本文已获准在*IEEE*机器人学汇刊上发表。

这是作者版本的文章，该文章已在或即将在本期刊或会议上发表。出版商在正式发表前已对或将对该版本进行修改。

DOI：10.1109/TRO.2022.3229842 IEEE Xplore：
https://ieeexplore.ieee.org/document/10026622

引用本文时请注明：T. Hitchcox和J. R. Forbes，“通过基于激光的回环闭合提升水下建图的自洽性”，*IEEE*机器人学汇刊，第39卷，第3期，第1873-1892页，2023年。

arXiv:2301.02297v2 [cs.RO] 9 Jun 2023

©2023 IEEE。允许个人使用本材料。所有其他用途均须获得 IEEE 的许可，无论是在当前还是未来的任何媒体中，包括为广告或促销目的重印或再版本材料、创作新的合集、转售或重新分发至服务器或列表，或在其他作品中重复使用本作品中任何受版权保护的部分。

通过基于激光的回环闭合提升水下建图的自洽性（扩展版）

Thomas Hitc hcox，*IEEE*研究生会员，以及 James Richard Forbes，*IEEE*会员

摘要—监测海底环境及基础设施的变化，需要准确且具有自洽性的水深地图。这些地图越来越多地由水下航行器采集，而测绘工作需要准确的载具导航解。水下航行器的商用现货（COTS）导航解通常依靠外部声学传感器进行定位，但测量级声学传感器部署成本高，也会限制载具的活动范围。同步定位与建图领域的技术，尤其是回环闭合，能够改善导航解的质量，使其优于航位推算，但难以集成到商用现货导航系统中。本文提出一种方法，将回环测量平滑地融入商用水下导航系统生成的状态估计，从而提升水深地图的自洽性。该方法采用加速度白噪声运动先验，无需获取原始传感器测量值或专有模型。模拟值和实验数据集均显示地图自洽性有所提升，其中包括在加拿大安大略省怀尔顿采集的一艘水下沉船的三维扫描数据。

索引词—**海洋机器人、传感器融合、同步定位与地图构建、商用现货（COTS）系统。**

I. 引言

ACCURATE，自洽的水深地图对于评估海底环境和基础设施的健康状况至关重要。越来越多的此类地图由自主水下航行器（AUV）利用各种机载传感器采集，包括相机 [1–3], 声呐 [4–6],和激光扫描仪 [7, 8]。由于地图是根据估计的自主水下航行器轨迹构建的，长期导航精度是绘制准确地图的先决条件。

商用自主水下航行器的标准导航解是商用现货（COTS）惯性导航系统（INS），并由多普勒测速仪（DVL）提供声学辅助。这些系统的航位推算精度以行驶距离百分比表示的漂移率来衡量，高质量的多普勒测速仪-惯性导航系统漂移率可低至 0.01%。然而，如果没有局部定位测量，状态估计的精度将不断下降，影响长期精度。

稿件于2022年5月30日收到；2022年9月21日修订；2022年11月22日接受。此项工作部分由加拿大自然科学与工程研究委员会资助，部分由 Voyis Imaging Inc. 通过协作研究与开发计划资助。Thomas Hitchcox 的工作得到麦吉尔工程博士奖计划的支持。经评审意见评估后，副编辑 Maurice Fallon 和编辑 Francois Chaumette 推荐发表本文。

T. Hitchcox（通讯作者）和 J. R. Forbes 任职于加拿大魁北克省蒙特利尔市麦吉尔大学机械工程系，邮编 H3A 0C3。thomas.hitchcox@mail.mcgill.ca，james.richard.forbes@mcgill.ca。

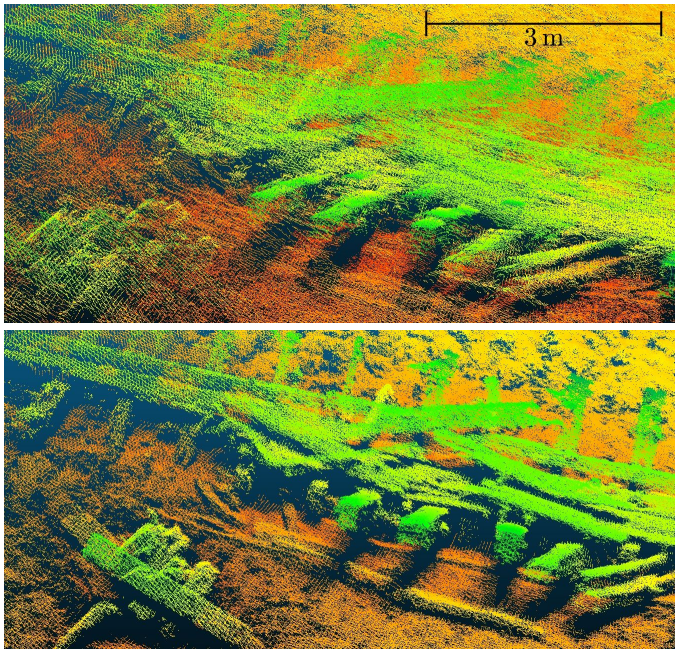


图1：在加拿大安大略省怀尔顿采集的一处真实沉船的点云地图，颜色表示相对深度。上方地图根据商用现货（COTS）多普勒测速仪辅助惯性测量系统（DVL-INS）生成的状态估计绘制。下方地图采用本文提出的方法生成，该方法利用闭环测量对DVL-INS估计进行约束，且无需访问原始*DVL-INS*传感器测量数据。请注意，纳入闭环测量后，地图的自洽性有所提升。

由于GPS信号在水下会迅速衰减，自主水下航行器的定位主要依靠声学技术 [9]。例如，长基线（LBL）阵列是安装在海底的声学信标，通过三边测量确定自主水下航行器的位置，类似于“声学GPS”。短基线（SBL）和超短基线（USBL）系统则安装在水面船上，用于测量水下航行器的声学距离和方位。这些传感器常用于商业场景，文献中也曾利用它们辅助自主水下航行器导航，例如 [10]。

声学定位系统能够准确、精确地估计自主水下航行器轨迹，但部署成本高，而且会限制载具的任务范围。例如，长基线定位系统安装和标定耗时较长，而 SBL 和超短基线定位系统则需要大型水面船在场。此外，声学定位

系统生成的测量数据精度有限，这可能导致由同一区域多次重叠测量构建的复合地图出现细微的不规则之处。这反过来可能使相对距离、变形或其他对海底安全至关重要的测量结果难以评估。

A. 研究动机

闭环在许多同步定位与地图构建（SLAM）算法中发挥着核心作用。在这些算法中，载具会返回地图中先前探索过的区域，并能够识别该区域。回环测量能够有效地“重置”整个回环过程中累积的导航漂移 [11],，使导航解比航位推算更准确、更精确，且无需外部定位测量。随着时间推移，多次回环闭合可使导航漂移保持有界，并生成更加自洽的地图估计，使最终地图不含测量对齐不佳所造成的不规则现象和“重影”效应，图1展示了一个示例。这与术语一致不可混淆；在状态估计语境中，该术语指一种解，其协方差界限能够准确反映状态均值估计中的误差 [12, 第5.4节2]。

以往将 SLAM 应用于水下测绘时，会利用回环测量来提高地图的一致性。然而，这些应用大多是在研究平台上实现的，这类平台能够获取原始传感器测量值，并且完全了解状态估计算法。相比之下，用于水下导航的商用“捷联式”DVL-INS 系统会生成状态估计，但由于其专有性质，通常不提供以下内容：

1) 原始传感器测量值，包括内感测量$\mathbf{u}_k$，例如来自 IMU 的测量，以及外感测量$\mathbf{y}_\ell$，例如来自 DVL 的测量；

2) 形式如下的过程模型

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}), \tag{1}$$

该模型描述载具随时间的运动；3) 形式如下的传感器模型

$$\tilde{\mathbf{y}}_\ell = \mathbf{g}_\ell(\mathbf{x}_\ell, \mathbf{v}_\ell), \tag{2}$$

这些模型可用于生成预测测量；以及 4) 传感器噪声和偏置参数规格，例如

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) + \boldsymbol{\beta}(t) + \mathbf{w}(t), \tag{3a}$$
$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{Q}_{\dot{\beta}}\delta(t-t')), \tag{3b}$$
$$\mathbf{w}(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{Q}_{w}\delta(t-t')), \tag{3c}$$

其中$\mathbf{u}$已知会受到随时间变化的随机游走偏差 $\boldsymbol{\beta}$ 和高斯白噪声$\mathbf{w}$的影响，其特征由功率谱密度表示 $\mathcal{Q}_{\dot{\beta}}$ 和 $\mathcal{Q}_{w}$。

商用多普勒测速仪-惯性导航系统，例如 Sonardyne SPRINT-Nav 500 [13], ，实际上是“黑箱”，其缺乏透明性，使得难以使用传统状态估计工具纳入回环测量 [14, 15], ，如图 2 中的因子图 [16] 所示。

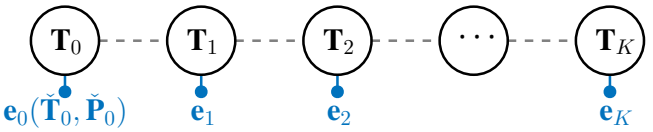


图 2：描绘商用 ˇ DVL-INS 输出的因子图。仅有估计轨迹 $\mathbf{T}_{0:K}$ 和不完整的 ˇ 边缘协方差矩阵 $\mathbf{P}_{0:K}$ 可用，因此形成了先验因子$\mathbf{e}_{0:K}$。由于没有连接相邻节点的因子，回环校正无法在整个图中传播，轨迹也无法更新。

B. 先前工作

同步定位与建图已在海底机器人技术领域得到广泛应用。例如， [4] 通过对使用多波束声呐生成的点云子地图进行配准，绘制了两处热液喷口的自洽水深图。 [5],介绍了一种分布式粒子地图构建算法，该算法根据多波束声呐测量值与现有地图之间的新息来确定粒子加权。然而，地图分辨率受网格单元尺寸选择的限制。 [17], 随后通过采用高斯过程作为地图表示方式，解决了这一局限。 [18], 沿用了子地图配准方法，并展示了在港口扫描应用中对子地图简化和点云配准的改进。 [19], 也研究了港口扫描与监视，并采用基于特征的方法对通过成像声呐采集的点云进行配准。近期研究聚焦于结构更规整的环境，例如船体检查 [1, 6, 20–22]和海底基础设施 [7]。

这些研究通常能够获取第 I-A 节列出的信息，因此能够使用传统状态估计技术纳入闭环测量。例如， [4] 在扩展卡尔曼滤波框架中应用了闭环测量，并能够获取原始导航传感器测量值以及载体过程模型。在 [5]和 [17]中，使用多普勒测速仪测量值和匀速运动模型向前传播各个粒子。相关船体检查研究 [1, 6, 20–22]所用的平台生成了原始多普勒测速仪、惯性测量单元和深度传感器测量值，而 [3] 中的平台能够获取多种原始传感器测量值，包括立体视觉和剖面声呐。这些应用采用传统的位姿图同时定位与建图，纳入由各种外感受传感器生成的闭环测量。

C. 贡献

本文介绍了一种新颖的水下测绘方法，该方法使用高分辨率激光线扫描仪和商用 DVL-INS 导航系统的输出。首先，本文开发了一种稳健的基于激光的前端算法，通过对齐在复杂水下环境中采集的点云扫描，生成高精度回环测量。

接下来，本文展示了如何通过因子图优化，将回环测量无缝融合到测量级商用现货多普勒计程仪-惯性导航系统的输出中。由于此类商用系统通常是仅提供导航估计的“黑箱”，所提方法展示了如何系统地纳入回环测量，而无需访问状态估计任务通常所需的原始传感器测量值或其他信息。与以往方法不同，所提方法还对后验轨迹估计施加了平滑性 要求。这消除了航位推算轨迹估计中常见的不连续现象，这对于激光子地图中的精确特征检测至关重要。总之，所提方法描述了一套稳健且全面的系统，利用商用现货导航系统实现高精度、自洽的水下测绘。本文通过仿真和实际水下测绘数据集，严格评估了地图自洽性和轨迹估计相对精度方面的改进。

D. 论文结构

本文结构如下。第二节介绍相关预备知识，包括所用约定、矩阵李群上的状态估计以及批量状态估计。第三节介绍方法，包括根据激光扫描数据构建回环闭合测量，以及构造批量优化问题。第四节给出模拟数据集和实测数据集上的结果。最后，第五节总结研究发现并探讨未来工作的方向。

II. 预备知识

A. 参考坐标系与导航约定

本节介绍本文所采用的姿态和位移惯例。三维右手参考坐标系 $\mathcal{F}_a$ 由三个正交归一物理基向量组成。物理点 z 相对于点w的位置，记为 $\underrightarrow{r}^{zw}$，在参考坐标系 $\mathcal{F}_a$ 中表示为 $\mathbf{r}_a^{zw}$，在参考坐标系 $\mathcal{F}_b$ 中表示为 $\mathbf{r}_b^{zw}$。这些量之间的关系为 $\mathbf{r}_a^{zw} = \mathbf{C}_{ab}\mathbf{r}_b^{zw}$，其中 $\mathbf{C}_{ab}$ 是方向余弦矩阵，$\mathbf{C} \in SO(3) = \{\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times3} \,|\, \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}, \det \mathbf{C} = +1\}$ [23]。时变量由下标 $(\cdot)_k$表示，例如 $\mathbf{r}_a^{z_k w}$描述运动点 z 在时间 t_k的位置。本文中，点 z 固定于载具上，而w 表示世界中的静止点。机体坐标系 $\mathcal{F}_b$随载具旋转，而局部大地坐标系 $\mathcal{F}_a$ 保持静止。 $\mathcal{F}_b$ 和 $\mathcal{F}_a$ 均采用北-东-地下（NED）坐标系，符合海事惯例。

B. 矩阵李群

载具在时间 t_k 的姿态和位置统称为载具的“位姿”，可以方便地表示为三维空间中矩阵李群 $SE(3)$ [23, Sec. 7.1.1], 的一个元素

$$\mathbf{T}_{ab_k}^{z_k w} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ab_k} & \mathbf{r}_a^{z_k w} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in SE(3), \tag{4}$$

其中 $SE(3) = \{\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{4\times4} \,|\, \mathbf{C} \in SO(3),\ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\}$。每个矩阵李群都对应一个矩阵李代数，它定义为群单位元 [24] 处的切空间。对于 $SE(3)$，该空间为 $\mathfrak{se}(3) \triangleq T_{\mathbf{1}}SE(3)$。在涉及矩阵李群的估计问题中，矩阵李代数是表示扰动和不确定性的便捷空间。 $\mathfrak{se}(3)$ 的一个元素表示为 [25,Sec. 2.3]

$$\boldsymbol{\xi}^\wedge = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 & \rho_1 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 & \rho_2 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 & \rho_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3), \tag{5}$$

其中 $(\cdot)^\wedge : \mathbb{R}^6 \to \mathfrak{se}(3)$ 是一个等距算子。该算子的逆为 $(\cdot)^\vee : \mathfrak{se}(3) \to \mathbb{R}^6$，使得 $(\boldsymbol{\xi}^\wedge)^\vee = \boldsymbol{\xi}$。李群和李代数通过指数映射相关联，对于矩阵李群而言，指数映射就是矩阵指数，

$$\mathbf{T} = \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge). \tag{6}$$

矩阵对数用于返回李代数，具体如下：

$$\boldsymbol{\xi}^\wedge = \log(\mathbf{T}). \tag{7}$$

矩阵李代数的元素按照 Baker-Campbell-Hausdorff（BCH）公式进行组合，

$$\boldsymbol{\gamma}^\wedge = \log\left(\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\eta}^\wedge)\right). \tag{8}$$

$\boldsymbol{\xi} \gg \boldsymbol{\eta}$ 的 BCH 方程的近似为

$$\boldsymbol{\gamma}^\wedge \approx (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})^{-1}\boldsymbol{\eta})^\wedge, \tag{9}$$

其中$\mathbf{J}^{\mathrm{r}}$ 是 $SE(3)$ [23, 第 7.1 节5] 的右雅可比矩阵。

矩阵李群上的误差以乘法形式定义。本文采用左不变误差定义，

$$\delta\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}, \tag{10}$$

其中 $\mathbf{T}$ 是当前状态估计，$\tilde{\mathbf{T}}$ 是根据传感器测量或先验信息生成的状态估计。相应的扰动方案为

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge), \tag{11}$$

扰动为 $\delta\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{P})$, $\mathbf{P} = \mathrm{E}[\delta\boldsymbol{\xi}\,\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}}] \in \mathbb{R}^{6\times6}$。注意，式 (11) 中的负号确保其与左不变误差定义 (10) 保持一致。因此，状态估计$\bar{}$由均值估计$\mathbf{T}$ 和协方差 $\mathbf{P}$定义。

本文频繁使用伴随矩阵 $\mathbf{Ad}(\mathbf{T})$，它将群单位元附近的扰动映射到其他群元素 [24]。形式上，

$$\mathbf{Ad}(\mathbf{T})\delta\boldsymbol{\xi} \triangleq \left(\mathbf{T}\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\mathbf{T}^{-1}\right)^\vee. \tag{12}$$

对于 $SE(3)$，伴随矩阵为 [25]

$$\mathbf{Ad}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^\times\mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中 $(\cdot)^\times$ 是反对称算子 [23, 第 7.1 节2]。伴随矩阵在矩阵李代数中表示为

$$\left(\mathbf{ad}(\boldsymbol{\xi}_1^\wedge)\boldsymbol{\xi}_2\right)^\wedge \triangleq \left[\boldsymbol{\xi}_1^\wedge, \boldsymbol{\xi}_2^\wedge\right] = \boldsymbol{\xi}_1^\wedge\boldsymbol{\xi}_2^\wedge - \boldsymbol{\xi}_2^\wedge\boldsymbol{\xi}_1^\wedge, \tag{14}$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 是李括号 [26, 第 10.2 节6]。对于 $\mathfrak{se}(3)$,

$$\mathbf{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^\times & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\rho}^\times & \boldsymbol{\phi}^\times \end{bmatrix}. \tag{15}$$

C. 高斯过程

连续时间高斯过程（GP）可以看作是定义在函数上的分布，

$$\mathbf{f}(t) \sim \mathcal{GP}\left(\boldsymbol{\mu}(t), \boldsymbol{\Sigma}(t,t')\right), \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{\mu}(t)$是均值函数，$\boldsymbol{\Sigma}(t,t')$是协方差函数 [27, 第2节。2][23, 第2节。3]。对于任意有限的时间步集合 $t_{0:K}$，$\mathbf{f}(t_{0:K})$服从联合高斯分布。协方差函数决定了各个函数样本$\mathbf{f}_i(t)$随时间的协变方式。例如，时间协方差较大的高斯过程会比时间协方差较小的高斯过程更平滑。本文采用零均值白噪声高斯过程，其定义为 [23, 第2节。3]

$$\mathbf{w}(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0}, \mathcal{Q}\delta(t-t')), \tag{17}$$

其中$\mathcal{Q}$是功率谱密度矩阵，$\delta(\cdot)$是狄拉克δ函数。

D. 加速度白噪声运动先验

加速度白噪声（WNOA）运动先验可由以下随机微分方程组概括： [28],

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t)\boldsymbol{\varpi}_b(t)^\wedge, \tag{18a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varpi}}_b(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0}, \mathcal{Q}\delta(t-t')). \tag{18b}$$

公式 (18a) 描述了 $SE(3)$ 的连续时间状态运动学，其中 $\boldsymbol{\varpi}_b$ 为广义速度，因此$T\boldsymbol{\varpi}_b^\wedge \in \mathfrak{se}(3)$，其中 T为时间增量。下标 $(\cdot)_b$ 用于强调 $\boldsymbol{\varpi}$ 是机体系量。 $\boldsymbol{\varpi}$ 的时间变化率服从 (18b) 中的零均值白噪声高斯过程，其功率谱密度为$\mathcal{Q}$。请注意，$\mathcal{Q}$ 是需要调整的超参数。该运动先验有助于在后验状态估计中施加平滑性，即 $\mathrm{E}[\dot{\boldsymbol{\varpi}}] = \mathbf{0}$。在离散时间下，这意味着 $\mathrm{E}[\boldsymbol{\varpi}_k] = \boldsymbol{\varpi}_{k-1}$。白噪声假设还保留了后续批处理问题 [29]中的稀疏性。

在水下导航的背景下，加速度白噪声假设是合理的，因为自主水下航行器的运动学状态随时间缓慢变化。加入$\boldsymbol{\varpi}$后，增广导航状态成为有序对

$$\mathbf{X} = (\mathbf{T}, \boldsymbol{\varpi}) \in SE(3) \times \mathbb{R}^6. \tag{19}$$

E. 批量状态估计

给定一组外感测量 $\{\mathbf{y}_\ell\}_{\ell=1}^{L}$、内感测量 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{K-1}$ 和先验估计$\mathbf{Y}_0 = \bar{\mathbf{Y}}_0 \exp(-\delta\boldsymbol{\eta}_0^\wedge)$，$\mathbf{S}_0 = \mathrm{E}[\delta\boldsymbol{\eta}_0\, \delta\boldsymbol{\eta}_0^\mathsf{T}]$，批量估计的标准方法是求得最大后验（MAP）解，表示为

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg\max_{\mathbf{X}} p\big(\mathbf{X} \,|\, \mathbf{y}_{1:L}, \mathbf{u}_{0:K-1}, \mathbf{Y}_0\big). \tag{20}$$

在马尔可夫假设下，中的联合概率可以分解为 (20)

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg\max_{\mathbf{X}} \prod_{\ell=1}^{L} p\big(\mathbf{y}_\ell \,|\, \mathbf{X}_\ell\big) \prod_{k=1}^{K} p\big(\mathbf{X}_k \,|\, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}\big)\, p\big(\mathbf{X}_0 \,|\, \mathbf{Y}_0\big). \tag{21}$$

对式（21）取负对数似然后，结果是一个非线性形式如下的最小二乘问题

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg\min_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}), \tag{22}$$

其中，目标函数 $J(\mathbf{X})$定义为

$$J(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\mathbf{e}_\ell(\bar{\mathbf{y}}_\ell, \mathbf{g}_\ell(\bar{\mathbf{X}}_\ell, \mathbf{0}))\right\|^2_{\mathbf{R}_\ell^{-1}} + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{e}_0(\bar{\mathbf{Y}}_0, \bar{\mathbf{X}}_0)\right\|^2_{\mathbf{S}_0^{-1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} \left\|\mathbf{e}_k(\mathbf{f}_{k-1}(\bar{\mathbf{X}}_{k-1}, \bar{\mathbf{u}}_{k-1}), \bar{\mathbf{X}}_k)\right\|^2_{\mathbf{Q}_k^{-1}}. \tag{23}$$

在式（23）中，$\mathbf{e}_k$、$\mathbf{e}_\ell$和$\mathbf{e}_0$ 分别是内感受误差、外感受误差和先验误差；$\mathbf{f}_{k-1}$ 和$\mathbf{g}_\ell$ 分别表示非线性过程模型和测量模型。记号 $\|\mathbf{e}\|^2_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}} = \mathbf{e}^\mathsf{T}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{e}$ 表示马氏距离平方，而$\mathbf{Q}_k$ 和 $\mathbf{R}_\ell$ 分别表示内感受误差和外感受误差的离散时间协方差。为最小化式（22），式（23）会围绕当前的$\bar{}$状态估计$\mathbf{X}$反复线性化，并使用例如高斯-牛顿法或列文伯格-马夸尔特法求得局部最小化解。

III. 方法

本节介绍本文的主要贡献，即提出基于激光的闭环测量，并将这些测量平滑地融入商用现货 DVL-INS 轨迹估计中。即将介绍的方法概览如图 3 所示。

A. 基于水下点云扫描的闭环

为校正 DVL-INS轨迹估计中的漂移，通过配准使用 Voyis Insight Pro 水下激光扫描仪采集的点云扫描片段，获取闭环测量。首先对原始激光剖面进行滤波，并配准至轨迹估计，以生成三维点云。在路径交叉处识别回环机会，并使用多步点云配准算法进行配准。

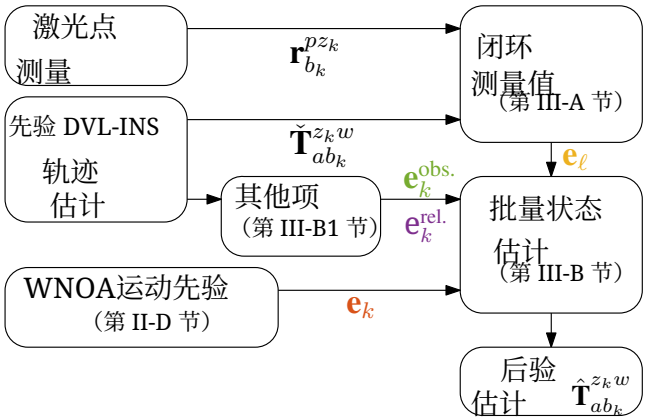


图 3：第三节的可视化概览。请注意，误差项的颜色与图 6 因子图中的颜色一致。

1）点云生成

图 4 所示的 Voyis Insight Pro 水下激光扫描仪以 20Hz 的频率记录海床的二维剖面测量。为构建三维点云，将各个激光剖面配准至先验 DVL-INS轨迹估计 $\check{\mathbf{T}}_{ab_k}^{z_k w}$，通过

$$\begin{bmatrix}\mathbf{r}_a^{pw}\\ 1\end{bmatrix} = \check{\mathbf{T}}_{ab_k}^{z_k w}\mathbf{T}_{b\ell}^{sz}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_{\ell_k}^{ps_k}\\ 1\end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中，$\mathbf{r}_{\ell_k}^{ps_k} \in \mathbb{R}^3$ 是在时刻 t_k 测得的点 p 的激光测量值，以传感器坐标系表示；$\mathbf{T}_{b\ell}^{sz} \in SE(3)$ 是静态外参矩阵。必要时，根据 [30, 第 2 节4]对 DVL-INS 轨迹进行插值。

$$\check{\mathbf{T}}_j = \check{\mathbf{T}}_i \exp\left(\alpha \log\left(\check{\mathbf{T}}_i^{-1}\check{\mathbf{T}}_k\right)\right), \tag{25a}$$

$$\alpha = \frac{t_j - t_i}{t_k - t_i}, \tag{25b}$$

其中 $\check{\mathbf{T}}_j = \check{\mathbf{T}}_{ab_j}^{z_j w}$，且 $t_i < t_j < t_k$。这些操作的结果是一个以局部大地坐标系表示的滤波点云 $\mathcal{P}$，$\mathcal{P} = \{\mathbf{r}_a^{p_i w}\}_{i=1}^N$。

2）点云配准

点云配准的目标是合并同一三维物体或场景中部分重叠的扫描。在同步定位与地图构建（SLAM）中，点云配准通常用于估计两个或多个观测之间的相对位姿，例如降低里程计漂移 [31]，或通过闭合轨迹中的大型回环来限制导航漂移随时间的累积 [32]。更正式地说，点云配准问题可表示为

$$\mathbf{T}_{12}^{\star} = \underset{\mathbf{T}\in SE(3)}{\arg\min}\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} b_{ij}\cdot w_{ij}\cdot \left\|\mathbf{e}_{ij}\left(\mathbf{T}_{12}, \mathbf{r}_{b_2}^{p_i z_2}, \mathbf{r}_{b_1}^{p_j z_1}\right)\right\|_{\mathbf{\Sigma}_{ij}^{-1}}^2, \tag{26}$$

其中，位姿 $\mathbf{T}_{12}^{\star} = \{$将源点云 $\mathcal{S} = \{\mathbf{r}_{b_2}^{p_i z_2}\}_{i=1}^N$ 与目标点云 $\mathcal{T} = \{\mathbf{r}_{b_1}^{p_j z_1}\}_{j=1}^M$进行最优配准。布尔值 $b_{ij} = \{0, 1\}$ 在（p_i, p_j）表示内点对应时取值为 1，而 $w_{ij} \in [0, 1]$ 是对应权重，通常使用鲁棒代价函数 [33]计算。$\mathbf{T}_{12}^{\star}$ 之所以是最优的，是因为它最小化了加权平方误差和，该误差通常由点到点误差和点到平面误差 [34, 35], 组成，并具有相关的误差协方差 $\mathbf{\Sigma}_{ij}$（R_i，R_j）。R_i 和 R_j 分别表示点测量 $\mathbf{r}_{b_2}^{p_i z_2}$和 $\mathbf{r}_{b_1}^{p_j z_1}$ 的协方差，其中 $\mathrm{R}_i = \mathrm{E}[\delta\mathbf{r}_i\, \delta\mathbf{r}_i^{\mathsf{T}}]$，$\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{b_2}^{p_i z_2} - \bar{\mathbf{r}}_{b_2}^{p_i z_2}$。图 5 展示了点云配准问题的示意图。



图 4：由 Voyis Imaging Inc. 开发的 Insight Pro 水下激光扫描仪。光束发射器位于左侧，相机位于右侧。通过对激光束进行三角测量生成三维点云。发射器与相机之间的基线约为 1 米。

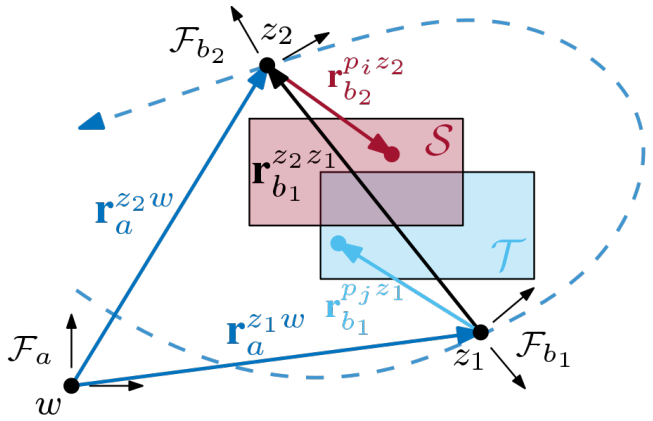


图 5：通过将源子地图 $\mathcal{S}$ 配准到目标子地图 $\mathcal{T}$来生成回环测量。载具轨迹以虚线表示。子地图 $\mathcal{T} = \{\mathbf{r}_{b_1}^{p_j z_1}\}_{j=1}^M$ 和 $\mathcal{S} = \{\mathbf{r}_{b_2}^{p_i z_2}\}_{i=1}^N$ 分别根据车辆位姿$\mathbf{T}_{ab_1}^{z_1 w}$ 和$\mathbf{T}_{ab_2}^{z_2 w}$ 处的点测量构建。点云配准生成回环测量$\mathbf{T}_{b_1 b_2}^{z_2 z_1}$。

在本研究中，回环位置被识别为（x，y）平面上的简单路径交叉点，对应时间戳 t_{ℓ_1} 和 t_{ℓ_2}，且 $t_{\ell_1} < t_{\ell_2}$。通常会利用互协方差信息，通过平方马氏距离检验 [36],确定搜索区域，进而确定需要构建的子地图大小；然而，DVL-INS轨迹估计中缺少这一信息。相反，鉴于 DVL-INS [13], 固有的低漂移率，源点云和目标点云采用简单的（x，y）距离阈值构建，例如，

$$\mathbf{r}_a^{pw} \in \mathcal{T} \,\middle|\, \left\|\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\left(\mathbf{r}_a^{pw} - \check{\mathbf{r}}_a^{z_{\ell_1} w}\right)\right\|_2 \le \delta r^{\star}. \tag{27}$$

在本研究中，$\delta r^{\star} = 5$米这一固定值似乎效果良好，不过也可以使用与轨迹长度相关、逐渐增大的阈值。

为提供体坐标系相对位姿测量 (26)，首先在体坐标系中解析点测量，

$$\begin{bmatrix}\mathbf{r}_{b_\ell}^{pz_\ell}\\ 1\end{bmatrix} = \left(\check{\mathbf{T}}_{ab_\ell}^{z_\ell w}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{r}_a^{pw}\\ 1\end{bmatrix}. \tag{28}$$

通过将点云下采样至 5cm 网格对其进行预处理，在保留扫描对象高频特征的同时，将点数据量减少约 10 倍。随后使用 40 个欧氏邻居估计法向量。为处理观测之间存在较大导航漂移的情况，使用 TEASER++粗配准算法 [37] 来初始化基于迭代最近点（ICP）的精配准算法。运行 TEASER++时，在三维SIFT关键点 [39]，处计算 FPFH特征描述子 [38]，并根据 33 维 FPFH空间中 10 个最近邻匹配构建一组候选对应关系。关键点和描述子使用点云库（PCL）v1.9 [40]计算。所有 TEASER++ 参数均采用默认值。

在对第 IV-D 节介绍的沉船场地数据集进行配准研究后，我们选择将 SIFT关键点与 FPFH 描述子组合用于此应用。

在该数据集中，载具对一艘小型沉船进行了八次航行，生成了八个点云子地图和 28 对互不相同的子地图对。随后，使用 TEASER++ 以及不同的检测器/描述子组合对其中 27 对进行配准，另有一对子地图因重叠不足而被排除在外。该研究涵盖三种关键点检测器和两种三维特征描述子。关键点检测器为 SIFT、ISS [41],和 Harris三维关键点 [42], ，特征描述子则为 FPFH 和 SHOT [43]。将这些检测器和描述子纳入研究，既是因为它们在点云配准文献中广泛使用，也因为 PCL v1.9 提供了开源实现。我们对 SIFT 和 Harris 3D 的关键点参数进行了小幅调节，以便在每个子地图中获得数百个关键点，而 ISS 关键点则使用默认值。为确保公平，FPFH 和 SHOT 描述子均采用相同的搜索半径值 0。25 米。

随后使用TEASER++ ，采用六种检测器/描述子组合分别对每对子地图进行配准。结果见表I，其中列出了姿态误差 $\|\delta\boldsymbol{\phi}\|$ 和位置误差 $\|\delta\boldsymbol{\rho}\|$ 的汇总统计量，格式为 50 % · 90% · 最大值。位姿误差通过比较˘各个TEASER ++ 相对位姿估计$\mathbf{T}_i$ 与真实相对位姿$\mathbf{T}_i$计算得出；真实相对位姿由经过良好初始化的ICP配准计算得到：

$$\delta\boldsymbol{\xi}_i = \log(\mathbf{T}_i^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_i)^{\vee}. \tag{29}$$

查看表I可知，SIFT关键点与SHOT描述子的组合（第二行）具有最低的姿态误差中位数（0.42 度），其50 %和90 %位置误差也最低。然而，在27对子地图中，该组合至少产生了一次离群测量，而SIFT+FPFH组合（第一行）未产生任何离群值。此外，SIFT+FPFH组合的中位数误差和90 %误差均处于合理范围。请注意，表I中极大的位置误差是由配准失败造成的，这会使（相对平坦的）点云子地图发生180度“翻转”。子地图的测量距离约为7米，因此，“翻转”的配准会导致相对体坐标系位置误差超过该距离的两倍。

由于粗配准算法的目标是尽可能稳健地将迭代最近点初始化到接近真实值的位置，

表I：关键点检测器与描述子配准研究的统计摘要，按50 % · 90% · 最大值。姿态误差 $\|\delta\boldsymbol{\phi}\|$ 和位置误差$\|\delta\boldsymbol{\rho}\|$ 根据式 (29) 计算。每列中的最小值以粗体标出。Si = SIFT，I = ISS，H = Harris3D，F =FPFH，So = SHOT。

KP	D	$\|\delta\boldsymbol{\phi}\|$ [度]	$\|\delta\boldsymbol{\rho}\|$ [米]
Si	F	0.44 · 1.05 · **1.54**	0.04 · 0.09 · **0.16**
	So	**0.42** · 0.86 · 92.59	**0.03** · **0.07** · 3.33
I	F	0.49 · **0.84** · 52.34	0.04 · 0.09 · 2.31
	So	0.61 · 176.28 · 179.72	0.05 · 20.12 · 22.56
H	F	0.83 · 21.14 · 178.44	0.08 · 3.05 · 22.48
	So	0.83 · 52.32 · 164.84	0.06 · 4.22 · 18.28

表II：迭代最近点预处理和配准参数

阶段	配置	描述
预处理	体素网格	降采样至 5 厘米网格
	法向量	40 个最近邻
关键点	三维尺度不变特征变换	PCL v1.9 实现
描述子	FPFH	PCL v1.9 实现
粗配准。	TEASER++	10 个匹配项，默认参数。
迭代最近点数据关联。	KD树	单个最近邻
迭代最近点误差最小值	混合	若 $v(p_j) < 3\text{e}{-2}$，则采用点到平面
离群点剔除。	FRMSD	默认参数。来自 [49]
终止	差异。	$\|\delta\boldsymbol{\phi}_i\|_2 < 1\text{e}{-2}$弧度， and $\|\delta\boldsymbol{\rho}_i\|_2 < 1\text{e}{-3}$米
	计数器	最多迭代 20 次

因此本应用选择了 SIFT+FPFH 组合。请注意，粗配准算法选择了 TEASER++ ，因为大量点云配准研究 [37] 已表明，其性能优于其他粗配准方法，例如快速全局配准 [44] 和随机抽样一致 [45]。

在精配准步骤中，本研究在基于迭代最近点的配准方案中采用加权最优线性姿态与平移估计器（WOLATE）算法 [46]。配准误差根据源点云中的每个点与目标点云中其唯一最近邻之间的关系来定义。误差采用点到点误差与点到平面误差的组合，并根据目标点的表面变化度 $v\ (p_j)$ [47] 确定每个对应点所使用的误差类型。遵循 [48]，中的研究，在配准沉船等结构化扫描时，使用分数均方根距离（FRMSD）鲁棒代价函数 [49]进行离群点剔除。当连续两次迭代之间的位姿微分 $\delta\boldsymbol{\xi}_i$ 低于阈值，或达到最大迭代次数时，算法终止。遵循 [50]中关于报告迭代最近点算法最佳实践的建议，表II总结了预处理步骤和相关参数。

3）闭环测量模型

点云配准得出回环测量

$$\boldsymbol{\Xi}_{\ell_1\ell_2} \triangleq \mathbf{T}_{b_{\ell_1}b_{\ell_2}}^{z_{\ell_2}z_{\ell_1}} = \left(\mathbf{T}_{ab_{\ell_1}}^{z_{\ell_1}w}\right)^{-1}\mathbf{T}_{ab_{\ell_2}}^{z_{\ell_2}w} \in SE(3), \tag{30}$$

并且，根据扰动方案（11），噪声模型为

$$\boldsymbol{\Xi}_{\ell_1\ell_2} = \mathbf{g}_\ell(\check{\mathbf{T}}_{\ell_1}, \check{\mathbf{T}}_{\ell_2}, \delta\boldsymbol{\xi}_\Xi) \tag{31a}$$

$$= \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_\Xi^{\wedge}), \tag{31b}$$

$$\delta\boldsymbol{\xi}_\Xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_\Xi), \tag{31c}$$

其中，为便于阅读，使用简写 $\check{}\mathbf{T}_{\ell_i} = \check{}\mathbf{T}_{ab_{\ell_i}}^{z_{\ell_i}w}$， $i = 1,\ 2$。回环测量的协方差$\mathbf{R}_\Xi$可通过多种方式从点云配准算法中获得，例如 [51] 中的基于线性化的方法。

B. 更新轨迹

1) 构建目标函数

现在的目标是利用新获得的回环测量对先验DVL-INS轨迹估计进行条件化。这通过非线性批量状态估计实现，相关内容见第 II-E 节。本节介绍批处理问题中误差项的构造方式，图 6 展示了由此得到的因子图。

首先，必须定义先验误差、过程误差和测量误差。给定增广导航状态 (19)，必须分别为 $SE(3)$ 位姿和广义速度定义误差。结合左不变误差定义 (10) 和恒速WNOA运动先验，先验误差为

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^{\xi} \\ \mathbf{e}_0^{\varpi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log\left(\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{Y}_0\right)^{\vee} \\ \varpi_0 - \psi_0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

其中，$(\mathbf{Y}_0, \psi_0)$ 是第一个导航状态的先验估计。过程误差的形式为

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k^{\xi} \\ \mathbf{e}_k^{\varpi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log\left(\mathbf{T}_k^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_k\right)^{\vee} \\ \varpi_k - \varpi_{k-1} \end{bmatrix}, \tag{33}$$

其中，时刻 t_k 的预测位姿，

$$\tilde{\mathbf{T}}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{T}_{k-1}, \varpi_{k-1}) = \mathbf{T}_{k-1}\exp(T\varpi_{k-1}^{\wedge}), \tag{34}$$

源自对积分周期为$T = t_k - t_{k-1}$的连续时间 $SE(3)$运动学（18a）进行前向欧拉离散化。回环误差为

$$\mathbf{e}_\ell = \mathbf{T}_{\ell_2}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_{\ell_2} = \mathbf{T}_{\ell_2}^{-1}\mathbf{T}_{\ell_1}\Xi_{\ell_1\ell_2}, \tag{35}$$

其中，$\mathbf{T}_{\ell_1}$ 和$\mathbf{T}_{\ell_2}$ 是回环测量 ℓ所涉及的两个位姿。此外，测试发现，在每一对相邻位姿之间加入相对位姿约束，有助于使回环校正沿整个轨迹传播。相对位姿误差的形式与回环误差相同，

$$\mathbf{e}_k^{\text{rel.}} = \mathbf{T}_k^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_k = \mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{T}_{k-1}\Xi_{k-1,k}, \tag{36}$$

其中，相对位姿测量值直接取自初始化解，

$$\Xi_{k-1,k} = \check{\mathbf{T}}_{k-1}^{-1}\check{\mathbf{T}}_k. \tag{37}$$

最后，由于横滚、俯仰和深度是可直接观测的自主水下航行器状态，因此纳入了形式如下的 [5],误差

$$\mathbf{e}_k^{\text{obs.}} = \begin{bmatrix} e_k^{\phi_1} \\ e_k^{\phi_2} \\ e_k^{z} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{E}_k \log\left(\mathbf{T}_k^{-1}\check{\mathbf{T}}_k\right)^{\vee}, \tag{38}$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 6}, \quad \mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \mathbf{C}_{ab_k}\mathbf{J}^{\ell}(\mathbf{e}_k^{\phi}) \end{bmatrix}, \tag{39}$$

其中，$\mathbf{J}^{\ell}$ 是 $SO(3)$ [23, 第 7.1 节3], 中的左雅可比矩阵，并且

$$\mathbf{e}_k^{\xi} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_k^{\phi})^{\mathsf{T}} & (\mathbf{e}_k^{\rho})^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}. \tag{40}$$

随后，将最小二乘目标函数 (23) 扩展为

$$J_{\text{aug.}}(\mathbf{X}) = J(\mathbf{X}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(\left\|\mathbf{e}_k^{\text{rel.}}\right\|^2_{\mathbf{R}_{\text{rel.}}^{-1}} + \left\|\mathbf{e}_k^{\text{obs.}}\right\|^2_{\mathbf{R}_{\text{obs.}}^{-1}}\right), \tag{41}$$

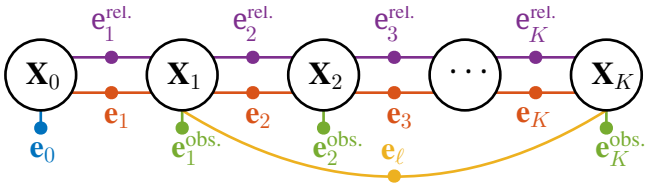


图 6：对应于批量状态估计问题的因子图。构建 WNOA 因子$\mathbf{e}_k$ 和相对位姿因子 $\mathbf{e}_k^{\text{rel.}}$，可使回环因子$\mathbf{e}_\ell$ 带来的修正传播至整个图中。

其中，$\mathbf{R}_{\text{rel.}}$ 和 $\mathbf{R}_{\text{obs.}}$ 被视为额外的超参数。相对位姿误差 (36) 有助于传播闭环，而 WNOA 误差 (33) 则有助于平滑。超参数 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathbf{R}_{\text{rel.}}$ 可进行调节，以控制后验解的平滑程度；而$\mathbf{R}_{\text{obs.}}$ 则用于确保后验解在可观测维度上不会偏离过远。

批量估计问题通过图 6 中的因子图进行可视化。请注意，与图 2 中最初的因子图相比，现在相邻节点之间有因子相连。这将使闭环测量带来的修正按要求传播至整个位姿图。

2）最小化目标函数

为最小化式 (41)，需围绕当前导航状态估计值$\mathbf{X}$反复$^{-}$线性化估计误差。将导航状态扰动为

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge}), \tag{42a}$$
$$\varpi = \bar{\varpi} + \delta\varpi, \tag{42b}$$
$$\delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\xi}^{\mathsf{T}} & \delta\varpi^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \tag{42c}$$

先验误差 (32) 线性化为

$$\mathbf{e}_0 = \bar{\mathbf{e}}_0 + \mathbf{F}_0^0\delta\mathbf{x}_0 + \mathbf{M}_0\delta\mathbf{y}_0, \tag{43}$$

其中 $\delta\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\eta}_0^{\mathsf{T}} & \delta\psi_0^{\mathsf{T}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$、$\mathbf{S}_0 = \mathrm{E}[\delta\mathbf{y}_0\,\delta\mathbf{y}_0^{\mathsf{T}}]$，且先验雅可比矩阵为

$$\mathbf{F}_0^0 = \ \text{blkdiag}(\mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1}, \mathbf{1}), \tag{44a}$$
$$\mathbf{M}_0 = \ \text{blkdiag}(-\mathbf{J}^{\text{r}}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1}, -\mathbf{1}), \tag{44b}$$

其中，$\mathbf{J}^{\ell}$ 为 $SE(3)$的左雅可比矩阵。请注意，本节中所述工作的详细推导见附录 A 的补充材料。离散时间过程误差（33）线性化为

$$\mathbf{e}_k = \bar{\mathbf{e}}_k + \mathbf{F}_{k-1}^k\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{F}_k^k\delta\mathbf{x}_k, \tag{45}$$

其中过程误差雅可比矩阵为

$$\mathbf{F}_{k-1}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{k-1} & \mathbf{V}_{k-1} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}, \tag{46a}$$
$$\mathbf{U}_{k-1} = \ -\mathbf{J}^{\text{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\varpi}_{k-1}^{\wedge})),$$
$$\mathbf{V}_{k-1} = T\mathbf{J}^{\text{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}\mathbf{J}^{\text{r}}(T\bar{\varpi}_{k-1}),$$
$$\mathbf{F}_k^k = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{46b}$$

回环误差（35）线性化为

$$\mathbf{e}_\ell = \bar{\mathbf{e}}_\ell + \mathbf{H}^\ell_{\ell_1}\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1} + \mathbf{H}^\ell_{\ell_2}\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2} + \mathbf{M}_\ell\delta\boldsymbol{\xi}_\Xi, \tag{47}$$

及其对应的雅可比矩阵

$$\mathbf{H}^\ell_{\ell_1} = -\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_\ell)^{-1}\,\mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}^{-1}_{\ell_1\ell_2}), \tag{48a}$$
$$\mathbf{H}^\ell_{\ell_2} = \mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_\ell)^{-1}, \tag{48b}$$
$$\mathbf{M}_\ell = -\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_\ell)^{-1}. \tag{48c}$$

以相同的方式对相对位姿误差(36)进行线性化。最后，通过近似，对可观测状态(38)上的误差进行线性化

$$\mathbf{C}_{ab_k} = \bar{\mathbf{C}}_{ab_k}\exp\left(-\delta\boldsymbol{\phi}^\times_k\right) \approx \bar{\mathbf{C}}_{ab_k}\left(\mathbf{1}-\delta\boldsymbol{\phi}^\times_k\right). \tag{49}$$

假设$\mathbf{e}^\rho_k \to \mathbf{0}$ 随着优化的进行，这将得到

$$\mathbf{e}^{\text{obs.}}_k = \bar{\mathbf{e}}^{\text{obs.}}_k + \mathbf{H}^{\text{obs.}}_k\delta\boldsymbol{\xi}_k, \tag{50}$$
$$\mathbf{H}^{\text{obs.}}_k = \mathbf{DE}_k(\bar{\mathbf{C}}_{ab_k}, \bar{\mathbf{e}}^\phi_k)\mathbf{J}^\ell(\bar{\mathbf{e}}^\xi_k)^{-1}. \tag{51}$$

最后一步是确定离散时间加速度白噪声过程误差的协方差。这通过对功率谱密度$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ 进行离散化来实现，方法是 [52, (4.110)]

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{A}(t_k,s)\mathbf{L}(s)\boldsymbol{\mathcal{Q}}(s)\left(\mathbf{A}(t_k,s)\mathbf{L}(s)\right)^{\mathsf{T}}\mathrm{d}s, \tag{52}$$

其中$\mathbf{A}$,$\mathbf{L}$ 刻画连续时间误差运动学，对于加速度白噪声运动先验，其形式为

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix}-\mathbf{ad}(\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge) & -\mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\delta\mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}}\delta\mathbf{w}(t), \tag{53}$$

其中 $\delta\mathbf{w}(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t-t'))$。(52) 的精确解可通过矩阵指数 [53], 求得，但为避免这项开销较大的运算，本文采用$\mathbf{A}$ [52, (4.119)],中的三阶近似

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_k \approx{}& T\boldsymbol{\Upsilon} + \frac{T^2}{2}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\Upsilon} + \boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)\\ &+ \frac{T^3}{6}\left(\mathbf{A}^2\boldsymbol{\Upsilon} + 2\mathbf{A}\boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\Upsilon}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^2\right)\\ &+ \frac{T^4}{24}\left(\mathbf{A}^3\boldsymbol{\Upsilon} + 3\mathbf{A}^2\boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} + 3\mathbf{A}\boldsymbol{\Upsilon}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^2 + \boldsymbol{\Upsilon}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^3\right),\end{aligned} \tag{54}$$

其中 $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{L}\boldsymbol{\mathcal{Q}}\mathbf{L}^{\mathsf{T}}$。最后，单次高斯-牛顿法迭代的最小化解为

$$\delta\mathbf{x}_\star = \begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\xi}_\star\\ \delta\boldsymbol{\varpi}_\star\end{bmatrix} = -\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathsf{T}}\mathbf{W}\mathbf{e}. \tag{55}$$

雅可比矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}^{\mathsf{T}} & \mathbf{H}^{\mathsf{T}} & \mathbf{H}^{\text{rel.}\,\mathsf{T}} & \mathbf{H}^{\text{obs.}\,\mathsf{T}}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \tag{56}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}^0_0 & & & \\ \mathbf{F}^1_0 & \mathbf{F}^1_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{F}^K_{K-1} & \mathbf{F}^K_K\end{bmatrix}, \tag{57}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix}\mathbf{H}^1_{\ell_1} & & & \mathbf{H}^1_{\ell_2}\\ & & \vdots & \\ & \mathbf{H}^L_{\ell_1} & & \mathbf{H}^L_{\ell_2}\end{bmatrix}, \tag{58}$$

$$\mathbf{H}^{\text{rel.}} = \begin{bmatrix}\mathbf{H}^{\text{rel.},1}_0 & \mathbf{H}^{\text{rel.},1}_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{H}^{\text{rel.},K}_{K-1} & \mathbf{H}^{\text{rel.},K}_K\end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$\mathbf{H}^{\text{obs.}} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{H}^{\text{obs.}}_1 & & \\ & \ddots & & \\ & & & \mathbf{H}^{\text{obs.}}_K\end{bmatrix}, \tag{60}$$

加权矩阵 $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ 由下式描述

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{blkdiag}\left(\mathbf{M}_0\mathbf{S}_0\mathbf{M}_0^{\mathsf{T}}, \mathbf{Q}_{1:K}, \mathbf{R}_{1:L}, \mathbf{R}^{\text{rel.}}_{1:K}, \mathbf{R}^{\text{obs.}}_{1:K}\right), \tag{61}$$

其中，对于回环误差，

$$\mathbf{R}_\ell = \mathbf{M}_\ell\mathbf{R}_\Xi\mathbf{M}_\ell^{\mathsf{T}}. \tag{62}$$

误差列矩阵为

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_0^{\mathsf{T}} & \mathbf{e}^{\mathsf{T}}_{1:K} & \mathbf{e}^{\mathsf{T}}_{1:L} & \left(\mathbf{e}^{\text{rel.}}_{1:K}\right)^{\mathsf{T}} & \left(\mathbf{e}^{\text{obs.}}_{1:K}\right)^{\mathsf{T}}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}. \tag{63}$$

最后，根据扰动方案 (42a, 42b)，状态更新为

$$\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{T}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge_\star), \tag{64a}$$
$$\boldsymbol{\varpi} \leftarrow \boldsymbol{\varpi} + \delta\boldsymbol{\varpi}_\star. \tag{64b}$$

3) 排除错误回环测量

在现实世界的机器人学问题中，测量离群值不可避免，而要稳健地实施所提方法，需要一种识别并拒绝错误回环测量的方法。文献中存在许多用于拒绝回环测量离群值的方法，例如可切换约束 [54], 期望最大化[55],和渐进非凸优化 [56]。

本应用采用一种近期开发的自适应鲁棒代价函数（RCF）来拒绝错误回环测量，因为该函数能够以统计上合理的方式处理多变量、混合单位的误差定义，例如回环误差（35） [57]。RCF根据与误差相关的马氏距离，为回环误差$\mathbf{e}_\ell$分配权重$w_\ell(\epsilon_\ell(\{\text{style id='4'>e}_\ell))\in(0,1]$,

$$\epsilon_\ell(\mathbf{e}_\ell) = \|\mathbf{e}_\ell\|_{\boldsymbol{\Sigma}_\ell^{-1}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \tag{65}$$

其中，通常情况下，回环测量的协方差 $\boldsymbol{\Sigma}_\ell$ 应为参与该测量的两个车辆位姿之间计算得到的相对不确定性 [58]。由于DVL-INS输出不包含正确计算$\boldsymbol{\Sigma}_\ell$所需的联合协方差信息，因此此处使用一个常数值，

$$\boldsymbol{\Sigma}_\ell = \mathrm{blkdiag}(\sigma^2_{\phi_{\text{out}}}\mathbf{1}, \sigma^2_{\rho_{\text{out}}}\mathbf{1}), \tag{66}$$

分别为 $\sigma_{\phi_{\text{out}}} = 1$度和 $\sigma_{\rho_{\text{out}}} = 1$米。这些 1σ 值体现了现场实验中所用测量级DVL-INS较低的航向不确定性，以及回环检测方法所使用的静态搜索界 (27)。

IV. 结果

A. 评估状态估计的质量

第三节所述的方法基于新获得的回环闭合测量值对现有状态估计进行条件更新。由于回环闭合提供位姿之间的相对约束，如图 6 所示，因此预计这种方法将

1）降低整个轨迹中的相对位姿误差；2）生成自洽性更高的点云地图，通过重叠区域内点差异误差 的降低来衡量。

1）测量估计轨迹中的误差

采用基于 [59] 的位姿相对误差度量来衡量估计轨迹的精度。令 $\hat{}\mathbf{T}_k \in SE(3)$ 表示时间 t_k 处的估计位姿。相对于时间 t_ℓ 处位姿的时间 t_k 处位姿为

$$\delta\hat{\mathbf{T}}_{\ell k} = \hat{\mathbf{T}}_\ell^{-1}\hat{\mathbf{T}}_k, \tag{67}$$

其中，$\hat{}\mathbf{T}_\ell$ 取为参与任何回环测量的最早位姿。于是，相对位姿误差可表示为

$$\mathbf{E}_k^{\text{rel.}} = \delta\mathbf{T}_{\ell k}^{-1}\delta\hat{\mathbf{T}}_{\ell k} = \begin{bmatrix}\delta\mathbf{C}_k & \delta\mathbf{r}_k \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}, \tag{68}$$

其中，$\delta\mathbf{T}_{\ell k}$ 是（67）中使用真实轨迹计算得到的。随后可在李代数中表示 $SE(3)$ 上的相对位姿误差：

$$\delta\mathbf{e}_k^{\text{rel.}} = \log\left(\mathbf{E}_k^{\text{rel.}}\right)^\vee = \left[(\delta\boldsymbol{\phi}_k^{\text{rel.}})^\mathsf{T}\ (\delta\boldsymbol{\rho}_k^{\text{rel.}})^\mathsf{T}\right]^\mathsf{T}. \tag{69}$$

然而，由于本文研究的自主水下航行器轨迹大多为平面轨迹，因此轨迹估计的精度以投影到（x, y）平面上的相对位移误差范数 $\delta\mathbf{r}_k$ 表示，

$$e_k^{\text{rel.}} = \left\|\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\delta\mathbf{r}_k\right\|_2. \tag{70}$$

采用（68）这样的相对度量评估性能，可避免对齐估计轨迹与真实轨迹的问题；若要提供绝对性能度量 [59]，则必须进行此类对齐。相对平面位移度量（70）不仅直观、易于可视化，还可直接与海底行业中的其他导航解进行比较；在该行业中，位置漂移通常以行驶距离的百分比表示，并在（x, y）平面上报告。对于沿轨迹纳入多个回环闭合的估计，预计相对位移误差（70）会随时间保持有界。

2) 测量点云地图中的自洽性

此外，还通过评估点云地图重叠区域的自洽性来衡量性能。根据准确的轨迹估计生成的点云地图应当对齐良好，呈现“清晰”的效果。相比之下，使用存在漂移的轨迹估计生成的地图，由于扫描未能良好对齐，在重叠区域会出现“重影”现象。为评估点云地图的自洽性，本研究采用 [60] 提出的点差异度量。对于点云 $\mathcal{S} = \{\mathbf{r}_a^{p_i w}\}_{i=1}^N$ 和 $\mathcal{T} = \{\mathbf{r}_a^{p_j w}\}_{j=1}^M$，该度量定义为

$$e_j^{\text{rel.}} = \|\mathbf{r}_a^{p_j w} - \mathbf{r}_a^{p_i w}\|_2, \tag{71}$$

其中，p_j 中的点 $\mathcal{T}$是 $\mathcal{S}$中点 p_i 的欧几里得最近邻。注意，式（71）仅在 $\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{T}$ 的交集范围内计算，以避免点云大小对该度量造成偏差。点差异度量是相对度量，无需真值信息 [60]，即可计算，因此在无法获得真实值地图的现场试验中尤为重要。需要注意的是，点差异度量容易受到地图间误差的影响：若两个或多个对齐良好的子地图组成的集合存在错误，即使它与真实子地图集合分离，也会产生较低的视差误差。对以下研究的结果进行了目视检查，以确保不存在此类误差；不过，拓展式（71）以考虑地图间误差，是一个值得未来研究的方向。

B. 超参数值

第 III 节所述的方法涉及三组超参数，分别为

1) $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$，白噪声高斯过程的功率谱密度；2) $\mathbf{R}_k^{\text{rel.}}$，相对位姿误差的协方差；以及 3) $\mathbf{R}_k^{\text{obs.}}$，横滚、俯仰和深度误差的协方差。假设这些误差均可观测。

这些超参数组的形式为

$$\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \operatorname{diag}(\mathcal{Q}_{\dot{\omega}}\mathbf{1}, \mathcal{Q}_{\dot{\nu}}\mathbf{1}), \tag{72a}$$

$$\mathbf{R}_k^{\text{rel.}} = \operatorname{diag}(\sigma_\phi^2\mathbf{1}, \sigma_\rho^2\mathbf{1}), \tag{72b}$$

$$\mathbf{R}_k^{\text{obs.}} = \operatorname{diag}(\sigma_{\text{rp}}^2\mathbf{1}, \sigma_{\text{z}}^2), \tag{72c}$$

其中，$\mathcal{Q}_{\dot{\omega}}$、$\mathcal{Q}_{\dot{\nu}}$分别为机体坐标系下角加速度和线加速度的功率谱密度，σ_ϕ^2、σ_ρ^2 分别为机体坐标系下角位移和线位移的方差。σ_{rp}^2 为载具横滚和俯仰的方差，σ_{z}^2 为载具深度的方差。尽管这种超参数结构较为简单，但实践证明，它在模拟值和实测值实验中均效果良好，而且通常符合物理直觉。例如，[61]对对角$\boldsymbol{\mathcal{Q}}$矩阵中的数值进行缩放，以体现汽车的非完整约束。相比之下，自主水下航行器具有很强的机动性，因此在式 (72) 中选择了各向同性超参数。

本节包含模拟值和现场实验的结果。用于获得各组结果的超参数值汇总于表 III 中。这些值经过人工选择，无需大量调参即可获得良好结果；并根据 DVL-INS 状态估计的质量以及 DVL-INS 数据的可用频率进行了调整。

表III：实验中使用的超参数值

超参数	Unit	模拟值	实测值
$\mathcal{Q}_{\dot{\omega}}$	弧度^2 秒$^{-3}$	1e−2	1e−2
$\mathcal{Q}_{\dot{\nu}}$	$\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-3}$	9e−4	1e−4
σ_ϕ	rad	1e−3	1e−3
σ_ρ	m	1e−4	1e−3
σ_{rp}	deg	5	5
σ_{z}	m	0.25	0.25

C. 仿真结果：自主水下航行器区域巡检

行业合作伙伴 Sonardyne 提供了 DVL-INS 的模拟输出及其对应的真实轨迹。DVL-INS 输出包含模拟自主水下航行器部署的纬度、经度、深度以及横滚-俯仰-偏航估计值。每个时间步均提供深度和航向状态的边缘方差估计，以及一个联合局部大地坐标系中的平面位置协方差估计可用。可获取30分钟、频率为5Hz的DVL-INS输出数据。请注意，Sonardyne对DVL-INS输出进行了大幅降级，以便更好地评估回环闭合缓解导航漂移的能力；这些数据并不反映Sonardyne商业产品的性能。

真实轨迹如图 7 所示，载具先沿一条联络线行驶，随后在大面积巡检区域内沿平面“割草机式航线”多次行驶。割草机式航线与联络线的八个交点处发生回环闭合。然后，按照第三节所述的方法，利用回环测量对先验“惯性导航系统”估计进行条件化处理，得到后验“惯性导航系统+回环”轨迹估计。接着，使用第四节 A 部分中的指标，将这两种估计与真实值解（“GT”）进行比较。预计在加速度白噪声框架中应用并传播回环测量，能够得到更准确、内部一致性更高的导航解及相应的点云地图。

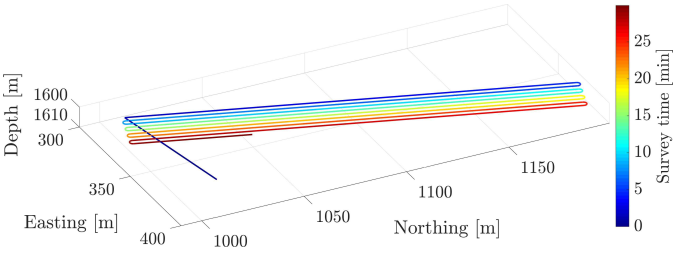
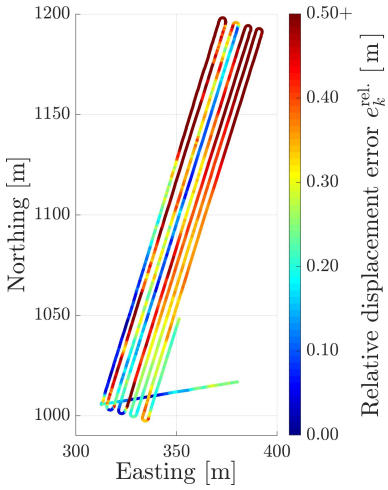
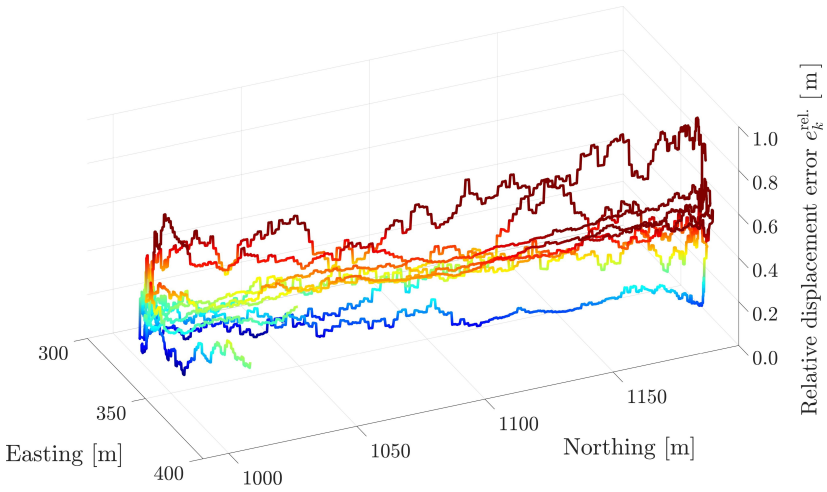


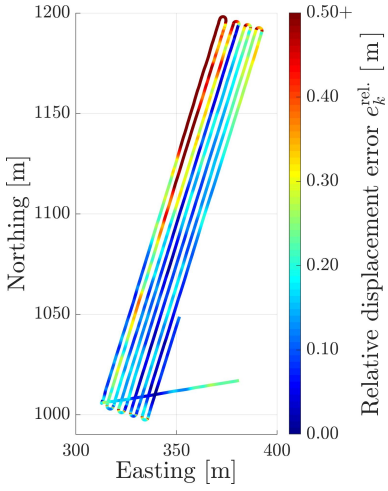
图7：模拟数据集。单条联络线左侧与多条“割草机式”检测航线相交。



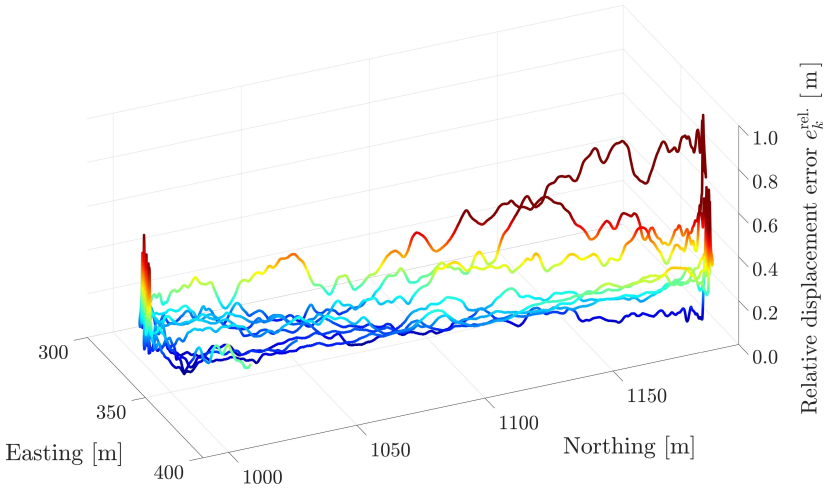
(a) 惯性导航系统俯视图



(b) 惯性导航系统等轴测图。热力图比例尺与图8a相同。



(c) 惯性导航系统+回环俯视图

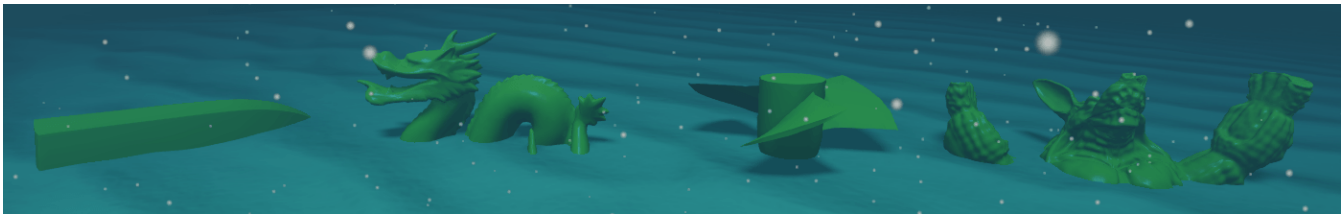


(d) 惯性导航系统+回环等轴测视图。热力图的尺度与图 8c 相同。

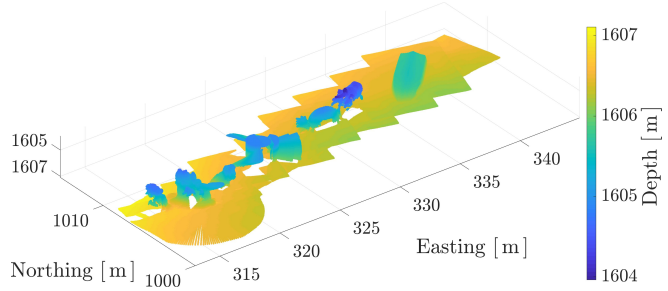
图 8：表示惯性导航系统和惯性导航系统+回环轨迹相对位移误差的热力图。左列为俯视图，右列为等轴测视图，用于展示 WNOA 项的平滑效应。请注意图 8d 远端的一系列尖峰，此处载具完成小半径转弯，以开始下一段测绘航线。

为展示精度提升以及 WNOA 项带来的平滑效果，图 8 将先验惯性导航系统轨迹和后验惯性导航系统+回环轨迹的相对位移误差 $e_k^{\text{rel.}}$以“热力图”形式呈现。从图 8a 可以明显看出，先验估计并不准确，轨迹中很大一部分的相对位移误差超过 0.5 米。引入回环测量提高了轨迹估计的精度，这一点可从整幅图中较冷的颜色看出

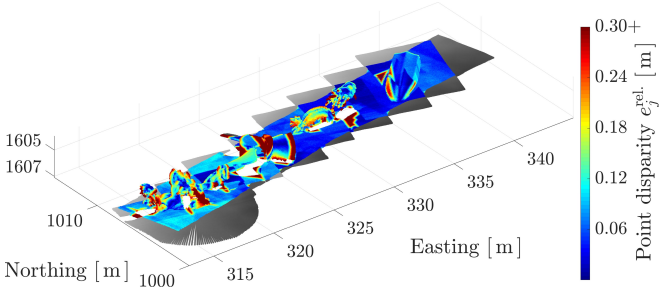
图 8c 中的热力图。图 8c 底部联络线附近的改善尤为明显，但在许多航次中，其影响会延伸至回环位置之外数百米，从而提高整个巡检区域的精度。0.5米的相对位移误差在这一尺度下或许显得微不足道，但对于某些海底作业（例如跨接管安装）而言，可能至关重要。



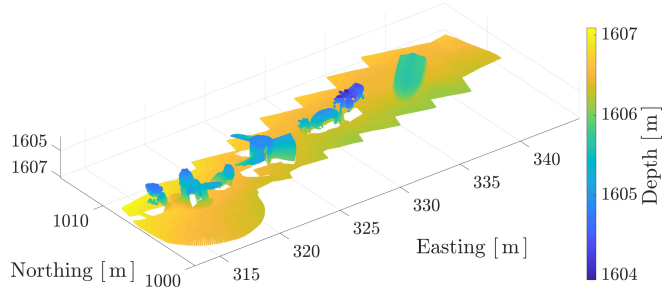
（a）在 Stonefish 自主水下航行器仿真器 [62] 中生成的水下场景。从左到右：船体、龙、螺旋桨和犰狳。船体和螺旋桨可在 Stonefish 中获取，而龙和犰狳来自斯坦福三维扫描库 [63]。



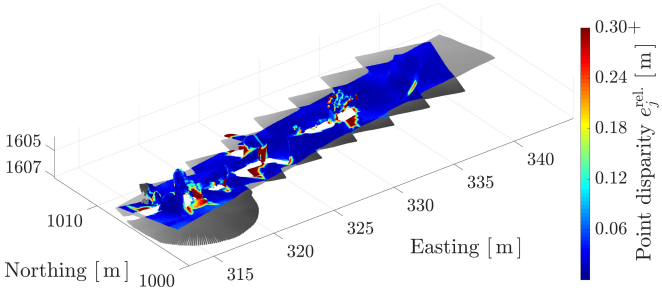
（b）先验高程（惯性导航系统）



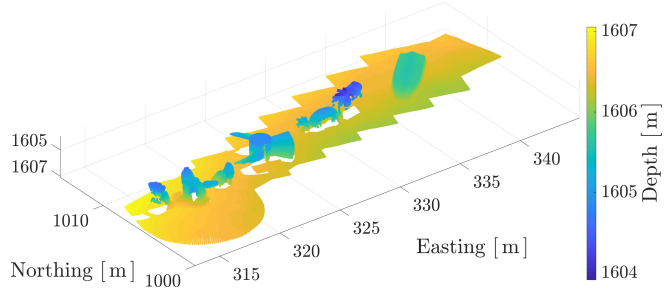
（c）先验视差（惯性导航系统）



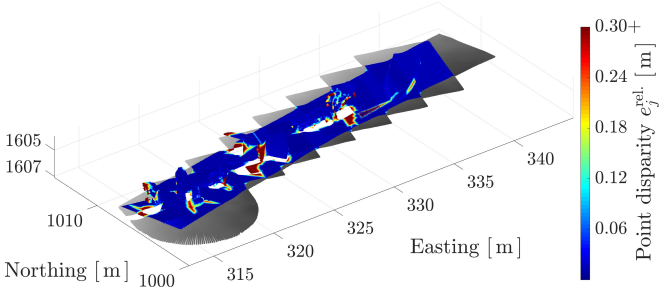
（d）后验高程（惯性导航系统+回环）



(e) 后验差异 (INS+回环)

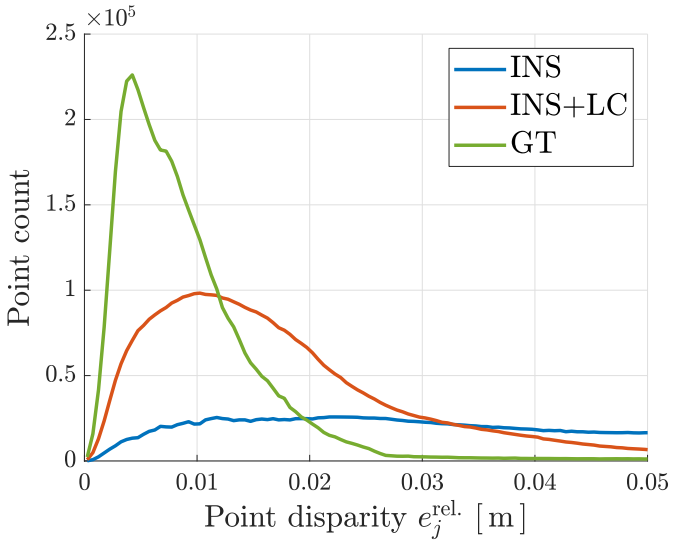


(f) 真实值高程 (INS+全球定位系统)

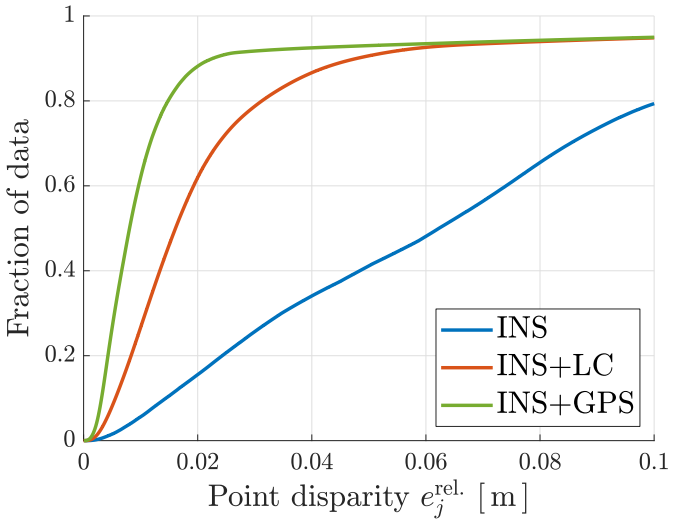


(g) 真实视差 (INS+全球定位系统)

图 9：在 Stonefish自主水下航行器仿真器中扫描三维场景 [62]，以评估点云地图的质量。图 9a 中的四个模型沿联络线布置在回环位置附近，并在自主水下航行器完成轨迹的过程中被多次扫描。右侧列中的点差异图清晰显示了轨迹估计中的误差。请注意，真实值地图图 9g 中点视差较大的区域是由距离-方位扫描仪的遮挡造成的。以不同朝向扫描三维模型会产生不同的遮挡模式，导致地图中出现互不重叠的区域。这进而导致与其他扫描中各点之间的最近邻距离较大，因此点差异误差也较高。



(a) 经验概率密度函数（经验概率密度函数）



(b) 经验累积分布函数（经验累积分布函数）

图 10：模拟自主水下航行器区域巡检数据集中三种导航解的点视差误差分布。INS+回环解较先前的 INS 解有显著改进，几乎消除了超过 6 厘米的误差。图 9c 的热力图显示，INS 解的误差分布相对均匀。

加速度白噪声运动先验带来的平滑效应可见于图 8b 和 8d，二者分别是图 8a 和 8c 的等轴测视图。此处，相对位移误差通过热力图和绘图高程共同呈现。先验 INS 估计中的相对位移误差出现了明显的阶跃变化，这是滤波器校正步骤的典型特征，可能反映了 DVL-INS 估计算法中 DVL 测量值的影响。相比之下，由于存在 WNOA 误差项，后验 INS+回环估计明显更加平滑。在此情境下，轨迹平滑十分重要，因为点云地图是通过将各个激光剖面配准到轨迹估计上生成的。存在阶跃变化的轨迹将

表IV：图 10b 经验累积分布函数的临界值。例如，对于 INS 解，95.45%（2σ）的点视差误差低于 23.39 厘米。模拟点云扫描中的遮挡区域导致经验累积分布函数分布上端出现较大误差。

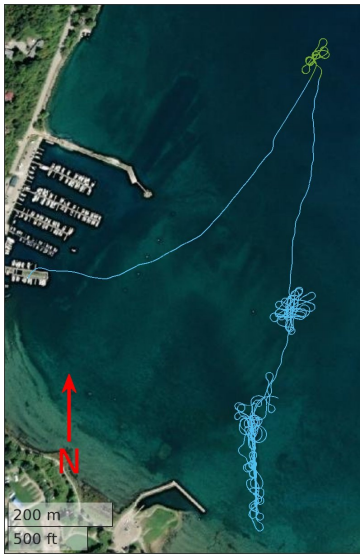
解	50 %	1σ	2σ	3σ
INS	6.23 厘米	8.32 厘米	23.39 厘米	56.15 厘米
惯性导航系统+回环	1.61 厘米	2.27 厘米	11.60 厘米	44.70 厘米
惯性导航系统+全球定位系统	0.81 厘米	1.13 厘米	11.48 厘米	45.64 厘米

生成一幅带有阶跃变化的地图，这必然会影响特征检测和点云配准等前端活动。平滑且自洽的地图在视觉上也更具吸引力，并能提高海底计量的精度。

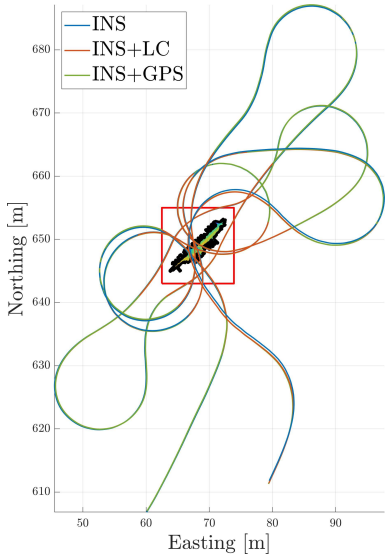
请注意图 8d 中相对位移误差的一系列“尖峰”，它们对应于后验轨迹估计。这些尖峰出现在每次小半径转弯的起始和结束处，表明 WNOA 项的平滑效应可能会抹去高曲率区域中的轨迹信息。基于几何的轨迹上采样方法，例如基于尺度不变密度的方法 [64]，预计能够解决这一问题，并将在未来的工作中进行探索。

为评估优化对地图质量的影响，我们构建了一个水下场景，并使用开源自主水下航行器仿真器 Stonefish [62] 对其进行扫描。我们沿真实轨迹采集了原始激光剖面，随后将其配准到 INS 和 INS+回环轨迹，分别生成先验和后验点云地图。Stonefish 中的三维场景，以及由此生成的高程图和点视差图，均展示于图 9 中。

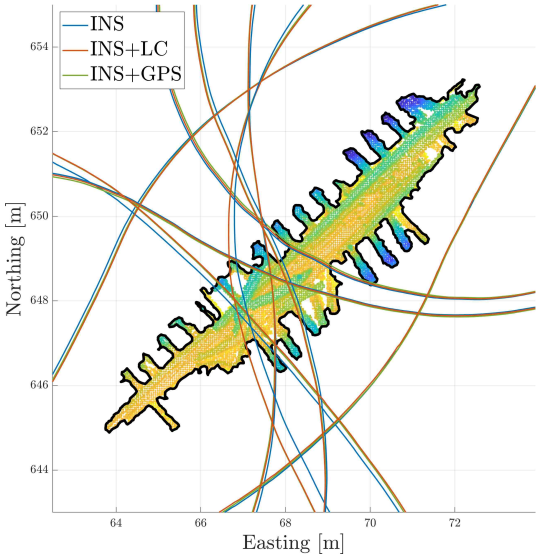
与真实视差图图 9g 相比，先验图图 9c 中的点视差误差普遍较大，表明该地图存在自相矛盾。相比之下，INS+回环解结合了回环测量和平滑处理来修正 INS 估计，因此大幅消除了视差误差。图 10 通过绘制三种解各自视差误差的经验概率密度函数（EPDF）和经验累积分布函数（ECDF），量化了这些改进。为进行定量比较，表IV列出了从 ECDF 曲线中提取的临界值。与 INS 解相比，INS+回环解使点视差误差较低的点所占比例更大，从而提升了解的效果。图 10b 尤其清楚地显示，INS+回环解在约 6 cm 处收敛至真实值解。根据图 9 图注中的说明，假设其余 5% 的误差位于遮挡区域，那么 INS+回环解实际上已消除了超过 6 cm 的点视差误差。相比之下，先前 INS 解中有 20 % 的视差误差超过 10 cm。这种由扫描对齐不佳造成的“重影”效应，即使在本次仿真的小范围内，也必然会使检测和计量任务变得复杂。按照第三节所述的方法，INS+回环解生成了平滑、清晰且自洽的点云地图，可据此准确测量相对距离。



(a) 测试轨迹，东北角的沉船区段以绿色标示。



(b) 沉船区段，展示不同的轨迹估计和沉船区域。



(c) 图11b中的方框区域，展示主沉船结构的轮廓。

图11：在加拿大安大略省怀尔顿科尔波伊湾进行的实测部署。完整轨迹见图11a。图11a东北角以绿色标示的沉船区段长0.58千米，完成该区段约需10.5分钟。轨迹八次经过沉船区域。不同的导航解汇总于表V。

D. 实测值：怀尔顿沉船

我们与 Voyis Imaging Inc. 在加拿大安大略省怀尔顿的科尔波伊湾开展了一次现场试验。该海湾水浅，分布着多艘沉船及其他人造结构，因此是 Voyis 水面船的理想测试地点。图 11a 中以蓝色显示了完整的测试轨迹。图 11a 东北角以绿色标出的轨迹段在一艘小型沉船上方往返航行了八次。图11b 详细展示了这一段轨迹，图11c 则显示了从湖床中分割出的沉船主体结构。这段轨迹全长约 580 米，耗时 10.5 分钟完成，是现场试验结果的重点。

水面船配备了 Sonardyne SPRINT- Nav 500 DVL辅助惯性导航系统、配备 u-blox ANN-MB系列高精度多频天线的 u-blox ZED-F9P 高精度 GNSS模块，以及 Voyis Insight Pro 水下激光扫描仪。全球导航卫星系统数据使用加拿大空间参考系统精密单点定位（CSRS-PPP）应用程序进行后处理 [65]，，该应用程序在一项近期研究中被发现能够以 2 厘米的精度测量二维位置（1σ） [66]。

根据这些数据生成了三种导航解。第一种解是DVL-INS航迹推算轨迹（“INS”），Sonardyne已将SPRINT- Nav 500的定位精度从标称值0。02%的行驶距离（CEP50）[52，Sec. 4.9.1.2][13]手动降低。DVL-INS输出频率为10 Hz。需要注意的是，该解代表了高端商业系统的先进水平，并将用于评估所提方法。第二种解称为“INS+LC”，应用第三节的方法，将回环测量纳入

表V：了解怀尔顿沉船场地数据集中的不同导航解。

解	描述
INS	带位置的推算式 DVL-INS 解 Sonardyne 人为降低了精度。
惯性导航系统+回环	经过航迹推算的 DVL-INS 轨迹估计 以回环测量为条件。原始 来自 DVL-INS 的传感器测量值 **无法获取**，且**未**将全球导航卫星系统数据用作其中一部分 此解 .

经全球导航卫星系统校正的惯性导航系统+全球定位系统和多普勒测速仪辅助惯性导航系统解。

DVL-INS航迹推算估计中。批处理在MATLAB中离线执行，在配备E3-1505M v5 CPU和16GB随机存取存储器的笔记本电脑上约需90秒收敛。需要注意的是，该解基于DVL-INS状态估计生成，无法使用原始*DVL-INS*传感器测量值。第三种解将DVL-INS输出与全球导航卫星系统数据融合，得到真值估计（“INS+GPS”）。三种导航解汇总于表V中，轨迹估计叠加显示在图11b和图11c的沉船区域上。

引入回环测量后，轨迹估计会更加准确，这可由相对位移误差衡量(70)。图12展示了相对于真实 INS+GPS 估计的相对位移误差，分别对应惯性导航系统纯惯性推算轨迹，以及随着闭环数量增加的 INS+LC 轨迹。回环

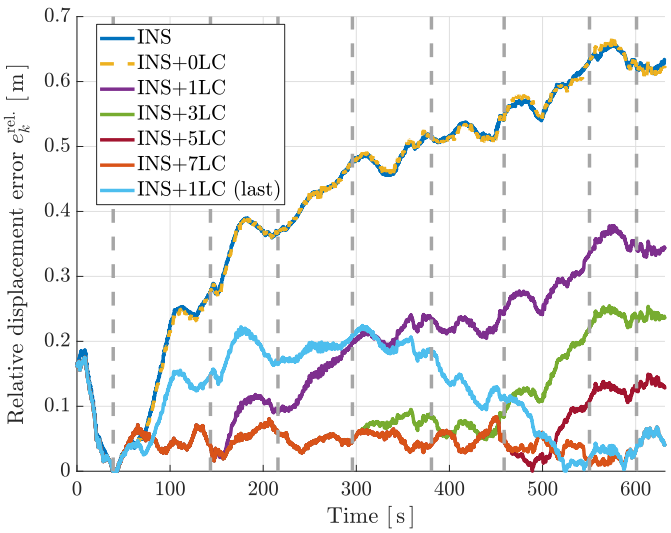


图12：纳入数量逐渐增加的闭环后的轨迹估计的相对位移误差。回环闭合位置以竖直虚线标示，“INS+XLC”表示生成估计时使用了前X个回环闭合。随着时间推移，纳入回环闭合可限制导航漂移。数值结果见表VI。

位置以垂直虚线标出，轨迹开始约40秒后首次观测到沉船。INS轨迹估计中的相对位移漂移不断增大，而随着应用的回环测量增多，最大位移误差则单调减小。正如图12中的青色曲线所示，即使仅在轨迹末端进行一次回环测量，也能有效限制相对位移漂移随时间的增长。表VI汇总了不同解的最大误差和最终误差占行驶距离的百分比；其中，“INS+1LC (last)”解的最终漂移误差仅占行驶距离的6.82e−3%。这一解表明，相较于最先进的多普勒测速仪-惯性导航系统，性能提升了一个数量级 [13]。值得注意的是，图12中的黄色虚线“INS+0LC”曲线表明，在没有回环测量时，后验解与先验多普勒测速仪-惯性导航系统解相差不大。这说明，即使没有回环测量，所提方法仍可用于平滑多普勒测速仪-惯性导航系统解，而不会牺牲解的精度。例如，表VI所列“INS-0LC”解的最大位置漂移误差仅为9毫米

表VI：图12中的漂移误差汇总，数值取自首次观察到沉船后的时段（40秒后）。

解	最大漂移 [米]	最终 %DT
INS	0.658	10.98e−2
惯性导航系统+0回环	0.667	10。82e−2
惯性导航系统+1回环	0.378	5。99e−2
惯性导航系统+3回环	0.255	4。12e−2
惯性导航系统+5回环	0.150	2.25e−2
惯性导航系统+7回环	0.084	6。83e−3
惯性导航系统+1回环（最后）	0.224	6.82e−3

大于“INS”解中观测到的最大漂移。然而，需要注意的是，所提方法旨在有针对性地应用于至少存在一个回环测量的情况。

除了图12中总结的相对位移误差外，还针对先验“INS”和后验“INS+LC”解，沿轨迹计算了相对位姿误差（69），其统计摘要见表VII。表VII中的相对姿态误差分解为机体坐标系横滚、俯仰和偏航，而最右列给出了机体坐标系相对位置误差欧几里得范数的统计数据。有趣的是，所提方法导致相对机体坐标系俯仰和横滚误差增加：其中位数分别从1.1e−3度和1.5e−5度增加至1.1e−1度和1.2e−1度。所提方法对相对机体坐标系偏航误差基本没有影响，而相对机体坐标系位置误差的趋势总体上与图12所绘制的相对位移误差趋势一致。例如，先验“INS”解中90%的机体坐标系位置误差低于0.630米，而后验“INS+LC”解中的对应值为0.108米。

横滚和俯仰误差增大可能令人担忧，但后验误差仍然较低且有界。这些误差很可能是在此次现场试验中，由惯性导航系统与激光雷达外参估计中的小角度误差，以及优化中采用的相对较弱的俯仰和横滚先验共同引入的（见式（38）和表III中的超参数σ_{rp}值）。更重要的是，在存在多个回环测量时，相对于机体的相对位置误差仍然较低且有界。

除测量离群值外，发现回环闭合能够提高轨迹精度，在传统的状态估计背景下并不特别令人意外。然而，这些结果是在遵循第 III 节的方法后取得的，

表VII：怀尔顿现场试验中计算的相对位姿误差（69）的汇总统计。相对姿态误差 $|\delta\phi_i^{\text{rel.}}|$按分量细分，最右列则给出了相对机体位置误差范数的统计数据。每种误差的累积统计数据按以下格式报告：50% · 75% · 90%。

解	$\lvert\delta\phi_1^{\text{rel.}}\rvert$ [度]	$\lvert\delta\phi_2^{\text{rel.}}\rvert$ [度]	$\lvert\delta\phi_3^{\text{rel.}}\rvert$ [度]	$\lVert\delta\boldsymbol{\rho}^{\text{rel.}}\rVert$ [米]
INS	1.1e−3 · 1.9e−3 · 2.5e−3	1.5e−3 · 2.4e−3 · 3.5e−3	1.5e−2 · 1.9e−2 · 2.2e−2	0.482 · 0.562 · 0.630
惯性导航系统+回环	1.1e−1 · 2.7e−1 · 5.3e−1	1.2e−1 · 3.8e−1 · 5.7e−1	1.5e−2 · 2.0e−2 · 2.2e−2	0.077 · 0.096 · 0.108

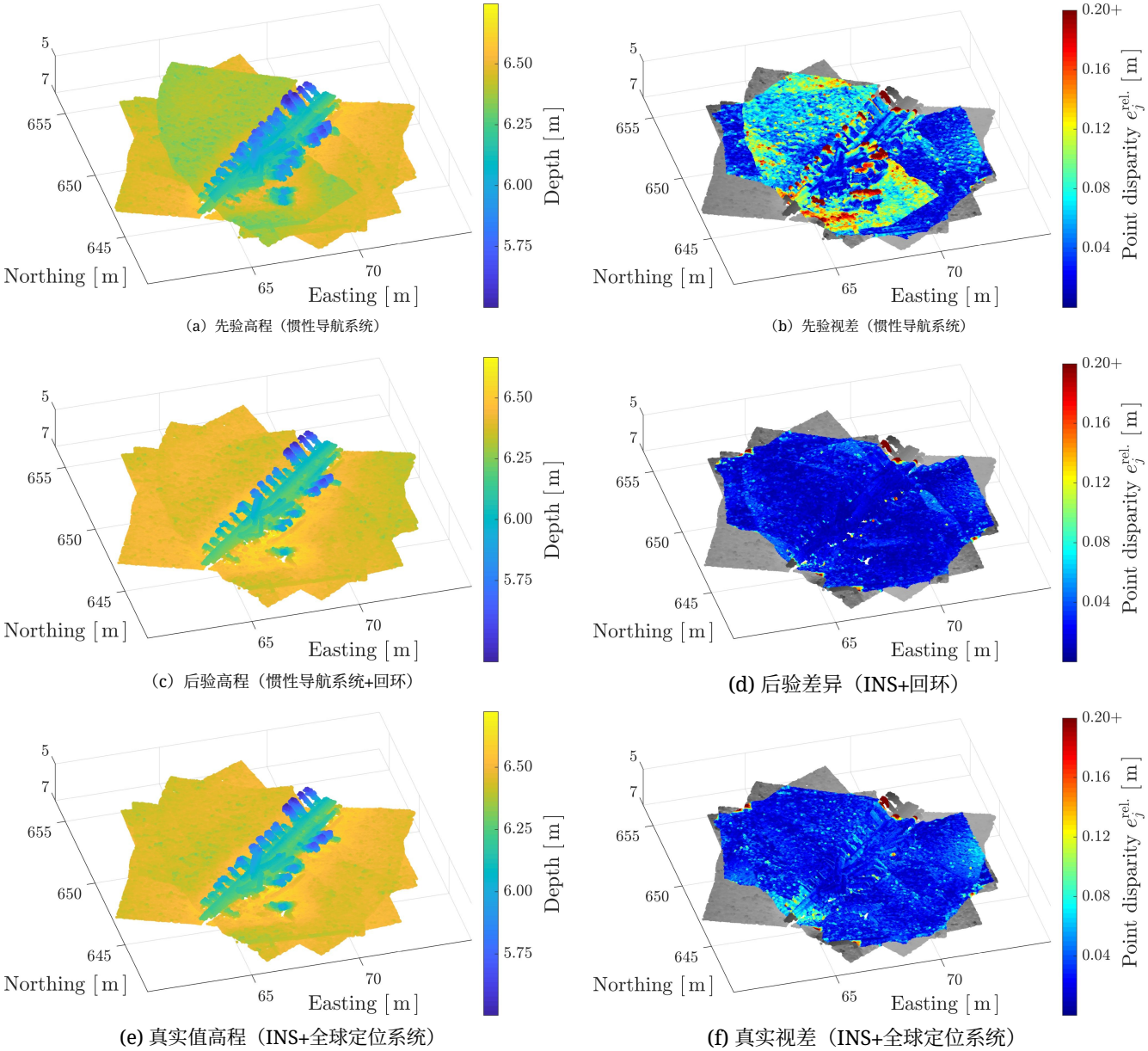
在无法获取 原始传感器测量、载体过程模型、外感传感器模型或传感器噪声与偏置参数规格的情况下。相反，回环校正通过图 6 所示的因子图平滑地融入 DVL-INS估计，从而提高了轨迹估计的精度。

纳入回环测量后，点云地图的一致性更高，这可通过点视差误差来衡量（71）。图 13 以热力图形式展示了三种导航解各自在沉船区域的点视差。我们针对沉船上方的八次航行分别计算视差，即某次航行中的每个点与其余七次航行中最近邻点之间的欧几里得距离。高精度的轨迹估计应能根据

组合扫描生成重叠紧密、轮廓清晰的点云地图，且点差异误差较低。

根据对图 13b 的定性评估，惯性导航系统纯惯性推算轨迹估计显然生成了自洽性不足的点云地图。沉船肋骨周围区域的点视差误差约为 20 厘米，而其中一次航迹因深度维度上的漂移，在海床上出现了相对较大的误差。相比之下，后验估计和真实值估计均生成了高度自洽的地图，整体点视差误差较低。

有趣的是，INS+LC 解生成的点云地图比真实值估计具有更好的自洽性。不过，仅凭图13很难定性判断这一点；图14展示了三种导航解各自的视差误差 EPDF 和 ECDF。ECDF 的临界值列于表 VIII。在图14a中，



(a) 先验高程（惯性导航系统）

(b) 先验视差（惯性导航系统）

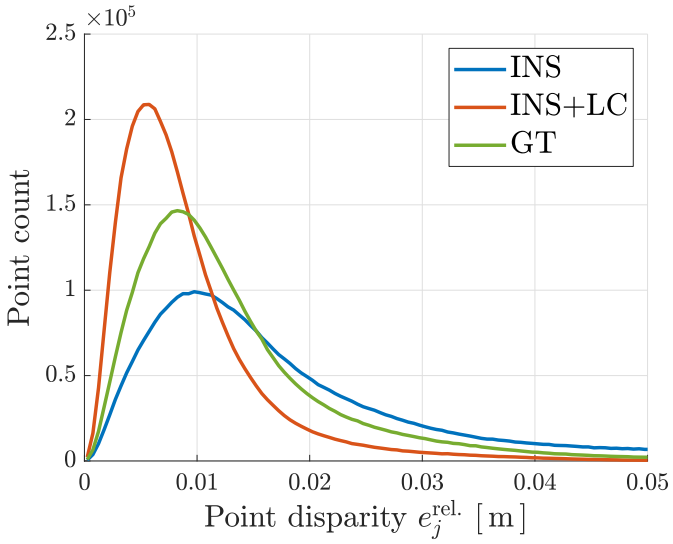
(c) 后验高程（惯性导航系统+回环）

(d) 后验差异（INS+回环）

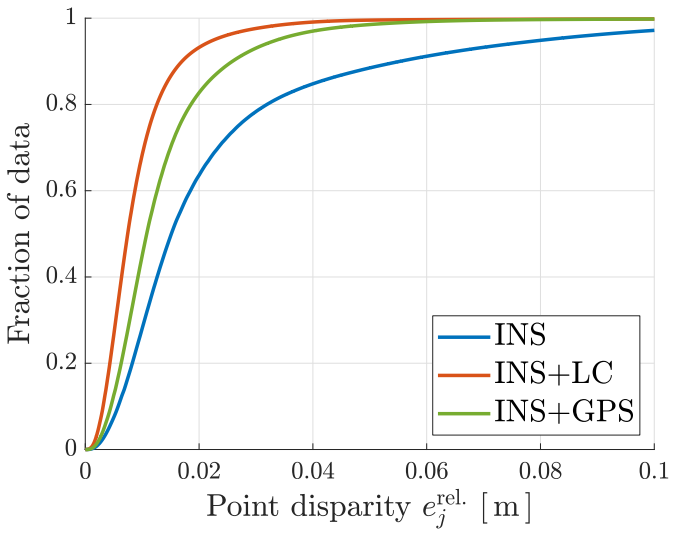
(e) 真实值高程（INS+全球定位系统）

(f) 真实视差（INS+全球定位系统）

图 13：可视化三种导航解在沉船区域的点差异误差。左列：颜色图表示深度，供参考。右列：颜色图表示点视差。



（a）经验概率密度函数（EPDF）



（b）经验累积分布函数（ECDF）

图14：怀尔顿沉船场数据集中三种导航解的点视差误差分布。后验 INS+回环 解生成的点云地图比真实值 INS+全球定位系统 解具有更好的一致性，这可能是导航残差和外参误差共同作用的结果。ECDF 的临界值汇总于表 VIII。

INS+LC 曲线的峰值位于 INS+GPS 曲线左侧，表明其总体点视差误差更低，因而点云地图的自洽性更好 [5]。这可能是由于真实值解中存在少量估计误差，同时扫描仪外参估计$\mathbf{T}_{b\ell}^{sz}$ （来自式（24））也存在少量误差。因此，INS+LC 解生成自洽性更好的地图并不令人意外，因为点云配准过程中所最小化的正是点视差误差（26）。有关使用先验和后验导航解生成的沉船区域更多图像，请参见附录B。

表VIII：图14b中ECDF的临界值。例如，对于INS 解，95.45% (2σ)的点视差误差低于8.51厘米。请注意，INS+回环 解优于INS+全球定位系统 解。

解	50 %	1σ	2σ	3σ
INS	1.51 厘米	2.23 厘米	8.42 厘米	18.11 厘米
惯性导航系统+回环	0.75 厘米	1.00 厘米	2.35 厘米	7.23 厘米
惯性导航系统+全球定位系统	1.08 厘米	1.45 厘米	3.49 厘米	8.63 厘米

再次强调，这种地图自洽性的提升是在无法使用典型状态估计问题中常见的标准要素的情况下实现的。将点云地图和由此产生的视差误差可视化，是验证闭环测量是否已成功应用，以及更新是否已沿整个轨迹平滑传播的直接方法。

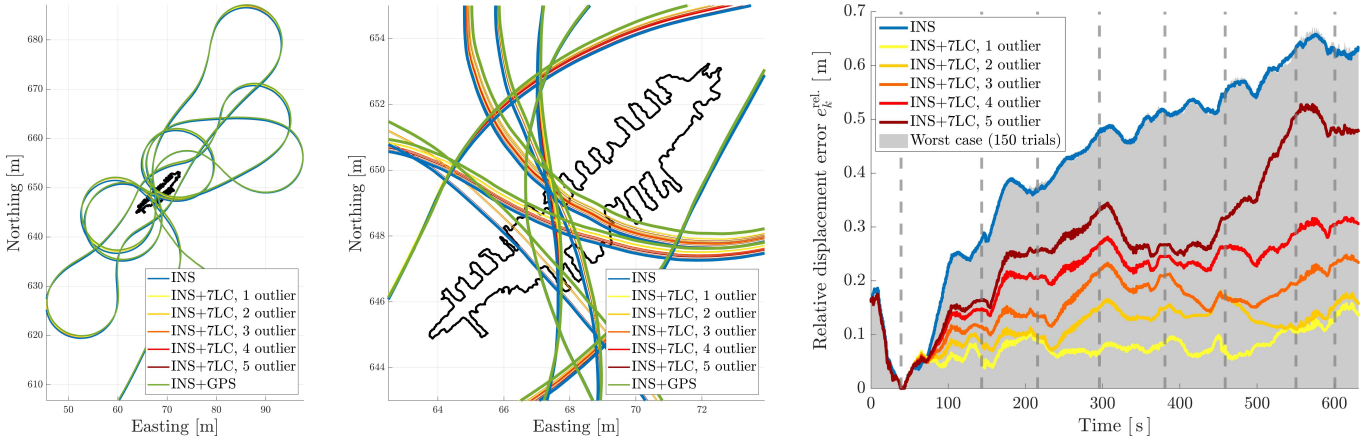
与GPS辅助解相比，利用闭环测量所带来的地图自洽性提升可能显得较为有限。然而，对于某些水下检查任务而言，厘米量级的改善可能具有重要意义，例如测量人造结构的变形。在这方面，第 III 节的方法为检测和计量学工作提供了有价值的补充。对于航位推算解而言，这一点尤其明显；但即使存在局部定位测量结果，例如长基线定位、超短基线定位或全球定位系统测量结果，这一结论仍然成立。

针对怀尔顿现场数据集开展了一项蒙特卡洛实验，以测试第三节B3中讨论的闭环测量离群值剔除方法的有效性。为进行该实验，从七个闭环测量中随机选取一至五个，并用随机生成的测量结果替换。对于每个离群值污染程度，均进行了三十次蒙特卡洛试验，总计150次试验。每个污染程度下的试验次数经过选择，以提供具有代表性的统计样本。此外，每个污染程度使用30次试验所得的实验结果，与每个程度使用20次和25次试验所得的结果非常相似。

离群测量的生成方式旨在模拟检测器/描述符研究在第 III-A2 节中通过实验观察到的离群值。离群位置测量采用均匀采样，使得$\|\mathbf{r}^{\text{xy}}\| \leq 5$ 米，且 $r^{\text{z}} \in [[-0.5\text{ 米 }0.5\text{ 米}] \cup [13.5\text{ 米 }14.5\text{ 米}]]$,，其中 $\mathbf{r}^{\text{out}} = \begin{bmatrix}(\mathbf{r})^{\text{xy}\mathsf{T}} & r^{\text{z}}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$。这既反映了用于检测回环候选项的平面搜索边界 (27)，也反映了第三节 A2 中讨论的距离“翻转”效应。离群姿态测量按照 $\phi_j^{\text{out}} \in (-\pi, \pi]$ 弧度 $j = 1,2,3$ 进行均匀采样。随后按照以下方式生成离群测量 $\Xi_{\ell_1\ell_2}^{\text{out}}$

$$\Xi_{\ell_1\ell_2}^{\text{out}} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\text{out}}(\boldsymbol{\phi}^{\text{out}}) & \mathbf{r}^{\text{out}} \\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}. \tag{73}$$

该实验的结果汇总于图 15 中。图 15a 绘制了全部 150 次蒙特卡洛试验，以及真实值“INS+GPS”轨迹和



(a) 150条蒙特卡洛轨迹 (b) 沉船区域 (c) 不同离群值污染程度下的平均导航漂移

图15：150次蒙特卡洛试验的轨迹估计及相应的相对漂移误差（70）。每次试验中，七个回环测量里有1至5个被离群测量（73）替换；每种离群值污染程度下均进行了30次试验。第三节B3中讨论的离群值剔除方法能够有效剔除错误回环测量，图15a中未见任何失败。图15b中的放大图显示，随着加入更多离群测量，轨迹从真实的“INS+全球定位系统轨迹”平稳地退化为先验“INS”估计。图15c中的相对位移误差图证实了这一点，其趋势与图12消融研究中首次观察到的测量移除趋势一致。图15c中的灰色区域显示了在全部150次试验中测得的每个时间步的最坏情况位置漂移。与先验“INS”估计的相对位移误差（蓝线）相比，所提方法在任意给定时间产生的估计均不比先验估计差，即使在离群率极高的情况下也是如此。

先验“INS”轨迹估计。图 15a 中未见明显的导航失效，表明自适应鲁棒代价函数能够有效剔除错误回环测量。图 15b 对沉船区域进行了放大，显示随着纳入的离群点增多，蒙特卡洛轨迹样本从真实值解向先验估计平稳衰减。在图 15c 的相对位移误差图中也可观察到这一现象，其中绘制了每个离群值污染程度下的平均相对 (x, y) 导航漂移（ 70）。离群点比例越高，相对漂移值越大；这一趋势令人联想到图12所总结的消融研究，在该研究中，回环测量被直接从解中移除。这为所提出的离群值剔除算法能够成功识别并移除错误回环测量提供了有力证据。

最后，图 15c 中的灰色区域显示了全部 150 次蒙特卡洛试验中每个时间步的最坏情况相对位移误差。与先验“INS”估计（蓝色曲线）相比，显然，对于该数据集，所提方法在任何给定时刻得到的最坏情况后验估计都不劣于先验估计，即使在异常值率极高的情况下也是如此。

V. 结论

本研究提出了一种新颖而全面的方法，系统地利用回环测量对商用现成多普勒测速仪（DVL）-惯性导航系统（INS）导航系统的输出进行约束，以提高最终水深图的自洽性 [4, 59] 。该方法结合相对位姿和加速度白噪声 [28] 误差项，在批量状态估计框架中平滑地整合这些测量。

本工作的首项贡献是开发了一种鲁棒前端算法，用于从复杂水下环境的三维扫描中计算高精度回环测量。其次，通过因子图优化框架，可将回环测量无缝融入现有状态估计中，而无需访问原始传感器测量值、传感器模型或传统状态估计问题中通常需要的其他信息。

通过使用水下激光扫描仪获取的回环测量，在模拟数据集和实测数据集上验证了所提方法的有效性。两项研究均采用相同的简单超参数结构，并取得了良好结果。对于实测结果，利用回环测量对按航位推算得到的 DVL-INS 估计进行条件约束，生成了自洽性显著更高的水下沉船点云地图。纳入全部七个回环测量后，在 576 米的轨迹上，最大相对位置漂移为 8.4 厘米，最终位置误差为行驶距离的 6.83e−3%。与未经辅助的商用 DVL-INS 系统相比，这一结果提升了一个数量级。此外，研究还证明所提方法对错误回环测量具有鲁棒性。

未来的工作将主要聚焦于通过期望最大化框架进行超参数训练，例如[67] 和 [68]。该算法将在更长、地形更多样的轨迹上进行测试，包括开阔海床 [8]。最后，未来的工作还可能纳入图像信息，包括传统的图像描述子和纹理点云地图。

致谢

作者谨向 Voyis 的 Ryan Wicks 致谢，感谢他提供实验数据和制导；并向 Sonardyne International 的 Martin Jørgensen 致谢，感谢他提供仿真数据并给予宝贵反馈。

参考文献

[1] A. Kim and R. M. Eustice，《利用视觉显著性进行自主水下船体检测的实时视觉同步定位与建图》，IEEE《机器人学汇刊》，第29卷，第3期，第719–733页，2013年。[2] S. Suresh, E. Westman, and M. Kaess，《采用折射校正的水下双目同步定位与建图，用于自主水下航行器定位》，IEEE《机器人与自动化快报》（RAL），第4卷，第2期，第692–699页，2019年。[3] S. Rahman, A. Q. Li, and I. Rekleitis，《SVIn2：一种结合声呐、视觉、惯性和深度传感器的水下同步定位与建图系统》，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2019年，第1861–1868页。[4] C. Roman and H. Singh，《一种自洽的水深测绘算法》，《实地机器人学杂志》，第24卷，第1-2期，第23–50页，2007年。[5] S. Barkby, S. B. Williams, O. Pizarro, and M. V. Jakuba，《采用分布式粒子建图的高效水深同步定位与建图无特征方法》，《实地机器人学杂志》，第28卷，第1期，第19–39页，2011年。[6] P. Ozog, N. Carlevaris-Bianco, A. Kim, and R. M. Eustice，《利用自主水下航行器进行船体检查与监视的长期建图技术》，《实地机器人学杂志》，第33卷，第3期，第265–289页，2016年。[7] A. Palomer, P. Ridao, and D. Ribas，《利用自主水下航行器和激光扫描仪，通过点云同步定位与建图检测水下结构》，《实地机器人学杂志》，第36卷，第8期，第1333–1344页，2019年。[8] T. Hitchcox and J. R. Forbes，《采用高斯过程回归的水深同步定位与建图点云配准流程》，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2020年，第4615–4622页。[9] L. Paull, S. Saeedi, M. Seto, and H. Li，《自主水下航行器导航与定位：综述》，IEEE《海洋工程学报》，第39卷，2014年，第149、131页，1，No. pp. – 。[10] M. V. Jakuba 等，《冰下自主水下航行器作业的长基线声学导航》，《实地机器人学杂志》，第25卷，第11-12期，第861–879页，2008年。[11] C. Cadena 等，《同步定位与地图构建的过去、现在与未来：迈向鲁棒感知时代》，IEEE《机器人学汇刊》，第32卷，第6期，第1309–1332页，2016年。[12] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan，《用于跟踪与导航的估计：理论、算法与软件》。John Wiley & Sons，2004年。[13] SPRINT-Nav 数据手册，SPRINT-Nav 500, Sonardyne，2021年6月。[在线]。网址：https://www.sonardyne.com/wp-content/uploads/ 2021/07/Sonardyne 8253 SPRINT Nav.pdf。[14] R. K¨ummerle, G. Grisetti, H. Strasdat, K. Konolige, and W. Burgard，《g2o：图优化通用框架》，载于 IEEE 机器人与自动化国际会议（ICRA）论文集，IEEE，2011年，第3607–3613页。[15] M. Kaess, H. Johannsson, R. Roberts, V. Ila, J. J. Leonard, and F. Dellaert，《iSAM2：利用贝叶斯树进行增量平滑与建图》，《国际机器人研究杂志》，第31卷，第2期，第216–235页，2012年。[16] F. Dellaert, M. Kaess, 等，《机器人感知的因子图》，《机器人学基础与趋势》，第6卷，第1-2期，第1–139页，2017年。[17] S. Barkby, S. B. Williams, O. Pizarro, and M. V. Jakuba，《基于轨迹地图的水深测绘粒子滤波同步定位与建图》，《国际机器人研究杂志》，第31卷，第12期，第1409–1430页，2012年。[18] A. Palomer, P. Ridao, and D. Ribas，《采用概率配准的多波束三维水下同步定位与建图》，《传感器》，第16卷，560，2016年4，No. p. 。[19] H. Johannsson, M. Kaess, B. Englot, F. Hover, and J. Leonard，《成像声呐辅助导航：用于自主水下港口监视》，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2010年，第4396–4403页。[20] A. Kim and R. M. Eustice，《用于机器人区域覆盖的主动视觉同步定位与建图：理论与实验》，《国际机器人研究杂志》，第34卷，第4- 5期，第457–475页，2015年。[21] P. V. Teixeira, M. Kaess, F. S. Hover, and J. J. Leonard，《利用基于声呐的体积子地图进行水下检测》，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2016年，第4288–4295页。[22] J. Li, M. Kaess, R. M. Eustice, and M. J ohnson-Roberson，《利用前视声呐进行位姿图同步定位与建图》，IEEE《机器人与自动化快报》（RAL）

，第3卷，第3期，第2330–2337页，2018年。

[23] T. D. Barfoot，《机器人状态估计》。剑桥大学出版社，2017年。[24] J. Sola、J. Deray 和 D. Atchuthan，“面向机器人状态估计的微型李理论”，arXiv预印本 arXiv:1812.01537，2018年。[25] J. Arsenault，“不变扩展卡尔曼滤波框架的实际考量与扩展”，硕士论文，机械工程系，麦吉尔大学，2019年。[26] G. S. Chirikjian，《随机模型、信息论与李群》，第2卷：解析方法与现代应用。施普林格科学与商业媒体，2011年，第2卷。[27] C. E. Rasmussen 和 C. K. I. Williams，《用于机器学习的高斯过程》。MIT出版社，2006年。[28] S. Anderson 和 T. D. Barfoot，“全面推进：用于SE(3)批量连续时间轨迹估计的精确稀疏高斯过程回归”，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2015年，第157–164页。[29] T. D. Barfoot、C. H. Tong 和 S. S¨arkk¨a，“将批量连续时间轨迹估计作为精确稀疏高斯过程回归”，载于《机器人学：科学与系统》（RSS），Citeseer，第10卷，2014年。[30] E. Eade，“面向计算机视觉的李群”，技术报告，2014年。[31] H. Ye、Y. Chen 和 M. Liu，“紧耦合三维激光雷达惯性里程计与建图”，载于 IEEE 机器人与自动化国际会议（ICRA）论文集，IEEE，2019年，第3144–3150页。[32] J. Lin 和 F. Zhang，“一种快速、完整、基于点云的激光雷达里程计与建图回环闭合方法”，arXiv预印本 arXiv:1909 11811，2019年。。[33] P. Babin、P. Gigu`ere 和 F. Pomerleau，“配准算法鲁棒函数分析”，载于 IEEE 机器人与自动化国际会议（ICRA）论文集，IEEE，2019年，第1451–1457页。[34] Y. Chen 和 G. Medioni，“通过配准多幅距离图像进行物体建模”，《图像与视觉计算》，第10卷，第3期，第145–155页，1992年。[35] K.-L. Low，“点到平面ICP表面配准的线性最小二乘优化”，北卡罗来纳大学教堂山分校，第4卷，第10期，第1–3页，2004年。[36] J. Neira 和 J. D. Tard´os，“在随机建图中使用联合兼容性检验进行数据关联”，《机器人与自动化汇刊》，第17卷，第6期，第890–897页，2001年。[37] H. Yang、J. Shi 和 L. Carlone，“TEASER：快速且可认证的点云配准”，IEEE《机器人学汇刊》，第37卷，333，2020 2，第314no. pp. – 。[38] R. B. Rusu、N. Blodow 和 M. Beetz，“用于三维配准的快速点特征直方图（FPFH）”，载于 IEEE 机器人与自动化国际会议（ICRA）论文集，IEEE，2009年，第3212–3217页。[39] D. G. Lowe，“尺度不变关键点的显著图像特征”，《国际计算机视觉期刊》，第60卷，第2期，第91–110页，2004年。[40] R. B. Rusu 和 S. Cousins，“三维时代已至：点云库（PCL）”，载于 IEEE 机器人与自动化国际会议（ICRA）论文集，IEEE，2011年，第1–4页。[41] Y. Zhong，“内在形状签名：用于三维目标识别的形状描述子”，载于 IEEE 计算机视觉国际会议（ICCV）研讨会，IEEE，2009年，第689–696页。[42] I. Sipiran 和 B. Bustos，“Harris 3D：用于三维网格兴趣点检测的 Harris 算子鲁棒扩展 ”，《视觉计算》，第27卷，第11期，第963–976页，2011年。[43] F. Tombari、S. Salti 和 L. Di Stefano，“用于局部表面描述的直方图唯一签名”，载于欧洲计算机视觉会议，施普林格，2010年，第356–369页。[44] Q.-Y. Zhou、J. Park 和 V. Koltun，“快速全局配准”，载于欧洲计算机视觉会议，施普林格，2016年，第766–782页。[45] M. A. Fischler 和 R. C. Bolles，“随机抽样一致性：一种用于模型拟合的方法及其在图像分析和自动制图中的应用”，《ACM通讯》，第24卷，395，1981 6，第381no. pp. – 。[46] D. Qian 、 G. Charland-Arcand 和 J. R. Forbes，“TWOLATE：使用加权最优线性姿态与平移估计器对点云进行完整配准”，载于 IEEE 控制技术应用会议论文集，IEEE，2020年，第43–48页。[47] M. Pauly、M. Gross 和 L. P. Kobbelt，“点采样表面的高效简化”，载于 IEEE 可视化会议，IEEE，2002年，第163–170页。[48] T. Hitchcox 和 J. R. Forbes，“测深点云配准中鲁棒代价函数的比较”，载于 IEEE/OES 自主水下航行器研讨会（AUV），IEEE，2020年，第1–6页。[49] J. M. Phillips、R. Liu 和 C. Tomasi，“用于最小化分数均方根偏差的离群值鲁棒ICP”，载于三维数字成像与建模国际会议，IEEE，2007年，第427–434页。[50] F. Pomerleau、F. Colas、R. Siegwart 和 S. Magnenat，“真实世界数据集上的ICP变体比较：开源库与实验方案

，*Autonomous Robots*，第34卷，第3期，第133–148页，2013年。

[51] M. Brossard、S. Bonnabel 和 A. Barrau，“一种三维 ICP 协方差估计的新方法”，IEEE《机器人与自动化快报》（RAL），第5卷第2期，页744–751，2020年。[52] J. Farrell，《辅助导航：结合高频传感器的GPS》。McGraw-Hill, Inc.，2008年。[53] C. Van Loan，“计算涉及矩阵指数的积分”，IEEE《自动控制汇刊》，第23卷第3期，页395–404，1978年。[54] N. S¨underhauf 和 P. Protzel，“用于鲁棒位姿图同步定位与建图的可切换约束”，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2012年，页1879–1884。[55] G. H. Lee、F. Fraundorfer 和 M. Pollefeys，“通过期望最大化实现鲁棒位姿图回环闭合”，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2013年，页556–563。[56] H. Yang、P. Antonante、V. Tzoumas 和 L. Carlone，“鲁棒空间感知的渐进式非凸优化：从非最小求解器到全局离群值剔除”，IEEE《机器人与自动化快报》（RAL），第5卷第2期，页1127–1134，2020年。[57] T. Hitchcox 和 J. R. Forbes，“注意间隙：面向多变量最小二乘问题的范数感知自适应鲁棒损失”，IEEE《机器人与自动化快报》（RAL），第7卷第3期，页7116–7123，2022年。[58] J. G. Mangelson、M. Ghaffari、R. Vasudevan 和 R. M. Eustice，“李代数中联合分布位姿的不确定性表征”，IEEE《机器人学汇刊》，第36卷第5期，页1371–1388，2020年。[59] R. K¨ummerle 等，“SLAM算法精度的测量方法”，Autonomous Robots，第27卷第4期，页387–407，2009年。[60] C. Roman 和 H. Singh，“用于机器人载具深海水深测绘的基于一致性的误差评估”，载于 IEEE 机器人与自动化国际会议（ICRA）论文集，IEEE，2006年，页3568–3574。[61] T. Y. Tang、D. J. Yoon 和 T. D. Barfoot，“用于 SE(3) 上连续时间轨迹估计的加加速度白噪声运动先验”，IEEE《机器人与自动化快报》（RAL），第4卷第2期，页594–601，2019年。[62] P. Cie´slak，“Stonefish：面向海洋机器人的先进开源仿真工具，配备 ROS 接口”，载于 OCEANS，IEEE，2019年，页1–6。[63] B. Curless 和 M. Levoy，“利用距离图像构建复杂模型的体积法”，载于 SIGGRAPH，1996年，页303–312。[64] G. Kurz、M. Holoch 和 P. Biber，“用于终身同步定位与建图的基于几何的图剪枝”，载于 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议（IROS）论文集，IEEE，2021年，页3313–3320。[65] P. T´etreault、J. Kouba、P. H´eroux 和 P. Legree，“CSRS-PPP：一项为GPS用户提供加拿大空间参考框架访问权限的互联网服务”，《Geomatica》，第59卷第1期，页17–28，2005年。[66] R. M. Alkan、S. Erol、I. M. Ozulu 和 V. Ilci，“后处理精密单点定位与实时绝对定位技术的精度比较”，《测绘学、自然灾害与风险》，第11卷第1期，页178–190，2020年。[67] J. N. Wong、D. J. Yoon、A. P. Schoellig 和 T. D. Barfoot，“用于 SE(3 1436, 2020 5, 2, 1429) 上连续时间轨迹估计的数据驱动运动先验”，IEEE《机器人与自动化快报》（RAL），第 卷第 期，页 – 。[68] T. D. Barfoot、J. R. Forbes 和 D. J. Yoon，“精确稀疏高斯变分推断及其在无导数批量非线性状态估计中的应用”，《国际机器人研究杂志》，第39卷，1502，2020年，第 期，页 – 。



Thomas Hitchcox 于2015年和2018年分别获得加拿大魁北克省蒙特利尔麦吉尔大学机械工程学士和硕士学位。他目前是麦吉尔大学机械工程系的博士候选人。其研究兴趣包括状态估计、计算机视觉，以及用于点云滤波和配准的鲁棒算法。



James Richard Forbes James Richard Forbes 于2006年获得加拿大安大略省滑铁卢滑铁卢大学机械工程（荣誉合作教育项目）应用科学学士学位，并于2008年和2011年分别获得多伦多大学航空航天研究所航空航天科学与工程应用科学硕士学位和哲学博士学位。James 目前是加拿大魁北克省蒙特利尔麦吉尔大学机械工程系副教授兼威廉·道森学者。James 是智能机器中心（CIM）的成员，也是决策分析研究组（GERAD）的成员。James 于2016年获麦吉尔机械工程师协会（MAME）年度教授奖，2018年获1944届工程班杰出教学奖，并于2020年获 Carrie M. Derick研究生指导与教学奖。James 的研究重点是机器人系统的导航、制导与控制。

附录 A 支持性推导

A. 引言

本附录旨在详细推导《通过基于激光的回环闭合提升水下建图的自洽性》Section III-B2 中出现的先验、过程和回环闭合雅可比矩阵。Section A-B 回顾矩阵李群理论中的关键恒等式，并在 Section A-C 回顾加速度白噪声（WNOA）运动先验 [A1]。Section A-D 探讨 WNOA 误差运动学。最后，在 Section A-E 推导所需的雅可比矩阵。本附录旨在让读者能够理解这些推导，并在文中标明关键步骤和恒等式。如需更详细地了解矩阵李群理论，请参阅文中引用的参考文献，尤其是 [A2] 和 [A3]。

B. 预备知识

1) 矩阵李群

矩阵李群 G 是由实可逆 $n \times n$ 矩阵构成的集合，并且在矩阵乘法下封闭。每个矩阵李群都对应一个矩阵李代数 $\mathfrak{g}$，其定义为群单位元 $\mathfrak{g} \triangleq T_{\mathbf{1}}G$处的切空间。矩阵李代数是一个向量空间，在李括号运算 [A4，第 10.2 节6]下封闭。通常，使用矩阵李代数元素的等距表示会更方便，即 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$，其中 $\boldsymbol{\xi}^\wedge \in \mathfrak{g}$。

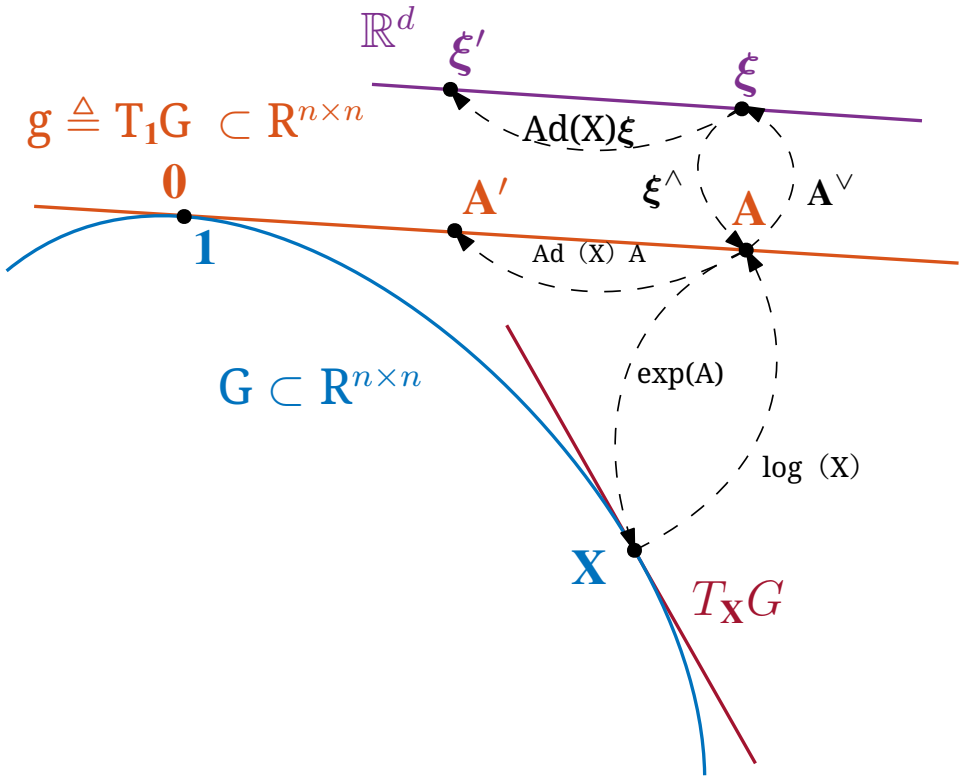
李群及其对应的李代数通过指数映射相互关联。对于矩阵李群，这就是矩阵指数 [A2，第 7.1 节3]。对于 $\mathbf{X} \in G$，可得如下形式的表达式

$$\mathbf{X} = \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge), \tag{A.1}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}^\wedge$ 是$\mathbf{X}$ 在 $\mathfrak{g}$中的表示，而 $\boldsymbol{\xi}$ 是$\mathbf{X}$在 $\mathbb{R}^d$中的表示。最后，使用矩阵对数从矩阵李群映射到矩阵李代数，如下所示：

$$\boldsymbol{\xi}^\wedge = \log(\mathbf{X}). \tag{A.2}$$

矩阵李群、其对应的矩阵李代数以及等距空间 $\mathbb{R}^d$之间的关系，以及本文中讨论的其他几个量，如图A.1所示。该图参考了 [A5]，并作了修改。



图A.1：矩阵李群，修改自 [A5]。图中展示了矩阵李群元素$\mathbf{X}$、其矩阵李代数表示$\mathbf{A} = \boldsymbol{\xi}^\wedge$及其 $\mathbb{R}^d$ 表示 $\boldsymbol{\xi}$之间的映射。请注意伴随算子Ad(·)与伴随矩阵、**Ad**(·)之间的区别，详见 A-B4 节。所有扰动都在矩阵李代数 $\mathfrak{g}$ （橙色）中建模，该代数定义为群单位元处的切空间。

2）矩阵李群上的误差与扰动

定义矩阵李群误差 [A6]有四种方式。这些方式及其对应的扰动方案汇总于表 A.1。误差定义与扰动方案相互关联。例如，选择左不变误差定义，就必须采用左不变扰动方案。为说明这一点，请考虑

$$\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}\bar{\mathbf{X}}, \tag{A.3a}$$
$$\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge) = \mathbf{X}^{-1}\bar{\mathbf{X}},$$
$$\mathbf{X}\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge) = \mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}\bar{\mathbf{X}},$$
$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge), \tag{A.3b}$$

其中，(A.3a) 是左不变矩阵李群误差，(A.3b) 是左不变扰动方案。本文采用左不变误差定义。

3）*Baker-Campbell-Hausdorff*（*BCH*）公式

B CH 方程描述如何组合矩阵李代数 [A4, 第 10.2.7 节中的元素],

$$\mathbf{c}^\wedge = \log\left(\exp(\mathbf{a}^\wedge)\exp(\mathbf{b}^\wedge)\right), \tag{A.4}$$

其中 $\mathbf{a}^\wedge$，$\mathbf{b}^\wedge$，$\mathbf{c}^\wedge \in \mathfrak{g}$。因此，通过应用指数映射，$\mathfrak{g}$ 的元素可以在群 G 上正确组合。然而，以下近似

$$\mathbf{c} \approx \mathbf{a} + \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\mathbf{a})^{-1}\mathbf{b}, \tag{A.5}$$

若**b**较小，则成立 较小 [A2, 第 7.1 节。5], 其中$\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})$ 是 G 的右雅可比矩阵。以下近似 ,

$$\mathbf{c} \approx \mathbf{a} + \mathbf{b}, \tag{A.6}$$

当**a** 和 **b** 都较小时成立。这导出了以下三个与 BCH 方程相关的有用恒等式 ,

$$\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge) \approx \exp\left((\boldsymbol{\xi} + \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})^{-1}\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge\right), \tag{A.7a}$$
$$\exp((\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi})^\wedge) \approx \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp\left((\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})\delta\boldsymbol{\xi})^\wedge\right), \tag{A.7b}$$
$$\exp(\delta\boldsymbol{\xi}_1^\wedge)\exp(\delta\boldsymbol{\xi}_2^\wedge) \approx \exp\left((\delta\boldsymbol{\xi}_1 + \delta\boldsymbol{\xi}_2)^\wedge\right). \tag{A.7c}$$

4) 伴随算子与伴随矩阵

伴随算子将群单位元附近扰动的影响映射到其他群元素。对于$\mathbf{X} \in G$ 和$\boldsymbol{\xi}^\wedge \in \mathfrak{g}$，伴随算子 $\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 定义为 [A7，第 2 节。5]

$$\mathrm{Ad}(\mathbf{X})\boldsymbol{\xi}^\wedge \triangleq \mathbf{X}\boldsymbol{\xi}^\wedge\mathbf{X}^{-1}. \tag{A.8}$$

伴随矩阵 $\mathbf{Ad} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 直接编码伴随算子对 $\mathbb{R}^d$ [A3],的影响

$$\mathbf{Ad}(\mathbf{X})\boldsymbol{\xi} \triangleq \left(\mathbf{X}\boldsymbol{\xi}^\wedge\mathbf{X}^{-1}\right)^\vee. \tag{A.9}$$

伴随矩阵也可以用左、右群雅可比矩阵 [来定义 A2，第 7.1 节。5],

$$\mathbf{Ad}(\mathbf{X}) \triangleq \mathbf{J}^{\ell}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})^{-1}, \tag{A.10}$$

其中 $\mathbf{J}^{\ell}(\boldsymbol{\xi})$ $=\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(-\boldsymbol{\xi})$。最后，伴随矩阵在矩阵李代数中的形式为

$$\left(\mathbf{ad}(\boldsymbol{\xi}_1^\wedge)\boldsymbol{\xi}_2\right)^\wedge \triangleq \left[\boldsymbol{\xi}_1^\wedge, \boldsymbol{\xi}_2^\wedge\right] = \boldsymbol{\xi}_1^\wedge\boldsymbol{\xi}_2^\wedge - \boldsymbol{\xi}_2^\wedge\boldsymbol{\xi}_1^\wedge, \tag{A.11}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_1^\wedge, \boldsymbol{\xi}_2^\wedge \in \mathfrak{g}$和 $[\cdot,\cdot]$ 是李括号 [A4，第 10.2 节。6]。**Ad** 和 **ad** 通过指数映射相关联,

$$\mathbf{Ad}(\mathbf{X}) = \exp\left(\mathbf{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\right), \tag{A.12}$$

其中 $\mathbf{X} = \exp(\{v4)$。

表 A.1：矩阵李群误差定义及相应的扰动方案。

误差定义	矩阵李群误差	扰动方案
右不变	$\delta\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{-1}$	$\mathbf{X} = \exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\bar{\mathbf{X}}$
右扰动	$\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}\bar{\mathbf{X}}^{-1}$	$\mathbf{X} = \exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\bar{\mathbf{X}}$
左不变	$\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}\bar{\mathbf{X}}$	$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)$
左扰动	$\delta\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{-1}$	$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)$

C. 加速度白噪声运动先验

加速度白噪声（WNOA）运动先验在 [A1],的基础上稍作修改，可概括为以下一组非线性随机微分方程（SDE）：

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t)\boldsymbol{\varpi}_b(t)^\wedge, \tag{A.13a}$$
$$\dot{\boldsymbol{\varpi}}_b(t) = \mathbf{w}_b(t), \tag{A.13b}$$
$$\mathbf{w}_b(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mathcal{Q}}\delta(t-t')), \tag{A.13c}$$

其中，包含时间参数是为了强调（A.13）在连续时间内演化，而下标（·）$_b$ 则是为了强调广义速度 $\boldsymbol{\varpi}_b$ 是机体系量。WNOA先验促使轨迹始终保持恒定的机体中心速度（平滑）。导航状态定义为以下有序对

$$\mathbf{X} = (\mathbf{T}, \boldsymbol{\varpi}) \in SE(3) \times \mathbb{R}^6, \tag{A.14}$$

其中$\mathbf{T} \in SE(3)$和 $T\boldsymbol{\varpi}^\wedge \in \mathfrak{g}$，其中 T 是时间增量。按照位姿的左不变扰动方案，导航状态的扰动形式为

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge), \tag{A.15a}$$
$$\boldsymbol{\varpi} = \bar{\boldsymbol{\varpi}} + \delta\boldsymbol{\varpi}. \tag{A.15b}$$

方程（A.13）可分解为一组确定性均值方程，

$$\dot{\bar{\mathbf{T}}} = \bar{\mathbf{T}}\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge, \tag{A.16a}$$
$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varpi}}} = \mathbf{0}, \tag{A.16b}$$

以及一个用于描述扰动的独立随机微分方程 [A1],

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\\ \delta\dot{\boldsymbol{\varpi}}(t)\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\xi}(t)\\ \delta\boldsymbol{\varpi}(t)\end{bmatrix} + \mathbf{L}\,\delta\mathbf{w}(t), \tag{A.17}$$

其中 $\mathbf{L} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}^\mathsf{T}$，且

$$\delta\mathbf{w}(t) \sim \mathcal{GP}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mathcal{Q}}\delta(t-t')). \tag{A.18}$$

为了构建批量　　估计问题，必须推导连续时间误差运动学**A** 并将其离散化　　d.

D. 在 $SE(3) \times \mathbb{R}^6$ 上推导加速度白噪声状态误差运动学

本节推导加速度白噪声状态误差运动学。首先通过对导航状态运动学进行线性化，得到连续时间状态误差运动学，然后通过矩阵指数精确地将其离散化。

按照扰动方案 (A.15)，近似 $\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge) \approx (\mathbf{1} - \delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)$，并忽略高阶项后，对连续时间位姿运动学 (A.13a) 进行扰动，得到

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}} &= \mathbf{T}\boldsymbol{\varpi}^\wedge,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\bar{\mathbf{T}}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\big) &= \bar{\mathbf{T}}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)(\bar{\boldsymbol{\varpi}} + \delta\boldsymbol{\varpi})^\wedge,\\
\dot{\bar{\mathbf{T}}} - \dot{\bar{\mathbf{T}}}\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge - \bar{\mathbf{T}}\delta\dot{\boldsymbol{\xi}}^\wedge &\approx \bar{\mathbf{T}}\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge + \bar{\mathbf{T}}\delta\boldsymbol{\varpi}^\wedge - \bar{\mathbf{T}}\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge,\\
\bar{\mathbf{T}}\delta\dot{\boldsymbol{\xi}}^\wedge &= -\bar{\mathbf{T}}\delta\boldsymbol{\varpi}^\wedge + \bar{\mathbf{T}}\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge - \bar{\mathbf{T}}\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge,\\
\delta\dot{\boldsymbol{\xi}}^\wedge &= -\delta\boldsymbol{\varpi}^\wedge + \delta\boldsymbol{\xi}^\wedge\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge - \bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge,\\
\delta\dot{\boldsymbol{\xi}} &= -\mathbf{ad}(\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)\delta\boldsymbol{\xi} - \delta\boldsymbol{\varpi}.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

方程（A.19）描述了连续时间位姿误差运动学。将（A.19）代入（A.17）可得

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)\\ \delta\dot{\boldsymbol{\varpi}}(t)\end{bmatrix}}_{\delta\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\mathbf{ad}(\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge) & -\mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(t)}\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\xi}(t)\\ \delta\boldsymbol{\varpi}(t)\end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}(t)}\delta\mathbf{w}(t), \tag{A.20}$$

该式描述了连续时间状态误差运动学。

现在将对连续时间状态误差运动学进行离散化，以便在 A-E2节推导离散时间批量雅可比矩阵时，对解进行验证。矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 通过矩阵指数 [A8, Sec. 3.5.4] 精确离散化。

考虑 $\mathbf{A}_{k-1} = \exp(T\mathbf{A})$，其中 $T = t_k - t_{k-1}$，$\mathbf{A}^n$ 的前几次幂为

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{ad}(\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^2 & \mathbf{ad}(\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{A.21a}$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} -\mathbf{ad}(\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^3 & -\mathbf{ad}(\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{A.21b}$$

矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 不幸地不是幂零矩阵，但注意到它可以写成闭式形式：

$$-\mathbf{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge) = \mathbf{ad}(-\boldsymbol{\xi}^\wedge), \tag{A.22a}$$

$$\exp(\mathbf{ad}(\boldsymbol{\xi}^\wedge)) = \mathbf{Ad}(\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)). \tag{A.22b}$$

将 $\mathbf{A}_{k-1} = \exp(T\mathbf{A})$ 的前几项按分量展开，

$$\begin{aligned}
\exp(T\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1}^{11} & \mathbf{A}_{k-1}^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_{k-1}^{11} &= \mathbf{1} + \mathbf{ad}(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge) + \frac{1}{2}\mathbf{ad}(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^2 + \frac{1}{6}\mathbf{ad}(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^3 + \cdots, \\
\mathbf{A}_{k-1}^{12} &= -T\mathbf{1} - \frac{T}{2}\mathbf{ad}(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge) - \frac{T}{6}\mathbf{ad}(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^2 + \cdots, \\
\exp(T\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{ad}(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^n & -T\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)!}\mathbf{ad}(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}^\wedge)^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_{k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^\wedge)) & -T\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

矩阵$\mathbf{A}_{k-1}$ 描述了 WNOA 运动先验的离散时间状态误差运动学。

E. 推导批量雅可比矩阵

本节推导先验、过程和回环闭合雅可比矩阵。每个推导都从相应的离散时间误差定义开始，并使用 A-B 节中给出的恒等式得出最终结果。请注意，$\bar{(\cdot)}$ 用于表示状态均值估计，而 $\tilde{(\cdot)}$ 用于表示由传感器测量或先验信息生成的状态估计。

1) 推导先验误差的雅可比矩阵

采用左不变位姿误差定义时，先导航状态误差为

$$\mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0^{\xi} \\ \mathbf{e}_0^{\varpi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log\left(\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{Y}_0\right)^\vee \\ \boldsymbol{\varpi}_0 - \boldsymbol{\psi}_0 \end{bmatrix}, \tag{A.24}$$

其中，$(\mathbf{Y}_0, \boldsymbol{\psi}_0)$ 是第一个导航状态的先验估计。目标是对 (A.24) 关于设计变量 $\mathbf{T}_0$ 和 $\boldsymbol{\varpi}_0$ 进行一阶扰动，以求得雅可比矩阵。对于先验位姿误差，将使用 A-B3 节中给出的 BCH 恒等式 (A.7)，对所得表达式进行变换，使其形式与表 A.1 中引入的左不变误差定义相符。令 $\delta\mathbf{T}_0 = \exp((\mathbf{e}_0^{\xi})^\wedge)$、$\tilde{\mathbf{T}}_0 = \mathbf{Y}_0$，并遵循左不变扰动方案 (A.15a)，先验位姿误差线性化为

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{T}_0 &= \mathbf{T}_0^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_0 \\
&= \mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{Y}_0 \\
&= \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_0^\wedge)\bar{\mathbf{T}}_0^{-1}\bar{\mathbf{Y}}_0\exp(-\delta\boldsymbol{\eta}_0^\wedge) \\
&= \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_0^\wedge)\delta\bar{\mathbf{T}}_0\exp(-\delta\boldsymbol{\eta}_0^\wedge) \\
&= \delta\bar{\mathbf{T}}_0\,\delta\bar{\mathbf{T}}_0^{-1}\exp(\delta\boldsymbol{\xi}_0^\wedge)\delta\bar{\mathbf{T}}_0\exp(-\delta\boldsymbol{\eta}_0^\wedge) \\
&= \delta\bar{\mathbf{T}}_0\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_0^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_0)^\wedge)\exp(-\delta\boldsymbol{\eta}_0^\wedge).
\end{aligned} \tag{A.25a}$$

注意，利用伴随矩阵 (A.9)，(A.25a) 中的平均先验位姿误差 $\delta\mathbf{T}_0$ 已被移至最左侧，与左不变误差的形式一致。然而，(A.25a) 中包含两个 exp(·) 项，必须将它们合并，才能符合左不变误差定义。利用 BCH恒等式 (A.7c) 合并 (A.25a) 中的扰动，并继续推导，

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{T}_0 &\approx \delta\bar{\mathbf{T}}_0\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_0^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_0 - \delta\boldsymbol{\eta}_0)^\wedge), \\
\exp((\mathbf{e}_0^{\xi})^\wedge) &= \exp((\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^\wedge)\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_0^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_0 - \delta\boldsymbol{\eta}_0)^\wedge).
\end{aligned} \tag{A.25b}$$

最后，为得到线性表达式，利用 BCH恒等式 (A.7a) 合并 (A.25b) 中矩阵李代数上的所有项，

$$\begin{aligned}\exp((\mathbf{e}_0^{\xi})^{\wedge}) \approx\ & \exp((\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi}+\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1}(\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_0^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_0-\delta\boldsymbol{\eta}_0))^{\wedge}),\\ \mathbf{e}_0^{\xi}=\ & \bar{\mathbf{e}}_0^{\xi}+\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1}(\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_0^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_0-\delta\boldsymbol{\eta}_0).\end{aligned} \tag{A.25c}$$

为简化与先验位姿扰动 $\delta\boldsymbol{\xi}_0$ 相关的雅可比矩阵，在（A.25c）中使用恒等式（A.10），得到

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\mathbf{X}^{-1}) &= \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})^{-1}\,\mathbf{Ad}((\exp(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}))^{-1})\\ &= \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\xi})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\exp(-\boldsymbol{\xi}^{\wedge}))\\ &= \mathbf{J}^{\ell}(-\boldsymbol{\xi})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\exp(-\boldsymbol{\xi}^{\wedge}))\\ &= \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(-\boldsymbol{\xi})^{-1}\\ &= \mathbf{J}^{\ell}(\boldsymbol{\xi})^{-1}.\end{aligned} \tag{A.26}$$

将其应用于（A.25c），线性化的先验位姿误差为

$$\mathbf{e}_0^{\xi}=\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi}+\mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1}\delta\boldsymbol{\xi}_0-\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1}\delta\boldsymbol{\eta}_0. \tag{A.27}$$

先验广义速度误差线性化为

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0^{\varpi} &= (\bar{\boldsymbol{\varpi}}_0+\delta\boldsymbol{\varpi}_0)-(\bar{\psi}_0+\delta\psi_0)\\ &= \bar{\mathbf{e}}_0^{\varpi}+\delta\boldsymbol{\varpi}_0-\delta\psi_0.\end{aligned} \tag{A.28}$$

结合（A.27）和（A.28），得到先验雅可比矩阵:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\mathbf{e}_0^{\xi}\\ \delta\mathbf{e}_0^{\varpi}\end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{e}_0}=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_0^0}\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\xi}_0\\ \delta\boldsymbol{\varpi}_0\end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{x}_0}+\underbrace{\begin{bmatrix}-\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_0^{\xi})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_0}\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\eta}_0\\ \delta\psi_0\end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{y}_0}. \tag{A.29}$$

2）推导 *WNOA*误差的雅可比矩阵

采用左不变位 姿态误差定义，加速度白噪声过程（恒定本体速度）导航状态误差为 e

$$\mathbf{e}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_k^{\xi}\\ \mathbf{e}_k^{\varpi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\log\left(\mathbf{T}_k^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_k\right)^{\vee}\\ \boldsymbol{\varpi}_k-\boldsymbol{\varpi}_{k-1}\end{bmatrix}. \tag{A.30}$$

目标是使用 BCH恒等式 (A.7) 对 (A.30) 进行线性化，从而得到一个形式类似于左不变误差的表达式。给定 $\delta\mathbf{T}_k=\exp((\mathbf{e}_k^{\xi})^{\wedge})$ 和 $\tilde{\mathbf{T}}_k=\mathbf{T}_{k-1}\exp(T\boldsymbol{\varpi}_{k-1}^{\wedge})$，$T=t_k-t_{k-1}$，加速度白噪声位姿误差线性化为

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{T}_k &= \mathbf{T}_k^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_k\\ &= \mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{T}_{k-1}\exp(T\boldsymbol{\varpi}_{k-1}^{\wedge})\\ &= \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_k^{\wedge})\bar{\mathbf{T}}_k^{-1}\bar{\mathbf{T}}_{k-1}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1}^{\wedge})\exp(T(\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}+\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge}).\end{aligned} \tag{A.31a}$$

使用 B CH 恒等式 (A.7b) 分离最后一个指数项中的各项，并由 (A.31a),

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{T}_k \approx\ & \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_k^{\wedge})\bar{\mathbf{T}}_k^{-1}\bar{\mathbf{T}}_{k-1}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1}^{\wedge})\exp(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge})\exp(T(\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge})\\ =\ & \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_k^{\wedge})\bar{\mathbf{T}}_k^{-1}\bar{\mathbf{T}}_{k-1}\exp(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge})\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge})\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1}^{\wedge})\exp(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge})\\ &\times\exp(T(\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge})\\ =\ & \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_k^{\wedge})\bar{\mathbf{T}}_k^{-1}\bar{\mathbf{T}}_{k-1}\exp(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge})\exp(-(\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1})^{\wedge})\\ &\times\exp(T(\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge})\\ =\ & \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_k^{\wedge})\delta\bar{\mathbf{T}}_k\exp(-(\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1})^{\wedge})\exp(T(\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge})\\ =\ & \delta\bar{\mathbf{T}}_k\delta\bar{\mathbf{T}}_k^{-1}\exp(\delta\boldsymbol{\xi}_k^{\wedge})\delta\bar{\mathbf{T}}\exp(-(\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1})^{\wedge})\exp(T(\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge})\\ =\ & \delta\bar{\mathbf{T}}_k\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_k^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_k)^{\wedge})\exp(-(\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1})^{\wedge})\exp(T(\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge}),\\ \exp((\mathbf{e}_k^{\xi})^{\wedge}) =\ & \exp((\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{\wedge})\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_k^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_k)^{\wedge})\exp(-(\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1})^{\wedge})\\ &\times\exp(T(\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge}).\end{aligned} \tag{A.31b}$$

利用 BCH恒等式 (A.7c) 合并 (A.31b) 中的所有扰动项，并继续推导，

$$\exp((\mathbf{e}_k^{\xi})^{\wedge})\approx\exp((\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{\wedge})\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_k^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_k-\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1}+T\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1})^{\wedge}). \tag{A.31c}$$

现在，方程 (A.31c) 的形式与所需的左不变误差相似。利用 BCH恒等式 (A.7a) 合并矩阵李代数上的所有项，以得到线性表达式，并从 (A.31c) 继续推导，

$$\exp((\mathbf{e}_k^{\xi})^{\wedge}) \approx \exp((\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi} + \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}(\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_k^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_k - \mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1} + T\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1}))^{\wedge}), \tag{A.31d}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_k^{\xi} &= \bar{\mathbf{e}}_k^{\xi} + \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}(\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_k^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_k - \mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1} + T\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1}) \\ &= \bar{\mathbf{e}}_k^{\xi} - \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge}))\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1} + T\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1} + \mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}\delta\boldsymbol{\xi}_k.\end{aligned} \tag{A.31e}$$

注意，BCH恒等式 (A.10) 已用于 简化 (A.31e)，详情请参见 (A.26)。广义速度误差线性化为

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_k^{\varpi} &= (\bar{\boldsymbol{\varpi}}_k + \delta\boldsymbol{\varpi}_k) - (\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1} + \delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1}) \\ &= \bar{\mathbf{e}}_k^{\varpi} + \delta\boldsymbol{\varpi}_k - \delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1}.\end{aligned} \tag{A.32}$$

汇总 (A.31e) 和 (A.32)，可得 WNOA误差雅可比矩阵：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\mathbf{e}_k^{\xi}\\ \delta\mathbf{e}_k^{\varpi}\end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{e}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\exp(-T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1}^{\wedge})) & T\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(T\bar{\boldsymbol{\varpi}}_{k-1})\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{k-1}^{k}}\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\xi}_{k-1}\\ \delta\boldsymbol{\varpi}_{k-1}\end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{x}_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{k}^{k}}\underbrace{\begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{\xi}_k\\ \delta\boldsymbol{\varpi}_k\end{bmatrix}}_{\delta\mathbf{x}_k}. \tag{A.33}$$

注意，$\mathbf{F}_{k-1}^{k}$ 是$\mathbf{A}_{k-1}$ 的相反数，与 (A.23) 中的情况相同；但顶行的$\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_k^{\xi})^{-1}$ 项例外，这是因为从 (A.31c) 过渡到 (A.31d) 时应用了 BCH恒等式 (A.7a)。离散时间状态误差运动学$\mathbf{A}_{k-1}$，也称为状态转移矩阵 [A2，第 3.1 节。1], 预期会出现在批处理问题的这一位置 [A2，第 3.1 节。2],因此，(A.23) 为解提供了有用的检验。

3）推导回环闭合误差的雅可比矩阵

同样采用左不变位姿误差的定义，回环闭合误差为

$$\mathbf{e}_{\ell} = \log\left(\mathbf{T}_{\ell_2}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_{\ell_2}\right)^{\vee}. \tag{A.34a}$$

设 $\delta\mathbf{T}_{\ell} = \exp(\mathbf{e}_{\ell}^{\wedge})$ 和 $\mathbf{T}_{\ell_2} = \mathbf{T}_{\ell_1}\boldsymbol{\Xi}_{\ell_1\ell_2}$，则回环闭合误差可线性化为

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{T}_{\ell} =& \mathbf{T}_{\ell_2}^{-1}\tilde{\mathbf{T}}_{\ell_2} \\ =& \mathbf{T}_{\ell_2}^{-1}\mathbf{T}_{\ell_1}\boldsymbol{\Xi}_{\ell_1\ell_2} \\ =& \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2}^{\wedge})\bar{\mathbf{T}}_{\ell_2}^{-1}\bar{\mathbf{T}}_{\ell_1}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1}^{\wedge})\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}^{\wedge}) \\ =& \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2}^{\wedge})\bar{\mathbf{T}}_{\ell_2}^{-1}\bar{\mathbf{T}}_{\ell_1}\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1}^{\wedge})\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}^{\wedge}) \\ =& \exp(\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2}^{\wedge})\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}\exp(-(\mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1})^{\wedge})\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}^{\wedge}) \\ =& \delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}\,\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}^{-1}\exp(\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2}^{\wedge})\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}\exp(-(\mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1})^{\wedge})\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}^{\wedge}) \\ =& \delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2})^{\wedge})\exp(-(\mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1})^{\wedge})\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}^{\wedge}),\end{aligned}$$

$$\exp(\mathbf{e}_{\ell}^{\wedge}) = \exp(\bar{\mathbf{e}}_{\ell}^{\wedge})\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2})^{\wedge})\exp(-(\mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1})^{\wedge})\exp(-\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}^{\wedge}) \tag{A.34b}$$

$$\approx \exp(\bar{\mathbf{e}}_{\ell}^{\wedge})\exp((\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2} - \mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1} - \delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi})^{\wedge}). \tag{A.34c}$$

在（A.34b）中应用了 BCH恒等式（A.7c），以合并所有扰动项。接着从（A.34c）继续，并应用 BCH 恒等式（A.7a）来合并矩阵李代数上的所有项，

$$\begin{aligned}\exp(\mathbf{e}_{\ell}^{\wedge}) &\approx \exp((\bar{\mathbf{e}}_{\ell} + \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}(\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2} - \mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1} - \delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}))^{\wedge}), \\ \mathbf{e}_{\ell} &= \bar{\mathbf{e}}_{\ell} + \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}(\mathbf{Ad}(\delta\bar{\mathbf{T}}_{\ell}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2} - \mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1} - \delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}) \\ &= \bar{\mathbf{e}}_{\ell} - \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1} + \mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2} - \mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}.\end{aligned} \tag{A.34d}$$

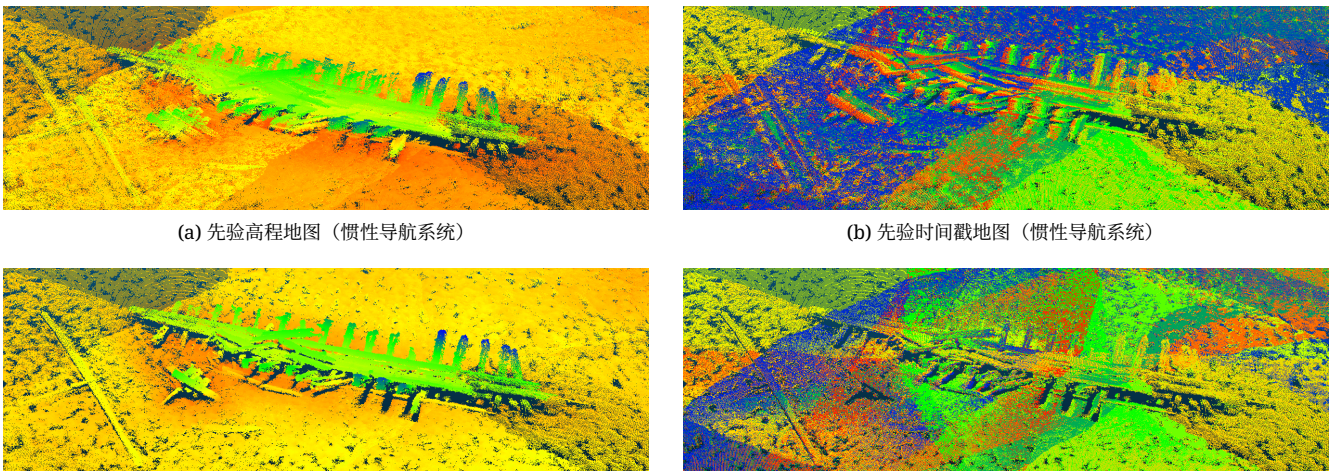
同样，恒等式（A.10）w 正如用于简化 (A.34d) 时所用，详情见 (A.26)。因此，回环闭合雅可比矩阵为 e

$$\delta\mathbf{e}_{\ell} = \underbrace{-\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}\,\mathbf{Ad}(\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{\ell_1\ell_2}^{-1})}_{\mathbf{H}_{\ell_1}^{\ell}}\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_1} + \underbrace{\mathbf{J}^{\ell}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}}_{\mathbf{H}_{\ell_2}^{\ell}}\delta\boldsymbol{\xi}_{\ell_2}\underbrace{-\mathbf{J}^{\mathrm{r}}(\bar{\mathbf{e}}_{\ell})^{-1}}_{\mathbf{M}_{\ell}}\delta\boldsymbol{\xi}_{\Xi}. \tag{A.35}$$

附录 *A* 参考文献

[A1] S. Anderson 和 T. D. Barfoot，“Full STEAM ahead：用于 SE(3) 上批量连续时间轨迹估计的精确稀疏高斯过程回归”，载于 *IEEE/RSJ* 智能机器人与系统国际会议（*IROS*）论文集，IEEE，2015年，第 157–164 页。[A2] T. D. Barfoot，《机器人状态估计》。剑桥大学出版社，2017年。[A3] J. Sola、J. Deray 和 D. Atchuthan，“用于机器人状态估计的微型李理论”，*arXiv* 预印本 *arXiv:1812.01537*，2018年。[A4] G. S. Chirikjian，《随机模型、信息论与李群，第 2 卷：解析方法与现代应用》。施普林格科学与商业媒体，2011年，第 2 卷。[A5] G. Bourmaud、R. M´egret、M. Arnaudon 和 A. Giremus，“基于集中高斯分布的矩阵李群连续—离散扩展卡尔曼滤波器”，《数学成像与视觉期刊》，第 51 卷，第 1 期，第 209–228 页，2015年。[A6] J. Arsenault，《不变扩展卡尔曼滤波框架的实际考量与扩展》，硕士论文，机械工程系，麦吉尔大学，2019年。[A7] E. Eade，《面向计算机视觉的李群》，技术报告，2014年。[A8] J. Farrell，《辅助导航：结合高频传感器的GPS》。McGraw-Hill, Inc.，2008年。

附录B 补充配准图像



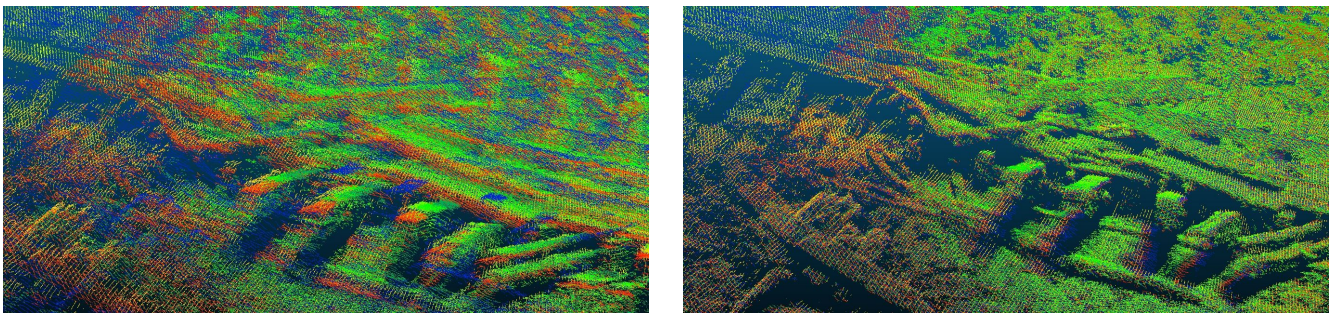
(a) 先验高程地图（惯性导航系统）

(b) 先验时间戳地图（惯性导航系统）

(c) 后验高程地图（惯性导航系统+回环）

(d) 后验时间戳地图（惯性导航系统+回环）

图 B.1：怀尔顿沉船区域图像。上排为先验惯性导航系统点云地图，下排为后验惯性导航系统+回环点云地图。右列中，颜色表示相对轨迹时间，蓝色表示较早，红色表示较晚。展示时间戳图是为了突出生成最终点云地图所涉及的多次航行。



(a) 先验时间戳地图（惯性导航系统），放大图

(b) 后验时间戳地图（惯性导航系统+回环），放大图

图 B.2：沉船区域的放大图，对应图 1 中的图像。右侧的惯性导航系统+回环解生成了明显更清晰且自洽的点云地图，适用于检测和计量学工作。