}$$

引理 5.5. 当 $\gamma \to -\infty$,

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t \psi_\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right| \to_p 0 \tag{36}$$

and

$$\int_0^1 \psi^2_\gamma(t)\,\mathrm{d}t \to_p 1. \tag{37}$$

借助引理 5.4、引理 5.5 和定理 A.2，我们完成了定理 2.4 的证明。□

Technical appendix and proofs

命题 A.1. 设 $\{k_n, n \geq 1\}$ 是一个正数序列，使得$k_n \to \infty$ 且 $k_n|1-\rho_n^2| \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，则我们有 $\rho_n^{2k_n} \to 1$ 且

$$\frac{1-\rho_n^{2k_n}}{k_n(1-\rho_n^2)} = 1 + O(k_n(1-\rho_n^2)) \tag{38}$$

如 $n \to \infty$。

证明。 应用泰勒公式，我们有

$$\begin{aligned}\log(\rho_n^{2k_n}) &= k_n \log(1+\rho_n^2-1)\\ &= k_n\Big(\rho_n^2 - 1 - \frac{(\rho_n^2-1)^2}{2} + \dots\Big).\end{aligned}$$

因此 $\rho_n^{2k_n} \to 1$。此外，再次应用泰勒公式，我们得到，当 $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\rho_n^{2k_n} &= \exp\{k_n(\rho_n^2-1) + O(k_n(\rho_n^2-1)^2)\}\\ &= 1 + k_n(\rho_n^2-1) + O(k_n^2(\rho_n^2-1)^2).\end{aligned}$$

因此，估计式 (38) 得证。 □

命题 A.2. 对于模型 *(1)*，假设 $y_0 = 0$ 和 $n(\rho_n - 1) \to \gamma$ 对某个固定的 $\gamma \neq 0$，当 $n \to \infty$时，则有

$$\frac{1}{n}\max_{1\leq i\leq n}|y_{i-1}| \to_p 0, \quad as \ \ n \to \infty.$$

证明。 对于任意 $\varepsilon > 0$，根据 Kolmogorov最大不等式，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\max_{1\leq i\leq n}|y_{i-1}| > \varepsilon\Big) &= \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq i\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{i-1}\rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\Big| > n\varepsilon\Big)\\ \leq \frac{\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}\cdot\sum_{j=1}^{n-1}\rho_n^{2(n-1-j)} &= \frac{\sigma^2(\rho_n^{2(n-1)}-1)}{n^2\varepsilon^2(\rho_n^2-1)} \to 0,\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时，立即可得所需结果。这里用到了以下事实：$n(\rho_n - 1) \to \gamma$ 且 $\rho_n^n \to e^\gamma$ 当 $n \to \infty$ 时。□

引理 ***5.1*** 的证明。 **(1)**。注意，存在一个序列 m_n，使得$m_n(1-\rho_n) \to \infty$ 当 $n \to \infty$ 时，这意味着 $\rho_n^{m_n} = o(1)$。因此，我们可以将$\sqrt{1-\rho_n^2}y_0$ 改写如下

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\rho_n^2}y_0 &= \sqrt{1-\rho_n^2}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_n^j\epsilon_{-j}\\ &= \sqrt{1-\rho_n^2}\sum_{j=0}^{m_n}\rho_n^j\epsilon_{-j} + \sqrt{1-\rho_n^2}\sum_{j=m_n+1}^{\infty}\rho_n^j\epsilon_{-j}\\ &=: \Gamma_{n,1} + \Gamma_{n,2}.\end{aligned}$$

显然， $\mathbb{E}(\Gamma_{n,\ 2}) = 0$ 且

$$\mathbb{E}(\Gamma_{n,2}^2) = \rho_n^{2(m_n+1)}\sigma^2 = o(1),$$

这立即推出 $\Gamma_{n,\ 2} \to_p 0$ 当 $n \to \infty$ 时。对于第一项 $\Gamma_{n,\ 1}$，我们应用 Lindeberg-Feller中心极限定理。记 $\zeta_{n,\ j} = \sqrt{1-\rho_n^2}\rho_n^j \epsilon_{-j}$，则$\mathbb{E}(\overline{\Gamma_{n,\ 1}}) = 0$ 且

$$\mathbb{E}(\Gamma_{n,1}^2) = (1-\rho_n^{2(m_n+1)})\sigma^2 \to \sigma^2$$

当 $n \to \infty$ 时。因此，为完成证明，我们验证 Lindeberg条件，

$$\text{for any } \varepsilon > 0, \qquad \sum_{j=0}^{m_n} \mathbb{E}\big(\zeta_{n,j}^2 \mathbb{I}_{\{|\zeta_{n,j}|>\varepsilon\}}\big) = o(1).$$

事实上，由于 $0 < \rho_n < 1$，根据控制收敛定理，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m_n} \mathbb{E}\big(\zeta_{n,j}^2 \mathbb{I}_{\{|\zeta_{n,j}|>\varepsilon\}}\big) &= (1-\rho_n^2)\sum_{j=0}^{m_n} \rho_n^{2j}\mathbb{E}\big(\epsilon_{-j}^2 \mathbb{I}_{\{|\zeta_{n,j}|>\varepsilon\}}\big) \\
&\le (1-\rho_n^2)\sum_{j=0}^{m_n} \rho_n^{2j}\mathbb{E}\big(\epsilon_{-j}^2 \mathbb{I}_{\{\sqrt{1-\rho_n^2}|\epsilon_{-j}|>\varepsilon\}}\big) \\
&= (1-\rho_n^{2(m_n+1)})\mathbb{E}\big(\epsilon_1^2 \mathbb{I}_{\{\sqrt{1-\rho_n^2}|\epsilon_1|>\varepsilon\}}\big) = o(1).
\end{aligned}$$

（2）。由于在此情况下 Lindeberg条件显然成立，我们只需估计渐近方差。注意到 ϵ_t 的中位数为零，我们得到 $\mathbb{E}(\text{sign}(\epsilon_t)) = 0$ 以及

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \rho_n^{i-1}\text{sign}(\epsilon_i)\Big)^2\Big] = \frac{1-\rho_n^{2n}}{n(1-\rho_n^2)} \to 1$$

当 $n \to \infty$ 时，这里我们使用以下事实：$(1-\rho_n^n) \sim n(1-\rho_n)$，并且当 $n \to \infty$ 时 $\rho_n^n \to 1$。

（3）。由于

$$\max_{1\le i\le n} |y_{i-1}| \le \max\big\{|y_0|, \max_{2\le i\le n} |y_{i-1}|\big\}$$

and

$$\max_{2\le i\le n} |y_{i-1}| \le \max_{2\le i\le n} |\rho_n^{i-1} y_0| + \max_{2\le i\le n} \big|\sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\big|,$$

该引理的第 (1) 部分意味着

$$\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}\max_{2\le i\le n} |y_{i-1}| \le \sqrt{(1-\rho_n^2)/n}\max_{2\le i\le n} \big|\sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\big| + o_p(1).$$

由Kolmogorov最大不等式和命题 A.1 可知，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}\max_{2\le i\le n} \big|\sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{i-1-j}\epsilon_j\big| > \varepsilon\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\sqrt{(1-\rho_n^2)/n}\max_{2\le i\le n} \big|\sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{j-1}\epsilon_{i-j}\big| > \varepsilon\Big) \\
&\le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1-\rho_n^{2n}}{n} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1-\rho_n^{2n}}{n(1-\rho_n)}\cdot(1-\rho_n) = o(1),
\end{aligned}$$

由此完成了第 (3) 部分的证明。 □

引理 ***5.2*** 的证明. 注意到 $\kappa_n(1-\rho_n) \to 0$，并应用命题 A.1，可以证明 $(1-\rho_n^{\kappa_n}) \sim \kappa_n(1-\rho_n)$，且当 $n \to \infty$ 时 $\rho_n^{\kappa_n} \to 1$。由于其余论证与引理 5.1 的证明类似，这里省略。□

命题 5.1 是证明定理 2.3 和 2.4 所必需的。因此，本节余下部分主要补充第 5 节中证明的细节。首先，我们需要 Ethier 和 Kurtz（1986）《第 7 章》中定理 1.4 的一个修订版本。

定理 A.1 (Ethier 和 Kurtz，1986年) 设 $\Gamma(t) =(\gamma_{ij}(t))_{i,\ j=1}^{d}$ 是定义在 $[0,1]$，上的连续对称 $d \times d$ 矩阵值函数，满足 $\Gamma(0) = 0$，且对任意 $0 \le s < t \le 1$，

$$\sum_{i,j=1}^{d} \big(\gamma_{ij}(t) - \gamma_{ij}(s)\big)\alpha_i\alpha_j \ge 0, \qquad \forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d.$$

设 $\{\xi_k^n, \mathcal{F}_k^n, n \ge 1, 1 \le k \le n\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的平方可积鞅差分数组。记 $S_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \xi_k^n$，并且

$$\Theta_n(t) = \big(\theta_n^{ij}(t)\big)_{i,j=1}^{d} = \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{E}\big((\xi_k^n)^{\mathrm{T}}\xi_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n\big),$$

对于 $0 \le t \le 1$。假设，

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le 1} |S_n(t) - S_n(t-)|^2\Big) \to 0, \quad as\ n \to \infty, \tag{39}$$

并且对于 i、$j = 1$、2、…、d，

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le 1} |\theta_n^{ij}(t) - \theta_n^{ij}(t-)|\Big) \to 0, \quad as\ n \to \infty. \tag{40}$$

此外，若对于每个 $0 \le t \le 1$ 和 i、$j = 1$、2、…、d，

$$\theta_n^{ij}(t) \to_p \gamma_{ij}(t), \quad as\ n \to \infty, \tag{41}$$

则过程 S_n 弱收敛于连续过程 G，该过程具有独立高斯增量、零均值向量和协方差矩阵 $\Gamma(t)$；此收敛发生在 ***Skorohod*** 空间 $D_{\mathbb{R}^d}([0,1])$ 上，该空间由 $[0,1]$ 上取值于 $\mathbb{R}^d$ 的右连续且有左极限的路径构成。

引理 ***5.3*** 的证明。回忆一下，$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{n,\ i} = \sigma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_i)$ 和 $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$。为方便起见，记 $\mathbf{X}_{n,\ i} = (K_{n,\ i},\ L_{n,\ i})$ 和 $\mathbf{X}_n(t) = \sum_{i=1}^{[nt]} \mathbf{X}_{n,\ i}$ 对于 $0 \le t \le 1$，那么显然 $\{\mathbf{X}_{n,\ i},\ \mathcal{F}_i\}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^2$ 的平方可积鞅差数组。注意，在这些条件下，

$$\Theta_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbf{X}_{n,i}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{n,i} | \mathcal{F}_{i-1}\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbf{X}_{n,i}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{n,i}\big).$$

为了应用定理 A.1，我们首先验证按式 (11) 定义的矩阵值函数 Γ(*t*)的半正定性。显然，对于 $0 \le s < t \le 1$，$\Gamma(t) - \Gamma(s)$的第一顺序主子式对任意 $\gamma \ne 0$ 都为正；此外，由于 $\sigma^2 = 1$，我们知道 $\mathbb{E}|\epsilon_1| \le 1$，因此

$$\det(\Gamma(t) - \Gamma(s)) = \frac{1}{4\gamma^2}\big(e^{\gamma(t-s)} - e^{-\gamma(t-s)}\big)^2 - \big((t-s)\mathbb{E}|\epsilon_1|\big)^2 \ge 0.$$

因此，矩阵值函数 $\Gamma(t)$ 是半正定的。

现在，我们检验条件 (39)，即

$$\mathbb{E}\Big(\max_{1\le i\le n}|\mathbf{X}_{n,i}|^2\Big)\to 0, \tag{42}$$

当 $n\to\infty$ 时。显然，由于当 $\rho_n^n\to e^\gamma$ 时 $n\to\infty$，我们知道

$$\max_{1\le i\le n}|\mathbf{X}_{n,i}|^2\le\frac{C_1}{n}\Big(1\vee\max_{1\le i\le n}\epsilon_i^2\Big),$$

对于某个与 n 无关的正常数 C_1。对于任意 $\varepsilon>0$，根据切比雪夫不等式，我们可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max_{1\le i\le n}\epsilon_i^2>n\varepsilon)&\le n\mathbb{P}(\epsilon_1^2>n\varepsilon)\\&\le\varepsilon^{-(2+\delta)/2}n^{-\delta/2}\cdot\mathbb{E}|\epsilon_1|^{2+\delta}\to 0,\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时。因此

$$\max_{1\le i\le n}|\mathbf{X}_{n,i}|^2\to_p 0. \tag{43}$$

另一方面，注意到，对于每个 n,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{\max_{1\le i\le n}\epsilon_i^2}{n}\Big)^{(2+\delta)/2}\Big]\le\frac{\mathbb{E}|\epsilon_1|^{2+\delta}}{n^{\delta/2}}.$$

因此，随机变量族 $\{\max_{1\le i\le n}|\mathbf{X}_{n,\ i}|^2,\ \ n\ge 1\}$ 是一致有界的 y 可积的；结合式 (43)，这表明条件 (42) 成立。

接下来计算协方差矩阵。注意到

$$\sum_{i=1}^{[nt]}\mathbb{E}(\mathbf{X}_{n,i}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{n,i})=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\rho_n^{2(i-1-n)} & t\rho_n^{-1}\mathbb{E}|\epsilon_1|\\ t\rho_n^{-1}\mathbb{E}|\epsilon_1| & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}\rho_n^{2(n-i)}\end{pmatrix}.$$

因此，很容易证明，当 $n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le 1}|\theta_n^{11}(t)-\theta_n^{11}(t-)|&=\frac{1}{n}\max_{1\le i\le n}\rho_n^{2(i-1-n)}\to 0,\\ \sup_{0\le t\le 1}|\theta_n^{22}(t)-\theta_n^{22}(t-)|&=\frac{1}{n}\max_{1\le i\le n}\rho_n^{2(n-i)}\to 0,\\ \sup_{0\le t\le 1}|\theta_n^{12}(t)-\theta_n^{12}(t-)|&=\sup_{0\le t\le 1}|\theta_n^{21}(t)-\theta_n^{21}(t-)|=0,\end{aligned}$$

and

$$\Theta_n(t)\to\Gamma(t)=\begin{pmatrix}\frac{e^{-2\gamma}}{2\gamma}(e^{2\gamma t}-1) & t\mathbb{E}|\epsilon_1|\\ t\mathbb{E}|\epsilon_1| & \frac{e^{2\gamma}}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})\end{pmatrix}.$$

因此，根据定理 A.1，过程 $\mathbf{X}_n$ 弱收敛到连续过程$\mathbf{X}\ =(\mathbf{X}(t)\ 0\le t\le 1)$，该过程具有独立高斯增量、零均值向量和协方差矩阵 $\Gamma(t)$。

现在我们转而证明方程（30）。根据 Ethier 和 Kurtz（1986年）《第 7 章》中定理 1.1 的证明，我们知道极限过程$\mathbf{X}$ 可以表示为

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)=\int_0^t\Lambda^{1/2}(s)\,\mathrm{d}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(h(s)),\quad 0\le t\le 1,$$

其中， $\Lambda(\cdot)$ 是一个非负定矩阵值函数，$\mathbf{B} = (B_1,\ B_2)$ 是二维标准布朗运动，并且

$$h(t) = \gamma_{11}(t) + \gamma_{22}(t), \quad 0 \le t \le 1.$$

事实上， $\Lambda(\cdot)$ 的条目 $\lambda_{ij}(\cdot)$ 是下列方程的解，

$$\begin{cases} \gamma_{11}(t) = \int_0^t \lambda_{11}(s)\,\mathrm{d}h(s), \\ \gamma_{22}(t) = \int_0^t \lambda_{22}(s)\,\mathrm{d}h(s), \\ \gamma_{12}(t) = \int_0^t \lambda_{12}(s)\,\mathrm{d}h(s), \\ \gamma_{21}(t) = \int_0^t \lambda_{21}(s)\,\mathrm{d}h(s). \end{cases} \tag{44}$$

解方程 **(44)**，可得

$$\begin{aligned} \lambda_{11}(t) &= \frac{e^{-2\gamma(1-t)}}{e^{2\gamma(1-t)} + e^{-2\gamma(1-t)}} = \frac{1 - \tanh(2\gamma(1-t))}{2}, \\ \lambda_{22}(t) &= \frac{e^{2\gamma(1-t)}}{e^{2\gamma(1-t)} + e^{-2\gamma(1-t)}} = \frac{1 + \tanh(2\gamma(1-t))}{2}, \\ \lambda_{12}(t) = &\lambda_{21}(t) = \frac{\mathbb{E}|\epsilon_1|}{e^{2\gamma(1-t)} + e^{-2\gamma(1-t)}} = \frac{\mathbb{E}|\epsilon_1|}{2\cosh(2\gamma(1-t))}. \end{aligned}$$

由此完成引理 5.3 的证明。 □

定理 A.2 (Rootz´en，1980) 设 $(B(t)\ 0 \le t \le 1)$ 是相对于滤过 $(\mathcal{F}_t, 0 \le t \le 1)$的标准布朗运动。设 $(\phi_n(t)\ 0 \le t \le 1)^{n\ge1}$是适应于滤过 $(\mathcal{F}_t, 0 \le t \le 1)$的随机函数序列。如果

$$\sup_{0\le t\le 1} \left| \int_0^t \phi_n(s)\,\mathrm{d}s \right| \to_p 0, \quad as\ n \to \infty,$$

and

$$\int_0^1 \phi_n^2(t)\,\mathrm{d}t \to_p \tau, \quad as\ n \to \infty,$$

对于某个随机变量 τ，使得 $\tau > 0$ 几乎必然成立，则

$$\frac{\int_0^1 \phi_n(t)\,\mathrm{d}B(t)}{\sqrt{\int_0^1 \phi_n^2(t)\,\mathrm{d}t}} \to_d \mathcal{N}(0,1), \quad as\ n \to \infty.$$

定理 A.3 (Graversen 和 Peskir，2000) 设 $(V(t)\ t \ge 0)$ 为满足下式的 *Ornstein-Uhlenbeck* 过程

$$\mathrm{d}V(t) = -\beta V(t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B(t)$$

其中 $V(0) = 0$，其中 $\beta > 0$ 且 $(B(t)\ t \ge 0)$ 是标准布朗运动，因此存在通用正常数 c_0、c_1，使得对于$(V(t)\ t \ge 0)$的所有停时 τ，

$$\frac{c_0}{\sqrt{\beta}}\mathbb{E}\sqrt{\log(1+\beta\tau)} \le \mathbb{E}\left(\max_{0\le t\le\tau}|V(t)|\right) \le \frac{c_1}{\sqrt{\beta}}\mathbb{E}\sqrt{\log(1+\beta\tau)}.$$

引理 ***5.4*** 的证明。 由于

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t \varphi_\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_0^1 |\varphi_\gamma(t)|\,\mathrm{d}t,$$

只需证明 $\int_0^1 |\varphi_\gamma(t)|\mathrm{d}t \to_p 0$ as $\gamma\to\infty$。注意，根据引理 5.3,

$$L(t) \sim \mathscr{N}\Big(0, \frac{e^{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})}{2\gamma}\Big),$$

so

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^1 |\varphi_\gamma(t)|\,\mathrm{d}t &= 2\gamma e^{-\gamma}\int_0^1 e^{-\gamma(1-t)}\mathbb{E}|L(t)|\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{4\gamma/\pi}e^{-\gamma}\int_0^1 \sqrt{e^{2\gamma t}-1}\,\mathrm{d}t\\ &\le \sqrt{4/(\pi\gamma)}(1-e^{-\gamma}) \to 0, \quad as\ \gamma\to\infty.\end{aligned}$$

由马尔可夫不等式可得，等式 (34) 成立。

接下来证明等式 (35)。首先，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi_\gamma^2(t)\,\mathrm{d}t &= 4\gamma^2 e^{-4\gamma}\int_0^1 e^{2\gamma t}L^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\gamma e^{-4\gamma}\int_0^1 L^2(t)\,\mathrm{d}e^{2\gamma t}\\ &= 2\gamma e^{-4\gamma}\left(L^2(1)e^{2\gamma} - \int_0^1 e^{2\gamma t}\,\mathrm{d}L^2(t)\right).\end{aligned}$$

此外，由于

$$\widetilde{\lambda}_{12}^2(t)h'(t) + \widetilde{\lambda}_{22}^2(t)h'(t) = e^{2\gamma(1-t)}, \quad 0\le t\le 1,$$

结合等式 (33)，由 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}L^2(t) = 2L(t)\,\mathrm{d}L(t) + e^{2\gamma(1-t)}\,\mathrm{d}t.$$

因此

$$\int_0^1 \varphi_\gamma^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\gamma e^{-2\gamma}L^2(1) - 2\gamma e^{-2\gamma} - 4\gamma e^{-4\gamma}\int_0^1 e^{2\gamma t}L(t)\,\mathrm{d}L(t).$$

注意到

$$L(1) \sim \mathscr{N}\Big(0, \frac{e^{2\gamma}-1}{2\gamma}\Big),$$

我们有

$$2\gamma e^{-2\gamma}L^2(1) =_d \left(\sqrt{1-e^{-2\gamma}}\mathscr{N}(0,1)\right)^2 \to_p \mathscr{N}^2(0,1),$$

作为 $\gamma\to\infty$。此外,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(4\gamma e^{-4\gamma}\int_0^1 e^{2\gamma t}L(t)\,\mathrm{d}L(t)\right)^2 &= 16\gamma^2 e^{-6\gamma}\int_0^1 e^{2\gamma t}\mathbb{E}L^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 8\gamma e^{-4\gamma}\int_0^1 (e^{2\gamma t}-1)\,\mathrm{d}t \le 4e^{-2\gamma}\to 0,\end{aligned}$$

作为 $\gamma \to \infty$。根据切比雪夫不等式可得

$$4\gamma e^{-4\gamma} \int_0^1 e^{2\gamma t} L(t)\,\mathrm{d}L(t) \to_p 0, \quad as\ \gamma \to \infty.$$

因此，我们得到方程 (35)。证明完毕。 □

引理 ***5.5*** 的证明。 我们首先证明方程 (36) 成立。令

$$\mathrm{d}B^*(t) = \frac{\widetilde{\lambda}_{12}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_1(t) + \widetilde{\lambda}_{22}(t)\sqrt{h'(t)}\mathrm{d}\widetilde{B}_2(t)}{\sqrt{\widetilde{\lambda}_{12}^2(t)h'(t) + \widetilde{\lambda}_{22}^2(t)h'(t)}},$$

那么，根据布朗运动的 Lévy 刻画， B^* 是一个一维 1
标准布朗运动。由于

$$\widetilde{\lambda}_{12}^2(t)h'(t) + \widetilde{\lambda}_{22}^2(t)h'(t) = e^{2\gamma(1-t)}, \quad 0 \le t \le 1,$$

方程 (33) 意味着

$$\mathrm{d}L(t) = e^{\gamma(1-t)}\mathrm{d}B^*(t).$$

因此，根据伊藤公式，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^t \psi_\gamma(s)\,\mathrm{d}s &= \sqrt{-2\gamma}e^{-\gamma}\int_0^t e^{\gamma s}L(s)\mathrm{d}s \\ &= \frac{\sqrt{-2\gamma}e^{-\gamma}}{\gamma}\left(e^{\gamma t}L(t) - \int_0^t e^{\gamma s}\,\mathrm{d}L(s)\right) \\ &= \frac{\sqrt{-2\gamma}}{\gamma}\left(\int_0^t e^{\gamma(t-s)}\,\mathrm{d}B^*(t) - B^*(t)\right).\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t \psi_\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \sqrt{\frac{2}{-\gamma}}\left(\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t e^{\gamma(t-s)}\,\mathrm{d}B^*(t)\right| + \sup_{0\le t\le 1}|B^*(t)|\right).$$

显然,

$$\sqrt{\frac{2}{-\gamma}}\left(\sup_{0\le t\le 1}|B^*(t)|\right) \to_p 0,$$

由于 $\gamma \to -\infty$ ，定理 A.3 表明

$$\mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2}{-\gamma}}\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t e^{\gamma(t-s)}\,\mathrm{d}B^*(t)\right|\right) \le \frac{c_1\sqrt{2\log(1-\gamma)}}{-\gamma} \to 0,$$

由于 $\gamma \to -\infty$。再次根据马尔可夫不等式，我们得到等式 (36)。

最后，我们验证等式 (37)。注意到

$$\mathrm{d}L^2(t) = 2L(t)\,\mathrm{d}L(t) + e^{2\gamma(1-t)}\,\mathrm{d}t.$$

由此可得

$$\int_0^1 \psi_\gamma^2(t)\,\mathrm{d}t = -L^2(1) + 1 + 2e^{-2\gamma}\int_0^1 e^{2\gamma t}L(t)\,\mathrm{d}L(t).$$

由于

$$L(t) \sim \mathcal{N}\Big(0, \frac{e^{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})}{2\gamma}\Big),$$

我们有

$$L^2(1) \to_p 0, \quad as\ \gamma \to -\infty.$$

此外,

$$\mathbb{E}\left(2e^{-2\gamma}\int_0^1 e^{2\gamma t}L(t)\,\mathrm{d}L(t)\right)^2 = 4e^{-4\gamma}\int_0^1 e^{4\gamma t}e^{2\gamma(1-t)}\mathbb{E}L^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\gamma}\int_0^1 (e^{2\gamma t}-1)\,\mathrm{d}t \to 0,$$

如 $\gamma \to -\infty$。根据切比雪夫不等式可得

$$2e^{-2\gamma}\int_0^1 e^{2\gamma t}L(t)\,\mathrm{d}L(t) \to_p 0.$$

因此我们得到方程（37）。证明完毕。 □

Acknowledgment

作者谨向匿名审稿人和副编辑致以诚挚谢意，感谢他们提出的宝贵意见，这些意见无疑使本文的呈现更加完善。作者非常感谢何华瑞、姜辉、李峰、苗宇、王少晨和杨青山所进行的有益讨论。桑海林的工作得到美国西蒙斯基金会586789号资助的部分支持。杨光宇的工作得到中国河南省教育厅青年骨干教师基金2019GGJS012号资助的部分支持。

数据可用性声明： 支持本研究结果的数据可在合理请求下从通讯作者处获取。

References

[1] 安德森 T. W. 1959年。随机差分方程参数估计量的渐近分布。 *Annals of Mathematical Statistics*, **30**: 676-687。[2] 安德鲁斯 D. W. K.、Guggenberger P. 2008年。平稳的极近单位根过程的渐近性质。 *Journal of Time Series Analysis*, **29**: 203-212。[3] 奥厄 A.、Horv´ath L. 2007年。具有稳定误差的温和爆炸性自回归的一个极限定理。 *Econometric Theory*, **23**: 201-220。[4] 博布科斯基 M. J. 1983年。 *Hypothesis testing in nonstationary time series*。博士论文，威斯康星大学统计系。[5] 布赫曼 B.、Chan N. H. 2013年。近不稳定 AR(p) 过程的统一渐近理论。 *Stochastic Processes and their Applications*, **123**: 952-985。[6] 卡瓦纳 C. 1985年。 *Roots local to unity*。手稿，哈佛大学经济系。[7] 陈 N. H. 2009年。单位圆上或附近有根的时间序列。载于《施普林格金融时间序列手册》，编者：T. G. Andersen、R. A. Davis、J. Kreiss、T. Mikosch, 第696-707页。德国柏林：施普林格出版社。[8] 陈 N. H.、韦 C. Z. 1987年。近非平稳 AR(1) 过程的渐近推断。*Annals of Statistics*, **15**: 1050-1063。[9] 戴维斯 R. A.、Knight K.、刘 J. 1992年。无限方差自回归的M估计。*Stochastic Processes and their Applications*, **40**: 145-180。[10] 迪基 D. A.、富勒 W. A. 1979年。带单位根的自回归时间序列估计量的分布。 *Journal of the American Statistical Association*, **74**: 427-431。[11] 埃蒂埃 S. N.、库尔茨 T. G. 1986年。 *Markov Processes: Characterization and Convergence*。新泽西州霍博肯：约翰·威立父子公司。[12] 吉赖蒂斯 L.、Phillips P. C. B.

2006 *Journal*。平 *of Time Series Analysis* **27** 51 60 稳自回归的一致极限理论。，：-。[13] 格拉弗森 S. E.、佩斯基尔 G. 2000年。奥恩斯坦-乌伦贝克过程的极大不等式。*Proceedings of the American Mathematical Society*, **128**: 3035-3041。

[14] Hansen B. E. 1992年。相依异质过程收敛到随机积分。*Econometric Theory*，8：489-500。[15] Herce M. A. 1996年。有限方差误差下单位根过程的最小绝对偏差估计渐近理论。 *Econometric theory*，12：129-153。[16] Jiang H.、Wan Y. L.、Yang G. Y. 2022年。爆炸性自回归过程的偏差不等式与克рамер型中等偏差。 *Bernoulli*，28：2634-2662。[17] Knight K. 1989年。无限方差随机游走中自回归参数估计的极限理论。 *Canadian Journal of Statistics*，17：261-278。[18] Knight K. 1998年。一般条件下 L_1 回归估计量的极限分布。*Annals of Statistics*，26：755-770。[19] Li G. D.、Li W. K. 2009年。具有GARCH误差的单位根过程的最小绝对偏差估计。 *Econometric Theory*，25：1208-1227。[20] Ling S. Q. 2005年。无限方差自回归模型的自加权最小绝对偏差估计。 *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*，67：381-393。[21] Miao Y.、Shen S. 2009 *Journal of* 。自 *Multivariate Analysis* **100** 1952 1961 回归过程的中等偏差原理。，：-。[22] Miao Y.、Wang Y. L.、Yang G. Y. 2015年。单位根过程经验协方差的中等偏差原理。 *Scandinavian Journal of Statistics*，42：234-255。[23] M¨uller U. K.、Elliott G. 2003年。单位根检验与初始条件。 *Econometrica*，71 1269 1286：-。[24] Øksendal B. 2005年。 *Stochastic Differential Equation: An Introduction with Applications*，第六版，柏林、海德堡：施普林格出版社。[25] Phillips P. C. B. 1987年。迈向自回归统一渐近理论。 *Biometrika*，74：535-574。[26] Phillips P. C. B. 1988年。近积分时间序列的回归理论。 *Econometrica*，56：1021-1043。[27] Phillips P. C. B. 1991年。LAD估计量渐近性质的捷径。 *Econometric Theory*，7：450-463。[28] Phillips P. C. B. 2021 *Cowles Foun-* 。近 *dation Discussion Papers* 2654 单位根下的估计与推断。...

https://elischolar.library.yale.edu/cowles-discussion-paper- 。 *series/2654*

[29] Phillips P. C. B.、Durlauf S. N. 1986年。积分过程的多重时间序列回归。 *Review of Economic Studies*，53：473-495。[30] Phillips P. C. B.、Magdalinos T. 2007年。偏离单位根的中等偏差极限理论。*Jounal of Econometrics*，136：115-130。[31] Phillips P. C. B.、Magdalinos T. 2009年。初始值设定于无限过去时的单位根与协整极限理论。 *Econometric Theory*，25：1682-1715。[32] Pollard D. 1991 *Econometric* 。最 *Theory* **7** 186 199 小绝对偏差回归估计量的渐近性质。，：-。[33] Rootz´en H. 1980年。随机积分近似误差的极限分布。 *Annals of Probability*，8：244-251。[34] Silverman, B. W. 1986年。 *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*。纽约：Chapman and Hall。[35] Stock, J. M. 1991年。美国宏观经济时间序列最大自回归根的置信区间。 *Journal of Monetary Economics*，28：435-459。[36] Tanaka, K. 2017 *Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution The-* 。， *ory* 第二版，新泽西州霍博肯：约翰·威立父子公司。[37] Wang X. H.、Wang H. L.、Wang H. R.、Hu S. H. 2020年。AR(1)过程最小绝对偏差估计的渐近推断。 *Communications in Statistics-Theory and Methods*，49 809 826：-。[38] White J. S. 1958年。爆炸情形下序列相关系数的极限分布。 *Annals of Mathematical Statistics*，29：1188-1197。[39] Zhou Z. Y.、Lin Z. Y. 2014年。偏离单位根中等程度时LAD估计的渐近理论。 *Statistics and Probability Letters*，90：25-32。

(N. Ma) Zhengzhou Zhongyuan Sub-branch, Agricultural Bank of China, 450000, Henan ,
China.*Email address*: 1055165454@qq.com(H. Sang) Department of Mathematics,
University of Mississippi, University, MS, 38677, USA.*Email address*: sang@olemiss.edu
(G. Yang) School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, 450001, Henan,
China.
Email address: guangyu@zzu.edu.cn