具有离散状态的一类峰值受限脏纸信道的预编码

Zhenyu (Charlus) Zhang，Anas Chaaban，英属哥伦比亚大学工程学院，加拿大不列颠哥伦比亚省基洛纳，V1V1V7 zhenyu.zhang@alumni.ubc.ca，anas.chaaban@ubc.ca

arXiv:2301.02306v1 [cs.IT] 5 Jan 2023

摘要——峰值幅度约束下的脏纸信道（DPC）出现在光无线广播信道（BC）中，其中一个接收机处的状态是发往其他接收机的信号。本文研究一类适用于光无线广播信道的峰值受限脏纸信道，其信道状态（即“干扰”）取值于某个等间距网格。对于本文研究的离散状态脏纸信道，可利用其无状态对应信道得到容量上界。为求得其容量下界，本文重新考察了经典脏纸编码方案，包括用于脏纸信道的 Costa 编码和 Tomlinson-Harashima（TH）预编码，并将其作为基准方案。为提升基准方案的性能，本文针对离散状态脏纸信道提出了两种新的预编码方案。尽管与已知可实现无状态容量的 Costa 脏纸编码不同，所提出的方案无法达到无状态容量，但结果表明，离散状态脏纸信道的可达速率与无状态容量之间的差距很小。在双用户峰值约束高斯广播信道中采用所提出的预编码方案，可得到一个新的容量内界（IB）；结果表明，该内界优于基于截断高斯分布（TG）的内界，且与已知的最佳内界相当。

一、引言

在光无线通信（OWC）中，会出现以下干扰：多径传输场景中的码间干扰（ISI）、多色传输场景中的颜色间干扰（ICI），以及广播场景中的用户间干扰（IUI）。所有这些干扰类型都有一个共同特点：发射机知道干扰，但接收机不知道。从信息论的角度看，有状态信道可以很好地建模受到ISI、ICI或IUI干扰的OWC链路，其中干扰被建模为信道状态 [1, 第 7 节。6]。

为了理解有状态信道的重要性，我们以发展更为成熟的射频（RF）通信信道为例。发射机已知干扰的链路可建模为功率约束高斯有状态信道（也称为脏纸信道，DPC [2]）。Costa 在 1983 [2] 的里程碑式研究指出，功率约束DPC的容量与无状态高斯信道相同。其证明基于 Gelfand-Pinsker 定理 [1, 定理 7.3]，该定理给出了广义脏纸信道的容量。Costa 的结果推动了射频脏纸信道的码设计 [3],，并促成了基于DPC的广播信道（BC）容量达成编码方案的发展，涵盖标量情形 [4] 和向量情形 [5]–[7]。

与射频通信不同，由于光发射器（如发光二极管或激光二极管）的物理特性，光无线通信DPC受到峰值幅度约束，而非功率约束 [8], [9]。尽管峰值约束脏纸信道在光无线通信中十分重要，目前文献对其所知甚少。值得注意的是，对于峰值约束高斯信道，研究表明最优编码遵循离散分布 [10], [11],，而非功率约束高斯信道中最优的高斯分布。因此，光无线通信DPC的码设计可能不同于射频脏纸信道的码设计。由此，研究光无线通信DPC的容量是一个有趣的研究方向，目前文献对此尚无定论。

因此，我们希望研究在OWC中采用脏纸编码（DPC）广播并结合离散信号传输的情形。我们提出，用于编码不同用户消息的信号字母表应从同一个网格中选取，且网格元素间距均匀。在所提出的设置中，由此会出现一类具有离散状态的脏纸编码。本文首先在标量输入的峰值约束高斯广播信道中考察这一概念，并将向量输入情形留待未来研究。

本文研究了峰值约束离散状态脏纸信道（DPC）的容量，该信道出现在采用离散信号传输的光无线广播中。为此，我们首先重新审视功率约束DPC中的经典编码方案，包括作为基准方案的DPC Costa 编码和 Tomlinson-Harashima（TH）预编码。为提升这些经典方案的性能，我们进一步提出了两种适用于峰值约束离散状态DPC的新预编码方案，两者均基于取模运算。结果表明，Costa 编码、TH预编码和第一种所提方案的可达速率只能通过下界进行评估；而第二种所提方案则可以通过近似高斯混合分布的熵来进行近似。数值结果表明，两种所提预编码方案的性能均优于基准方案。我们还进一步考察了峰值约束离散状态DPC在标量输入的双用户峰值受限高斯广播信道中的应用。将方案 2 应用于双用户峰值受限高斯广播信道（BC），可得到一个新的容量内界（IB）。结果表明，该内界优于基于截断高斯（TG）分布的容量内界，并且与目前已知的最佳内界性能相当，该内界

基于离散分布。因此，峰值约束离散状态DPC在向量广播信道中的应用前景广阔。

本文余下部分将先定义一些符号。第二节介绍广播信道的基础知识，并定义离散状态脏纸编码，以便于后续讨论和分析。接着，第三节将经典功率约束DPC编码方案应用于其峰值约束对应方案，以建立性能基准。第四节将介绍两种新的预编码方案。第五节对所有预编码方案的可达速率进行数值比较，并给出峰值约束广播信道的一个新容量内界。最后，第六节总结全文。

符号说明：全文中，我们用大写字母表示随机变量，例如 X，用相应的小写字母表示其取值，例如 x。在适用时，相应的花体字母表示其信号字母表，例如 $\mathcal{X}$。对于某个集合 $\mathcal{X}$，用 $|\mathcal{X}|$ 表示其基数。互信息、熵和微分熵分别记为 $\mathsf{I}(\cdot;\cdot)$、$\mathsf{H}(\cdot)$ 和 $\mathsf{h}(\cdot)$。用 $\mathbb{P}[\cdot]$ 表示随机事件的概率。对于随机变量 X，其概率分布、期望和方差分别记为 P_X、$\mathbb{E}[X]$ 和 $\mathbb{V}[X]$。若 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，则记为 $X \sim \mathsf{Unif}([a,b])$；若 X 为离散均匀随机变量，则记为 $X \sim \mathsf{Unif}(\mathcal{X})$。具体而言，对于整数 $m>1$，若 $\mathcal{X}$ 在 $[0,a]$ 内有 m 个等间距排列的等概率质量点，则记为[1] $X \sim \mathsf{ESDU}(a,m)$，这等价于 $X \sim \mathsf{Unif}\left(\mathcal{G}_{a,m}\right)$，其中 $\mathcal{G}_{a,m}=\left\{\frac{ia}{m-1}\right\}_{i=0}^{m-1}$。此外，对于取自等间距网格的信号字母表，例如 $\mathcal{G}_{a,m}$，我们称其为间距为 $\frac{a}{m-1}$ 的信号字母表，其中 $\frac{a}{m-1}$ 为网格间距。当 X 为均值 μ、方差 σ^2 的高斯随机变量时，我们将其记为 $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$。对于随机变量 X，记号 $X^{(n)}$ 表示由 X 的 n 个独立同分布实例构成的序列。我们分别用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{N}$ 表示实数集和自然数集。对于 $x \in \mathbb{R}$，我们将其在宽度为 $a \in \mathbb{R}$ 的量化区间下的量化值和量化误差分别定义为 $(x)_a^{\mathrm{q}} = x - x \bmod a$ 和 $(x)_a^{\mathrm{e}} = x \bmod a$，其中 mod 表示取模运算。最后，我们定义 $[x]^+ = \max\{0,x\}$，并用 $\log(x)$ 表示 x 的以2为底的对数。

II. 离散状态脏纸信道：动机与模型

本节首先通过光无线通信广播信道阐释离散状态脏纸编码的动机，然后定义广播信道中出现的离散状态脏纸编码类别，并设定本文的目标。

[1]ESDU 代表等间隔离散均匀分布。

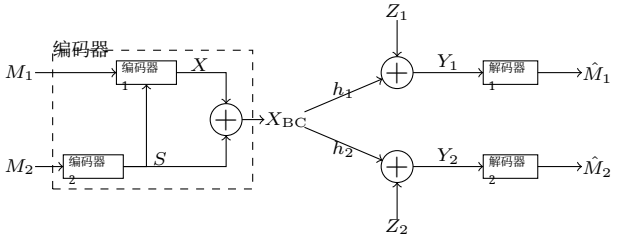

图1. 采用脏纸编码的双用户峰值受限高斯广播信道（广播信道）。

A. 峰值受限广播信道

考虑一个受峰值幅度约束的双用户广播信道，如图 1 所示，或可表示如下：

$$Y_i = h_i X_{\mathrm{BC}} + Z_i,\ i=1,2 \tag{1}$$

其中，发射机希望向用户1发送私密消息 M_1，并向用户2发送 M_2，方法是通过信道增益为$X_{\mathrm{BC}} \in [0,\mathsf{P}]$ 的噪声链路发送 h_i，且高斯噪声为 $Z_i \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma_i^2),\ i=1,\ 2$。不失一般性，令 $h_1 = h_2 = 1$，因为它们的差异可以通过噪声方差体现。本文还不失一般性地假设 $\sigma_1 < \sigma_2$。

如果 M_1 和 M_2 独立编码，则两个用户都会受到用户间干扰。为了消除其中一个用户（例如用户1）所受的用户间干扰，发射机对 M_2 进行编码，得到一个子码字，记为 $S^{(n)}$，其中 n 为码长。然后，发射机对（M_1，$S^{(n)}$）进行编码，得到另一个子码字$X^{(n)}$，最后发送 $X^{(n)}$ 广播信道= $X^{(n)} + S^{(n)}$。这样一来，$S^{(n)}$ 有助于生成 $X^{(n)}$。由于我们只考虑无记忆信道，今后将省略 n。直观而言，这一编码过程类似于脏纸编码 [2], [4]。经过这一编码过程，式（1）中的广播信道等价于以下两个信道：输入为 S、输出为 $Y_2 = S + X + Z_2$的点对点信道，其中 X为干扰；以及输入为 X、输出为 $Y_1 = X + S + Z_1$的脏纸信道，其中 S 为编码器已知的信道状态。

通过基于 DPC 的广播方案，对于广播信道可实现速率对 (R_1,R_2)，使得

$$\mathsf{R}_1 \le \mathsf{I}(T;Y_1) - \mathsf{I}(T;S), \tag{2a}$$
$$\mathsf{R}_2 \le \mathsf{I}(S;Y_2), \tag{2b}$$

其中，(2a) 是根据给定的 P_T 和映射 $x(t,s)$，由 Gelfand-Pinsker (GP) 定理[1, 定理 7。3] 得出的。注意，若 X 和 S 相互独立，则在 (2b) 中有 $\mathsf{I}(S;Y_2) = \mathsf{I}(X+S;Y_2) - \mathsf{I}(X;X+Z_2)$，这将有助于生成第五节中的数值结果。

B. 离散脏纸信道

我们希望研究式（1）中广播信道的一种离散信号方案，使得式（2）中的 S 服从离散分布。具体而言，当 S 取自等间距离散网格时，便得到如下离散状态脏纸编码。

定义 1. 本文研究的峰值约束离散状态DPC类别定义如下:

$$Y = X + S + Z \tag{3}$$

其中， Y 是信道输出， X 是受峰值约束 $X \in [0, \mathsf{A}]$ 的信道输入， $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 是高斯噪声，而 S 是字母表为 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}_{\mathsf{B},\ \mathsf{N}}$ 的离散信道状态，其中 $\mathsf{B} > 0$，且 $\mathsf{N} > 2$ 为整数。

将定义1中的脏纸编码容量记为 C。下面的定理1给出了 C 的上界。

定理1。式（3）中的脏纸编码容量满足 $\mathsf{C} \le \mathsf{C}(\mathsf{A}\ \sigma)$，其中

$$\overline{\mathsf{C}}(\mathsf{A}, \sigma) \triangleq \min\left\{\frac{1}{2}\log\Big(1 + \frac{\mathsf{A}^2}{4\sigma^2}\Big), \log\Big(1 + \frac{\mathsf{A}}{\sqrt{2\pi e}\sigma}\Big)\right\} \tag{4}$$

证明。证明基于 GP 定理 [1, 定理7。3] 证明详见附录A。■

本文其余部分将通过现有或新提出的编码/预编码方案，研究式（3）中脏纸编码的最终可达速率。接下来，通过 Costa 编码得到一个基准可达速率。

III. 离散脏纸编码的基准可达速率

在本节中，我们将 Costa 编码和汤姆林森-哈拉希玛（TH）预编码应用于式（3）中的脏纸编码，并求得其基准可达速率。Costa 编码 [2] 是为功率约束高斯DPC T 设计的。其基本思想是先通过随机分箱构造码字，再对状态进行部分预减。在 Costa 编码中， [1, GP定理3] 定理 7. 3] 中的 $T = X + \alpha S$被选为 $T = X + \alpha S$，其中 X 和 S 相互独立，且 α 经过最优选择以最大化可达速率。虽然这种构造能够达到功率约束高斯DPC的容量，但其在式（3）的峰值约束脏纸信道中的可达速率尚未得到研究。接下来，定理2给出了式（3）中的脏纸编码采用 Costa 编码时可达速率的一个下界，该下界将作为比较基准。

定理2。对于式(3)中的脏纸编码，我们有 $\mathsf{C} \ge \mathsf{R}_{0,}$，其中

$$\mathsf{R}_0 \triangleq \frac{1}{2}\log\Big(\frac{12}{2\pi e} + \frac{\mathsf{A}^2}{2\pi e\sigma^2}\Big). \tag{5}$$

证明。证明见附录B，其中采用了与 Costa 编码类似的构造。■

目前尚无实现 Costa 编码的结构化算法。不过，幸运的是， [12], [13] 中提出的 Tomlinson-Harashima（TH）预编码可用于 [3], [5]。可以证明，TH预编码在式 (3) 的脏纸编码中实现了 R_0，从而提供了一种结构化算法。证明可直接沿用 [3, 引理 6] 的证明，因此此处省略。接下来，我们将为式 (3) 中受峰值约束的脏纸编码提出新的预编码方案，并在第五节中将其与基准方案 (5) 进行比较。

IV. 所提出的预编码方案

为达到高于 R_0，的速率，本节将为式 (3) 中的脏纸编码提出两种新的预编码方案，具体如下。我们将在第五节证明，所提出的两种方案均优于 R_0 。

A. 所提出的预编码方案1

方案1可视为 TH预编码 的一种变体（参见 [3, 引理 6]），其结果是一个等效模信道；但方案1的编码过程基于离散字母表，其中状态将被量化，这与 TH预编码 不同。具体而言，方案1中发射机和接收机的操作如下:

1) 发射机：令 $T \sim$ ESDU(A, K) 用于构造 M的码字。令 $\Delta = \mathsf{A}\ \mathsf{K}-1$，并记 $\mathsf{A}_\Delta = \mathsf{A} + \Delta$。给定 S，发送 M

$$x = \left[t - (\alpha s + w)^{\mathrm{q}}_{\Delta} - w'\right] \bmod \mathsf{A}_\Delta, \tag{6}$$

其中 $W \sim$Unif($[0, \mathsf{A}_\Delta]$) 和 $W' \sim$ESDU(A, K) 是公共随机变量，其取值为发射机和接收机双方所知;

2) 接收机：收到 Y 后，按如下方式获得 Y'。

$$\begin{aligned} y' &= \left[\alpha y + w + w'\right] \bmod \mathsf{A}_\Delta && (7a)\\ &= \left[t - t + \alpha(x + s + z) + w + w'\right] \bmod \mathsf{A}_\Delta && (7b)\\ &= \left[t + (\alpha s + w)^{\mathrm{e}}_{\Delta} + (\alpha - 1)x + \alpha z\right] \bmod \mathsf{A}_\Delta && (7c)\\ &= \left[t + w_0 + (\alpha - 1)x + \alpha z\right] \bmod \mathsf{A}_\Delta && (7d)\\ &= \left[t + \tilde{z}'_\alpha\right] \bmod \mathsf{A}_\Delta, && (7e) \end{aligned}$$

其中 $w_0, [\alpha s + w]$ 对 Δ 进行模运算，且 $\tilde{z}'_\alpha, w_0 + (\alpha - 1)x + \alpha z$。

注释 1. 关于方案1，我们有以下几点说明。

1) 由于模运算是在 $\mathsf{A}_\Delta = \mathsf{K}\Delta$ 上进行，且字母表的间隔为 Δ，因此预编码后输入峰值约束仍然成立，即 $X \in [0,\mathsf{A}]$; 2) 由于 W 对 Unif($[0, \Delta]$) 进行模 $\Delta \sim$ 运算，因此根据密码学引理 *[14,* Lemma *1]*，我们有 $W_0 \sim$服从均匀分布 $([0, \Delta])$，且 W_0 与 T、 S、 X 和 Z 相互独立; ~3) T 与 Z'_α 相互独立，这由上文 2) 可知; 4) 方案1构成一个等效信道，其输入为 T~ ~，输出为 $[T + Z'_\alpha]$ 对 A_Δ 进行模运算，其中 Z'_α 是有效模信道噪声。

方案1的可达速率可以由定理 3 中给出的 R_1作为下界。

定理 3. 对于式 (3) 中的脏纸编码，我们有 $\mathsf{C} \ge \mathsf{R}_{1,}$，其中

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_1 \triangleq\ & \frac{1}{2}\log\Big(\mathsf{A}^2 + \frac{2\mathsf{A}^2}{\mathsf{K} - 1} + 12\sigma^2\Big) - \frac{1}{2}\log(2\pi e)\\ & - \frac{1}{2}\log\Big(\frac{\mathsf{A}^2}{12(\mathsf{K} - 1)^2}\Big[1 - \frac{1}{(\mathsf{K} - 2)^2}\Big] + \sigma^2\Big) \end{aligned} \tag{8}$$

通过方案1实现。

证明。证明见附录 C。 ■

注意，适当选择 K 后，可以保证 R_1 优于 R_0。通过比较 R_0 和 R_1 即可轻松证明这一点，此处省略证明。稍后在第五节中也会观察到这一结论，该节将对不同预编码方案的可达速率进行数值比较。

B. 所提出的预编码方案 2

方案 2 基于映射函数 $\varphi: \mathcal{T}\times\mathcal{S}\mapsto\mathcal{U}$，其中 $\mathcal{T},\mathcal{S},\mathcal{U}\subseteq\{j\delta|j\in\mathbb{N}\}$，定义如下：

$$u=\varphi(t,s)\triangleq\big(t+(|\mathcal{T}|-1)s\big)\bmod\big(|\mathcal{T}|\delta\big)+s. \tag{9}$$

下面给出一个示例，以帮助说明映射函数 φ的行为。

示例：设 $\delta=1$, $\mathcal{T}=\{0,1,2\}$ 和 $\mathcal{S}=\{0,1,\dots,4\}$。然后，表 I 显示了 $\varphi(t,s)$ 的结果。

表 I

$\varphi(t,s)$		s				
		0	1	2	3	4
t	0	0	3	3	3	6
	1	1	1	4	4	4
	2	2	2	2	5	5

方案 2 中发射机和接收机的操作如下：

1）发射机：定义 $\delta=\mathsf{B}_{\mathsf{K}-1}$，$\mathsf{K}'=\lfloor\frac{\mathsf{A}}{\delta}\rfloor+1$ 和 $\mathsf{A}'=(\mathsf{K}'-1)\delta$。令 $T\sim\mathrm{ESDU}(\mathsf{A}',\mathsf{K}')$ 用于构造 M 的码字。为在给定 S 的情况下发送 M，首先通过映射函数 φ 得到 $u=\varphi(t,s)=\big[t+(\mathsf{K}'-1)s\big]\bmod\mathsf{A}'_\delta+s$，其中 $\mathsf{A}'_\delta=\mathsf{A}'+\delta$，然后发送

$$x=u-s. \tag{10}$$

2）接收机：接收到 Y 后，接收机解码 T，注意到以下关系成立

$$y=x+s+z=u+z. \tag{11}$$

注释 2。关于方案 2，我们有以下几点说明。

1) 映射 $\mathcal{U}\mapsto\mathcal{T}$ 是一个满射（如表 I 所示），其中 $\mathcal{U}$ 是$U=\varphi$（T、S）的字母表。因此，如果能够成功检测出 $Y=U+Z$中的 U，就可以依次获得 T 和消息 M；2) 码字和状态的字母表均为 δ间隔，即 $\mathcal{T}$、$\mathcal{S}\subseteq\{j\delta|j\in\mathbb{N}\}$；3) X 与 S相互独立，这一点可从表 I 看出：给定 $S\in\mathcal{S}$时，$X=\varphi$（T、S）$-S$的分布不会改变；4) 方案 2 不一定会用到可行输入强度的全部范围，即 $X\in[0,\mathsf{A}]$, ，因为δ 通常会导致 $\mathsf{A}'\le\mathsf{A}$。不过，在基于 DPC 的广播方案中，可以设计 δ 来优化方案 2。下一节将对此作更详细的说明。

接下来，定理 4 给出了方案 2 的可达速率，记为 R_2。

定理 4。对于式（3）中的脏纸编码，我们有 $\mathsf{C}\ge\mathsf{R}_2$, 其中

$$\mathsf{R}_2\triangleq\mathsf{I}(T;Y) \tag{12a}$$
$$=\mathsf{h}(U+Z)-\mathsf{h}(U+Z|T), \tag{12b}$$

其中 $U=\varphi(T,S)$，其中 $T\sim\mathrm{ESDU}(\mathsf{A}',\mathsf{K}')$，$\mathsf{A}'=(\mathsf{K}'-1)\delta$，且 $\mathsf{K}'=\lfloor\frac{\mathsf{A}}{\delta}\rfloor+1$。

证明。该可达速率基于 GP 定理 [1, 定理 7。3]得出，注意到方案 2 中辅助变量和映射函数的选择并非最优，且 T 与 S 相互独立。■

注意，(12) 中的 U 是离散的，且与高斯随机变量 Z 相互独立，因此，给定概率质量函数（p.m.f.），P_U 和 $P_{U|T}$，即可近似计算 $\mathsf{h}(U+Z)$ 和 $\mathsf{h}(U+Z|T)$。

V. 数值结果

本节首先对迄今讨论过的所有预编码方案的可达速率进行数值比较。然后，我们展示方案 2 如何帮助扩大式 (1) 中峰值约束广播信道的可达速率区域。在所有仿真中，不失一般性，对于脏纸编码，我们令 $\sigma=1$；对于广播信道，我们令 $\sigma_1=1$, $h_1=h_2=1$。在下文讨论中，我们定义 $\mathrm{SNR}=10\log_{10}\big(\frac{\mathsf{A}}{\sigma}\big)$，$\mathrm{SNR}_1=10\log_{10}\big(\frac{\mathsf{P}}{\sigma_1}\big)$，以及 $\mathrm{INR}=10\log_{10}\big(\frac{\mathsf{B}}{\sigma}\big)$。

A. 式 (3) 中脏纸编码的可达速率

在本次仿真中，我们比较式 (3) 中脏纸编码所有预编码方案的可达速率，即 R_i, $i=1,2,3$。由于我们关注的是方案 2 在基于脏纸信道的广播中的应用（将在下一小节中展示），因此，本次仿真将限制状态 S 取值于与信道输入相同的网格。我们还将通过几个参考干扰噪声比值来测试不同状态强度的影响。具体而言，首先设定参考网格间距 $\Delta_0=3\sigma$，以生成间距均匀的网格 $\Delta\mathbb{N}$，其中 $\Delta=\mathsf{A}_{\mathsf{K}-1}$，且 $\mathsf{K}=\min\big\{2,\lceil\frac{\mathsf{A}}{\Delta_0}\rceil\big\}$。然后，令 $T\sim\mathrm{ESDU}(\mathsf{A},\mathsf{K})$，从而得到 $\mathcal{T}\subseteq\Delta\mathbb{N}$。为了生成状态 S，~~给定~~一个参考干扰噪声比值后，我们先求出对应的 B，然后选择一个 $\mathcal{S}\subseteq\Delta\mathbb{N}$，使得 $S\in[0,\mathsf{B}+\Delta]$，并指定 $\mathcal{S}$ 上的分布来生成 S。具体来说，在本次仿真中，举例而言，我们令 $S\sim\mathrm{ESDU}\big(\mathsf{B}',\frac{\mathsf{B}'}{\Delta}+1\big)$，其中 $\mathsf{B}'=\lceil\frac{\mathsf{B}}{\Delta}\rceil\Delta$。给定 $(\mathcal{T},\mathcal{S})$ 后，我们通过式 (12) 得到 R_2。至于本次仿真中的 R_0 和 R_1，两者都只取决于信噪比；其中，我们在式 (8) 中对 K 进行优化，以最大化 R_1。

图2比较了 R_0 (5)、R_1 (8) 和 R_2 (12)，其中 R_1是通过对 K 最大化式 (8) 得到的。可以看出，在所有测试的干扰噪声比和信噪比下，方案 2 的表现均优于方案1和 TH预编码，而 TH预编码在所有设置中的表现最差。此外，当信噪比为$\ge$ 6分贝时，方案 2 在所有测试的干扰噪声比下都能达到接近容量的速率；测试的干扰噪声比范围为 5 至 20分贝。当信噪比为$<$ 6分贝时，

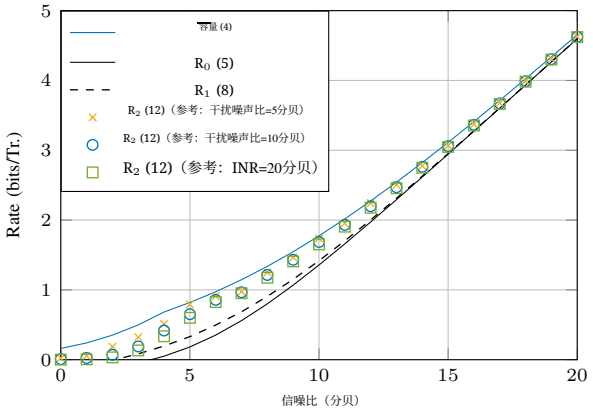

图2。比较式（3）中脏纸编码的 Costa 编码与所提出的预编码方案的可达速率。

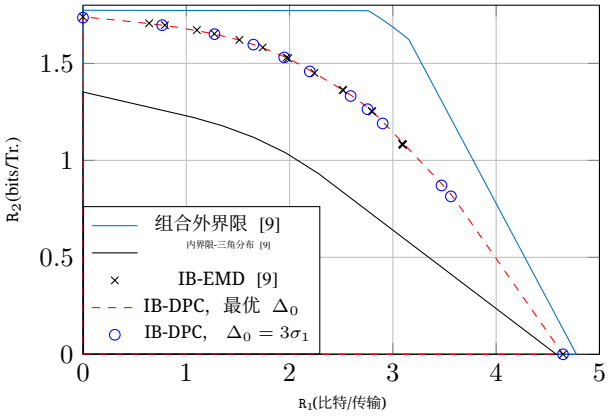

图 3. 信噪比为$_1 = 20$ 分贝且 $\sigma_2 = 10\sigma_1$时，双用户峰值约束高斯广播信道的内界和外界。

R_2 会随着干扰噪声比的增加而降低。值得注意的是，在高信噪比下，仿真中的所有预编码方案都趋近于容量上界 C(A σ)，该上界刻画了式 (3) 中脏纸编码在高信噪比下的容量。此外，当信噪比为≥ 6分贝时，性能接近容量，这表明方案 2 用于基于脏纸信道的广播时具有良好的效率，如下一项仿真所示。

B. 双用户峰值受限高斯广播信道的新内界

对于式 (1) 中的双用户广播信道，我们采用方案 2（基于脏纸编码的传输方案），为该广播信道求得一个新的内界。我们将文献 [9] 中得到的两个基准内界与该新内界进行比较：一个基准内界基于截断高斯（TG）分布，并已证明在高信噪比下是紧的$_1$, ；另一个基准内界基于熵最大化离散（EMD）分布和叠加编码，其中我们在 [9, 定理 3] 中设置字母表大小 $K_1, K_2 \le 40$。我们还采用文献 [9]，中的外界，并将其与另外两个直接得到的外界结合：$R_i \le$ C(P σ_i) 和 $R_1 + R_2 \le$ C(P σ_1)。在本次仿真中，我们关注中等信噪比$_1$, ，例如 20 分贝；这一取值更具实际意义，而且计算方案 2 的内界所需的复杂度不会太高。在仿真中，我们采用参考网格间距 Δ_0，生成等间距字母表以构造码，并以步长 $0.5\sigma_1$ 在 $[0.5\sigma_1, 4\sigma_1]$ 内改变 Δ_0 ，以涵盖更多设置。具体而言，对于每个 Δ_0，我们首先求得 K $= \min\{2, \lceil \mathrm{P}\frac{}{\Delta_0} \rceil\}$，然后遍历范围 $[1, \mathrm{K}]$ 内所有可能的 K_1。令 $\Delta = \mathrm{P}\,\mathrm{K}^{-1}$。对于每个 K_1, ，令 $T \sim$ ESDU$((\mathrm{K}_1 - 1)\Delta,\ \mathrm{K}_1)$，并构造$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}_{\mathrm{P}-(\mathrm{K}_1-1)\Delta,\mathrm{K}-\mathrm{K}_1+1}$，由此得到$X + S \le$ P，并令 $S \sim$ Unif($\mathcal{S}$)。注意，每组 (K, K1, $\mathcal{S}$) 设置都对应于 T、 W、 S 和 U 的一组概率质量函数。随后，通过式 (2) 可数值求得一个可达速率对 (R_1, R_2)。最后，如上所述，方案 2 的内界是所有设置 (K, K1, $\mathcal{S}$) 下得到的速率对的凸包。如图 3 所示，可以看出，方案 2 的新内界远大于在所测试的设置下，基于三角分布的内界，并且其表现与第二个基准内界相当，其中信噪比为$_1 = 20$分贝，且 $\sigma_2 = 10\sigma_1$。这也表明，在所测试的设置下，$\Delta_0 = 3\sigma_1$ 能够很好地近似该新内界。

VI. 结论

总之，我们研究了一类在采用离散信号传输的光无线通信广播中出现的峰值约束离散状态脏纸编码，并提出了两种新的预编码方案来研究其容量。结果表明，所提出的方案优于由 Costa 编码和 TH预编码实现的基准性能。值得注意的是，其中一种方案能够实现接近容量的速率。随后，对于双用户光无线通信广播信道，我们基于所开发的预编码获得了一个新的内界；结果表明，该内界与基于离散分布的已知最佳内界相当。

未来的工作方面，下一步是将方案 2 应用于具有向量输入的峰值约束高斯广播信道。此外，一般状态情形下峰值约束脏纸信道的容量仍未解决，其中提出的方案1可作为基准。既然本文已表明离散信号传输优于 TG 信号传输，那么为光无线通信广播信道设计并研究实用的离散信号方案，使其性能优于广受认可的光正交频分复用方案，将会很有意义；后者生成的是服从 TG 分布的信号。

附录A 定理1的证明

证明。对于某个 $\epsilon_n > 0$ ，使得 $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$，根据 Fano不等式，我们有

$$n\mathrm{C} = \mathrm{I}(M; Y^{(n)}) + n\epsilon_n \le \mathrm{I}(M; Y^{(n)}, S^{(n)}) + n\epsilon_n \quad (13a)$$
$$= \mathrm{I}(M; Y^{(n)} | S^{(n)}) + n\epsilon_n \quad (13b)$$
$$\le \mathrm{I}(M; X^{(n)} + Z^{(n)}) + n\epsilon_n \quad (13c)$$
$$\le n\mathrm{C}_0(\mathrm{A}, \sigma) + n\epsilon_n, \quad (13d)$$

其中，C_0(A σ) 表示输入$X \in [0, \mathrm{A}]$、输出为 $X + Z$ 且满足 $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 的信道容量，这

也是定义 1 中脏纸编码的无状态容量。接下来，根据 [8, 式 (19)] 和 [15, 式 (1)]，可将 $C_0(A\ \sigma)$ 上界为 $C(A\ \sigma)$（定义见式 (4)），从而得到 $C \le C(A\ \sigma)$。证明至此结束。■

附录B 定理2的证明

证明。在 GP 定理 [1,定理 7.3],的容量表达式中，令 $T = X+\alpha S$，其中某个 X 服从连续分布 P_X，且与 S 相互独立。于是，我们有

$$
\begin{aligned}
C &\ge \max_{P_X,\alpha} I(T;Y) - I(T;S) && (14a)\\
&= \max_{P_X,\alpha} h(T|S) - h(T|Y) && (14b)\\
&= \max_{P_X,\alpha} h(X) - h(T|Y) && (14c)\\
&\overset{(a)}{\ge} \max_{P_X,\alpha,\hat{T}(Y)} h(X) - \frac{1}{2}\log\Big(2\pi e\mathbb{E}\big[\big(T-\hat{T}(Y)\big)^2\big]\Big) && (14d)\\
&\overset{(b)}{\ge} \max_{P_X,\alpha} h(X) - \frac{1}{2}\log\big(2\pi e\mathrm{LMMSE}(T,Y)\big) && (14e)\\
&\overset{(c)}{=} \max_{P_X} h(X) - \frac{1}{2}\log\Big(\frac{2\pi e\mathbb{V}[X]\sigma^2}{\mathbb{V}[X]+\sigma^2}\Big) && (14f)
\end{aligned}
$$

其中，(a) 根据 [16, 定理 8.6.6]及其推论得出，该推论通过某个最优估计器 $\hat{T}(Y)$的均方误差（MSE），给出了条件微分熵 $h(T|Y)$的上界；(b) 是将估计器 $\hat{T}(Y)$指定为线性最小均方误差（LMMSE）估计器 [17], 得出的。该估计器并非最优，因此均方误差会增大，所得 LMMSE 为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{LMMSE}(T,Y)\\
&= \mathbb{V}[T] - \frac{\mathbb{E}\big[(T-\mathbb{E}[T])(Y-\mathbb{E}[Y])\big]}{\mathbb{V}[Y]} && (15a)\\
&= \frac{(1-\alpha)^2\mathbb{V}[X]\mathbb{V}[S] + \sigma^2\mathbb{V}[X] + \alpha^2\sigma^2\mathbb{V}[S]}{\mathbb{V}[X]+\mathbb{V}[S]+\sigma^2}; && (15b)
\end{aligned}
$$

而 (c) 是令 $\alpha = \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{V}[X]+\sigma^2}$得出的，它在 α上使 (15b) 中的 $\mathrm{LMMSE}(T,Y)$ 最小。

最后，我们令 X ～均匀分布于 $[0,A]$，因此 $h(X) = \log(A)$，且 $\mathbb{V}[W] = \frac{A^2}{12}$，。然后将 $h(X)$ 和 $\mathbb{V}[X]$ 代入 (14f)，得到 R_0，如式 (5) 所示。证明完毕。■

Appendix C
Proof of Theorem 3

证明。由方案1构成的等效信道可得以下可达速率

$$
\begin{aligned}
\max_{\alpha} I(T;Y') &= \max_{\alpha} h(Y') - h(\tilde{Z}'_\alpha \bmod A_\Delta) && (16a)\\
&\overset{(a)}{=} \log(A_\Delta) - \min_{\alpha} h(\tilde{Z}'_\alpha \bmod A_\Delta) && (16b)\\
&\overset{(b)}{\ge} \log(A_\Delta) - \min_{\alpha} h(\tilde{Z}'_\alpha) && (16c)\\
&\overset{(c)}{\ge} \log(A_\Delta) - \min_{\alpha} h\big(\mathcal{N}(0,\mathbb{V}[\tilde{Z}'_\alpha])\big) && (16d)\\
&\overset{(d)}{=} R_1, && (16e)
\end{aligned}
$$

其中，根据密码学引理 [14,引理 1]，，(a) 成立，因为 $T + W_0 \sim \mathrm{Unif}([0,A_\Delta])$ 意味着 $Y' \sim \mathrm{Unif}([0,A_\Delta])$；(b) 根据模运算降熵（MRE）引理 [18, 引理 A.3.2], 得出；(c) 成立，因为在方差约束下，高斯分布使微分熵最大；(d) 则通过求解以下最小化问题得出：

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \arg\min_{\alpha} \mathbb{V}[\tilde{Z}'_\alpha]\\
&= \arg\min_{\alpha}\Big\{\frac{\Delta^2}{12} + \frac{(\alpha-1)^2 A(A+2\Delta)}{12} + \alpha^2\sigma^2\Big\}\\
&= \frac{A^2+2A\Delta}{A^2+2A\Delta+12\sigma^2}, && (17)
\end{aligned}
$$

其中，R_1 在式 (8) 中定义。证明至此结束。■

参考文献

[1] A. El Gamal and Y.-H. Kim, 《网络信息论》。剑桥大学出版社, 2011年。[2] M. Costa, “在脏纸上写字（通信）”, IEEE《信息论汇刊》, 第29卷, 第3期, 第439–441页, 1983年。[3] U. Erez, S. Shamai, and R. Zamir, “消除已知干扰的容量与格策略”, IEEE《信息论汇刊》, 第51卷, 第11期, 第3820–3833页, 2005年。[4] W. Yu and J. M. Cioffi, “广播信道的网格编码预编码”, 载于 GLOBECOM’01：IEEE 全球电信会议（目录号 01CH37270）, 第2卷。IEEE, 2001年, 第1344–1348页。[5] W. Yu, D. P. Varodayan, and J. M. Cioffi, “基于发射机的干扰预消除的网格与卷积预编码”, IEEE《通信汇刊》, 第53卷, 第7期, 第1220–1230页, 2005年。[6] H. Weingarten, Y. Steinberg, and S. S. Shamai, “高斯多输入多输出广播信道的容量区域”, IEEE《信息论汇刊》, 第52卷, 第9期, 第3936–3964页, 2006年。[7] M. Mohseni, 《高斯矢量广播信道的容量》。斯坦福大学, 2006年。[8] A. Lapidoth, S. M. Moser, and M. A. Wigger, “自由空间光强度信道的容量”, IEEE《信息论汇刊》, 第55卷, 第10期, 第4449–4461页, 2009年。[9] A. Chaaban, Z. Rezki, and M.-S. Alouini, “强度调制直接检测光广播信道的容量”, IEEE《无线通信汇刊》, 第15卷, 第5期, 第3114–3130页, 2016年。[10] J. G. Smith, “幅度和方差受限标量高斯信道的信息容量”, 《信息与控制》, 第18卷, 第3期, 第203–219页, 1971年。[11] T. H. Chan, S. Hranilovic, and F. R. Kschischang, “有界输入条件高斯信道的容量达到型概率测度”, IEEE《信息论汇刊》, 第51卷, 第6期, 第2073–2088页, 2005年。[12] M. Tomlinson, “采用模运算的新型自动均衡器”, 《电子快报》, 第7卷, 第5期, 第138–139页, 1971年。[13] H. Harashima and H. Miyakawa, “适用于码间干扰信道的匹配传输技术”, IEEE《通信汇刊》, 第20卷, 第4期, 第774–780页, 1972年。[14] U. Erez and R. Zamir, “利用格编码与解码在加性高斯白噪声信道上实现 1/2 log (1+ 信噪比)”, IEEE《信息论汇刊》, 第50卷, 第10期, 第2293–2314页, 2004年。[15] A. L. McKellips, “峰值受限离散时间信道容量的简单紧界”, 载于 2004年国际信息论研讨会（ISIT 2004）论文集。IEEE, 2004年, 第348–348页。[16] T. M. Cover and J. A. Thomas, 《信息论基础》。约翰·威立父子公司, 2012年。[17] S. M. Kay, 《统计信号处理基础：估计理论》。普伦蒂斯霍尔公司, 1993年。[18] R. Zamir, 《信号与网络的格编码：量化、调制与多用户信息论的结构化编码方法》。剑桥大学出版社, 2014年。