# 具有局部-全局译码的极化码

Ziyuan Zhu 加利福尼亚大学圣迭戈分校 ziz050@ucsd.edu

Wei Wu 加利福尼亚大学圣迭戈分校 wew128@ucsd.edu

Paul H. Siegel 加利福尼亚大学圣迭戈分校 psiegel@ucsd.edu

arXiv:2301.02294v1 [cs.IT] 5 Jan 2023

摘要—**本文研究了一种同时支持局部译码和全局译码的耦合极化码架构。该局部-全局构造旨在满足数据存储和传输中的实际应用需求，这些应用要求能够以较低时延恢复编码信息的子块。局部译码支持对完整码块中的子块进行随机访问。当局部译码性能不足时，全局译码可提高数据可靠性。该耦合方案采用系统外层极化码，并将外层码字分区映射到内层极化码的半极化比特信道。本文给出了针对 2 个和 4 个子块的误码率仿真结果，并讨论了影响局部译码与全局译码性能权衡的设计问题。**

## 一、引言

Erdal Arıkan于2009年提出了极化码。这种确定性编码方案能够在连续消除（SC）译码下，以可证明的方式达到任意对称二进制输入离散无记忆信道的香农容量 [1]。极化码引起了广泛关注，并已被纳入5G新空口无线标准，作为控制信道编码方案。Arıkan在[2] 提出了极化码的置信传播（BP）译码，该方法能够以相对较低的复杂度提供软译码器输出，此后受到广泛研究；例如参见 [6]。

Arıkan在 [3] 引入了极化码的系统编码，以应用于希望编码信息能够在码字中显式呈现的场景。此外，他通过实验表明，采用重编码的SC译码比非系统编码具有更优的比特误码率性能。在BP译码下也观察到了这种性能提升。

在 [5], , Guo等人提出通过级联外码来增强极化码的BP译码，该外码用于保护信道质量处于中间水平的比特信道，这些比特信道称为半极化比特信道。为说明这一思路，他们研究了外层低密度奇偶校验码和外层卷积码。Elekelesh等人 [4] 拓展了这一思路，提出一种增强型极化码构造，利用辅助外层极化码保护半极化比特信道。他们还提出一种灵活长度极化码构造，通过这种辅助外层极化码将两个不同长度的极化码耦合起来。

在 [7], Ram和Cassuto提出了一种用于低密度奇偶校验码的耦合架构，支持两级译码：在信道条件良好时对各子块进行局部译码，在信道条件不利时对耦合码字进行全局译码。本文提出了对 [4] 中极化码耦合架构的一种修改，使其支持这种局部译码和全局译码。

本文组织如下。第二节简要回顾信道极化、极化码的BP译码以及系统极化码的背景概念。第三节介绍极化码的局部-全局译码架构。第四节给出比特误码率（BER）和帧错误率（FER）的仿真结果，以展示局部-全局译码架构的性能，并讨论影响局部译码与全局译码性能权衡的设计问题。第五节总结全文。

## II. 背景

### A. 信道极化

极化码的构造及其在SC译码下达到容量的性质，均基于信道极化。信道极化包括信道合并和信道分裂操作： $N$ 个独立的信道副本 $W$ 以递归方式合并为一个向量信道 $W_N$，随后分裂为 $N$个合成信道 $W^{(i)}_N$， $1 \le i \le N$，称为比特信道。令 $G_N = F^{\otimes n}$为 $N \times N$矩阵，即 $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$的 $n^{th}$次Kronecker幂，其中 $n = \log_2 N$。给定$\mathbf{u} \in \{0,1\}^N$，向量信道由 $W_N(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = W^N(\mathbf{y}|\mathbf{x})$刻画，其中 $W^N$表示对应于信道 $W$的 $N$ 次独立使用的乘积信道，且$\mathbf{x} = \mathbf{u}G_N$。比特信道定义为$W^{(i)}_N(\mathbf{y}, u_1^{i-1}|u_i) = \sum_{u_{i+1}^N} \frac{1}{2^{N-1}} W_N(\mathbf{y}|\mathbf{u})$，其中 $1 \le i \le N$。当 $N \to \infty$时，信道极化定理指出，Bhattacharyya参数 $Z(W^{(i)}_N)$收敛到0或1。码率为 $R = K/N$ 的极化码使用 $K$ 个Bhattacharyya参数 $Z(W_N^{(i)})$ 最低的比特信道来承载信息比特，其余比特则冻结为0。我们用 $\mathcal{A}$ 表示信息索引，用 $\mathcal{F} = A^c$ 表示冻结索引。

### B. BP译码

极化码的 BP译码是一种迭代消息传递算法，它在由编码器结构导出的稀疏因子图上运行；图 1 展示了 $N = 8$对应的因子图。该因子图由与矩阵 $F$所表示的合并操作相对应的基本子结构组成，如图 2 所示。生成并双向传递两种类型的对数似然比（LLR）消息： $L$-消息

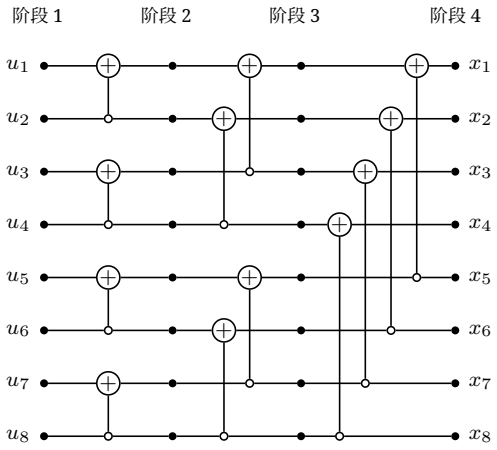


图 1. 长度为 $N = 8$ 的极化码的基于编码器的因子图。

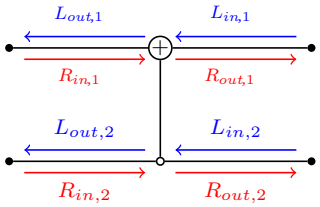


图 2. 基本子结构。

这些消息从右向左传递； $R$-消息则从左向右传递。最右侧节点处的 $L$-消息表示信道对数似然比。最左侧节点处的 $R$-消息根据其分别属于 $\mathcal{A}$ 或 $\mathcal{F}$，被赋值为 0 或 $\infty$ 。所有其他 $L$-消息和 $R$-消息均初始化为 0。消息先从右向左、再从左向右传播，并在每个子结构处应用以下消息更新规则 [11]

$$\begin{aligned} L_{out,1} &= L_{in,1} \boxplus (L_{in,2} + R_{in,2}) \\ R_{out,1} &= R_{in,1} \boxplus (L_{in,2} + R_{in,2}) \\ L_{out,2} &= (R_{in,1} \boxplus L_{in,1}) + L_{in,2} \\ R_{out,2} &= (R_{in,1} \boxplus L_{in,1}) + R_{in,2} \end{aligned} \tag{1}$$

其中，盒加算子 $\boxplus$ 定义为 $a \boxplus b = \ln\left(\frac{1+e^{a+b}}{e^a+e^b}\right)$。（有时也会使用最小和等其他算子来代替盒加算子。）经过最后一次迭代，对最左侧的 $L$条消息和最右侧的 $R$条消息求和并进行阈值判定后，即可得到译码器输出 $\hat{\mathbf{u}}$ （分别对应 $\hat{\mathbf{x}}$）。

### C. 系统极化码

在系统极化码中， [3],信息比特出现在极化码码字的指定位置。令$\mathbf{v} \in \{0,1\}^K$表示待编码的信息比特。系统编码器通过求解下式来完成编码

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}F^{\otimes n} \tag{2}$$

满足$\mathbf{u}_{\mathcal{F}} = \mathbf{0}$ 和$\mathbf{x}_{\mathcal{A}} = \mathbf{v}$。Vangala等人 [9] 提出了三种高效算法来求解$\mathbf{u}_{\mathcal{A}}$ 和$\mathbf{x}_{\mathcal{F}}$。本文使用记为**EncoderA**的编码器。

系统化极化码使用与传统极化码相同的译码算法，例如 SC 或 BP译码，来生成向量$\mathbf{u}$的估计值$\hat{\mathbf{u}}$ 。为了恢复信息比特的估计值$\hat{\mathbf{v}}$ ，我们计算$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{u}}G_N$ ，并令$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{A}}$。

## III. 局部-全局极化译码

有限长极化码的信道极化并不完全。如上所述，设计码率为 $R = \frac{K}{N}$ 的极化码时，需要选取Bhattacharyya参数最小的信息索引 $\mathcal{A}$ ，并将其余索引 $\mathcal{F}$=$\mathcal{A}^c$ 作为冻结索引。在 [5] 和 [4], 中，研究者提出了对比特信道索引进行更细致分组的方法。对于阈值 $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1$，良好比特信道索引满足 $Z(W_{(i)N}) \leq \delta_1$，冻结比特信道索引满足$Z(W_{(i)N}) > \delta_2$，而半极化比特信道索引满足 $\delta_1 < Z(W_N^{(i)}) \leq \delta_2$。随后，使用辅助外码（例如LDPC分组码 [5] 或极化码 [4]）来保护经由半极化比特信道编码的脆弱比特；经过（交织的）外层码字则为半极化比特信道提供输入比特。对表示内码与外码级联的组合因子图应用BP译码的一种自然改进，可用于译出内码和外码的信息比特。值得指出的是，Bhattacharyya参数虽然通常用于衡量SC译码下的信道可靠性，但也可用于BP译码下的比特信道分类 [5]。

[4]中的增强型极化码构造通过耦合码架构扩展为灵活长度极化码构造，其中，两个（或更多）内极化码的半极化比特信道由交织辅助外层极化码保护。同样，也可以使用增强型BP译码算法对耦合内码和辅助码的信息比特进行译码。

[4] 中的耦合构造经过两项修改后，可形成适用于局部-全局译码的架构。首先，辅助外码必须是系统化的。其次，交织器将辅助码字中嵌入的信息比特的指定子集映射到每个内码的半极化比特信道。下面将更详细地介绍这种局部-全局架构的编码器和译码器。

### A. 编码器

令$[K_a, K_b] = [K_{a_1}, ..., K_{a_M}, K_{b_1}, ..., K_{b_M}]$ 表示待编码的信息比特。为便于说明，我们假设集合 $K_{a_i}$、 $i = 1$、.....、$M$大小相等，集合 $K_{b_i}$、 $i = 1$、.....、$M$也同样如此。系统化外层极化码编码器的输入为信息比特 $K_a$ 和冻结比特 $F_0$，长度为 $N_0$ 的输出码字为 $[P_a, K_a]$。该码字在已知位置包含信息比特 $K_a$，以及校验比特 $P_a$。将校验比特 $P_a$划分为 $M$ 个大小相等的子集后，交织器将 $[P_{a_i}, K_{a_i}]$ 映射到内码 $i^{th}$ 的半极化比特信道 $S_i$ 。（在此示例中，我们还假设各内码的长度相等。）交织的目的是尽可能地将早期译码迭代中用于 BP译码的

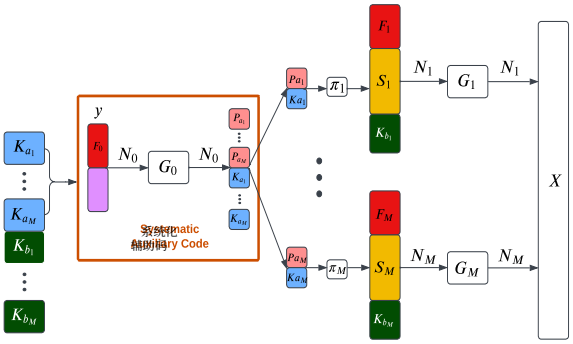

图 3. 局部-全局极化码的编码器。

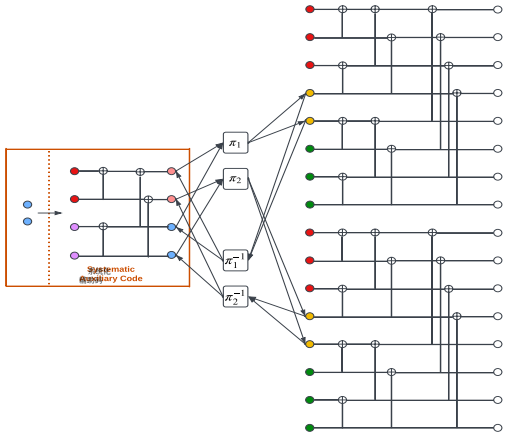

图4. 局部-全局极化译码的因子图（$M = 2$）。

对数似然比去相关。

信息比特 $K_{b_i}$ 和额外的冻结比特 $F_i$ 分别作为 $i^{th}$ 内码的优良比特信道和冻结比特信道的输入。 $M$ 内码的码字串接起来，形成长度为 $N$ 的码字，并通过信道传输。

图3展示了所提出的局部-全局极化码编码器示意图。

相关码率如下，其中我们采用一种简写记法，用子集的名称表示其基数。

- $R_{total} = \frac{K_a+K_b}{N}$ 组合码率：系统外极化码码率：$R_{outer} = \frac{K_a}{N_0}$
- $i^{th}$ $R_{inner}$ 内极化码码率：

- $i^{th}$ $R_{subblock\ i} = \frac{K_{b_i}+S_i}{N_i}$ 子块码率：$\frac{K_{b_i}+K_{a_i}}{N_i}$

*B.* 译码器

图3所示的架构允许对内码进行独立的局部译码；若局部译码的性能不理想，也可以选择对耦合码进行全局译码。需要注意的是，如果有此需要，该架构还保留了选择内码长度 $N_i$ 的灵活性。

*1*）局部译码：任何极化码软译码方案都可用作局部译码方法。必须对半极化比特信道上的估计比特进行解交织，以恢复信息比特 $K_a$。在我们的仿真中，我们采用带提前停止的BP译码作为局部译码方法。

*2*）全局译码：全局译码通过在内码与外码的组合因子图上进行BP译码来实现。图4展示了 $M$ =个内码的因子图。

对于 $i = 1, \ldots, M$，分别用 $L_i$ 和 $R_i$表示 $i^{th}$ 内码的左、右对数似然比消息，用$L_0$ 和 $R_0$表示系统外层极化码的左、右对数似然比消息。采用了与 [4]中提出的方法类似的增强型BP译码过程，但进行了修改，以体现系统外层极化码和分区交织器。

指定最大迭代次数后，译码算法按如下方式进行。

1）内码BP极化译码器接收信道对数似然比向量 $L_{ch}$。初始 $R_i$消息从左向右传播；随后 $L_i$消息从右向左传播，直至到达最左侧的第1级。2）第1级的对数似然比消息 $L_i$ 经过相应的解交织器，输出被传递给外码的BP极化译码器。3）外层极化码的BP译码器执行一次BP迭代，其中 $L_0$消息从右向左传播， $R_0$消息从左向右传播。4）接下来，外码BP译码器最右侧级的对数似然比消息经过分区交织器，传递给内码的BP译码器。这构成一次全局迭代。重复此过程，直至达到最大迭代次数。5）使用对数似然比估计信息比特$\hat{}$ $\hat{}[K_a, K_b]$ ，如下所示。(a) 用于估计系统外层极化码输入端消息 $y$ 的对数似然比（如图3所示），通过将外码因子图第1级的左、右对数似然比消息 $L_0$ 和 $R_0$ 相加得到。随后对估计值$\hat{}y$ 重新编码，以获得外层码字的估计值，并从中提取信息$\hat{}$比特 $K_a$的估计值。(b) 用于估计 $i^{th}$ 内极化码输入端消息的对数似然比，通过将相应内码因子图第1级的左、右对数似然比消息 $L_i$ 和 $R_i$相加得到。根据此估计值，提取信息比特 $K_{b_i}$的估计值$\hat{}$。

为了减少译码时间，我们在译码过程中引入提前停止条件。对于每个提前停止条件，我们使用 [10] 中提出的G矩阵准则。

采用提前停止后，译码过程中的步骤 2) 至 4) 修改如下。

2*) 在步骤2)之后，对每个内层极化码检查提前停止条件。
3*) 在步骤3)之后，对外系统极化码检查提前停止条件。
4*) 在步骤4)之后，当一次全局迭代完成时，根据所有内码和外码的提前停止检查结果，确定是否可以终止译码。如果可以，则跳至步骤5)。否则，返回步骤2)。

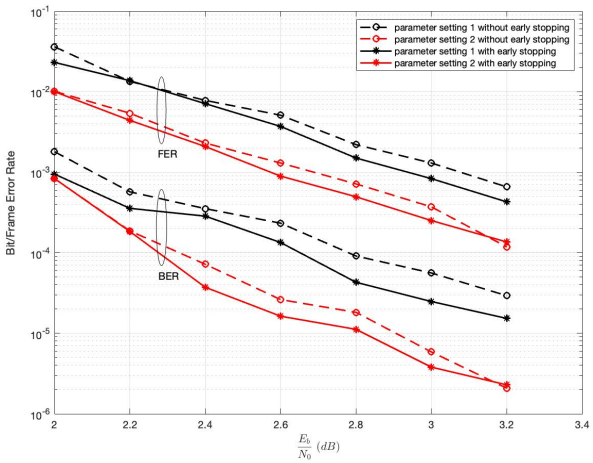


图5. 带/不带提前停止的全局译码。

带提前停止的全局译码仿真结果如图5所示。采用了表I中所示的码参数设置1和2。令人惊讶的是，使用提前停止后，误码率和帧错误率均有所改善，这与使用提前停止进行极化码的传统BP译码时观察到的情况相反 [10]。

表I 系统参数设置。

| 参数 | 设置1 | 设置 2 | 设置 3 |
|---|---|---|---|
| $R_{total}$ | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| $R_{outer}$ | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| $R_{inner}$ | 0.53125 | 0.5625 | 0.53125 |
| $M$ | 2 | 4 | 4 |
| $K_a$ | 64 | 256 | 128 |
| $K_b$ | 960 | 1792 | 1920 |
| $S_i, i \geq 1$ | 64 | 128 | 64 |
| $N_0$ | 128 | 512 | 256 |
| $N_i, i \geq 1$ | 1024 | 1024 | 1024 |
| $Max\ iteration$ | 200 | 200 | 200 |
| $Early\ stop$ | ✓ | ✓ | ✓ |

### C. 局部-全局译码仿真结果

采用 2 个和 4 个子块的局部-全局译码时的误码率和帧错误率结果（每个子块对应一个长度为 1024 的内码），

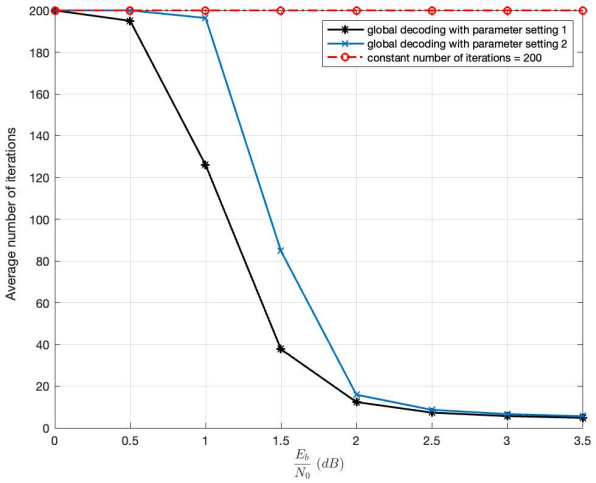


图6. 参数设置 1 和 2 的平均迭代次数。

分别如图7和图8所示。每幅图展示了典型子块在局部译码下的性能，以及长度为 1024 的传统极化码在 BP译码下的性能。图中还展示了完整码字在全局译码下的性能，以及码长与完整码字相同的传统极化码在 BP译码下的性能。仿真结果（此处未展示）证实，子块在局部译码和全局译码下的误码率和帧错误率基本相同，而且各子块的译码失败似乎彼此独立。

仿真假设信道为加性高斯白噪声信道，并采用 BPSK 调制；比特信道排序基于在 $E_b/N_0$ 为 0 dB 时设计的巴塔查亚界 [1]。局部译码和全局译码均采用提前停止。

双子块构造采用表 I 中的参数设置 1，而 4 子块构造采用参数设置 2。

我们发现，在这两种情况下，与局部译码相比，全局译码都显著改善了译码性能。全局译码的误码率也与相同码长和码率的传统极化码相当。对于 4 个子块的情况，全局译码在误码率为 $10^{-5}$ 时甚至带来了 0.1 dB 的增益。然而，全局译码带来的优势是以牺牲局部译码性能为代价的；通过调整码参数（如 $R_{inner}$、 $R_{outer}$ 和 $R_{total}$），可以调节这种权衡。

图9通过比较采用表I中参数设置2和3的双子块构造的局部-全局译码误码率性能，展示了这种权衡。设置2采用码率为 $R_{outer}$=0.5625 、长度为length$N_0$=256的外码，而设置3采用码率为$R_{outer}$=0.53125 、长度为 $N_0$=128的外码。如图9所示，与设置2相比，设置3采用码率更低、长度更短的外码，提升了局部译码性能，但降低了全局译码性能。

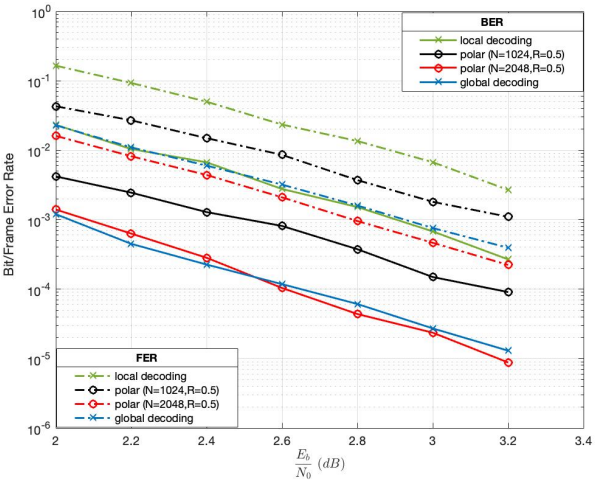


图7. 采用2个子块的局部-全局译码。

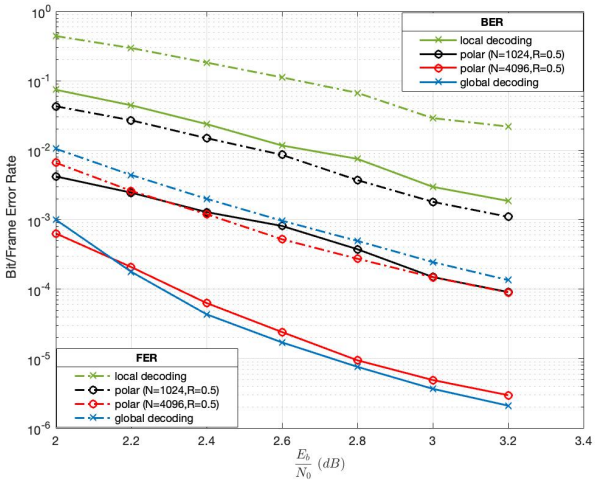


图8. 采用4个子块的局部-全局译码。

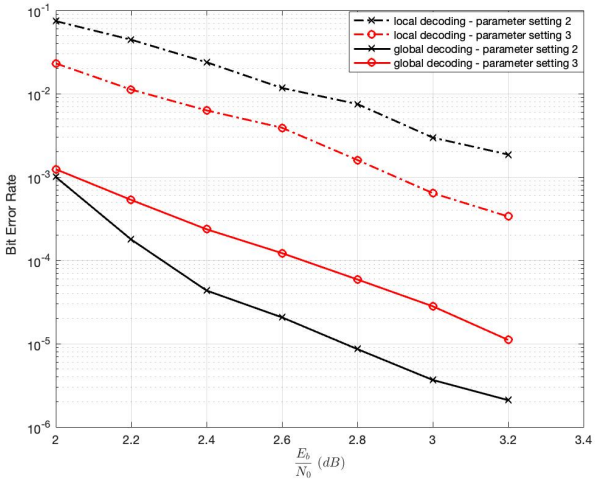


图9. 局部译码与全局译码之间的权衡。

## IV. 结论

我们提出了一种用于极化码局部-全局译码的级联架构。该构造能够对对应于内层极化码的子块进行独立译码，并通过使用系统外层极化码实现全局译码。针对双子块和四子块局部-全局译码的误码率和帧错误率仿真结果表明，在BP译码下，全局译码的性能与具有相同总体码率和长度的传统极化码相当，但与具有相同码率和长度的传统极化码相比，子块的局部译码性能有所损失。我们展示了通过调整系统参数可以实现的局部与全局译码性能之间的权衡。这些结果表明，为基于图的编码提出的局部译码范式 [7], [8]可以扩展到极化码。仍有若干设计优化方案有待探索。

## 致谢

作者谨向三星电子株式会社致谢，感谢其对本工作的支持。

## 参考文献

[1] E. Arıkan，《信道极化：一种为对称二进制输入无记忆信道构造容量逼近码的方法》，*IEEE* 信息论汇刊，第55卷，第7期，第3051-3073页，2009年7月。[2] E. Arıkan，《极化码：一种流水线实现》，国际广播通信研讨会（*ISBC*）论文集，2010年，第11–14页。[3] E. Arıkan，《系统极化编码》，*IEEE* 通信快报，第15卷，第8期，第860-862页，2011年8月。[4] A. Elkelesh、M. Ebada、S. Cammerer 和 S. t. Brink，《通过基于图的扩展实现灵活长度的极化码》，第*11*届 *ITG* 系统、通信与编码国际会议（*SCC 2017*）论文集》，2017年，第1-6页。[5] J. Guo、M. Qin、A. Guill´en i F`abregas 和 P. H. Siegel，《通过级联增强极化码的置信传播译码》，*IEEE* 信息论国际研讨会论文集，美国夏威夷州檀香山，2014年6月至7月，第2987-2991页。[6] K. Niu、K. Chen、J. Lin 和 Q. T. Zhang，《极化码：基本概念与实用译码算法》，*IEEE* 通信杂志，第52卷，第7期，第192 203，2014, - E. Ram 和 Y. Cassuto，《具有局部和全局译码[7]的低密度奇偶校验码》，*IEEE* 信息论国际研讨会（*ISIT*）论文集，美国科罗拉多州韦尔，2018年6月，第1151-1155页。[8] E. Ram 和 Y. Cassuto，《具有子块局部性的空间耦合低密度奇偶校验码》，*IEEE* 信息论汇刊，第67卷，第5期，第2739-2757页，2021年5月。[9] H. Vangala、Y. Hong 和 E. Viterbo，《系统极化编码的高效算法》，*IEEE* 通信快报，第20卷，第1期，第17-20页，2016年1月。[10] B. Yuan 和 K. K. Parhi，《用于高能效低时延置信传播极化码译码器的提前停止准则》，*IEEE* 信号处理汇刊，第62卷，第24期，第6496-6506页，2014年12月15日。[11] Y. Zhang、A. Liu、X. Pan、Z. Ye 和 C. Gong，《一种改进的置信传播极化码译码器》，*IEEE* 通信快报，第18卷，第7期，第1091-1094页，2014年7月。