arXiv:2301.02300v1 [math-ph] 5 Jan 2023

# 多变量亚纯芽的局部性伽罗瓦群

LI GUO、SYLVIE PAYCHA 和 BIN ZHANG

摘要。带有线性极点的多变量亚纯芽以各种形式自然地出现在数学中。我们从局部性的视角研究其丰富结构，包括局部性子代数、局部性变换群和局部性特征。关键技术工具是亚纯芽的依赖子空间，借此我们定义两个亚纯芽之间的局部性正交关系。我们描述由具有特定类型极点的亚纯芽类生成的局部性子代数的结构。我们还定义并确定了它们的局部性变换群；该群固定全纯芽并保持多变量留数，我们称之为局部性伽罗瓦群。

随后，我们聚焦于两类具有指定类型嵌套极点的亚纯芽，它们分别源自数论中的多重ζ函数和微扰量子场论中的费曼积分。我们证明，这两类芽都是局部性多项式子代数，其局部性多项式基由 Lyndon 字的局部性对应物给出。这使我们能够明确描述它们的局部性伽罗瓦群。作为应用，我们提出对费曼振幅的 Speer的解析重整化的一种数学解释。我们研究一类局部性特征，称为 Speer之后的广义求值器。我们证明，局部性伽罗瓦群通过复合在广义求值器上递 transitively 作用，从而为这一多变量方法中的重整化群提供一个候选。

## 目录

1. 引言 21.1. 从单变量到多变量重整化 21.2. 多变量亚纯芽的局部性 31.3. 局部性伽罗瓦群与局部Lyndon词 31.4. 广义求值器与局部性特征 41.5. 论文概要 42. 具有线性极点的亚纯芽 52.1. 具有线性极点的亚纯芽空间 62.2. 洛朗展开与诱导分解 72.3. 依赖子空间 83. 亚纯芽上的局部性变换群 113.1. 亚纯芽的局部性代数 123.2. 单形局部性代数的自同构群 153.3. 局部性伽罗瓦群 174. 由 Chen分式和Speer分式生成的局部性多项式代数 204.1. 局部性洗牌代数作为局部性多项式代数 204.2. 有序分式的应用 225. 局部性特征与解析重整化 25

2010年数学主题分类。32A20，13B05，08A55，32A27，81T15，15A63，52C07，81T17，11M32，05A05。关键词和短语：亚纯芽、局部性、伽罗瓦群、Lyndon 字、重整化、求值器、凸锥、重整化群。

5.1. Speer 的 $s$-族和 Speer 分式 255.2. 亚纯芽局部子代数上的广义求值器 5.3. 广义求值器上的局部性伽罗瓦作用 参考文献 26 29 30

## 1. 引言

这项工作旨在揭示具有线性极点的多变量亚纯芽的丰富结构，描述子代数，探索变换群的结构，以一致的方式在极点处对其求值，并比较不同的求值方式。作者们所发展的局部框架 [CGPZ1], 似乎非常适合实现这些目标。

1.1. 从单变量到多变量重整化。 重整化是用于对物理学和数学各个领域中的发散表达式求值的一种过程，应用范围从微扰量子场论中的经典例子——费曼振幅 [t'H、t' HV] ，到极点处的多重ζ函数（例如参见 [GZ、MP] ）以及用于环面簇的 Todd 函数（例如参见 [BV2、P]）。无论是哪种情况，第一步都是进行正则化过程，之后便可提取发散项并在极点处求值。正则化方法和提取发散项的方法有很大的选择自由，具体而言，正则化可以涉及一个或多个参数。

自 Connes 和 Kreimer 开创性地运用费曼积分以来，单参数重整化背后的代数结构便引起了数学界的极大兴趣[CK1，CK2] 。

在他们的方法中，发散表达式的组合结构被组织成一个连通霍普夫代数 $\mathcal{H}$，而发散表达式的正则化则在 Rota-Baxter 代数 $\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[z^{-1},z]]$，中具有洛朗级数展开，并由其线性分解刻画

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_-(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}_+(\mathbb{C}), \tag{1}$$

为子代数 $\mathcal{M}_-(\mathbb{C}) := z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$, $\mathcal{M}_+(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[[z]]$ ，并配以诱导投影

$$\pi_+ : \mathcal{M}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_+(\mathbb{C}), \quad f(z) = \sum_{k=-K}^{\infty} a_k z^k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{2}$$

正则化映射被提升为一个代数同态

$$\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{M}(\mathbb{C}), \tag{3}$$

随后根据代数 Birkhoff 分解进行分解；具体而言，它是卷积积 $\phi = \phi_-^{-1} \star \phi_+$ 的全纯部分 $\phi_+$ 取值于子代数 $\mathcal{M}_+(\mathbb{C})$；极性部分 $\phi_-$ 则取值于 $\mathcal{M}_-(\mathbb{C})$。重整化映射 $\phi_+$ 随后在极点处取值，并通过递归构造，其递归由余乘法编码，体现了微扰量子场论中著名的 BPHZ 过程 [BP，Hep，Zi]。

将 Connes-Kreimer 方法推广至多参数正则化，可得到一个代数同态

$$\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$$

取值于 $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$，即凸多面锥霍普夫代数 [GPZ] 中的多变量亚纯芽在原点处且具有线性极点的代数，随后又在更一般的局部框架中 [CGPZ1、CGPZ2、CGPZ3]。这种方法实质上利用了 $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ 上 Rota-Baxter 代数结构的局部性版本。

1.2. 多变量亚纯芽的局部性。 在物理学中，局部性原理是场论的一项关键特征，它指出一个对象只会受到其直接周围环境的影响。我们将局部性更一般地理解为某些二元关系 [CGPZ1],使代数扩充为局部性代数，并将保持此类局部性关系的态射称为局部态射。它与量子场论中因果性的关系已在 [Re]中讨论。本文中，亚纯芽上的局部性关系由底层向量空间上的内积 $Q$ 以下述方式诱导：一对亚纯芽属于该局部性关系的图，当且仅当分别由它们所依赖的变量集合张成的线性空间（称为它们的依赖子空间）彼此正交。这种局部性提供了一种自然的分解

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty) = \mathcal{M}_+(\mathbb{C}^\infty) \oplus \mathcal{M}_-^Q(\mathbb{C}^\infty)$$

到全纯芽子空间 $\mathcal{M}_+(\mathbb{C}^\infty)$ 和一个由我们称为“极性芽”的元素构成的空间 $\mathcal{M}_-^Q(\mathbb{C}^\infty)$。尽管 $\mathcal{M}_-^Q(\mathbb{C}^\infty)$ 不是 $\mathcal{M}^Q(\mathbb{C}^\infty)$ 的子代数，但它具有一个显著的性质：它是一个局部性理想。

在应用中，[CGPZ2，CGPZ3], 我们为霍普夫代数赋予局部性结构，使其成为局部性霍普夫代数，而 $\phi$ 成为代数的局部态射。由于 $\mathcal{M}^Q(\mathbb{C}^\infty)$ 是一个局部性理想，不仅可以在局部性框架下恢复Birkhoff分解 $\phi$ ，重整化过程 $\phi_+$ 还可简化为与投影$\pi_+^Q \circ \phi$ 的复合

$$\pi_+^Q : \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty) \to \mathcal{M}_+(\mathbb{C}^\infty)$$

作用于全纯部分。它与在零点求值 $\mathrm{ev}_0$：$\mathcal{M}_+(\mathbb{C}^\infty) \to \mathbb{C}$ 的复合，将其应用于所得全纯芽后，可视为一种多变量最小减法方案。

Speer 的开创性工作提出了这一方法的雏形 [Sp2，Sp4] 该工作研究了量子场论中的解析重整化。后来，这种多变量重整化方法被应用于一个以有根树为指标的黎曼积分玩具模型 [CGPZ3]，并在 [DZ] 中得到了进一步讨论。

因此，从经典的单参数重整化方法转向多参数重整化的局部性方法时，分析重点从源霍普夫代数 $\mathcal{H}$ 转移到本文讨论的目标代数 $\phi(\mathcal{H})$，其中 $\phi$ 为 $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$。

1.3. 局部性伽罗瓦群与局部Lyndon词。在实际应用中，我们考虑局部子代数 $\phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$。 $\mathcal{A}$ 上的线性变换 T 会诱导出另一个态射

$$T \circ \phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty),$$

由此我们还可以构造一个映射

$$\pi_+^Q \circ T \circ \phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}_+(\mathbb{C}^\infty).$$

局部子代数的局部性同构 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$，它们在 $\mathcal{M}_+(\mathbb{C}^\infty)$ 上限制为恒等映射，构成一个群 $\mathrm{Gal}^Q(\mathcal{A}/\mathcal{M}_+)$，我们称之为 局部性伽罗瓦群。它在关联不同重整化时，发挥着重整化群的作用 [CK2，CM] 。。。

通过映射 $\mathrm{ev}_0$，在零点求值，会产生一个局部性特征

$$\mathcal{E}_T := \mathrm{ev}_0 \circ \pi_+^Q \circ T \circ \phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C},$$

按照 Speer 的说法，我们称之为求值器，它取决于 T 的选择。

为了描述局部性伽罗瓦群的作用，我们仔细研究了由指定类型的线性极点定义的 $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ 的局部性子代数的结构。我们重点关注 Chen

型极点，这类极点通常源自多重ζ函数；我们还研究了更一般的一类 Speer 分式，它们源自费曼积分。我们证明这两类分式都构成 局部多项式代数，其局部多项式基由 Lyndon 字的一个局部性版本给出，我们称之为 局部Lyndon词。为此，我们将 Chen-Fox-Lyndon 和 Radford 的经典工作中，将洗牌积代数实现为以 Lyndon 字为基的多项式代数这一结果，拓展到了局部性框架 [CFL、Ra]。作为应用，我们证明了局部性伽罗瓦群对这两类局部性子代数上的广义求值器的作用具有传递性。

1.4. 广义求值器与局部性特征。 在其开创性著作 [Sp1、Sp2、Sp3、Sp4] 中，Speer 对解析重整化提出了正则化量求值的公理化表述，并将这类求值称为广义求值器。他在研究费曼积分时，将其应用于正则化步骤所确定的多变量亚纯芽空间。在最后的重整化步骤中，他提出了一种广义求值器，其定义是对迭代一维求值子取平均；这些求值子依次作用于每个变量。

然而，Speer开创性的多变量方法依赖于坐标，因而缺乏协变性。为避免这种坐标依赖，我们要求求值器对依赖于变量且其张成空间彼此垂直的芽之乘积具有乘法性（即上文提到的依赖子空间），而不是像Speer的工作那样要求它们具有互不相交的变量集。本文在严谨的数学框架中，为Speer方法提供了一个协变对应版本，旨在建立一个通用框架，以处理各种背景下的发散问题，并着眼于以下三个目标。

问题 1.1. 为 Speer 等人提出的多参数正则化中出现的芽赋予适当的局部性多项式代数结构；

问题 1.2. 将 Speer 的广义求值器解释为相应（局部性）代数上的局部性特征，从而引出局部广义求值器这一一般概念；

**Pr**问题 1.3. 构造一个变换群，用以关联不同的局部求值器 *s.*

1.5. 论文概述。在 Connes 和 Kreimer 的单变量重整化余代数方法中，人们采用归纳过程来处理不同层级间发散的相互抵消。相反，我们希望通过多参数正则化避免这种抵消：在逐层深入子发散的过程中，为每一层引入不同的参数，从而能够以自主的方式对每个子发散进行正则化。利用局部性结构即可实现这一点；这些结构通过要求正则化映射是一个局部代数同态，且其值域包含于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$，来确保不同层级彼此分离。

我们首先在第 2 节介绍关于滤过格空间 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 上具有线性极点和有理系数的亚纯芽的背景知识（$\mathbb{R}^\infty$，$\mathbb{Z}^\infty$）。对于底层空间上的给定内积 $Q$，全纯芽 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}^+}$ 的一个补空间是$\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}^-}$ 方程（5）中定义的极性芽子空间。由此可得 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$（定理 2.5）中的洛朗展开以及各种分解和不变量（留数），它们构成了我们进一步研究的基础。我们还详细研究了亚纯芽的依赖空间及其分解（§2.3，定理 2.13），以便定义亚纯芽的正交性。

基于上述亚纯芽的正交性，我们在第3节中对局部性代数进行了细致研究，重点考察 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$的子代数。§3.1 描述了

局部子代数$\mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{Q}+}(\Pi^{Q}(\frown\mathcal{S}))$ 的结构。它包含 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$，并由一组分式 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$ 生成。此类局部子代数的自同构固定全纯芽，并保持极性芽的留数类型不变量；我们在 §3.2和 §3.3中证明，这些自同构构成一个群。受 Cartier 的宇宙伽罗瓦群 [B、C、CM], 的启发，我们将其称为该局部子代数的局部性伽罗瓦群（定义3.13）。我们得到了局部性伽罗瓦群的约化定理（定理3.15），表明局部性伽罗瓦群中存在一个子群，该子群可由以下局部子代数的特殊自同构来描述：此局部子代数由同一组分式在$\mathbb{Q}$ 上生成 $\mathcal{S}$。

为获得局部性伽罗瓦群的结构，我们在第 4 节首先给出多项式代数的一个局部性变体（定义 4.1），然后将利用 Lyndon 字对 shuffle 积代数进行多项式生成的结果推广到局部性框架（定理 4.4）。最后，我们证明（定理 4.9）由某些类别的分式生成的局部性子代数是局部性多项式代数。其中包括多重ζ函数中出现的 Chen 分式，见例2.7 ；以及例 4.10中描述的 Speer 分式，这些分式以 Speer 命名，以纪念他在解析重整化方面的工作 [Sp2、Sp3、Sp4] （另见 [BR、DZ]）。

最后，在第 5节中，我们将运用已取得的结果，重新考察 Speer 的方法在局部框架中的应用。我们首先证明（命题 5.1），由 Speer 的 s-族所产生的分式张成的空间，恰好就是上述 Speer 分式构成的空间，因此它是一个局部性多项式代数。这解决了问题 1.1。

作为 Speer 广义求值器的类比，我们在 §5.2 中引入局部性广义求值器的概念（定义 5.2），其定义在 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的局部子代数上。它们是线性形式 $\mathcal{E}$，扩展了定义在全纯芽上的通常求值 $\mathrm{ev}_0$，其在 0 处取值；并且根据局部性原理，它们必须满足以下局部乘法性：

$$f_1 \perp^{Q} f_2 \Rightarrow \mathcal{E}(f_1\, f_2) = \mathcal{E}(f_1)\,\mathcal{E}(f_2).$$

一个原型是最小减法赋值器 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}} := \mathrm{ev}_0 \circ \pi^{Q}_{+}$，见公式（47）。
我们还在命题 5.6 中证明，我们的局部性广义求值器满足 Speer 对广义求值器所要求的条件，但需满足一个拓扑要求（这超出本文范围，相关讨论见 [DPS]），并且要对局部性关系作适当调整。这解决了问题 1.2。此外，我们还讨论了 Speer 的坐标依赖的广义求值器 $\mathcal{E}^{\mathrm{iter}}_{\bullet}$与我们的协变最小减除方案 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}}$ 之间的区别。

局部性伽罗瓦群通过复合自然地作用于局部性广义求值器（式（49））。当局部子代数由一个分式的局部性多项式代数生成时，该作用被证明是传递的（定理 5.7）。因此，这种局部性多项式代数上的每个局部性广义求值器都可经由最小减法赋值器$\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}}$分解。将这些结果应用于 Chen 分式和 Speer 分式，我们得到推论 5.8，从而解决问题 1.3。最后，我们证明，多重ζ值自然地产生一个局部性广义求值器 $\mathcal{E}^{\zeta}$，它定义在由具有 Chen 型极点的亚纯芽在零点处构成的局部性多项式代数 $\mathcal{A}^{\mathrm{Chen}} := \mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{Q}+}(\Pi^{Q}(\mathfrak{bF}^{\mathrm{Ch}}))$ 上（式（52））。将 $\mathcal{E}^{\zeta}$ 与最小减法赋值器 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}}$ 进行比较，可得到局部性伽罗瓦群中的一个自然元素。

## 2. 具有线性极点的亚纯芽

本节首先概述[GPZ3] 关于具有线性极点的亚纯芽空间的定义和结果，随后研究亚纯芽的依赖空间及其分解。

2.1. 具有线性极点的亚纯芽空间。我们在一个带滤过的格欧几里得空间 $(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{Z}^\infty, Q)$ 中进行研究，该空间由

（i）一个由直极限定义的滤过格空间 $(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{Z}^\infty)$

$$\mathbb{R}^\infty := \varinjlim \mathbb{R}^k, \quad \mathbb{Z}^\infty := \varinjlim \mathbb{Z}^k,$$

在标准嵌入 $i_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ 下，

（ii）滤过格空间上的内积 Q，由一族内积 $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ 给出

$$Q_k : \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$

使得

$$Q_{k+1}|_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} = Q_k, \quad Q_k(\mathbb{Z}^k \otimes \mathbb{Z}^k) \subset \mathbb{Q}.$$

对于具有 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ 的域 $\mathbb{K}$，我们将 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^k) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^k \otimes \mathbb{C})$ 记为定义在 $\mathbb{C}^k$ 上、在 $\mathbb{K}^k$ 上取 $\mathbb{K}$ 值的线性形式空间。

在滤过格空间 $(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{Z}^\infty)$ 上，若零点处定义在 $\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{C}$ 上的亚纯芽 f 是零点处的全纯芽，且对于 $\mathbb{Z}^k$ 的任意对偶基，其幂级数展开的系数都属于 $\mathbb{K}$，则称其为$\mathbb{K}$-全纯；若存在向量 $L_1, \ldots, L_k \in (\mathbb{Z}^k)^* \otimes \mathbb{K}$（可能有重复），使得

$$f\, \Pi_{i=1}^k L_i$$

是一个 $\mathbb{K}$-全纯芽。

注2.1. 本文其余部分中，除非另有说明，所有亚纯芽均视为定义在零点处。

令 $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^k) = \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{C})$（分别） $\mathcal{M}_{\mathbb{K}+}(\mathbb{C}^k) = \mathcal{M}_{\mathbb{K}+}(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{C})$ 表示具有 $\mathbb{K}$-线性极点的亚纯芽（分别为 $\mathbb{K}$-全纯芽）空间。

内积 Q 诱导出一族线性双射

$$Q_k : \mathbb{K}^k \to (\mathbb{K}^k)^*, \quad u \mapsto Q_k(u, \cdot)$$

以及 $Q^{-1}{}_k : (\mathbb{K}^k)^* \to \mathbb{K}^k$。由此得到映射

$$p_k := Q_k^{-1} i_k^* Q_{k+1} : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^k.$$

具体而言，令 $W_k$ 为 $\mathbb{C}^{k+1}$ 中 $\mathbb{C}^k$ 的正交补。那么映射 $p_k$ 是沿 $W_k$ 将 $\mathbb{C}^{k+1}$ 投影到 $\mathbb{C}^k$ 的投影，并由此得到以下有向系统：

$$p_k : \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^k) \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^{k+1}), \quad p_k : \mathcal{M}_{\mathbb{K}+}(\mathbb{C}^k) \to \mathcal{M}_{\mathbb{K}+}(\mathbb{C}^{k+1}),$$

以及直极限

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}} := \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^\infty) := \varinjlim \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^k), \quad \mathcal{M}_{\mathbb{K}+} := \mathcal{M}_{\mathbb{K}+}(\mathbb{C}^\infty) := \varinjlim \mathcal{M}_{\mathbb{K}+}(\mathbb{C}^k)$$

由具有 $\mathbb{K}$-线性极点的亚纯芽空间（分别为 $\mathbb{K}$-全纯芽空间）构成。

通过限制，我们也令

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}} := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^\infty) := \varinjlim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^k) \tag{4}$$

为由 $\mathbb{K}$-线性形式空间构成的直极限。注意，Q 在 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^\infty)$ 中诱导出一个内积，我们仍将其记作 Q。

如 [GPZ3], 中关于滤过格欧几里得空间（$\mathbb{R}^\infty$， $\mathbb{Z}^\infty$， $Q$）所述，我们定义一个极性芽在$\mathbb{C}^k$ 中具有 $\mathbb{K}$-系数，其形式为一个亚纯函数芽

$$\frac{\mathrm{p}\, h(\ell_1, \ldots, \ell_m)}{L_1^{s_1} \cdots L_n^{s_n}}, \tag{5}$$

其中

(i) h 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{K}+}(\mathbb{C}^m)$，(ii) $l_1,\dots,l_m, L_1,\dots,L_n$ 属于 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^k)$，且 $L_1,\dots,L_n$ 线性无关，使得

$$Q(\ell_i, L_j) = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\},$$

(iii) m 是非负整数，n、$s_1,\dots\dots s_n$ 是正整数。

由 $L_1,\dots\dots L_n$ 张成的凸锥（分别为子空间）称为极性芽 $f$的支撑锥（分别为支撑空间）。支撑空间与芽的分式表示方式无关（见 [GPZ3，引理 2.9]）。回忆 [GPZ3，定义 5.1]：对于极性芽 $h(l_1,\dots,l_m)\,L^{s_1}\cdots L^{s_n}$，整数

$$\text{p-ord}\left(\frac{h(\ell_1,\dots,\ell_m)}{L_1^{s_1}\cdots L_n^{s_n}}\right) := |(s_1,\dots,s_n)| := s_1+\cdots+s_n$$

是良定义的，称为该极性芽的 p 阶。

令 $\mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{K}_-}(\mathbb{C}^k)$ 表示由 $\mathbb{C}^k$ 上具有 $\mathbb{K}$-线性极点的极性芽张成的线性空间。再次得到一个有向系统

$$p_k : \mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{K}_-}(\mathbb{C}^k) \to \mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{K}_-}(\mathbb{C}^{k+1})$$

以及直极限

$$\mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{K}_-} := \mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{K}_-}(\mathbb{C}^\infty) := \varinjlim \mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{K}_-}(\mathbb{C}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C}^\infty)$$

具有 $\mathbb{K}$-l 近极点的极性芽。 1

极性芽按其支撑子空间和 p 阶分解如下。

$_r$引理 2.2。 [GPZ3，引理 3.5] 设 P $S_i = 0$ 为全纯芽与 $\mathbb{K}$-$_{i=1}$个极性芽之和。对于 V 的任意线性 $\mathbb{K}$-子空间 W 及 $N \in \mathbb{Z}_{>0}$，有 $P'S_i = 0$，其中$_i$求和遍历满足 $\text{Supp}(S_i) = W$ 且 $\text{p-ord}(S_i) = N$ 的各项 $S_i$；约定空集上的和为零。

根据[GPZ3，定义 3。2],

(i) 一个（凸）锥族称为恰当配置的，如果族中任意两个锥沿其面相交，包括位于 0 的零维面，并且它们的并集不包含一条直线；(ii) 如果对于每个极性芽，都能选取一个支撑锥，使所得锥族恰当配置，则称极性芽族恰当配置；(iii) 如果一个极性芽族恰当配置，且其中任意两个极性芽的分母均不成比例，则称其为射影恰当配置。

下面给出一个判断极性芽线性无关性的有用准则。

命题 2.3。 [GPZ3，命题 3。6] 具有射影适当定位的支撑锥的有限个极性芽是线性无关的。

2.2. 洛朗展开与诱导的分解。亚纯芽（具有线性极点）存在若干种分解。回顾一下，如果一个凸锥由一组线性无关向量张成，则称其为单纯形的。

命题 2.4. [GPZ3，定理 4.13.] 对于任意 $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}$，都存在一个由单纯锥组成的位置适当的族 C，以及一个由 $\mathbb{K}$- 极性芽组成的族 $\{S_j\}_{j\in J}$，其支撑于 C （即每个 $S_j$ 的支撑锥都属于 C），还有一个全纯芽 h，使得

$$f = \sum_{j\in J} S_j + h. \tag{6}$$

式（6）称为 f 支撑于$C$ 的洛朗展开，它在对位置适当的单纯锥族作细分后是唯一的。

对于 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及一个有限维 $\mathbb{K}$子空间 $U \subset \mathbb{R}^\infty$，令

- $\mathcal{M}_{p\,\mathbb{K}}$ 表示 p 阶的 $\mathbb{K}$极性芽的线性张成；
- $\mathcal{M}_{\mathbb{K},d}$ 表示支撑锥维数为 d 的 $\mathbb{K}$极性芽的线性张成；
- $\mathcal{M}_{\mathbb{K},U}$ 表示支撑空间为 U 的 $\mathbb{K}$极性芽的线性张成。

定理 2.5。 [GPZ3，定理 5。3]我们有如下分解

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{M}^p_{\mathbb{K}}, \tag{7}$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{M}_{\mathbb{K},d}, \tag{8}$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{U\subset\mathbb{R}^\infty} \mathcal{M}_{\mathbb{K},U}. \tag{9}$$

特别地，存在如下分解 (另见 [BV1])：

$$\mathcal{M}_{\mathbb{K}} = \mathcal{M}_{\mathbb{K}+} \oplus \mathcal{M}^Q_{\mathbb{K}-}.$$

我们引入更多记号。

(*i*) 对应于式（7）中的分解，令 $q$ 为某个（因而也是任意一个）$f$的洛朗展开中极性芽的最高 p 阶。定义 f [GPZ3，定义 61]的 p-留数如下：

$$\mathrm{pRes}(f) := \sum_{\text{p-ord}(S_i)=q} \frac{h_i(0)}{\vec{L}_i^{\vec{s}_i}}. \tag{10}$$

(*ii*) 对应于式（8）中的分解，令 $e$ 为某个（因而也是任意一个）$f$的洛朗展开中极性芽支撑空间维数的最大值。定义f 的 d-留数如下：

$$\mathrm{dRes}(f) := \sum_{\dim(\mathrm{Supp}(S_i))=e} \frac{h_i(0)}{\vec{L}_i^{\vec{s}_i}}. \tag{11}$$

注释 2.6。 正如 [GPZ3，命题 62], 所证明的，具有线性极点的亚纯芽的 p-留数既不依赖于洛朗展开的选择，也不依赖于内积的选择。d-留数不依赖于洛朗展开的选择，但依赖于内积的选择。

2.3. 依赖子空间。对于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的任意子集 U，令 $\mathbb{Q}$U 表示由 U 张成的 $\mathbb{Q}$-子空间 $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}$。

单纯形分式是形如 $^1{}_{L_1^{s_1}\cdots L_k^{s_k}}$ 的分式，其中 $L_{1,\ldots\ldots}$，$L_k \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ 线性无关，且 $s_i \in \mathbb{Z}_{>0}$，i = 1.....k。令 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 上所有单纯形分式的集合。那么对于 $(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{Z}^\infty)$ 中的任意内积 Q，显然有 $\mathbb{Q}\mathcal{F} \subset \mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}-}$。

例 2.7. 在欧几里得滤过格空间（$\mathbb{R}^\infty, \mathbb{Z}^\infty$, Q）中，设 $\mathcal{B} := (e_i)_{i\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是一组标准正交基。设 $z_i$ 是对应于 $e_i$ 的坐标函数。形如

$$\mathfrak{f}\begin{pmatrix} s_1,\ldots,s_k \\ u_1,\ldots,u_k \end{pmatrix} := \frac{1}{z_{u_1}^{s_1}(z_{u_1}+z_{u_2})^{s_2}\cdots(z_{u_1}+z_{u_2}+\cdots+z_{u_k})^{s_k}},\ u_i, s_i \in \mathbb{Z}_{>0}, k \in \mathbb{N}, u_i \neq u_j \text{ if } i \neq j, \tag{12}$$

的分式称为 Chen 分式。Chen 分式的集合记为

$$\mathcal{F}^{\mathrm{Ch}} := \mathcal{F}^{\mathrm{Ch},\mathcal{Q},\mathcal{B}}.$$

我们借用 [GPZ3] 中的以下定义。在 $\mathbb{C}^k$ 上，若亚纯函数 $f = g(L_1, \ldots, L_n)$，其中 $L_1, \ldots, L_n$ 是 $\mathbb{C}^k$ 上的线性形式，且 g 是 $\mathbb{C}^n$ 上的亚纯函数，则称 f 依赖于由 $L_1, \ldots, L_n$ 张成的 $(\mathbb{C}^k)^*$ 的线性子空间。可以验证，若 f 依赖于 $V_1$ 和 $V_2$, ，则它依赖于 $V_1 \cap V_2$。因此，下面的定义是合理的。

定义 2.8。f 的依赖子空间 Dep( f ) 是 f 所依赖的 $(\mathbb{C}^k)^*$ 的最小线性子空间。

例 2.9。设 $(e_1, e_2, \ldots)$ 是 $(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{Z}^\infty, Q)$ 的标准正交基。

$$\mathrm{Dep}\left(\frac{1}{z_1(z_1+z_2)} + \frac{1}{z_2(z_1+z_2)} - \frac{2}{z_1(z_1+2z_2)} - \frac{1}{z_2(z_1+2z_2)} + \frac{1}{z_3}\right) = \{e_3\},$$

因为前四项之和为零。

定义 2.10. 若两个亚纯芽 f 和 g 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$，且它们的依赖子空间正交，则称 f 和 g 为 Q-正交，记作 $f \perp^Q g$。

例 2.11. (i) 设 $(e_1, e_2, \ldots)$ 是 $(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{Z}^\infty, Q)$ 的标准正交基。我们有

$$\frac{1}{z_1 + z_2} \perp^Q (z_1 - z_2).$$

(ii) 极性芽恰好是 h/M 形式的芽，其中 h 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}(\mathbb{C}^\infty)$，M 是由线性无关的线性形式的幂的乘积给出的，且 $h \perp^Q M$。

元素 $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 具有如下形式：$f = h\, l_1 \cdots l_r$，其中 h 是全纯芽，$l_1, \ldots, l_r$ 是线性形式。下面的引理表明，可以选取分式中的因子，使其依赖子空间包含于 f 的依赖子空间中。

引理 2.12. 对于任意 f 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$，存在线性形式 $l_i = l_i(L_1, \ldots, L_n)$，$i = 1, \ldots, p$，以及全纯芽 $h = h(L_1, \ldots, L_n)$，其中 $L_1, \ldots, L_n$ 是 Dep( f ) 的一组基，使得 $f = h\, l_1 \cdots l_p$。

证明。设对于某个 $k \geq 1$，f 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}^k)$。我们将 Dep( f ) 的一组基 $L_1, \ldots, L_n$ 扩充为 $(\mathbb{C}^k)^*$ 的一组基 $L_1, \ldots, L_n, \ldots, L_k$。由于 f 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}^k)$，存在 $L_1, \ldots, L_k$ 的线性组合 $l_1, \ldots, l_m$，使得乘积 $l_1 \cdots l_m f$ 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}(\mathbb{C}^k)$，也就是说，

$$\ell_1 \cdots \ell_m\, f(L_1, \ldots, L_n) \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}(\mathbb{C}^k). \tag{13}$$

经过重新排列，我们可以假设 $l_1, \ldots, l_p$ 仅为 $L_1, \ldots, L_n$ 的线性组合；而 $l_{p+1}, \ldots, l_m$ 则包含来自额外线性形式 $L_{n+1}, \ldots, L_k$ 的非平凡线性贡献。于是我们可以选取一个元组 $(a_{n+1}, \ldots, a_k) \in \mathbb{C}^{k-n}$，使得这些映射

$$(L_1, \ldots, L_n) \mapsto \lambda_i(L_1, \ldots, L_n) := \ell_i(L_1, \ldots, L_n, a_{n+1}, \ldots, a_k), \quad i = p+1, \ldots, m,$$

是仿射映射，且 $\lambda_i(0, \ldots, 0) \neq 0$。因此，映射 $(L_1, \ldots, L_n) \longmapsto \frac{1}{\lambda_i(L_1, \ldots, L_n)}$ 是全纯芽。

因此，令 $L_{n+1} = a_{n+1}, \ldots, L_k = a_k$ 代入式（13）可得一个全纯芽

$$h : (L_1, \ldots, L_n) \longmapsto \ell_1 \cdots \ell_p\, \lambda_{p+1} \cdots \lambda_m\, f,$$

由此我们定义另一个全纯芽

$$\tilde{h}(L_1,\dots,L_n) := \frac{h(L_1,\dots,L_n)}{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_m}.$$

因此，

$$f = f(L_1,\dots,L_n) = \frac{h(L_1,\dots,L_n)}{\ell_1\cdots\ell_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_m} = \frac{\tilde{h}(L_1,\dots,L_n)}{\ell_1(L_1,\dots,L_n)\cdots\ell_p(L_1,\dots,L_n)}$$

具有所需的形式。 □

定理 2.13。 将芽 f 写成 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 按照式 (9) 中的分解：

$$f = \sum_{U\in\mathcal{U}} f_U + f_0, \tag{14}$$

其中 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{R}^\infty$ 中非零有限维子空间的有限集，0，$f_U$ 是支撑空间为 U 的极性芽之和，而 $f_0$ 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$。我们有

$$\mathrm{Dep}(f) = \sum_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Dep}(f_U) + \mathrm{Dep}(f_0).$$

证明。由于 $f = P f_U + f_0$, 显然成立，我们有

$$\mathrm{Dep}(f) \subset \sum_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Dep}(f_U) + \mathrm{Dep}(f_0).$$

剩下需要证明，对于所有 $U \in \mathcal{U}$，$\mathrm{Dep}(f_U) \subset \mathrm{Dep}(f)$，且 $\mathrm{Dep}(f_0) \subset \mathrm{Dep}(f)$。

由引理 2.12，存在一些线性形式 $l_1,\dots,l_p$ 以及一个同态芽 $h$，它们的依赖空间都属于 Dep($f$)，使得

$$f = \frac{h}{\ell_1\cdots\ell_p} = \frac{h(L_1,\dots,L_n)}{\ell_1(L_1,\dots,L_n)\cdots\ell_p(L_1,\dots,L_n)},$$

对于 Dep(f) 的一组基 $L_1,\dots,L_n$。然后，我们可以根据 $f$ 在 Dep($f$) 中取洛朗展开，依据 [GPZ3，定理 2。11]。因此，$f$的这个洛朗展开中的所有极性芽，其线性极点和全纯分子的依赖空间都属于 Dep($f$)。这给出了另一种分解

$$f = g_0 + \sum_{V\subset \mathrm{Dep}(f)} g_V$$

根据式（9）。将其与式（$f$ （14）中将 $f$ 分解为一个全纯芽与极性芽之和的形式比较，可得

$$f = f_0 + \sum_{U\subset\mathcal{U}} f_U = g_0 + \sum_{V\subset \mathrm{Dep}(f)} g_V.$$

利用式（9）中分解的唯一性，我们推断，对于任意子空间 $U \subset \mathcal{U}$（分别地，$U = 0$），存在一个空间 $V \subset$，它属于 Dep($f$)（分别地，$V = 0$），使得 $f_U = g_V$。这意味着 Dep($f_U$) 包含于 Dep($f$)。由此证明完毕。 □

引理 2.14. 对于由具有相同支撑空间 U 的单纯形分式 $S_i$（$i_I$）构成的非零有理数线性组合 $f_{iI} S_i$，有 Dep(f)U。

证明。 显然，Dep($f$) $\subseteq U$。 假设 Dep($f$) $\subsetneq U$。定理 2.13 给出

$$f = g_0 + \sum_{V\subset \mathrm{Dep}(f)} g_V$$

其中，$g_V$ 中的各项具有支撑空间 V。因此

$$0 = f - \sum_{i\in I} \alpha_i S_i = g_0 + \sum_{V\subset \mathrm{Dep}(f)} g_V - \sum_{i\in I} \alpha_i S_i.$$

由 $\mathrm{Dep}(f) \subsetneq U$，我们有 $V \subsetneq U$ 属于上述和。因此，上述和是按照式（9）中的支撑空间对 0 作出的分解，其中 $\sum_{i\in I} \alpha_i S_i$ 是支撑空间为 U 的分量。因此 $\sum_{i\in I} \alpha_i S_i = 0$，这意味着 $f = 0$。矛盾。□

由此得到关于极性芽之和的以下结论。

命题 2.15. 若 $f = \sum f_i$ 是极性芽 $f_i$ 之和且该和非零，并且这些芽具有相同的支撑空间 U，则 U 是 Dep(f) 的子集。

证明。 这可由引理 2.14 推出：按照 [GPZ3，定理 3.7]证明的思路，在适当的参数处对极性芽 $f_i$的分子求值。事实上，令我们将极性芽 $f_i = h_i S_i$ 写作

$$S_i = \frac{1}{L_1^{s_1} \cdots L_n^{s_{n_i}}}, \quad s_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

是具有相同支撑的单纯形分式，且其中的芽是在一组共同的变量 $l_{n+1}, \ldots, l_k$ 中的全纯芽；这些变量与 $S_i$ 中出现的线性形式 $L_1, \ldots, L_n$ 一起构成 $\mathbb{R}^k$ 的标准正交基。由于 $f \neq 0$，不失一般性，可假设全纯芽 $h_i$ 均不恒为零。因此，存在某个元组 $(l^0_{n+1}, \ldots, l^0_k)$，使得对所有 i，$\alpha_i := h_i(l^0_{n+1}, \ldots, l^0_k) \neq 0$。记 $f = f(L_1, \ldots, L_n, l_{n+1}, \ldots, l_k)$，并取特化 $g(L_1, \ldots, L_n) := f(L_1, \ldots, L_n, l^0_{n+1}, \ldots, l^0_k)$。于是 $\mathrm{Dep}(f) \supset \mathrm{Dep}(g)$。将引理 2.14 应用于 $g = \sum_i h_i(l^0_{n+1}, \ldots, l^0_k) S_i$，其中 $\alpha_i = h_i(l^0_{n+1}, \ldots, l^0_k)$，得到 $\mathrm{Dep}(g) = \mathrm{Supp}(g)$。证明完毕。□

下面的结果表明，不失一般性，我们可以假设，具有相同支撑空间的极性芽之和 f 可以写成极性芽之和，其中分子是依赖空间包含于 Dep(f) 中的全纯芽。

命题 2.16. 设 $f = \sum h_i S_i$ 是具有相同支撑空间的极性芽的非零和，其中 $S_i$ 是一个单纯形分式，$h_i$ 是一个全纯芽。那么，f 可以写成~极性芽之和 $f = \sum h_i S_i$，其中 $h_i$现在是依赖空间包含于 Dep(f) 中的全纯芽。

证明. 根据命题 2.15，公共支撑空间 U 包含于 Dep(f) 中。设 $L_1, \ldots, L_n$ 是 U 的一组基，将其扩充为 Dep(f) 的一组基 $L_1, \ldots, L_n, l_{n+1}, \ldots, l_m$，然后进一步扩充为 $(\mathbb{C}^k)^*$ 的一组基 $L_1, \ldots, L_n, l_{n+1}, \ldots, l_k$，其中 $Q(L_i, l_j) = 0, 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq k$。因此，$S_i$是变量 $L_1, \ldots, L_n$ 中的一个单纯形分式，并且

$$f = f(L_1, \ldots, L_n, \ell_{n+1}, \ldots, \ell_k) = \sum h_i(\ell_{n+1}, \ldots, \ell_k) S_i(L_1, \ldots, L_n).$$

根据依赖空间的定义，f 不依赖于 $l_{m+1}$、……、$l_k$，因此

$$f = f(L_1, \ldots, L_n, \ell_{n+1}, \ldots, \ell_m, 0, \ldots, 0) = \sum h_i(\ell_{n+1}, \ldots, \ell_m, 0, \ldots, 0) S_i(L_1, \ldots, L_k)$$

正如所述。 □

## 3. 亚纯芽上的局部性变换群

本节中，我们在局部性代数的背景下研究具有线性极点的亚纯芽。随后，我们引入局部性伽罗瓦群，它是在这一局部框架中定义的亚纯芽自同构群。

3.1. 亚纯芽的局部性代数。我们介绍局部性代数的一般背景，然后重点讨论亚纯芽的局部性子代数。

3.1.1. 局部性代数。 我们回顾 [CGPZ1 中关于局部性结构的记号 ].

定义 3.1. 局部性集合是一个二元组 (X, ⊤)，其中 X 是一个集合，且

$$\top := X \times_{\top} X \subseteq X \times X$$

是 X 上的一个二元对称关系，称为局部性关系。对于 $x_1, x_2 \in X$，若 $(x_1, x_2) \in \top$，则记作 $x_1 \top x_2$。

对于子集 U ⊂ X，U 的极集为

$$U^{\top} := \{x \in X \,|\, (x, U) \subseteq \top\}.$$

对于局部性集合 $(X, \top_X)$ 和 $(Y, \top_Y)$，映射 $f : X \to Y$ 若满足以下条件，则称为局部性映射

$$x_1 \top_X x_2 \Longrightarrow f(x_1) \top_Y f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X. \tag{15}$$

我们给出一些将在后文进一步探讨的例子。

例 3.2. (i) 对任意非空集合 X，满足：若 $x_1 \top x_2$，则 $x_1 \neq x_2$，，定义了 X 上的一个局部性关系；

(*ii*) 定义 2.10 中的 $\perp^Q \subset \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ Q-正交关系，将 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 转化为一个局部性集合。

(*iii*) 设 $(X, \top) = (\mathbb{Z}_{>0}, \top)$ 为 (*i*) 中的局部性集合，且 $(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}, \perp^Q)$ 为 (*ii*) 中的局部性集合。采用例 2.7 中的记号，映射

$$f : X \to \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}, \quad n \mapsto f\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} := \frac{1}{z_n}, \quad n > 1,$$

是一个局部性映射。

其他代数结构也可以推广到局部性框架中。

定义 3.3. (i) 局部向量空间是一个向量空间 V，配备局部性关系 ⊤，该关系与 V 上的线性结构相容，即对于 V 的任意子集 X，$X^{\top}$ 是 V 的线性子空间。

(ii) K 上的（非幺）局部性代数是一个 K 上的局部向量空间 (A, ⊤)，并配备一个映射

$$m_A : A \times_{\top} A \to A, (u, v) \mapsto u \cdot v = m_A(x, y) \quad \text{for all } (u, v) \in A \times_{\top} A$$

满足结合律和分配律的以下变式。

(a) 对于 $u, v, w \in A$，若 u⊤v、u⊤w、v⊤w，则有

$$(u \cdot v) \top w, \quad u \top (v \cdot w), \quad (u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w). \tag{16}$$

(b) 对于 $u, v, w \in A$，若 u⊤w、v⊤w（因而 $(u + v) \top w$、$w \top (u + v)$），则有

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w, \quad w \cdot (u + v) = w \cdot u + w \cdot v,$$

$$(ku) \cdot w = k(u \cdot w), \quad u \cdot (kw) = k(u \cdot w), \; k \in K.$$

(iii) 幺局部性代数是一个局部性代数 $(A, \top, m_A)$，带有一个单位元 $1_A$，使得对于每个 $u \in A$，都有 $1_A \top u$ 且

$$1_A \cdot u = u \cdot 1_A = u.$$

除非省略单位元 $1_A$ 会引起歧义，否则我们不再明确提及它。

(iv) 设 $(A, \top_A)$ 是一个局部性代数。若在限制关系下，A 的子空间 B 是 A 的一个（或称含单位元的）局部子代数，则称 B 为 A 的（或称含单位元的）局部子代数

$$\top_B := \top_A \cap (B \times B)$$

从 $\top_A$ 到 B，数对 $(B, \top_B)$ 是一个（分别为幺正）局部性代数。

(v) 设 $(A, \top_A)$ 是一个交换局部性代数，C 是 A 的一个幺正局部子代数。若 A 的子空间 B 是 A 的一个（分别为幺正）局部子代数，且包含 C，则称 B 为 A 的一个（分别为幺正）局部性 C-子代数。

给定两个局部性代数 $(A_i, \top_i)$，$i = 1, 2$，一个（分别为幺正）局部性代数同态是一个线性映射 $\varphi: A_1 \longrightarrow A_2$，使得 $a \top_1 b$ 蕴含 $\varphi(a) \top_2 \varphi(b)$，且 $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$（分别地，且 $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$）。

例 3.4。[CGPZ1，推论 3。23] 根据 $\perp^Q$ 定义 2.10中的关系，二元组（$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$，$\perp^Q$）是一个幺局部性代数，且投影

$$\pi_+^Q : \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}_+} \oplus \mathcal{M}_{\mathbb{Q}_-}^Q \to \mathcal{M}_{\mathbb{Q}_+} \tag{17}$$

沿着 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_-}^Q$ 是一个幺局部代数同态。

定义 3.5。对于幺局部性代数（$A, \top$），A 的一个幺局部性自同态若可逆、保持单位元，且其逆映射是局部代数同态，则称为局部性自同构。令 $\mathrm{Aut}^{\top}(A)$ 表示 A 的局部性自同构的集合。

注意到，$\mathrm{Aut}^{\top}(A)$ 在复合运算下构成一个群，称为 A 的局部性自同构群。存在反例表明，一个双射局部同态不一定是局部性自同构。

3.1.2。亚纯芽的局部性子代数。下文中，我们考虑例$\mathcal{A}$，$\perp^Q$中的局部性代数（$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$，$\perp^Q$）的局部性子代数（3.4）。对于$U$ 的一个 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$子集，记

$$\widehat{U} := U \cup \{1\}, \tag{18}$$

其中 1 是常值函数。

我们首先给出由集合生成的 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的局部子代数结构，其系数为有理数或 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_+}$ 系数。正如我们将看到的，在将子代数的概念扩展到局部性框架时，需要运用支撑空间和依赖空间等工具进行仔细分析。

给定 $\mathcal{M}$ 的一个子集 $\mathcal{U}$，$_{\mathbb{Q}}$ 令

$$\Pi^Q(\mathcal{U}) := \left\{ \prod_i s_i \,\middle|\, s_i \in \mathcal{U}, \forall i, s_i \perp^Q s_j, \forall i \neq j \right\}$$

为由 $\mathcal{U}$ 局部生成的亚纯芽集合。采用式（18）的记号，有

$$\Pi^Q(\widehat{\mathcal{U}}) = \Pi^Q(\mathcal{U}) \cup \{1\}.$$

命题 3.6. 给定一个单纯形分式集合 $\mathcal{S}$，$\mathbb{Q}\mathcal{F}$ 的子空间

$$\mathbb{Q}\Pi^Q(\widehat{\mathcal{S}}) := \left\{ \sum_i c_i S_i \,\middle|\, c_i \in \mathbb{Q}, S_i \in \Pi^Q(\widehat{\mathcal{S}}) \right\}$$

由 $\Pi^Q$（$\mathcal{S}$）张成，是 $\mathbb{Q}\mathcal{F}$ 的幺正局部子代数。

b b 因此，$\mathbb{Q}\Pi^Q(\mathcal{S})$ 是由 $\mathcal{S}$ 生成的 $\mathbb{Q}\mathcal{F}$ 的幺正局部子代数。

证明。由于 $c_0 = 1$ 充当单位元，我们只需证明，对于 $f$、$g$ 属于 $\Pi^Q(\mathcal{S})$ 且满足 $f \perp^Q g$，$fg$ 属于 $\mathbb{Q}\Pi^Q(\mathcal{S})$。根据公式（9）中的分次，我们写成

$$f = \sum_U f_U, \quad g = \sum_V g_V,$$

其中 $f_U$ 是具有相同支撑空间 $U$ 的单纯形分式之和，而 $g_V$ 是具有相同支撑空间 $V$的单纯形分式之和。根据定理 2.13，有

$$\mathrm{Dep}(f)=\sum_U \mathrm{Dep}(f_U),\quad \mathrm{Dep}(g)=\sum_V \mathrm{Dep}(g_V)$$

from，由此我们推知，对于出现在 f 和 g 的分解中的任意 U 和 V，

$$f\perp^Q g\Longrightarrow f_U\perp^Q g_V.$$

根据引理2.14，每个 $f_U$ 、0（分别为 $g_V$ 、0）都是支撑空间相同的简单分式之和 $U$（分别为 $V$），因此有 $U=\mathrm{Dep}(f_U)$（分别为 $V=\mathrm{Dep}(g_V)$）。因此我们有

$$U\perp^Q V.$$

因此，分解 $fg=P_{U,V} f_U g_V$ 中出现的乘积 $f_U g_V$ 属于 $\mathbb{Q}\Pi^Q(\mathcal{S})$。因此，乘积 fg 也属于 $\mathbb{Q}\Pi^Q(\mathcal{S})$。□

命题 3.7。给定一组单纯形分式 $\mathcal{S}$，集合

$$\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}+}(\Pi^Q(\widehat{\mathcal{S}})):=\left\{\sum_i h_i S_i,\ \middle|\ h_i\in\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}, S_i\in\Pi^Q(\widehat{\mathcal{S}}), h_i\perp^Q S_i\right\}$$

是 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的一个幺正局部子代数。

因此，$\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}+}(\Pi^Q(b\mathcal{S}))$ 是由 $\mathcal{S}$生成的 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的幺正局部 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$-子代数。

证明。 显然，$\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}+}(\Pi^Q(\frown\mathcal{S}))$ 是一个向量空间。与命题3.6的证明一样，我们只需验证，对于 $a,b\in\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}+}(\Pi^Q(\frown\mathcal{S}))$，若 $a\perp^Q b$，则局部乘积 $ab$ 是良定义的，且属于 $\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}+}(\Pi^Q(\frown\mathcal{S}))$。为完成证明，根据式（9）中的分次，写作

$$a=\sum_U\sum_i a_{U_i}S_{U_i}=\sum_U a_U,\quad b=\sum_V\sum_j b_{V_j}T_{V_j}=\sum_V b_V,$$

其中 $a_{U_i}, b_{V_j}\in\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}, S_{U_i}, T_{V_j}\in\Pi^Q(\mathcal{S})$，且 $a_{U_i}\perp^Q S_{U_i}, b_{V_j}\perp^Q T_{V_j}$，$\mathrm{Supp}(S_{U_i})=U$，$\mathrm{Supp}(T_{V_j})=V$（约定对 $h\in\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$，$\mathrm{Supp}(h)=0$）。

定理 2.13给出 $\mathrm{Dep}(a_U)\subset\mathrm{Dep}(a)$ 且 $\mathrm{Dep}(b_V)\subset\mathrm{Dep}(b)$. 由于 $a\perp^Q b$表示 $\mathrm{Dep}(a)\perp^Q\mathrm{Dep}(b)$，因此有 $\mathrm{Dep}(a_U)\perp^Q\mathrm{Dep}(b_V)$，即 $a_U\perp^Q b_V$。

现在令 $a_U$, 0 和 $b_V$, 0。

(i) 由命题 2.15，我们有 $U\subset\mathrm{Dep}(a)$ 和 $V\subset\mathrm{Dep}(b)$。因此 $U\perp^Q V$ 且 $S_{U_i}\perp^Q T_{V_j}$；(ii) 由 $\mathrm{Dep}(a_U)\subset\mathrm{Dep}(a)$ 和 $V\subset\mathrm{Dep}(b)$，可得 $a_U\perp^Q T_{V_j}$。类似地，$b_V\perp^Q S_{U_i}$；~(iii) 由命题 2.16，存在全纯芽 $\tilde{a}_{U_i}$ 和 $b_{V_j}$，使得

$$\mathrm{Dep}(\tilde{a}_{U_i})\subset\mathrm{Dep}(a_U),\quad \tilde{a}_{U_i}\perp^Q S_{U_i},\ \mathrm{Dep}(\tilde{b}_{V_j})\subset\mathrm{Dep}(b_U),\quad \tilde{b}_{V_j}\perp^Q T_{V_j},$$

这样的 hat

$$a_U=\sum_i \tilde{a}_{U_i}S_{U_i},\quad b_V=\sum_j \tilde{b}_{V_j}T_{V_j}.$$

由 $a_U\perp^Q T_{V_j}$ 和 $\mathrm{Dep}(\tilde{a}_{U_i})\subset\mathrm{Dep}(a_U)$，可得 $\tilde{a}_{U_i}\perp T_{V_j}$。~同样，$\tilde{b}_{V_j}\perp^Q S_{U_i}$.

~总之，$\tilde{a}_{U_i}, b_{V_j}, S_{U_i}, T_{V_j}$两两 Q-正交。因此，$a_U b_V=P_{i,j}\tilde{a}_{U_i}b_{V_j}S_{U_i}T_{V_j}$有定义，并给出 $\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}+}(\Pi^Q(b\mathcal{S}))$中的一个元素。因此，$ab=P_{U,V} a_U b_V$ 有定义，且属于$\mathcal{M}^Q_{\mathbb{Q}+}(\Pi^Q(b\mathcal{S}))$。

□

在后续的例子中，我们默认固定一个关于 $\mathbb{R}^\infty$ 中内积 Q 的标准正交基 $\mathcal{E}$，仅在必要时才在记号中提及这些选择。

例3.8。 集合 $\mathcal{F}^{\mathrm{Ch}} = \mathcal{F}^{\mathrm{Ch},\,\mathcal{Q},\,\mathcal{E}}$ 中例2.7 的 Chen 分式生成幺正局部子代数 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ch}} := \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{\mathcal{Q}}\left(\Pi^{\mathcal{Q}}(\widehat{\mathcal{F}^{\mathrm{Ch}}})\right)$。

例 3.9. 对于有限子集 $J$ 属于 $\mathbb{Z}_{>0}$，我们定义 $z^J := \sum^{i\in J} z_i$。正如 Speer 所讨论的 [Sp2](见 § 5.2)，费曼分式 是单纯形分式 的一种

$$\frac{1}{\prod_{J\in\mathcal{J}} z_J^{s_J}},\ s_J > 0, \tag{19}$$

对于有限子集的有限集 $\mathcal{J}$ 属于 $\mathbb{N}$。沿用例 3.8中的类似记号，费曼分式的集合及其生成的局部子代数记作

$$\mathcal{F}^{\mathrm{Fe}} := \mathcal{F}^{\mathrm{Fe},\mathcal{Q},\mathcal{E}},\quad \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Fe}} := \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{\mathcal{Q}}\left(\Pi^{\mathcal{Q}}(\widehat{\mathcal{F}^{\mathrm{Fe}}})\right).$$

3.2. 单纯形局部代数的自同构群。 对于局部子代数 $\mathcal{A}$ （$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$， $\perp^{\mathcal{Q}}$）的，记 $\mathrm{Aut}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$的局部自同构群，沿用定义 3.5。

b 命题 3.10. 设 $\mathcal{S}$ 是单纯形分式的集合，且 $\mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})$ 是由 $\mathcal{S}$ 生成的 $\mathbb{Q}\mathrm{b}\mathcal{F}^{\mathcal{Q}}$ 的幺正局部子代数。令 $\mathrm{Aut}^{\mathcal{Q}}{}_{\mathrm{Res}}(\mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathrm{b}\mathcal{S}))$ 为幺局部性代数 b b 同态 $\varphi:\ \mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S}) \to \mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})$ 的集合，且满足：对于 $\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})$ 中的任意分式 S,

$$\varphi(S) = S + \sum_i a_i S_i, \tag{20}$$

其中

$$a_i \in \mathbb{Q},\ S_i \in \Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S}),\ \text{p-ord}(S_i) < \text{p-ord}(S),\ \mathrm{Supp}(S_i) \subsetneq \mathrm{Supp}(S).$$

那么，$\mathrm{Aut}^{\mathcal{Q}}{}_{\mathrm{Res}}(\mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S}))$ 是 $\mathrm{Aut}^{\mathcal{Q}}(\mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S}))$ 的一个子群。

注 3.11. 作为定理 3.15 （稍后将证明）的推论，我们有

$$\mathrm{Aut}^{\mathcal{Q}}{}_{\mathrm{Res}}(\mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathrm{b}\mathcal{S})) = \mathrm{n}\ \varphi \in \mathrm{Aut}^{\mathcal{Q}}(\mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathrm{b}\mathcal{S}))\ \middle|\ \varphi \text{保持 p-留数和 d-留数o} \tag{21}$$

这正是带下标“Res”这一记号的依据。

b 证明。记 $\mathrm{R} := \mathrm{R}_S := \mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})$。我们先证明 $\varphi$ 是单射。设

$$f = \sum_i a_i S_i \in R, a_i \in \mathbb{Q}, S_i \in \Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S}) \cup \{1\},$$

非零。如果 $f$ 是 $\mathbb{Q}$中的常数，那么 $\varphi(f) = f \neq 0$。如果 $f$ 不是常数，我们按照式（$f$9）中的分次对 9）中的项进行分组：

$$f = c_0 + \sum_{U\in\mathcal{U}} f_U,$$

b，其中 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{R}^\infty$ 的有限非空非零子空间集，并且对任意 $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$，$0$ , $\mathrm{f}_U \in \mathbb{Q}\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})$ 是支撑空间为 U 的分式和。应用 $\varphi$ 可得

$$\varphi(f) = c_0 + \sum_{U\in\mathcal{U}}\left(f_U + \sum_{V\subsetneq U} g_V\right),$$

其中 $g_V$ 是支撑空间为 $V$的分式和（可能为零）。对于极大元$U_0$属于 $\mathcal{U}$，$f_{U_0}$是上述和中对支撑空间为 $\varphi(f)$ 中支撑空间为 $U_0$的分解（见式（9））对应的唯一贡献。因此 $\varphi(f) = 0$推出 $f_{U_0} = 0$。这就产生了矛盾。因此 $\varphi(f) \neq 0$，从而完成了单射性的证明。

为了证明 $\varphi$ 的满射性，根据 $\varphi$ 的线性，我们只需证明 $\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})$ 中的每个元素 bf 都属于 $\varphi$ 的值域 Im $\varphi$。假设并非如此，并令 $\mathrm{U}_0 \neq 0$ 是 $\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})\backslash\mathrm{Im}\varphi$ 中各元素的支撑空间中极小的 b。令 $\mathrm{f}_0$ 为 bin $\Pi^{\mathcal{Q}}(\mathcal{S})\backslash\mathrm{Im}\varphi$ 中支撑空间为 $\mathrm{U}_0$ 的一个单纯形分式。于是由式 (20) 可得

$$\varphi(f_0) = f_0 + \sum_{V \subsetneq U_0} f_V,$$

其中 $f_V \in \mathbb{Q}(\Pi^Q(\mathcal{S}))$ 是支撑空间为 $V$ 的单纯形分式之和。空间 $U_0$ 是极小的，因此，每个 $f_V$ 都属于 $\varphi$ 的像。因此，$f_0 = \varphi(f_0) - \sum_{V \subsetneq U_0} f_V$ 也属于 $\varphi$ 的像。这与假设矛盾，说明 $\varphi$ 是满射。

我们最终证明 $\varphi^{-1}$ 是一个局部代数同态。我们首先证明 $\varphi^{-1}$ 具有性质，即式（20）中的性质；也就是说，对于一个 $S \notin \Pi^Q(\mathcal{S})$，我们有

$$\varphi^{-1}(S) = S + \sum_i h_i S_i,$$

其中每个 $S_i \in \Pi^Q(\mathcal{S})$ 的支撑空间和 p 阶都小于 S 的支撑空间和 p 阶。假设情况并非如此，并设 S 在反例中具有最小的支撑空间 $U_0$。那么

$$\varphi(S) = S + \sum_j b_j T_j,$$

其中每个单纯形分式 $T_j \in \Pi^Q(\mathcal{S})$ 的支撑空间和 p 阶都小于 S 的支撑空间和 p 阶。应用 $\varphi^{-1}$ 得到

$$S = \varphi^{-1}(S) + \sum_j b_j \varphi^{-1}(T_j). \tag{22}$$

S 的支撑空间的极小性推出

$$\varphi^{-1}(T_j) = T_j + \sum_{jk} d_{jk} T_{jk},$$

其中每个 $T_{jk} \in \Pi^Q(\mathcal{S})$ 的支撑空间和 p 阶都小于 $T_j$ 的相应值，因此也小于 $S$。因此，公式 (22) 给出

$$\varphi^{-1}(S) = S - \sum_j \varphi^{-1}(T_j) = S - \sum_j b_j \left( T_j + \sum_{jk} d_{jk} T_{jk} \right),$$

这表明 $\varphi^{-1}(S)$ 具有公式 (20) 中的形式。由此得到所需的矛盾。

为了验证 $\varphi^{-1}$ 是一个局部性映射，我们考虑 $R = \mathbb{Q}(\Pi^Q(\mathcal{S}))$ 中的两个线性组合 f、g，并将各项分组

$$f = c + \sum_{U \in \mathcal{U}} f_U \quad \text{and} \quad g = d + \sum_{V \in \mathcal{V}} g_V,$$

其中 c、d 属于 $\mathbb{Q}$，且 $f_U$、$g_V \in \mathbb{Q}(\Pi^Q(\mathcal{S}))$ 是非零的分式和，其支撑空间分别为 $U \in \mathcal{U}$ 和 $V \in \mathcal{V}$。我们接下来证明，若 $f \perp^Q g$，则 $\varphi^{-1}(f) \perp^Q \varphi^{-1}(g)$。

设 U 是 $\mathcal{U}$ 中的一个元素，V 是 $\mathcal{V}$ 中的一个元素。根据定理 2.13，$\mathrm{Dep}\, f_U \subset \mathrm{Dep}\, f$ 且 $\mathrm{Dep}\, g_V \subset \mathrm{Dep}\, g$，因此 $\mathrm{Dep}\, f \perp^Q \mathrm{Dep}\, g$ 蕴含 $\mathrm{Dep}\, f_U \perp^Q \mathrm{Dep}\, g_V$，进而得到 $f_U \perp^Q g_V$。根据引理 2.14，对于具有相同支撑空间 U（分别为 V）的单纯形分式的线性组合 $f_U$（分别为 $g_V$），有 $U = \mathrm{Dep}(f_U)$（分别有 $V = \mathrm{Dep}(g_V)$）。因此，$f_U \perp^Q g_V$ 蕴含 $U \perp^Q V$。

由于 $\varphi^{-1}$ 具有式（20）中的性质，因此 $\mathrm{Dep}(\varphi^{-1}(f_U)) \subseteq \mathrm{Dep}(f_U)$，且 $\mathrm{Dep}(\varphi^{-1}(g_V)) \subseteq \mathrm{Dep}(g_V)$。于是 $\varphi^{-1}(f_U) \perp^Q \varphi^{-1}(g_V)$。因此，根据 $\varphi^{-1}$ 的线性性，我们得到 $\varphi^{-1}(f) \perp^Q \varphi^{-1}(g)$，证毕。

最后，对于满足 $f \perp^Q g$ 的 $f, g \in R$，我们有 $\varphi^{-1}(f) \perp^Q \varphi^{-1}(g)$。因此

$$\varphi(\varphi^{-1}(f)\varphi^{-1}(g)) = \varphi(\varphi^{-1}(f))\varphi(\varphi^{-1}(g)) = fg.$$

因此，应用 $\varphi^{-1}$，我们得到 $\varphi^{-1}(f)\varphi^{-1}(g) = \varphi^{-1}(fg)$，这表明 $\varphi^{-1}$ 是一个局部同态。□

3.3. 局部性伽罗瓦群。在本部分中，我们考虑 $(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}, \perp^{Q})$ 的一个局部子代数 $\mathcal{A}$，其中包含 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$。

命题 3.12。对于任意局部态射 $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 满足 $\varphi|_{\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}} = \mathrm{Id}$，我们有 $e$

$$\mathrm{Dep}(\varphi(f)) \subset \mathrm{Dep}(f), \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

证明。对于任意 $l \in \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$，将其视为 $(\mathbb{R}^k)^*$ 的元素，其中 $k \geq 1$。若 $l \perp^{Q} \mathrm{Dep}(f)$，则 $l \perp^{Q} f$，这意味着 $\varphi(l) \perp^{Q} \varphi(f)$，因为 $\varphi$ 是局部性映射。由于 $l \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$，我们有 $\varphi(l) = l$。因此，$l \perp^{Q} \mathrm{Dep}(\varphi(x))$。于是 $\mathrm{Dep}(f)^{\top} \subseteq \mathrm{Dep}(\varphi(x))^{\top}$，从而得到结论。□

下文中，固定一个单纯形分式集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$，并令

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{S}) := \mathbb{Q}(\Pi^{Q}(\widehat{\mathcal{S}})), \quad \mathcal{A} := \mathcal{A}(\mathcal{S}) := \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{Q}\left(\Pi^{Q}(\widehat{\mathcal{S}})\right) \tag{23}$$

为幺正局部子代数，$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{Q}$ 为 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 由 $\mathcal{S}$ 生成的子代数，定义见命题3.6 和3.7 。

定义 3.13。定义 $\mathrm{Aut}^{Q}(\mathcal{A})$ 的一个子集为

$$\mathrm{Gal}^{Q}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}) := \left\{ \varphi \in \mathrm{Aut}^{Q}(\mathcal{A}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi|_{\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}} = \mathrm{Id} \\ \varphi \text{ preserves the p-residue, d-residue} \\ \text{and the locality subalgebra } \mathcal{B} \end{array} \right\}$$

称其为 局部性伽罗瓦群，它对应于 $\mathcal{A}$，相对于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$；这是根据定理 3.15。

接下来，我们给出 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的局部张量积性质。

命题 3.14。设 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$，并按照式 (23)，定义

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{S}) := \mathbb{Q}(\Pi^{Q}(\widehat{\mathcal{S}})), \quad \mathcal{A} := \mathcal{A}(\mathcal{S}) := \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}\left(\Pi^{Q}(\widehat{\mathcal{S}})\right).$$

(i) 对于 $\mathbb{R}^{\infty}$ 的每个 $\mathbb{Q}$-子空间 U，令 $\mathcal{A}_U := \mathcal{A} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{Q},U}$，并令 $\mathcal{B}_U$ 表示 $\mathcal{B}$ 中支撑空间为 U 的单纯形分式的线性张成。令 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{U}$ 表示依赖空间包含于

$$U^{\perp^{Q}} := \left\{ y \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\infty}) \;\middle|\; y \perp^{Q} u, \forall u \in U \right\}.$$

那么我们有（内）张量积

$$\mathcal{A}_U = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{U} \otimes \mathcal{B}_U,$$

也就是说，$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{U}$ 和 $\mathcal{B}_U$ 线性不相交。

(ii) 设 $(V, \tau)$ 为局部向量空间。任意一对局部线性映射 $\varphi: \mathcal{B} \to V$ 和 $\psi: \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+} \to V$ 唯一地扩展为一个局部线性映射

$$\varphi \otimes^{Q} \psi : \mathcal{A} \to V.$$

证明。 (*i*) 根据命题3.7，

$$f = \sum_i h_i S_i, \tag{24}$$

其中 $S_i \in \Pi^{Q}(b\mathcal{S})$ 的 $\mathrm{Dep}(S_i) = U$，$h_i$ 为全纯函数，其依赖空间包含于 $U^{\perp^{Q}}$ 中，因此 $h_i \perp^{Q} S_i$。所以 $\mathcal{A}_U = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}^{U} \mathcal{B}_U$ 是子集的乘积。

为证明不相交性，我们更一般地考虑一个线性组合

$$\sum_i h_i S_i = 0, \tag{25}$$

其中 $\mathrm{Dep}(S_i) = U$，$h_i$ 在依赖空间包含于 $U^{\perp^{Q}}$ 的情况下是全纯的。假设 $\{S_i\}_i$ 是线性无关的，但对于和式中的所有 i，$h_i$，0。记 $V = P_i \mathrm{Dep}(h_i)$，这是 $U^{\perp^{Q}}$ 的有限维子空间。于是 $h_i$ 定义在 V 上。因此，我们可以选取不相交集合

变量 $\{z_k\}$ 在 $U$ 中，以及 $\{w_\ell\}$ 在 $V$ 中，分别。由 $h_i$， 0，可知存在 $\{w^0{}_1\}$，使得 $h_i(\{w^0{}_1\})$， 0 对所有 $i$ 成立。于是，式（25）给出

$$\sum_i h_i(\{w^0_\ell\})\, S_i = 0,$$

这表明 $\{S_i\}_i$ 线性相关。由此得到所需的矛盾。

(*ii*) 根据命题3.7， $\mathcal{A}$ 由关于分次公式 (9) 中支撑空间的分次的齐次元素线性张成。因此， $\mathcal{A}$ 具有受限分次

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{U\subset\mathbb{R}^\infty} \mathcal{A}_U.$$

那么我们只需证明 $\varphi$ 和 $\psi$ 唯一确定一个局部性线性映射

$$(\varphi \otimes^Q \psi)_U : \mathcal{A}_U \to V$$

对于 $\mathbb{R}^\infty$ 的每个子空间 U。

根据条目 (*i*)，对于任意线性映射 $\varphi\colon \mathcal{B}_U \to V$ 和 $\psi\colon \mathcal{M}^U_{\mathbb{Q}+} :\to V$，存在唯一的线性映射

$$(\varphi \otimes^Q \psi)_U : \mathcal{A}_U \to V, \quad f \mapsto \sum \psi(h_i)\varphi(S_i) \tag{26}$$

对于任意元素 $\mathrm{f} = \mathrm{P\,i\,h_i S_i\,in}\ \mathcal{A}_U$，其形式如等式 (24) 所示。事实上，$(\varphi \otimes^Q \psi)_U$ 只是 $\psi$ 在 $\mathcal{M}^U_{\mathbb{Q}+}$ 上的限制与 $\varphi$ 在 $\mathcal{B}_U$ 上的限制的张量积。对 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$ 的所有子空间 U（包括 $\mathrm{U} = 0$）求和，我们得到 $\varphi \otimes^Q \psi$，它是 $\varphi$ 和$\psi$ 到 $\mathcal{A}$的扩张。□

本节余下部分将用于证明以下定理，该定理将 $\mathrm{Aut}^Q{}_{\mathrm{Res}}(\mathcal{B})$ 中的一个元素扩张为 $\mathrm{Gal}^Q(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$ 中的一个元素。

定理 3.15。 设 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ 并设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 如等式 (23)中所定义。

(i) 任意元素 $\varphi \in \mathrm{Aut}^Q{}_{\mathrm{Res}}(\mathcal{B})$ (见命题*3.10*) 都唯一地扩张为$\mathrm{Gal}^Q(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$ 中的一个元素，其定义如下：

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_i h_i S_i\right) := \sum_i h_i \varphi(S_i) \tag{27}$$

*for*

$$f = \sum_i h_i S_i \in \mathcal{A}, h_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}, S_i \in \Pi^Q(\widehat{\mathcal{S}}) \tag{28}$$

如命题*3.7*中所述。

(ii) 子集 $\mathrm{Gal}^Q(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}) \subseteq \mathrm{Aut}^Q(\mathcal{A})$ 是一个子群。将其限制到 $\mathcal{B}$，便得到一个群同构

$$\mathrm{Gal}^Q(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}) \cong \mathrm{Aut}^Q_{\mathrm{Res}}(\mathcal{B}).$$

证明。 (*i*) 应用命题3.14，并取 $\psi$ 恒等映射，对于任意线性映射 $\varphi\colon \mathcal{B}_U \to \mathcal{B}_U$，存在唯一的线性映射

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{M}_{\mathbb{Q},U} \to \mathcal{M}_{\mathbb{Q},U}, \quad f \mapsto \sum h_i \varphi(S_i) \tag{29}$$

对于任意元素 $f = \sum_i h_i S_i$ 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q},U}$，它可表示为方程（24*i*）中的形式。

接下来我们证明，以此方式 $\tilde{\varphi}$ 得到的结果具有方程（27）中的形式。令 $f = \sum_i h_i S_i$ 如方程（28）所示。按照 $S_i$ 的支撑空间对各项分组，如方程（9）所示，可得

$$f = \sum_{U\in\mathcal{U}} f_U \ \text{ with } \ f_U = \sum_j a_{Uj} S_{Uj},$$

其中 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{R}^\infty$ 的子空间 U 的集合，使得 $\mathrm{f}_U, 0$，且对于每个 $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$，我们有

$$S_{Uj} \in \Pi^Q(\mathcal{S}), \quad \mathrm{Dep}(S_{Uj}) = \mathrm{Supp}(S_{Uj}) = U, \quad \mathrm{Dep}(a_{Uj}) \perp^Q \mathrm{Dep}(S_{Uj})$$

并且每一项 $a_{Uj}S_{Uj}$ 都是 $f = \sum_i h_i S_i$ 中的一项。因此 $f_U$ 属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q},U}^{\text{元}}$ 我们可以应用公式（29）并得到

$$\tilde{\varphi}(f_U) = \sum_i a_{Uj}\varphi(S_{Uj}),$$

它具有式（27）中的形式。因此， $\tilde{\varphi}(f)$也如此。这正是我们所需要的。

由定义以及 $\varphi$ 在 $\mathcal{B}$上的特殊形式可知， $\tilde{\varphi}$ 保持式（10）中的 p-留数以及式（11）中的 d-留数。

对于 $f = P_i h_i S_i \in \mathcal{A} = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}(\Pi^{\mathbb{Q}}(\mathcal{S}))$，其中 $h_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$， $S_i \in \mathcal{S}$， f 的 p-留数 p-res( f ) 具有如下形式： $P'_i h_i(0)S_i$，其中求和遍历 f 中阶数最高的单纯形分式 $S_i$。根据 $\tilde{\varphi}$ 的定义，和式 $P'_i h_i S_i$ 仍是 $\tilde{\varphi}(f)$ 中阶数最高的部分。因此， p-res( $\tilde{\varphi}$( f )) = p-res( f )。

对极性芽的支撑空间维数应用相同的论证，可知 $\tilde{\varphi}$ 保持 d-留数。

接下来我们验证 $\tilde{\varphi}$ 是局部的 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$-代数同态。对于 $a,b \in \mathcal{A}$ 满足 $a \perp^{\mathbb{Q}} b$的情形，如命题3.6的证明中所示，我们可以将它们写成

$$a = \sum_U \sum_i h_{U_i} S_{U_i}, \quad b = \sum_V \sum_j g_{V_j} T_{V_j}$$

使得

$$h_{U_i} \neq 0, g_{V_j} \neq 0, \{h_{U_i}, S_{U_i}\} \perp \{g_{V_j}, T_{V_j}\}.$$

由 $\varphi$ 的特殊形式可得

$$\mathrm{Dep}(\varphi(S_{U_i})) = U, \quad \mathrm{Dep}(\varphi(T_{Vi})) = V.$$

于是由 $\tilde{\varphi}$ 的定义可知 $\tilde{\varphi}(a) \perp^{\mathbb{Q}} \tilde{\varphi}(b)$。此外（将 $h_0$ 视为 $h_U S_U$，其中 $U = 0$， $g_0$也同理），

$$\tilde{\varphi}(ab) = \tilde{\varphi}\left(\sum_{U,V} h_{U_i} g_{V_j} S_{U_i} T_{V_j}\right) = \sum_{U,V} h_{U_i} g_{V_j} \varphi(S_{U_i} T_{V_j}) = \sum_{U,V} h_{U_i} g_{V_j} \varphi(S_{U_i})\varphi(T_{V_j}) = \tilde{\varphi}(a)\tilde{\varphi}(b).$$

根据构造，扩张 $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ 具有函子性：

$$\widetilde{\varphi\psi} = \tilde{\varphi}\tilde{\psi}, \quad \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}.$$

因此，对于任意 $\varphi \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Q}}{}_{\mathrm{Res}}(\mathcal{B})$， $\tilde{\varphi}$ 是线性双射。函子性还表明 $g\, g\tilde{\varphi}\varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$。所以 $\tilde{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1}$。因此， $e\varphi^{-1}$ 也是局部的 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$-代数同态。因此，对于所有 $\varphi \in \mathrm{Aut}^{\mathbb{Q}}{}_{\mathrm{Res}}(\mathcal{B})$， $\tilde{\varphi}$ 都属于 $\mathrm{Gal}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$。由 $g\varphi\,\psi = \tilde{\varphi}\tilde{\psi}$， $\tilde{\varphi}^{-1} = g\varphi^{-1}$，映射的像

$$\Psi : \mathrm{Aut}^{\mathbb{Q}}_{\mathrm{Res}}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Gal}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}) : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}, \tag{30}$$

是 $\mathrm{Aut}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{A})$ 的一个子群。

(*ii*) 式（Ψ 30）中定义的映射显然是单射，其像包含于 $\mathrm{Gal}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$。现在，对于任意 $g \in \mathrm{Gal}^{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$，由于它保持 $\mathcal{B}$，对于任意 $S \in \Pi^{\mathbb{Q}}(\mathcal{S})$，

$$g(S) = \sum_i a_i S_i,$$

带有一个 $a_i \in \mathbb{Q}$， $S_i \in \Pi^{\mathbb{Q}}(\mathcal{S})$。

注意 g(S) 的 p-留数等于 S 的 p-留数，而后者就是 S。因此我们可以写成

$$g(S) = \sum a_i S_i = \sum_{\text{p-ord}(S_i)=\text{p-ord}(S)} a_i S_i + \sum_{\text{p-ord}(S_i)<\text{p-ord}(S)} a_i S_i$$

and

$$\sum_{\text{p-ord}(S_i)=\text{p-ord}(S)} a_i S_i = S.$$

So

$$g(S) = S + \sum_{\text{p-ord}(S_i)<\text{p-ord}(S)} a_i S_i.$$

此外，S 的 d-留数也是 S。记作

$$g(S) = S + \sum_U S_U = S + \sum_U \sum_i a_{U_i} S_{U_i},$$

其中 $\dim U < \dim \mathrm{Supp}(S), 0 \neq S_U = \sum_i a_{U_i} S_{U_i} \in \mathbb{Q}(\Pi^Q(\mathcal{S}))$ 且 $\mathrm{Supp}(S_{U_i}) = U$。根据引理 2.14、命题3.12 和定理 2.13，可得

$$U = \mathrm{Dep}(S_U) \subseteq \mathrm{Dep}(g(S)) = \mathrm{Dep}(S) = \mathrm{Supp}(S).$$

因此 $\mathrm{Supp}(S_{U_i}) \subsetneq \mathrm{Supp}(S)$。于是 $g|_{\mathcal{B}}$ 属于 $\mathrm{Aut}^Q_{\mathrm{Res}}(\mathcal{B})$，并且有 $\Psi(g|_{\mathcal{B}}) = g$，从而得到所需的同构。□

## 4. 由 Chen分式和Speer分式生成的局部性多项式代数

在本节中，我们证明，由 Example $\mathcal{F}$2.7 中的 Chen 分式生成的 局部性子代数 以及由 $\mathbb{Q}$ 上的更一般的 Speer 分式类生成的局部性子代数，都是局部性多项式代数；局部性多项式代数定义为以下多项式代数的局部性版本。

定义 4.1. 设 $(A, \top)$ 是一个局部性 K-代数。设 X 是 A 的一个子集。

(i) 由 X 构成的局部性单项式是乘积 $x_1 \cdots x_r$，其中 $x_i \top x_j$，对于 i , j。(ii) 若由 X 构成的不同局部性单项式线性无关，则称集合 X 为局部性代数独立的。(iii) 若 $(A, \top)$ 中包含 X 的唯一局部子代数就是 A 本身，则称集合 X 为 $(A, \top)$ 的局部性生成集。(iv) 若 X 局部性代数独立，且是 $(A, \top)$ 的局部性生成集，则称局部性代数 $(A, \top)$ 是由 X 生成的局部性多项式代数。于是记作 $A \cong K_\top[X]$。

4.1. 局部性 shuffle 代数作为局部性多项式代数。先回顾一下如何将洗牌代数视为由多项式生成的代数。设 K 为交换环，X 为集合，令 $A = KX$ 为以 X 为基的线性空间，W(X) 为字母属于 X 的字（包括空字）的集合。X 上的洗牌代数是空间

$$\mathrm{Sh}(KX) := KW(X),$$

配备 shuffle 乘积 ш。更准确地说，

$$(\alpha_1 \vec{\alpha}') \text{ ш } (\beta_1 \vec{\beta}') := \alpha_1(\vec{\alpha}' \text{ ш } (\beta_1 \vec{\beta}')) + \beta_1((\alpha_1 \vec{\alpha}') \text{ ш } \vec{\beta}'), \quad \alpha_1, \beta_1 \in X, \vec{\alpha}', \vec{\beta}' \in W(X),$$

初始条件为 $1 \text{ ш } \vec{\alpha} = \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \text{ ш } 1$。

对于良序集 $(X, \leq)$，在 W(X) 上赋予字典序 $\leq_{\mathrm{lex}}$。W(X) 中的字 w 称为 Lyndon 字，如果它在所有循环移位中字典序最小。等价地，若 w 小于它的所有后缀，则 w 是 Lyndon 字：$w = uv$，其中 u、v , 1，蕴含 $w \leq_{\mathrm{lex}} v$。

定理 4.2。 [CFL， Ra] 设 $(X, \leq)$ 是一个良序集。

(i) (Chen-Fox-Lyndon) W(X) 中任意字 w 都有唯一的分解

$$w = w_1^{i_1} \cdots w_k^{i_k} \tag{31}$$

其中 $w_1 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} w_k$ 是 Lyndon 字，且 $i_1, \ldots, i_k \geq 1$。

*(ii)* (*Radford*)设 K 为 $\mathbb{Q}$-代数。X 上 Lyndon 字的集合 Lyn($X$) 是 Sh($KX$)的代数独立生成集。因此 Sh($KX$) $\cong K$[Lyn($X$)] 是多项式代数。事实上，对等式 $= w_1^{i_1} \cdots w^{i_k}{}_k$ 中的分解 (31)，有

$$w = \frac{1}{i_1! \cdots i_k!} w_1^{ш\, i_1} ш \cdots ш\, w_k^{ш\, i_k} + \textit{smaller terms}. \tag{32}$$

由集合 U 构造集合

$$\overline{U} := \{x_0\} \sqcup \{x_u \mid u \in U\}.$$

对于良序集 (U, ≤)，接着在 U 上定义良序 ≤，其定义方式是施加

$$x_0 < x_u, \text{ and } x_u \le x_v \Leftrightarrow u \le v, \ \forall u, v \in U. \tag{33}$$

记

$$W_1(\overline{U}) := \{1\} \cup \prod_{u \in U} W(\overline{U}) x_u \text{ and } \mathrm{Sh}_1(K\overline{U}) := KW_1(\overline{U}) = K \bigoplus \left( \bigoplus_{u \in U} \mathrm{Sh}(K\overline{U}) x_u \right).$$

注意，$\mathrm{Sh}_1(K\overline{U})$ 在 shuffle 乘积下封闭，并且 w 在 中$W_1(U)$ 中的分解（见式 (31)）的因子都属于 $W_1(U)$。因此我们得到（另见 [Zh，§ 3.3。1]）

命题 4.3。设 Lyn$_1$(U) := Lyn(U)\{$x_0$}，即 U 中不以 $x_0$ 结尾的 Lyndon 字集合。于是 Sh$_1$(KU) 是 Sh(KU) 的子代数，并且是由 Lyn$_1$(U) 生成的多项式代数。

现在我们将这些构造推广到局部性框架。

对于局部性集合 (X, ⊤)，令 W$_⊤$(X) 表示 W(X) 中由局部性词组成的子集，也就是满足 w = $w_1 \cdots w_k$ 的字 w，其中 $w_i \top w_j, 1 \le i, j \le k$，外加空字。令

$$\mathrm{Sh}_\top(KX) := KW_\top(X).$$

对于 W$_⊤$(X) 中的 w $= w_1 \cdots w_k$ 和 v $= v_1 \cdots v_\ell$，定义

$$w \top v \Longleftrightarrow w_i \top v_j, \forall 1 \le i \le k, 1 \le j \le \ell. \tag{34}$$

因此，对于 W$_⊤$(X) 中满足 w⊤v 的 w、v，字 wv 也属于 W$_⊤$(X)。由于 w 和 v 的 shuffle 是通过置换 wv 的因子得到的，因此仍属于 W$_⊤$(X)，所以 shuffle 乘积 w ш v 属于 Sh$_⊤$(KX)。由此可知，Sh$_⊤$(KX) 是一个局部性代数。

对于一个良序集 $(X, \le)$，它配备了一个局部性关系 ⊤，其中 $W_\top(X)$ 中的 Lyndon 字称为 局部Lyndon词。以下陈述将定理 4.2 推广到局部性框架。

定理 4.4. 设 (X, ≤) 是一个配备了局部性关系 ⊤ 的良序集。

(i) (局部性 Chen-Fox-Lyndon 定理) W$_⊤$(X) 中的任意字 w 都有唯一的分解

$$w = w_1^{i_1} \cdots w_k^{i_k} \tag{35}$$

其中 $w_1 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} w_k$ 是局部Lyndon词，且 $i_1, \ldots, i_k \ge 1$。

(ii)（局部性拉德福德定理）设 K 是一个 $\mathbb{Q}$-代数。局部Lyndon词集合 Lyn$_⊤$($X$) 是 X 上的局部性代数无关生成集(（按定义 *4.1*），它生成局部性代数Sh$_⊤$($KX$)。因此 Sh$_⊤$($KX$) $\cong K_⊤$[Lyn$_⊤$($X$)] 是一个局部性多项式代数。

证明。 (*i*) 在定理 $w = w_1^{i_1} \cdots w^{i_k}{}_k$ 对局部词 $w$ 分解为 Lyndon 字时，定理 4.2(*i*) 中的每个 $w_i$ 仍然是局部词，因此式（ 35 ）中的分解确实存在。分解的唯一性由式（ 31 ）中的分解唯一性得出。（*ii*) 若 $w$ 是局部的，则由条目（*i*）和定理 4.2(*ii*),

$$w = w_1^{i_1} \sqcup\!\sqcup w_2^{i_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup w_k^{i_k} + \text{smaller terms},$$

也就是说，w 可以模去较小项后由局部Lyndon词生成。较小项通过对 w 中的字进行置换得到，因此仍然是局部的。因此，与非局部性情形一样，可以应用归纳法证明 $\mathrm{Sh}_\top(KX)$ 由 $\mathrm{Lyn}_\top(X)$ 张成。集合 $\mathrm{Lyn}_\top(X)$ 的局部代数无关性是自动成立的，因为它是代数无关集 Lyn(X) 的子集，而局部代数无关性弱于代数无关性。因此，局部Lyndon词是 $\mathrm{Sh}_\top(KX)$ 的局部多项式生成元。□

现在设 $(U, \leq)$ 是一个赋有无自反局部性关系 $\perp$ 的良序集，即对于 U 中任意 u，都有 $u \not\perp u$。

于是 $(\overline{U}, \leq)$ 根据式（33）是一个良序集，并赋有一个由 $\top$定义的局部性关系

$$x_0 \top x_u, \forall u \in U \cup \{x_0\} \text{ and } x_u \top x_v \text{ whenever } u \perp v, \quad \forall u, v \in U. \tag{36}$$

记

$$W_{1,\top}(\overline{U}) := W_1(\overline{U}) \cap W_\top(\overline{U}), \quad \mathrm{Sh}_{1,\top}(K\overline{U}) := KW_{1,\top}(\overline{U}).$$

推论 4.5。设 $(U, \leq)$ 是一个良序集，并配备无自反局部性关系 $\perp$。

(i) $W_\top(U)$ 中的任意一个字 w 都有唯一的分解

$$w = w_1 \cdots w_k x_0^r, \tag{37}$$

其中 $w_1 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} w_k >_{\mathrm{lex}} x_0$ 是 $W_\top(U)$ 中的局部Lyndon词，且 $k, r \geq 0$ .

(ii) 给定一个 $\mathbb{Q}$-代数 K，局部性代数 $\mathrm{Sh}_\top(KU)$ 是由 $\overline{U}$ 上的局部Lyndon词集合 $\mathrm{Lyn}_\top(U)$ 生成的局部性多项式代数：$\mathrm{Sh}_\top(\overline{KU}) \cong K_\top[\mathrm{Lyn}_\top(U)]$。(iii) $\mathrm{Sh}_{1,\top}(\overline{KU})$ 是 $\mathrm{Sh}_\top(KU)$ 的子空间，并且是一个局部子代数。它也是由 $\mathrm{Lyn}_{1,\top}(\overline{U}) := \mathrm{Lyn}_1(U) \cap \mathrm{Lyn}_\top(U)$ 生成的局部性多项式代数。

证明。(i) 由于 $x_0$ 是 $W_\top(U)$ 中最小的局部性 Lyndon 字，它必定出现在式 (35) 的分解末尾，从而得到 $w = w_1^{i_1} \cdots w^{i_k} k\, x_0^r$，其中 $w_1 >_{\mathrm{lex}} w_2 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} w_k >_{\mathrm{lex}} x_0$。此外，局部性 Lyndon 字 $w_i >_{\mathrm{lex}} x_0$ 必须含有因子 $x_u$ ，其中某个 $u \in U$。因此，由于局部性的非自反性以及 w 的局部性，对于 $1 \leq i, j \leq k$，有 $i_1 = \cdots = i_k = 1$ 且 $w_i \top w_j$。该分解的唯一性由定理 4.4 中分解的唯一性推出。(ii)。
(*ii*) 这由定理 4.4.(*i*).(*iii*) 证明与命题
4.3中的证明相同。 □

4.2. 有序分式的应用。本节余下部分中，我们固定一个关于内积 Q 的 $\mathbb{R}^\infty$ 的标准正交基 $\mathcal{E}$。为简单起见，这一选择只作一次，故在大多数记号中省略不提。

设 U 为一个可数集，并且

$$L : U \to \mathcal{L}_\mathbb{Q}, \quad u \mapsto L_u, u \in U, \tag{38}$$

是一个映射，其取值属于空间 $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ 中由式（4）定义的线性形式，其中 $K = \mathbb{Q}$，该映射定义了一个以 $U$为参数的线性形式族。对于 $u_i$ 属于 $U$，$s_i \geq 1$，$1 \leq i \leq k$，定义有序分式 （相对于 $L$）

$$\mathfrak{f}^L\left(\begin{smallmatrix} s_1,\dots,s_k \\ u_1,\dots,u_k \end{smallmatrix}\right) := \frac{1}{L_{u_1}^{s_1}(L_{u_1}+L_{u_2})^{s_2}\cdots(L_{u_1}+\cdots+L_{u_k})^{s_k}}.$$

定义有序分式集合（相对于 L）

$$\mathcal{F}^L := \left\{ \mathfrak{f}^L\left(\begin{smallmatrix} s_1,\dots,s_k \\ u_1,\dots,u_k \end{smallmatrix}\right) \middle| s_i \geq 1, u_i \in U, 1 \leq i \leq k, k \geq 0 \right\} \subseteq \mathcal{F}. \tag{39}$$

注意， $\mathbb{Q}\mathcal{F}^L$ 是由 im(L) 张成的 $\mathbb{Q}$-子空间。

例4.6。当 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_{\mathrm{wCh}}: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ 由 $\mathrm{L}(\mathrm{u}) = \mathrm{z}_u$给出时，

$$\mathfrak{f}^L\left(\begin{smallmatrix} s_1,\dots,s_k \\ u_1,\dots,u_k \end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{f}^{\mathrm{wCh}}\left(\begin{smallmatrix} s_1,\dots,s_k \\ u_1,\dots,u_k \end{smallmatrix}\right) \tag{40}$$

来自例3.8 且 $\mathcal{F}^L = \mathcal{F}^{\mathrm{wCh}}$ 是弱陈分式集合（在[GX] 中称为 MZV 分式，用于多重 ζ 值的应用）。

注意，与弱陈分式不同，陈分式要求 $\mathrm{u}_i$，且当 $\mathrm{i}, \mathrm{j}$ 时 $\mathrm{u}^j$。另一方面，分式 $\frac{1}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)}$ 不是相对于此 L 的有序分式。

命题4.7. 设 U 可数，且 $\mathrm{L}: \mathrm{U} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ 是一个映射。那么映射

$$\Phi = \Phi^L : (\mathrm{Sh}_1(\mathbb{Q}\overline{U}), ш) \to \mathbb{Q}\widehat{\mathcal{F}}^L, \quad x_0^{s_1-1}x_{u_1}\cdots x_0^{s_k-1}x_{u_k} \mapsto \mathfrak{f}^L\left(\begin{smallmatrix} s_1,\dots,s_k \\ u_1,\dots,u_k \end{smallmatrix}\right), \tag{41}$$

$\mathfrak{b}$ 是一个代数同态。这里， $\mathbb{Q}\mathcal{F}^L$ 上的乘法是 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$中的自然乘法。

证明. 当映射 L 由下式给出时

$$L_{\mathrm{wCh}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, \quad u \mapsto z_u,$$

那么 $\mathcal{F}^L = \mathcal{F}^{\mathrm{wCh}}$ 其中 $\mathcal{F}^{\mathrm{wCh}}$ 由式（40）定义的是 MZV分式集合，此时对于 $\Phi = \Phi^{\mathrm{wCh}}$ : $\mathrm{Sh}_1$（$\mathbb{Q}\mathbb{Z}_{>0}$） $\to$ $\mathbb{Q}\mathcal{F}^{\mathrm{wCh}}$ 可由 [GX、式 (7) 、（8）和定理2得出。1]。对于一般的 $U$ 和 $L$，鉴于 $U$的可数性，我们可以固定一个双射 $\theta$： $U \to \mathbb{Z}_{>0}$，从而得到一个代数同构

$$\theta : \mathrm{Sh}_1(\mathbb{Q}\overline{U}) \to \mathrm{Sh}_1(\mathbb{Q}\overline{\mathbb{Z}_{>0}}).$$

另外也不e 注意，变量替换 $\mathrm{z}_i \mapsto \mathrm{L}_i, \mathrm{i} \in \mathbb{Z}_{>0}$，会产生一个代数同态 sm

$$\eta : \mathbb{Q}\widehat{\mathcal{F}}^{\mathrm{wCh}} \to \mathbb{Q}\widehat{\mathcal{F}}^L,$$

$$\mathfrak{f}^{\mathrm{wCh}}\left(\begin{smallmatrix} s_1,\dots,s_k \\ u_1,\dots,u_k \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \mathfrak{f}^L\left(\begin{smallmatrix} s_1,\dots,s_k \\ u_1,\dots,u_k \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{L_{u_1}^{s_1}(L_{u_1}+L_{u_2})^{s_2}\cdots(L_{u_1}+\cdots+L_{u_k})^{s_k}}.$$

那么 $\Phi^L$ 就只是复合映射 $\eta \circ \Phi^{\mathrm{wCh}} \circ \theta$。 □

备注 4.8。代数同态 Φ 不是单射。例如，$\mathrm{f}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{L_{u_1}^2}$ 以及 $\mathrm{f}\left(\begin{smallmatrix} 1,1 \\ u_1,u_1 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2}{u_1}L_\circ}$ 因此，尽管洗牌代数 $\mathrm{Sh}_1(\mathbb{Q}\mathrm{U})$ 是由 Lyndon 字构成的多项式代数 $\mathfrak{b}$，但不能对 $\mathbb{Q}\mathcal{F}^L$ 作同样的断言。正如我们将在下文看到的，这一缺陷可以通过局部性条件来弥补。

设 $(U,\top)$ 是一个可数局部性集合，且 $L:U\to\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ 如上所述。考虑子集

$$\mathcal{F}^L_\top:=\left\{\mathfrak{f}^L\begin{pmatrix}s_1,\dots,s_k\\u_1,\dots,u_k\end{pmatrix}\;\middle|\;s_i\geq 1,u_i\in U,u_i\top u_j\in U,1\leq i\neq j\leq k,k\geq 0\right\}\subseteq\mathcal{F}^L \tag{42}$$

以及 $\mathbb{Q}$-子空间 $\mathbb{Q}\mathcal{F}^L_\top$ of $\mathbb{Q}\mathcal{F}^L$。

定理 4.9。设 $(U,\leq,\top)$ 是一个具有无自反局部性关系$\perp$的可数良序集。假设在方程 (38) 中定义的映射 $L:(U,\top)\to(\mathcal{L}_{\mathbb{Q}},\perp^Q)$ 按照方程 (15) 的含义是一个局部性映射：对于 $x,y\in U$，若 $x\top y$，则 $L_x\perp^Q L_y$。那么

（i）集合 $\mathcal{F}^L_\top$ 线性无关；（ii）方程 $\Phi$ 中的代数同态 （41） 限制为局部性代数之间的同构

$$\Phi_\top:\mathrm{Sh}_{1,\top}(\overline{U})\cong\mathbb{Q}\mathcal{F}^L_\top,\quad w=x_0^{s_1-1}x_{u_1}\cdots x_0^{s_k-1}x_{u_k}\mapsto\mathfrak{f}^L\begin{pmatrix}s_1,\dots,s_k\\u_1,\dots,u_k\end{pmatrix}. \tag{43}$$

（iii）局部性代数 $\mathbb{Q}\mathcal{F}^L_\top$ 是局部性多项式代数。

证明。 （*i*）第一个断言由以下事实得出：所有有序分式的支撑锥都是射影恰当配置的，并且根据 [GPZ3，命题 3。6]（见命题2.3）的结论，射影恰当配置的单纯分式族是线性无关的。

(*ii*) 根据关于 $(U,\leq,\top)$ 的假设，字 $w=x_0^{s_1-1}x_{u_1}\cdots x_0^{s_k-1}x_{u_k}$ in $\mathrm{Sh}(\mathbb{Q}U)$ 是局部的，当且仅当 $u_i\top u_j,i,j$。因此，$w$ 是局部的，当且仅当 $\Phi_\top(w)=\mathfrak{f}^L\begin{pmatrix}s_1,\dots,s_k\\u_1,\dots,u_k\end{pmatrix}$ 属于 $\mathcal{F}^L_\top$。因此，根据条目 (*i*)， $\Phi_\top$ 将 $\mathrm{Sh}_{1,\top}(\mathbb{Q}U)$ 的一个线性基映到 $\mathbb{Q}\mathcal{F}^L_\top$ 的一个线性基上，因而是一个线性同构。

该线性映射也保持局部性。事实上，对于

$$w_1=x_0^{s_1-1}x_{u_1}\cdots x_0^{s_k-1}x_{u_k},\ w_2=x_0^{t_1-1}x_{v_1}\cdots x_0^{t_\ell-1}x_{v_\ell}\in W_1(\overline{U}),$$

我们有

$$\begin{aligned}w_1\top w_2&\Leftrightarrow\{u_1,\dots,u_k\}\top\{v_1,\dots,v_\ell\}\Leftrightarrow\{L_{u_1},\dots,L_{u_k}\}\top\{L_{v_1},\dots,L_{v_\ell}\}\\&\Leftrightarrow\mathrm{Supp}(\Phi(w_1))\perp^Q\mathrm{Supp}(\Phi(w_2))\Leftrightarrow\Phi(w_1)\perp^Q\Phi(w_2).\end{aligned}$$

因此， $\Phi$ 限制为一个局部性线性双射 $\Phi_\top:\mathrm{Sh}_{1,\top}(\mathbb{Q}U)\to\mathbb{Q}\mathcal{F}^L_\top$。最后， 在式（41）中的多重性限制为 的多重性。因此，是一个局部性代数同构。（*iii*）最后这一断言由条目（*ii*）和推论 4.5.(*iii*). □

我们考虑映射 $L:U\to\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ 的两个特殊实例。

例 4.10。 （i）设 $U$ 为配备自然序和局部性关系 $n\top m\Leftrightarrow n,m$ 的集合。定义

$$L:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathcal{L}_{\mathbb{Q}},i\mapsto z_i,i\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

相应的 $\mathcal{F}^L_\top$ 有序分式集合是 $\mathcal{F}^{\mathrm{Ch}}$ 例 2.7 中的 Chen 分式集合。

（ii）设 $U$ 为 $\mathbb{Z}_{>0}$ 的非空有限子集 $\mathbb{Z}_{>0}(\mathbb{Z}_{>0})$ 所构成的集合。其序为字典序：对于元素

$$I:=\{i_1>i_2>\cdots>i_r\},\quad J:=\{j_1>j_2>\cdots>j_s\}$$

在 $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_{>0})$ 中，定义 $I\geq J$，当且仅当序列中第一个非零元素

$$i_1-j_1,i_2-j_2,\dots,i_{\min\{r,s\}}-j_{\min\{r,s\}}$$

为正，或者上述数列中的所有数均为零且 $\mathrm{r} > \mathrm{s}$。$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_{>0})$ 中的局部性关系为：

$$I \top J \Leftrightarrow I \cap J = \emptyset.$$

定义

$$L : \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_{>0}) \to \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}, \quad I \mapsto z_I := \sum_{i \in I} z_i, \quad \forall I \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}_{>0}). \tag{44}$$

相应的分式 $\mathrm{f}^{L}\left( {}^{k}_{s_1,\ldots,s_k} \right)_{I_1,\ldots,I}$具有如下形式

$$\frac{1}{z_{I_1}^{s_1}(z_{I_1}+z_{I_2})^{s_2}\cdots(z_{I_1}+\cdots+z_{I_k})^{s_k}}, \quad s_i \in \mathbb{Z}_{>0}, k \in \mathbb{N}, I_j \cap I_{j'} = \emptyset \text{ if } j \neq j' \tag{45}$$

我们将其称为 Speer 分式。令 $\mathcal{F}^{\mathrm{Sp}}$ 表示 Speer 分式的集合，并令

$$\mathcal{M}^{\mathrm{Sp}} := \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}\left(\Pi^{Q}(\widehat{\mathcal{F}^{\mathrm{Sp}}})\right).$$

Speer 分式这一术语旨在纪念此类分式最早出现在 Speer 关于重整化的研究中 [Sp2]。注意，Speer 分式中的线性形式对应于 Chen 锥的面。详情请见第 5 节。

注 4.11. 注意到 $\mathcal{M}^{\mathrm{Fe}}_{\mathbb{Q}} \supset \mathcal{M}^{\mathrm{Sp}}_{\mathbb{Q}}$，但它们是否确实不同仍是一个开放问题。

作为定理4.9的直接推论，我们得到

推论 4.12。局部性代数$\mathbb{Q}\mathcal{F}^{\mathrm{Ch}}_{\top}$和$\mathbb{Q}\mathcal{F}^{\mathrm{Sp}}_{\top}$ 分别是在 $\mathcal{F}^{\mathrm{Ch}}$ 和 $\mathcal{F}^{\mathrm{Sp}}$ 中与局部Lyndon词对应的分式集合上的局部性多项式代数。

## 5. 局部特征与解析重整化

在最后这一节中，作为前述结果的应用，我们讨论引言中提出的关于 Speer的解析重整化的问题1.1-1.3。我们首先证明，Speer的解析重整化中广义费曼振幅的极点结构具有前文所引入的形式。随后，我们将局部性广义求值器的构造与 Speer 的构造进行比较，并在局部性广义求值器上得到一个传递群作用。

5.1. Speer 的$s$-族与 Speer 分式。在他关于解析重整化的工作中[Sp2,Sp3, Sp4] (另见 [BR, DZ])，Speer 确定了广义费曼振幅（或正则化费曼振幅）可能具有的极点结构。我们证明，这些线性极点由式（45）中所述的 Speer 分式张成。

我们首先概述 Speer 的工作，主要依据 [Sp3]。如果移除一个顶点后仍无法使其断开，则称费曼图为 2-连通。若费曼图G的子图族E称为奇点族或简称$s$-族[Sp3，定义 2] 当

(i) E 中的每个元素要么是 2-连通的，要么是单条直线。令 E′ 表示 E 中 2-连通元素构成的子集；(ii) E 互不重叠，也就是说，对于 $\mathrm{H}_1$,$\mathrm{H}_2 \in \mathrm{E}$，要么 $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{H}_2$，要么 $\mathrm{H}_2 \subset \mathrm{H}_1$，要么 $\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2 = \emptyset$；(iii) E 中两个或更多不相交元素的并集均不是 2-连通的；(iv) E 在满足这些性质的集合中是极大的。

对于给定的费曼图$G$，广义费曼振幅 $\mathcal{T}_G$ [Sp3，定义 1]) 由分配给每条边 l 的$G$的传播子乘积构成，并通过复数 $\lambda_\ell$进行正则化。它具有如下分解[Sp3，公式 (2.16)]，该分解对E 的$G$的所有 s-族求和，得到亚纯函数 $\mathcal{T}_E$

$$\mathcal{T}_G = \sum_E \mathcal{T}_E,$$

这是将闭锥 Q $_{l\in E(G)}\{\alpha_\ell \geq 0\}$ 表示为并集 $\cup_E D(E)$ 得到的；这些闭锥 D(E) 与 G 的每个子图 s-族 E 相对应。

对于 G 的一个 s-族 E，以及 E 中的 H，令

$$\Lambda(H) := \sum_{\ell\in L(H)} (\lambda_\ell - 1),$$

其中，$L(H)$ 是 $H$的边集。令 μ($H$) 表示 $H$的表面发散度。根据 Speer [Sp3]（参见式（2.21）、定理 3 及其后的注释，另见 [Sp4], 引理 1.4 及其证明），$\mathcal{T}_E$ 可能出现的极点均为以下形式的简单极点：

$$\Lambda(H) - \frac{1}{2}\mu(H) = 0, -1, -2, \ldots.$$

由于我们只在 $\lambda_\ell = 1$、l ∈ L(G) 处对广义费曼振幅进行重整化，因此需要处理的可能奇点形式为 $\left(\text{Q H}_{\in}\text{E, }\Lambda(\text{H})\right)^{-1}$。通过变量替换 $z_i = \lambda_{\ell_i} - 1$，并按 $l_1, \ldots, l_{|L(G)|}$ 对 L(G) 中的元素排序，Λ (H) 对应于式（44）中的线性形式 $z_{I(H)}$，其中 I(H) = {i |$l_i$ ∈ L(H)}。因此，我们只需处理以下形式的芽

$$\left(\prod_{H\in E'} z_{I(H)}\right)^{-1} h$$

其中 h 是一个全纯芽。

现在我们处理问题 1.1。

命题 5.1. 对于 G 的任意 s-族 E，分式

$$\left(\prod_{H\in E'} z_{I(H)}\right)^{-1} \tag{46}$$

属于 $\mathbb{Q}\mathcal{F}^{Sp}$。因此，广义费曼振幅在 z = 0 处的芽属于 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{Sp}$。

证明。由于 s-族 E中的任意两个 2-连通子图之间都不存在重叠，E′ 的哈斯图是一个有根森林。中使用的扁平化过程 [CGPZ2，定理 5.11] 其中涉及 [CGPZ2定义 2 中定义的扁平化态射，10], 将该有根森林转换为梯形树的线性组合。相应地，公式（46）中的分式是（有序的）Speer 分式的线性组合。□

5.2. 亚纯芽的局部性子代数上的广义求值器。设 $\mathcal{A}$ 是代数 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的一个局部性子代数，并赋有定义 $\perp^{Q}$ 中的局部性关系 2.10。

定义 5.2. 局部性代数（$\mathcal{A}, \perp^{Q}$）上的局部广义求值器 $\mathcal{E}$ 是一个线性形式 $\mathcal{E}: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$，满足

(*i*) $\mathcal{E}(h) = h(0)$ for $h \in \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$.
(*ii*) $\mathcal{E}(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{E}(f_1) \cdot \mathcal{E}(f_2)$ for $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ with $f_1 \perp^{Q} f_2$.

我们用 E($\mathcal{A}$) = E$^{Q}$($\mathcal{A}$) 表示 ($\mathcal{A}, \perp^{Q}$ 上的局部性广义求值器集合 ).

注 5.3。注意，局部子代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 定义为直极限 $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}_k$，其中 $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}^k)$，因此线性形式 $\mathcal{E}: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 相当于一族线性形式$\mathcal{E}_k: \mathcal{A}_k \to \mathbb{C}$，$k \in \mathbb{N}$，满足

$$\mathcal{E}_k|_{\mathcal{A}_{k-1}} = \mathcal{E}_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

例 5.4. 令 $\mathrm{ev}_0: \mathcal{M}_{\mathbb{Q}+} \to \mathbb{Q}$ 为在 0 处定义的求值 $\mathrm{ev}_0(h) = h(0)$。利用方程（$\pi_+^Q$ 17）中定义的映射，我们通过复合构造出 $\mathcal{A}$ 上的局部广义求值器

$$\mathcal{E}_{\mathrm{MS}}^Q := \mathrm{ev}_0 \circ \pi_+^Q, \tag{47}$$

我们称之为局部性最小减除映射，因为它是对单变量最小减除映射在高维情形下的推广；后者通过将洛朗级数环 $\mathbb{C}[\varepsilon^{-1}, \varepsilon]]$ 投影到全纯部分，再在零点求值得到。

在其著作 [Sp1、Sp2、Sp3、Sp4], Speer 借助他称为广义求值器的线性形式实现了解析重整化。我们来比较这些广义求值器与定义 5.2中定义的广义求值器。

我们首先注意到，与例2.7中一样，在变量 $z_i$ 中给出一个函数，意味着我们已经选定了该空间的一组基 $\{e_i\}$，并且空间中的每个元素都写成如下形式：$\sum z_i e_i$。若存在内积，我们就选取 $\{e_i\}$ 作为一组标准正交基。

遵循 Speer（另见例 3.9），定义 $\mathcal{M}^{\mathrm{Fe}}(\mathbb{C}^k)$ 为亚纯芽（在零点处）构成的空间 $f$，其具有以下性质

$$f: \mathbb{C}^k \to \mathbb{C} \text{ such that } f(z_1, \ldots, z_k) \cdot \prod_{I \subseteq [k]} z_I \text{ is holomorphic at zero.}$$

Speer 将 广义求值器 [Sp1] 定义为一族线性映射

$$\mathcal{E} := \left\{\mathcal{E}_k : \mathcal{M}^{\mathrm{Fe}}(\mathbb{C}^k) \to \mathbb{C}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

满足以下条件。

(i)（与滤过相容）$\mathcal{E}_k|_{\mathcal{M}^{\mathrm{Fe}}(\mathbb{C}^{k-1})} = \mathcal{E}_{k-1}$，$k \geq 1$；(ii)（$\mathrm{ev}_0$ 的延拓） $\mathcal{E}$ 在全纯函数上是通常的求值 $\mathrm{ev}_0$（在零点处）；(iii)（部分乘法性） $\mathcal{E}(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{E}(f_1) \cdot \mathcal{E}(f_2)$，若 $f_1$ 和 $f_2$ 依赖于互不相交的变量集 $z_i$；(iv)（$\Sigma_k$-不变性） $\mathcal{E}$ 对变量 $\mathcal{E}_k \circ \sigma^* = \mathcal{E}_k$ 的任意置换保持不变，其中$\sigma \in \Sigma_k$，且 $\sigma^* f(z_1, \ldots, z_k) := f(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(k)})$；

此外还有实性和连续性条件，本文不作讨论。要使广义求值器具有连续性，必须将本文所进行的构造扩展到拓扑框架中，这正是作者二人合作的[DPS] 工作的目标。

在实践中，Speer 通过如下设定构造这样的广义求值器：

$$\mathcal{E}_k^{\mathrm{iter}} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg}, z_{\sigma(1)}} \circ \cdots \circ \mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg}, z_{\sigma(k)}}, \tag{48}$$

其中，对于 $1 \leq i \leq k$，$\mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg}\, z_i}(f)$ 定义为 $\mathrm{ev}_0 \circ \pi_+^{z_i}(f)$，其中将$f$视为变量$z_i$的亚纯函数；其中 $\pi_+^{z_i}$ 按式（2）定义。

例5.5. 我们给出 $k = 2$ 情形下的一些例子。

a) For $f(u, v) = \frac{u}{v}$, $g(u, v) = \left(\frac{u}{v}\right)^2$, we have $\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(f) = \mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(g) = 0$;

b) 对 f 和 g 作变量代换 $u = z_1 - z_2, v = z_1 + z_2$，得到

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}, \quad \tilde{g}(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2,$$

并且我们有 $\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{f}) = 0$ 而 $\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g}) = 1$。

我们现在证明，我们的局部性广义求值器就是 Speer 式的广义求值器 `，并且它为 Speer 最初使用的广义求值器 $\mathcal{E}^{\mathrm{iter}}$ 提供了一种实用的替代方案。

命题 5.6。对于任意内积 Q，定义 $\mathcal{E}$ 中的局部广义求值器 5.2 满足定义 Speer 式广义求值器 ` 的条件 (*i*) – (*iv*)。

证明。事实上，条件（*i*）由注 5.3 得出，而（*ii*）与定义 5.2 中的条件（*i*）相同。对于 $\mathcal{E}$，局部乘法条件（定义 5.2.(*ii*）比部分乘法条件（*iii*）更强，因为两个函数的变量不相交，意味着当这些变量对应于 Q 的标准正交基中的坐标时，它们关于 $Q$ 正交。条件（*iv*）由 [CGPZ3] 中的定理 5.1(ii) 得出。□

为了解决问题 1.2，结合推论 5.8 和命题5.6，我们注意到，每个 Speer 式广义求值器 `a 都可通过最小减除方案 $\mathcal{E}^Q{}_{\mathrm{MS}}$分解。我们比较这两个广义求值器$\mathcal{E}^{\mathrm{iter}}{}_k$ 和 $\mathcal{E}^Q{}_{\mathrm{MS}}$。

(i) 我们首先注意到 Speer 提出的归纳过程存在一个问题，因为函数 $(z_2, \cdots, z_k) \mapsto \mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg}\, z_1}(f(z_1, \cdots, z_k))$ 可能是非亚纯的，这会妨碍对 j , 1 时的 f 实施复合 $\mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg}\, z_j} \circ \mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg}\, z_1}$。

例如，零点处的不连续性

$$\mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg},z_1}(\tilde{f}) = \begin{cases} 1, & z_2 = 0, \\ -1, & z_2 \neq 0, \end{cases}$$

会妨碍下一步运算，进而得到表达式 $\mathrm{ev}_0^{\mathrm{reg}\, z_2} \circ \mathrm{ev}_1^{\mathrm{reg}\, z_1}(\tilde{f})$，该表达式出现在定义 $\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{f})$ 中。这也表明，没有自然的方法可以将 Speer 的广义求值器解释为多变量的最小减除方案。相比之下，我们的广义求值器$\mathcal{E}^Q{}_{\mathrm{MS}}$ 定义在具有线性极点的亚纯芽上，因此不存在这个问题。

(ii) Speer 的广义求值器的部分乘法性质 (ii) 适用于的函数对集合，比我们的局部乘法性所允许的集合更小。对于 $\tilde{g}_1(z_1,z_2) = (z_1 - z_2)^2$ 和 $\tilde{g}_2(z_1,z_2) = (z_1 + z_2)^{-2}$，我们有

$$\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g}_1\, \tilde{g}_2) \neq \mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g}_1)\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g}_2)$$

因为 $\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g}_1\, \tilde{g}_2) = 1$ 和 $\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g}_1) = \mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g}_2) = 0$。然而，对于 $\mathcal{E}^Q{}_{\mathrm{MS}}$，乘法性成立，因为线性形式 $z_1 - z_2$ 和 $z_1 + z_2$ 正交（与之前一样，参数 $z_i$' 对应于 Q 的标准正交基中的坐标），并且我们有

$$\mathcal{E}^Q_{\mathrm{MS}}(\tilde{g}_1\, \tilde{g}_2) = 0 = \mathcal{E}^Q_{\mathrm{MS}}(\tilde{g}_1)\, \mathcal{E}^Q_{\mathrm{MS}}(\tilde{g}_2).$$

(iii) 如例 5.5 所示，Speer 的广义求值器$\mathcal{E}^{\mathrm{iter}}{}_k$ 取决于基的选择，因为 $\mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(g) \neq \mathcal{E}_2^{\mathrm{iter}}(\tilde{g})$。即使对变量进行正交变换，它也不是不变的。相比之下，我们的广义求值器$\mathcal{E}^Q{}_{\mathrm{MS}}$ 不依赖于这样的正交变换。对于例 5.5 中在内积 Q 下具有标准基 $z_1, z_2$的函数 g，有 $\mathcal{E}^Q{}_{\mathrm{MS}}(g) = \mathcal{E}^Q{}_{\mathrm{MS}}(\tilde{g}) = 0$。

总而言之，上述观察结果支持使用全局最小减法方案 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}}$，因为它在 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Fe}}(\mathbb{C}^k)$ 上作全局定义，并且对一大类有序对具有乘法性。

5.3. 广义求值器上的局部性伽罗瓦作用。我们考察局部性伽罗瓦群在广义求值器上的作用。显然，群 $\mathrm{Gal}^{Q}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$ 作用于 $\mathrm{E}^{Q}(\mathcal{A})$:

$$E^{Q}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Gal}^{Q}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}) \to E^{Q}(\mathcal{A}), \quad (\mathcal{E}, g) \mapsto \mathcal{E} \circ g. \tag{49}$$

接下来的定理表明，自同构群 $\mathrm{Aut}^{Q}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Gal}^{Q}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$ 在 $\mathrm{E}^{Q}(\mathcal{A})$ 上传递作用，因此将任意局部广义求值器与局部最小减除方案 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}}$ 联系起来。就此而言，$\mathrm{Gal}^{Q}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$ 可视为作用于广义求值器上的重整化群。

定理 5.7. 对于 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$，我们考察 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的幺正局部子代数$\mathcal{A} := \mathcal{M}^{Q}_{\mathbb{Q}+}(\Pi^{Q}(\mathrm{b}\mathcal{S}))$。b b 假设 $\mathcal{F}$ 的局部多项式子代数 $\mathbb{Q}\Pi^{Q}(\mathcal{S})$ 具有局部多项式基 $\mathrm{S} \subset \Pi^{Q}(\mathcal{S})$。那么，$\mathcal{A}$ 上的每个局部广义求值器 $\mathcal{E}$ 都经由最小减除方案 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}}$ 分解，也就是说，存在某个 $\tilde{\varphi}$，使得 $\tilde{\varphi}$ 属于 $\mathrm{Gal}^{Q}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$

$$\mathcal{E}^{Q}_{\mathrm{MS}} \circ \tilde{\varphi} = \mathcal{E}. \tag{50}$$

b 证明。设给定 $\mathcal{E} \in \mathrm{E}^{Q}(\mathcal{A})$。根据假设，$\mathcal{B} := \mathbb{Q}\Pi^{Q}(\mathcal{S})$ 是 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ 的局部多项式子代数，其局部多项式生成元集合为 $\mathrm{S} := \{\mathrm{s}_\alpha\} \subset \Pi^{Q}(\mathcal{S})$。于是映射

$$\varphi : S \to \mathcal{B}, \quad s_\alpha \mapsto s_\alpha + \mathcal{E}(s_\alpha) \tag{51}$$

可扩张为 $\mathcal{B}$ 上的局部代数同态 $\varphi$。

对于任意 $\mathrm{t} \in \Pi^{Q}(\mathcal{S})$，现在我们确定 $\varphi(\mathrm{t})$ 的形式。写作

$$t = P(S)$$

为关于 $S$ 的多项式。于是 $P$ 是如下形式的单项式之和： $\Pi_\alpha s_\alpha$ 其中 $s_\alpha$ 由于局部代数无关性，它们两两不同。此外，令 $W = \mathrm{Supp}(t)$ 且令 $N = \text{p-ord}(t)$。根据引理 2.2，我们可以假设所有这些单项式的支撑空间均为 $W$，且 p 阶为 $N$。对于这些单项式中的每一个，由于局部乘法性，我们有

$$\varphi(\Pi_\alpha s_\alpha) = \Pi_\alpha(s_\alpha + \mathcal{E}(s_\alpha)) = \Pi_\alpha s_\alpha + \text{lower order terms.}$$

这里的低阶项来自 $\Pi_\alpha \mathrm{s}_\alpha$，通过将一个或多个因子 $\mathrm{s}_\alpha$ 替换为 $\mathcal{E}(\mathrm{s}_\alpha)$ 得到，因此它们确实具有较低的 p 阶和更小的支撑空间。由于所有单项式 $\Pi_\alpha \mathrm{s}_\alpha$ 具有相同的支撑空间和 p 阶，我们有

$$\varphi(t) = \varphi(P(S)) = P(S) + \text{lower order terms.}$$

该映射 $\varphi$ 因此在 Aut 中定义了一个元素$^{Q}{}_{\mathrm{Res}(\mathcal{B})}$。由定理 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Gal}^{Q}(\mathcal{A}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$ 得到的扩张 $\varphi$是一个局部性代数同态，3.15 此外，我们有

$$\mathcal{E}^{Q}_{\mathrm{MS}} \circ \tilde{\varphi}(s_\alpha) = \mathrm{ev}_0 \circ \pi^{Q}_{+} \circ \tilde{\varphi}(s_\alpha) = \mathrm{ev}_0 \circ \pi^{Q}_{+}(s_\alpha + \mathcal{E}(s_\alpha)) = \mathrm{ev}_0(\mathcal{E}(s_\alpha)) = \mathcal{E}(s_\alpha).$$

因此，局部性代数同态 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}} \circ \tilde{\varphi}$ 和 $\mathcal{E}$ 在局部性多项式生成集$S$ 上 $\mathcal{A}$一致。因此 $\mathcal{E}^{Q}{}_{\mathrm{MS}} \circ \tilde{\varphi} = \mathcal{E}$ 在 $\mathcal{B}$上一致。由于它们在 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}$上也一致，根据命题3.14，它们在 $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}(\Pi^{Q}(\mathcal{S}))$ 上一致。□

作为定理 4.9 和推论 4.12的直接推论，我们得到一个回答问题 1.3的陈述

推论 5.8. 局部性代数 $\left(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ch}}, \perp^{\varrho}\right)$（（分别为 $\left(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Sp}}, \perp^{\varrho}\right)$））上的局部性广义求值器空间 $\mathrm{E}^{\varrho}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ch}})$（（分别为 $\mathrm{E}^{\varrho}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Sp}})$））是 $\mathrm{Gal}^{\varrho}\left(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ch}}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}\right)$（（分别为 $\mathrm{Gal}^{\varrho}\left(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Sp}}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+}\right)$））的齐性空间。换言之，这些群在 $\mathrm{E}^{\varrho}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Ch}})$（（分别为 $\mathrm{E}^{\varrho}(\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{Sp}})$））上具有传递作用。

最后，我们使用多重ζ值构造一个局部性广义求值器以及局部性伽罗瓦群元素的例子。

回顾一下，对于满足 $s_1 \geq 2$ 的 $s_1, \ldots\ldots s_k \in \mathbb{Z}_{>0}$，在 $(s_1, \cdots, s_k)$ 处的多重ζ值（也称为多重ζ值）为

$$\zeta(s_1, \cdots, s_k) := \sum_{n_k > \cdots > n_1 \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k} = \prod_{i=1}^{k} \sum_{m_i=1}^{\infty} (m_1 + \cdots + m_i)^{-s_i}.$$

对于局部性 Lyndon 字 $\mathrm{x}_0^{s_1-1}\mathrm{x}_{u_1}\ldots\ldots\mathrm{x}_0^{s_k-1}\mathrm{x}_{u_k} \in \mathrm{Sh}_{1,\,\top}(\mathrm{U}),\overline{\ }$以及相应的“Lyndon Chen 分式”

$$\mathfrak{f}\begin{pmatrix} s_1,\ldots,s_k \\ u_1,\ldots,u_k \end{pmatrix} := \frac{1}{z_{u_1}^{s_1}(z_{u_1}+z_{u_2})^{s_2}\cdots(z_{u_1}+z_{u_2}+\cdots+z_{u_k})^{s_k}},\ u_i, s_i \in \mathbb{Z}_{>0}, k \in \mathbb{N}, u_i \neq u_j \text{ if } i \neq j,$$

属于 $\mathcal{F}_{\top}^{\mathrm{Ch}}$（参见例4.10。( )定义

$$\mathcal{E}^{\zeta}\left(\mathfrak{f}\begin{pmatrix} s_1,\ldots,s_k \\ u_1,\ldots,u_k \end{pmatrix}\right) := \begin{cases} \zeta(s_1, \cdots, s_k), & s_1 \geq 2, \\ 0, & s_1 = 1. \end{cases} \tag{52}$$

那么根据 推论4.12，此赋值可延拓为唯一的局部代数同态

$$\mathcal{E}^{\zeta} : \mathcal{A}^{\mathrm{Chen}} \to \mathbb{R}.$$

这里，$\mathbb{R}$ 配备了完整的局部性条件 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$，这意味着同态 $\mathcal{E}^{\zeta}$具有局部性。

注意，由式（52）定义在 $\mathcal{A}^{\mathrm{Chen}}$ 上的映射，对所有局部性 Chen 分式也构成一个局部代数同态，这可由[IKZ]得出。因此它与 $\mathcal{E}^{\zeta}$一致。由此我们得出，将多重ζ值赋给式（52）中的局部性 Chen 分式，定义了一个局部广义求值器 $\mathcal{E}^{\zeta}$。于是，根据定理5.7，局部性伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}\,\tilde{\varphi}$ 中存在一个变换$^{\varrho}(\mathcal{A}^{\mathrm{Chen}}/\mathcal{M}_{\mathbb{Q}+})$，使得

$$\mathcal{E}_{\mathrm{MS}}^{\varrho} \circ \tilde{\varphi} = \mathcal{E}^{\zeta}.$$

致谢。第二作者感谢滑铁卢的 Perimeter Institute 邀请她以埃米·诺特奖学金获得者的身份访问。国家自然科学基金（11890663 和 11821001）资助了本研究。

利益声明。作者没有需要披露的利益冲突。
数据可用性。本研究未创建或分析任何新数据，因此本文不适用数据共享。

## 参考文献

[BR] M. P. Bellon 和 E. I. Russo，量子场论中的 Ward-Schwinger-Dyson 方程，$\varphi_6^3$量子场论，数学物理快报**111**（2021），第 42 期，31 页。5，25[BV1] N. Berline 和 M. Vergne，多面体的局部欧拉–麦克劳林公式，莫斯科数学杂志**7**（2007），355–386。8[BV2] N. Berline 和 M. Vergne，满足达尼洛夫条件的完备环面簇的等变托德属，代数杂志**313**（2007），28–39。2.[BP] N. Bogoliubov 和 O. S. Parasiuk，《关于量子场论中因果函数的乘法》，数学学报**97**（1957），227–266。2

[B] F. Brown，费曼振幅、余作用原理与宇宙伽罗瓦群，《数论与物理通讯》11（2017），453–556。5[C] P. Cartier，《疯狂的一天：从 Gr¨othendieck 到 Connes 和 Kontsevich》，《美国数学会通报》（新系列）38（2001），389–408。5[CFL] K. T. Chen、R. H. Fox 和 R. C. Lyndon，自由微分演算，IV：下中心列的商群，《数学年刊》68（1958），81–95。4, 20[CGPZ1] P. Clavier、L. Guo、S. Paycha 和 B. Zhang，重整化中局部性原理的代数表述，《欧洲数学杂志》5（2019），356–394。2, 3, 12, 13[CGPZ2] P. Clavier、L. Guo、S. Paycha 和 B. Zhang，重整化与局部性：分枝ζ值，《IRMA 数学与理论物理讲义》32（2020），85–132。2, 3, 26[CGPZ3] P. Clavier、L. Guo、S. Paycha 和 B. Zhang，局部性与重整化：泛性质及树上的积分，《数学物理杂志》61（2020），022301，19 页。2, 3, 28[CK1] A. Connes 和 D. Kreimer，量子场论中的重整化与黎曼-希尔伯特问题。I. 图的霍普夫代数结构与主定理，《数学物理通讯》210（2000），249–273。2[CK2] A. Connes 和 D. Kreimer，量子场论中的重整化与黎曼-希尔伯特问题。II. $\beta$-函数、微分同胚与重整化群，《数学物理通讯》216（2001），215–241。2, 3[CM] A. Connes 和 M. Marcolli，《非交换几何、量子场与动机》，美国数学会，2019。3, 5[DPS] R. Dahmen、S. Paycha 和 A. Schmeding，具有线性极点的多变量亚纯函数空间：拓扑结构，arXiv:2206.13993。5, 27[DZ] N. V. Dang 和 B. Zhang，通过谱ζ正则化和爆破在流形上重整化费曼振幅，《欧洲数学会杂志》23（2021），503–556。3, 5, 25[GPZ] L. Guo、S. Paycha 和 B. Zhang，锥上的重整化与欧拉–麦克劳林公式，《杜克数学杂志》166（2017），537–571。2[GPZ3] L. Guo、S. Paycha 和 B. Zhang，具有线性极点的多变量亚纯芽的洛朗展开的锥形方法，《太平洋数学杂志》307（2020），159–196。5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 24[GX] L. Guo 和 B. Xie，多重ζ值分式的洗牌关系，《拉马努金杂志》25（2011），307–317。23[GZ] L. Guo 和 B. Zhang，多重ζ值的重整化，《代数杂志》319（2008），3770–3809。2[Hep] K. Hepp，Bogoliubov-Parasiuk定理的重整化证明，《数学物理通讯》2（1966），301–326。2[t'H] G. 't Hooft，维数正则化与重整化群，《核物理 B》61（1973），455–468。2[t'HV] G. 't Hooft 和 M. Veltman，规范场的正则化与重整化，《核物理 B》44（1972），189–213。2[IKZ] K. Ihara、M. Kaneko 和 D. Zagier，多重ζ值的导子与双重洗牌关系，《组合数学》142（2006），307–338。30[MP] D. Manchon 和 S. Paycha，符号的嵌套和与重整化多重ζ值，《国际数学研究通知》（IMRN）（2010），4628–4697。2[P] J. E. Pommersheim，托里克簇、格点与戴德金和，《数学年刊》295，第 1 期（1993），1–24。2[Ra] D. E. Radford，洗牌代数的自然环基及其在群概形中的应用，《代数杂志》58（1979），432–454。4, 20[Re] K. Rejzner，微扰代数量子场论中的局部性与因果性，《数学物理杂志》60（2019），122301。3[Sp1] E. Speer，解析重整化，《数学物理杂志》9（1968），1040。4, 27[Sp2] E. Speer，论解析重整化的结构，《数学物理通讯》23（1971），23–36。补注：《数学物理通讯》25（1972），336。3, 4, 5, 15, 25, 27[Sp3] E. Speer，解析重整化讲义，技术报告第 73-067 号，1972。4, 5, 25, 26, 27[Sp4] E. Speer，利用多个时空维数进行解析重整化，《数学物理通讯》37（1974），83–92。3, 4, 5, 25, 26, 27[Zh] J. Zhao，《多重ζ函数、多重多对数及其特殊值》，世界科学出版社，2016。21

[Zi] W. Zimmermann, 《动量空间中 Bogoliubov 重整化方法的收敛性》, Comm. Math. Phys. **15** (1969), 208-234. 2

罗格斯大学数学与计算机科学系，纽瓦克，NJ 07102，美国 电子邮箱：liguo@rutgers.edu

波茨坦大学数学研究所，德国波茨坦 D-14469。电子邮箱：
paycha@math.uni-potsdam.de

四川大学数学学院，中国成都 610064。电子邮箱：
zhangbin@scu.edu.cn