arXiv:2301.02337v1 [math.GR] 5 Jan 2023

有限群中某些 σ_i-子群的 σ_i-Sylow 化子的可置换性

Zhenya Liu 和 Wenbin Guo

摘要

设 $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ 是全体素数的一个划分，$\mathbb{P}$，G 是一个有限群，且 $\sigma(G) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(|G|) \neq \emptyset\}$。群 G 的子群 S 称为 G 中 σ_i-子群 R 的 σ_i-Sylow 化子，若 S 在满足其 Hall σ_i-子群为 R 的条件下是 G 的极大子群。本文旨在研究 σ_i-Sylow 化子对有限群结构的影响。我们通过某些 σ_i-子群的 σ_i-Sylow 化子的可置换性，得到了超可解群的一些新刻画。

1 引言

设 π 表示一个素数集合。W. Gaschutz 引入了 π-Sylowizer 的概念[1]。若 R 是群 π的一个 G-子群，则 π在 R 中的一个 G -Sylowizer 是一个子群 S，它 G 在包含 R 作为 Hall π-子群的前提下是极大的。

$\mathbb{P}$ 是所有素数的集合，n 是一个自然数。设 $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ 是所有素数 $\mathbb{P}$的某个划分，即 $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ 且对所有 $i \neq j$都有 $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$。我们记 $\sigma(G) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$。

若群 G 的两个子群 H 和 T 满足以下条件，则称它们在 G 中条件可置换（简称为c-可置换）：存在一个元素 $x \in G$ 使得 $HT^x = T^xH$。

2 预备知识

引理 2.1. 设 H 是 G 的一个 σ_i-子群，其中 G 为某个 $\sigma_i \in \sigma(G)$。假设 K 是满足 $H \leq K \leq G$ 的一个子群，且 T 是 K 中 H 的一个 σ_i-Sylow 化子。那么存在 G 中 H 的一个 σ_i-Sylow 化子 S，使得 $T = S \cap K$。

证明 由于 H是 T的 Hall σ_i-子群，因此在 G中存在 H的一个 σ_i-西洛化子 S，使得 $S \geq T$。于是，H 是 $S \cap K$的 Hall σ_i-子群。由于 $T \leq S \cap K$ 且 T 是 K中 H 的一个 σ_i-西洛化子，根据 T的极大性，我们得到 $T = S \cap K$。2

关键词：有限群；σ-可置换子群；超可解群 数学主题分类（2021）：
20D10，20D15，20D20，20D35

引理 2.2. 设 R 是 G 的一个 σ_i-子群，其中 $\sigma_i \in \sigma$为某个G。假设 G 的正规子群为 N，且 RN的 Hall σ_i-子群为 R。那么， S 是 G 中 R 的一个 σ_i-西洛化子，当且仅当 S/N 是 G/N中 RN/N 的一个 σ_i-西洛化子。

证明 设 S 是 G中 R 的一个 σ_i-Sylow 化子。由于 R 是 RN 的一个 Hall σ_i-子群， R 是 SN 的一个 Hall σ_i-子群。因此，由 S 的极大性可得 $N \leq S$，从而 RN/N 是 S/N 的一个 Hall σ_i-子群。若 S/N 不是 G/N 中 RN/N 的一个 σ_i-Sylow 化子，则存在 G/N 中 RN/N 的一个 σ_i-Sylow 化子 S_0/N，使得 $S_0/N > S/N$。现在， $S_0 > S$ 且 R 是 S_0 的一个 Hall σ_i-子群，这与 S 是 G 中 R 的一个 σ_i-Sylow 化子这一事实矛盾。因此， S/N 是 G/N 中 RN/N 的一个 σ_i-Sylow 化子。

反之，若 S/N 是 G/N 中 RN/N 的一个 σ_i-Sylow 化子，则 R 是 S 的一个 Hall σ_i-子群。若 S 不是 G 中 R 的一个 σ_i-Sylow 化子，则存在 G 中 R 的一个 σ_i-Sylow 化子 S_0，使得 $S_0 > S$。因此，RN/N 是 S_0/N 的一个 Hall σ_i-子群，这与 S/N 是 G/N 中 RN/N 的一个 σ_i-Sylow 化子这一事实矛盾。因此， S 是 G 中 R 的一个 σ_i-Sylow 化子。2

引理 2.3. 设 R 是 σ-满群 G 的一个 σ_i-子群，其中某个 $\sigma_i \in \sigma(G)$，且 S 是 R 在 G 中的一个 σ_i-西洛化子。若 S 在 G 中 σ-可置换，则 $O^{\sigma_i}(G) \leq S$。特别地， $S = RO^{\sigma_i}(G)$ 是 R 在 G 中唯一的 σ_i- 西洛化子。

证明 设 Q 是 G 的一个 Hall σ_j-子群，满足 $\sigma_j \in \sigma(G)$ 和 $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$。由于 S 是 σ-可置换的，我们有 $SQ \leq G$。注意，由于 R 是 SQ 的一个 Hall σ_i-子群，根据 S 的极大性，我们有 $QS = S$。因此 $Q \leq S$。这表明 $O^{\sigma_i}(G) \leq S$。2

引理 2.4. 设 R 是 σ 的一个 σ_i-子群，其中 σ 是西洛型 G 的满群，某个 $\sigma_i \in \sigma(G)$，且 S 是 R 在 G 中的一个 σ_i-西洛化子。当且仅当 $|G$ 时，对于所有 $\sigma_j \in \sigma(G)$， S 与 G 的每个 Hall σ_j-子群均 c-可置换： $S|$ 是一个 σ_i-数。

证明 充分性显然，只需证明必要性。

设 Q 是 G 的一个 Hall σ_j-子群，且满足 $\sigma_j \in \sigma(G)$ 和 $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$。由于 S 与 Q c-可置换，因此对某个元素 $x \in G$，有 $SQ^x = Q^x S$。注意，由于 R 是 SQ^x 的一个 Hall σ_i-子群，根据 S 的极大性可得 $Q^x S = S$。因此 $Q^x \leq S$。这意味着 $|G:\ S|$ 是一个 σ_i-数。2

定理 2.5. 设 G 是一个西洛型 σ-满群， $\mathcal{H} = \{H_1, \cdots, H_t\}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，使得对于所有 $i = 1$、$\cdots$、t， H_i 都是一个幂零 σ_i-子群。假设对于任意 $\sigma_i \in \sigma$（G），任意非循环 H_i 的每个极大子群都有一个 σ_i-西洛化子，该西洛化子与 $\mathcal{H}$ 的每个成员 c-可置换，则 G 是超可解的。

证明 假　　设此命题不成立，并令 G 为一个最小阶反例。　　n:

(1) *Let N be a minimal normal subgroup of G. Then G is supersoluble*。

我们考虑商群 G/N。显然， G/N 是一个西洛型的 σ-完全群，而$\mathcal{H}N/N$ 是 G/N 的一个完备 Hall σ-集，使得 H_iN/N 是幂零的。设 H/N 为一个极大

子群 H_iN/N，且 H_{σ_i}为包含于 H_i中的 H的一个 Hall σ_i-子群。则 $H = H_{\sigma_i}N$。由于 $H_{\sigma_i} \cap N = N_{\sigma_i} = H_i \cap N$，其中 N_{σ_i}表示 N的一个 Hall σ_i-子群，因此我们有

$$|H_i : H_{\sigma_i}| = \frac{|H_i||N|}{|H_i \cap N|} \cdot \frac{|H_{\sigma_i} \cap N|}{|H_{\sigma_i}||N|} = |H_iN : H| = q$$

对于某个 $q \in \sigma_i$。这表明 H_{σ_i} 是 H_i 的极大子群。若 H_iN/N 非循环，则 H_i 也非循环。因此，若 S/N 是 G/N 中 H/N 的一个 σ_i-Sylow 化子，则由引理 2.2， S 是 G 中 H_{σ_i} 的一个 σ_i-Sylow 化子。此外，若 S 与 $\mathcal{H}$ 的每个成员都 c-可置换，则由引理 2.4， S/N 与 $\mathcal{H}N/N$ 的每个成员都 c-可置换。这表明 G/N 满足这些假设。因此，根据 G 的选取，G/N 是超可解的。

(2) *N is the unique proper minimal normal subgroup of G and $\Phi(G) = 1$* .

令 p 为 G 和 $p \in \sigma_i$ 的最小素因子。若 H_i 是循环的，则 G 是 p-幂零的。这表明 G 有一个真极小正规子群。因此，我们可以假设 H_i 是非循环的。令 M 为 H_i 的一个指数为 p 的极大子群，并令 S 为 G 中 M 的一个 σ_i-Sylow 化子，且它与 $\mathcal{H}$ 的每个成员都 c-可置换。由引理 2.4， $|G : S| = p$，因此 $S \trianglelefteq G$。所以，我们可以选取 G 的一个包含于 S 中的真极小正规子群，记为 N。根据断言 (1)， G/N 是超可解的。此外， N 是 G 的唯一极小正规子群。由于所有超可解群构成的类是一个饱和形成，我们还可以进一步假设 $|\Phi(G)| = 1$。

(3) *N is soluble*。

假设 N 不可解。那么 $p = 2$ 且 $2||N|$。令 P 为 H_i的一个 Sylow 2-子群。则 $N_2 = P \cap N$ 是 N的一个 Sylow 2-子群。若 $N_2 \leq \Phi(H_i)$，则 $N_2 \leq \Phi(P)$，因此根据 Tate 定理， N是 2-幂零的，矛盾。因此 $N_2 \not\leq \Phi(H_i)$。于是， H_i 存在一个极大子群 K ，使得 $H_i = KN_2$。令 S_0 为 G 中 K 的一个 σ_i-Sylow 化子，且它与 $\mathcal{H}$的每个成员 c-可置换。由引理 2.4， $|G : S_0| = 2$ 。因此 $G = S_0H_i = S_0N_2 = S_0N$。现在，$|N : N \cap S_0| = |G : S_0| = 2$，这意味着 $N \cap S_0 \trianglelefteq N$。由于 $N \cap S_0 \trianglelefteq S_0,$，我们有 $N \cap S_0 \trianglelefteq G$。注意到 N是 G的一个极小正规子群，因此有 $N \cap S_0 = 1$。于是 $|N| = |G : S_0| = 2$，矛盾。

(4) *Final contradiction*。

由断言（3），不妨设 N 是某个素数 $q \in \sigma_j$ 对应的 q 子群。由于 $\Phi(G) = 1$，存在 G 的一个极大子群 T，使得 $G = TN$。令 T_{σ_j} 为包含于 H_j 中的 T 的一个 Hall σ_j 子群。则 $H_j = T_{\sigma_j}N$ 是 G 的一个 Hall σ_j 子群。若 H_j 是循环的，则由 G/N 的超可解性可知， G 超可解。因此不妨设 H_j 非循环。令 $Q \geq T_{\sigma_j}$ 为 H_j 的一个极大子群， Y 为 G 中 Q 的一个 σ_j-Sylow 化子，且它与 $\mathcal{H}$ 的每个成员都 c-可置换。于是$|G :$ 由引理 2.4 和 $N \not\leq Y$ 可得 $Y| = q$。否则 $H_j = QN \leq Y$，这与 Y 中的 Q 是一个 Hall σ_j 子群这一事实矛盾。因此 $G = YN$，从而 $|N| = |G : Y| = q$。这意味着 G 超可解，矛盾。此矛盾完成了证明。2

定理 2.6. 设 $\mathfrak{F}$ 是一个包含所有超可解群的可解饱和形成，并且

E 是 G 的正规子群，且满足 $G/E \in \mathfrak{F}$。假设 G 是一个西洛型 σ-全群，$\mathcal{H} = \{H_1, \cdots, H_t\}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，并且对于所有 $i = 1$、$\cdots$、t，H_i 都是一个幂零 σ_i-子群。若对于任意 $\sigma_i \in \sigma(E)$，任意非循环 $H_i \cap E$ 的每个极大子群都有一个 σ_i-西洛化子与 $\mathcal{H}$ 中的每个成员 c-可置换，则 $G \in \mathfrak{F}$。

证明 由定理 2.5，当 $E = G$ 时结论成立，因此我们可以假设 $E < G$。令 N 为 G 的一个包含于 E 中的极小正规子群。

(1) *E is supersoluble.*

令 Q 为 E 的非循环 Hall σ_i-子群 $H_i \cap E$ 的一个极大子群，S 为 G 中 Q 的一个 σ_i-Sylow 化子，且它与 $\mathcal{H}$ 的成员 c-可置换。由引理 2.4，$|G\colon S|$ 是一个 σ_i-数。令 $Y = S \cap E$。由于 $|E\colon Y| = |E\colon S \cap E| = |SE\colon S|$ 整除 $|G\colon S|$，$|E\colon Y|$ 是一个 σ_i-数。因此，由引理 2.4，Y 是 E 中 Q 的一个 σ_i-Sylow 化子，且 Y 与 $\mathcal{H} \cap E$ 的每个成员 c-可置换。于是，由定理 2.5，E 是超可解的。

(2) *N is the unique minimal normal subgroup of G contained in E and $N \cap \Phi(G) = 1$.*

考虑商群 G/N，显然 $(G/N)/(E/N) \in \mathfrak{F}$。由于根据断言 (1)，$E$ 是超可解的，因此对于某个素数 p，N 是一个 p-群。不失一般性，我们可以对所有 $i \in \{1, \cdots, t\}$ 写作$E_i = H_i \cap E$，并假设对于某个 i，有 $p \in \sigma_i$。令 J/N 为 E_i/N 的一个极大子群，则 J 是 E_i 的一个极大子群。若 S/N 是 G/N 中 J/N 的一个 σ_i-Sylowizer，则根据引理 2.2，S 是 G 中 J 的一个 σ_i-Sylowizer。此外，若 S 与 $\mathcal{H}$ 的每个成员都是 c-可置换的，则根据引理 2.4，S/N 与 $\mathcal{H}N/N$ 的每个成员都是 c-可置换的。令 J/N 为 E_jN/N 的一个极大子群，并令 J_{σ_j} 为 J 的一个 Hall σ_j-子群，且包含于 E_j 中，其中 $i \neq j$。则 J_{σ_j} 是 E_j 的一个极大子群。若 S/N 是 G/N 中 $J_{\sigma_j}N/N$ 的一个 σ_j-Sylowizer，则根据引理 2.2，S 是 G 中 J_{σ_j} 的一个 σ_j-Sylowizer。此外，若 S 与 $\mathcal{H}$ 的每个成员都是 c-可置换的，则根据引理 2.4，S/N 与 $\mathcal{H}N/N$ 的每个成员都是c-可置换的。这表明 $(G/N, E/N)$ 满足假设。因此，利用归纳法可得 $G/N \in \mathfrak{F}$。此外，N 是 G 的唯一极小正规子群，且包含于 E 中，并且 $N \cap \Phi(G) = 1$。

(3) *N is an elementary abelian p-subgroup, where p is the largest prime divisor of $|E|$.*

由断言（1）可知，E 是超可解的，因此 E 的 Sylow p子群 E_P 是 G的正规子群。注意，N 是 G 中包含于 E的唯一极小正规子群，$N \leq E_P$ 是一个初等阿贝尔p子群。

(4) $G \in \mathfrak{F}$.

不失一般性，设 $p \in \sigma_i$。若 E_i 是循环的，则 $|N| = p$，因此 $G \in \mathfrak{F}$。设 E_i 是非循环的。由于 $N \not\leq \Phi(G)$，存在 G 的一个极大子群 M，使得 $G = MN$ 且 $M \cap N = 1$。因此 $E_i = N(M \cap E_i)$ 以及 $H_i = NM \cap H_i = N(M \cap H_i) = NM_i$。由于 $M_i < H_i$，我们可以选取 $P \lessdot H_i$，使得 $M_i \leq P$。由于 $M \cap E_i \leq P$，$P \cap E_i = P \cap N(M \cap E_i) = (P \cap N)(M \cap E_i)$。注意到 $M \cap N = 1$，我们有

$$|E_i : E_i \cap P| = |N(M \cap E_i) : (P \cap N)(M \cap E_i)| = |N : P \cap N| = p.$$

因此， $R = E_i \cap P$ 是 E_i 的一个极大子群。设 S 是 G 中 R 的一个 σ_i-西洛维化子，并且与 $\mathcal{H}$ 的每个成员都是 c- 可置换的。则 $|G:$ 根据引理 2.4, $S|$ 是一个 σ_i- 数。由于 G 是可解的，我们可以写成 $S = RS_{\sigma_i'}$ 和 $M = M_i M_{\sigma_i'}$。还要注意， $|G:\ S|$ 和 $|G:\ M|$ 是 G 中的 σ_i-数， $S_{\sigma_i'}$ 和 $M_{\sigma_i'}$ 也是 G 的 Hall σ_i'-子群。因此，存在 G 中的一个元素 g ，使得 $S_{\sigma_i'}^g = M_{\sigma_i'}$。由于 $G = H_i S^g$，我们可以写成 $g = xy$，其中 $x \in H_i$ 且 $y \in S^g$。注意，由于 $R = E_i \cap P \trianglelefteq H_i,$ ，我们有 $R^y = R^{xy} \leq S^g$ ，因此 $R \leq S^g$。所以 $S^g = RM_{\sigma_i'}$。由于 $RM_i =$ （$P \cap E_i$） $M_i = P \cap E_i M_i = P \cap NM_i = P \leq G$，我们有 $RM \leq G$。由于 M 是一个极大子群，因此 $RM = M$ 或 $RM = G$。

如果 $RM = G$，那么 $RM_i = P$ 是 σ_i-子群 G的 Hall 子群，这是不可能的。因此 $RM = M$，所以 $R \leq M \cap E_i$。由于 $G = MN = ME_i$，我们有 $E_i \not\leq M$。注意，由于 $R \lessdot E_i$，我们有 $R = M \cap E_i$。因此 $|N| = |G:\ M| = |E_i:\ E_i \cap M| = |E_i:\ R| = p$。根据 [7,定理 2]， $G \in \mathfrak{F}$，如所要求。 □

参考文献

[1] W. Gaschiitz，Sylow正规化子，《数学杂志》，122（1971），319-320。

[2] A. N. Skiba，关于有限群的 σ-次正规和 σ-置换子群，《代数杂志》，436（2015），1-16。[3] W. Guo，A. N. Skiba，关于有限群的 Π-置换子群，《数学月刊》，185(3)（2018），443-453。[4] A. N. Skiba，关于有限部分可解群理论中的一些结果，《数学与统计通讯》，4（2016），281-309。[5] W. Guo，K.P. Shum，A. N. Skiba，条件置换子群与有限群的超可解性，《东南亚数学通报》，29(3)（2005），493-510。[6] D. Lei，X，Li，有限群中某些 p-子群的 p-Sylow正规化子，《数学档案》，114（2020），367-376。[7] A. Ballester-Bolinches，M.C. Pedraza-Aguilera，关于有限群的极小子群。《匈牙利数学学报》，73(4)（1996），335-342。