arXiv:2301.02339v1 [math.CA] 6 Jan 2023

关于不具备唯一延拓性质的一阶系统的谱理论

KEVIN CAMPBELL、MINH NGUYEN 和 RUDI WEIK ARD

Abstract. 我们研究实区间 (a,b) 上的微分方程 $Ju'+qu=wf$，其中 J 是常数可逆斜厄米矩阵，q 和 w 是其元素为零阶分布的矩阵，且 q 厄米、w 非负。在这种情况下，给定初值问题的平衡解可能不存在存在性与唯一性定理。我们描述该方程实际存在的解集，并证明极小算子的伴随仍是极大算子，尽管平衡解的唯一延拓性质不成立。

1. Introduction

Ghatasheh 和 Weikard [4] 研究了一阶系统的谱理论

$$Ju'+qu=wf$$

实区间（a，b）上的微分方程，假设 J 是一个常数可逆斜厄米矩阵，且 q 和 w 是矩阵，其元素为零阶分布[1]，其中 q 是厄米矩阵，且 w 非负。关键在于，[4] 要求该方程的初值问题具有唯一的平衡解[2]。事实上，当 Q（q的原函数）在某点发生不连续时，解在该点处的唯一延拓可能失效。借助线性代数，我们克服了这一障碍，描述了该微分方程解的集合，并证明即使平衡解的唯一延拓失效，极小算子的伴随仍是极大算子。

极小算子与极大算子之间的关系，是微分方程谱理论的基石。当然，当系数为局部可积函数时，这一课题已得到充分研究；但对于测度系数，人们所知甚少。最早考虑带测度系数方程的是 Krein [5] 于1952年，他以此建立了振动弦模型。Gesztesy 和 Holden [3] 也受物理应用的启发，于1987年描述了带点相互作用的 Schr¨odinger 方程，具体而言是 δ'-相互作用。1999年，Savchuk 和 Shkalikov [6] 研究了势函数属于 Sobolev空间 $W^{-1,2}_{\text{loc}}$ 的 Schr¨odinger 方程；这篇论文推动了此后许多进一步的发展。

Date：2019年10月3日。本文为一篇已被 Taylor & Francis 接收、即将在《Linear and Multilinear Algebra》发表的论文稿件，可在线查阅：
https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1671303。©2019。本稿件版本依据知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议提供http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/。

[1]回顾一下，零阶分布是局部有界变差函数的分布导数，因此在（a，b）的紧子区间上可视为测度。为简便起见，下文有时会用“测度”一词代替“零阶分布”。[2]平衡解的概念将在下文定义，并在 [4]中解释采用这一概念的原因。

借助拟导数，Eckhardt 等人 [1] 于2013年证明，这类方程可以写成系数局部可积的一阶 2×2-系统。Eckhardt 和 Teschl [2] 研究了系数为测度的系统，即 $Ju'+qu=wf$ 其中 $J=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $q=\left(\begin{smallmatrix}\chi&0\\0&-\varsigma\end{smallmatrix}\right)$，且 $w=\left(\begin{smallmatrix}\rho&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$。他们的方法既涵盖 Krein 弦（$\chi=0$ 和 $\varsigma=1$），也涵盖 δ'-相互作用（$\chi=0$,$\varsigma=1+\beta\delta_0$，且 $\rho=1$ 在最简单的情形下）。关键在于，他们要求 ς 的离散部分的支撑与 χ或 ρ的相应集合不相交；这一条件保证了唯一延拓。 [1] 和 [2] 也都是深入了解这一主题历史的绝佳资料来源。

下面补充几点关于记号的说明。 $\mathcal{D}'^0((a,b))$是0阶分布空间，即局部有界变差函数的分布导数所构成的空间。任何 u 局部有界变差函数都具有左极限和右极限，分别记作 u^- 和 u^+。此外，若 u 满足$u=u^{\#}=(u^++u^-)/2$，则称其为平衡的。我们用$\mathbb{I}$ 表示适当阶数的单位矩阵，上标 $^\top$ 和 * 分别表示转置和伴随。希尔伯特空间 H 的子空间 S 的正交补记作 $H\ominus S$或 $S^\perp$。对于 $c_1,\dots,c_N\in\mathbb{C}^n$，我们将向量$(c_1^\top,\dots,c_N^\top)^\top\in\mathbb{C}^{nN}$简记为$(c_1,\dots,c_N)^\diamond$。最后需要指出的是，一般而言，我们的微分方程用线性关系而非线性算子表示。因此，我们研究这类关系的图（即使它们是算子）。

2. Obtaining solutions

我们首先描述一阶系统的解集

$$Ju'+qu=wf$$

在区间 (a,b) 上，假设系数满足以下假设。

假设 2.1. J 是一个常数、可逆的斜厄米 $n\times n$ 矩阵。q 和 w 均属于 $\mathcal{D}'^0((a,b))^{n\times n}$，$w$ 非负且 q 厄米。

与非负分布 $w\in\mathcal{D}'^0((a,b))^{n\times n}$ 相关联的是一个希尔伯特空间$L^2(w)$，其内积为 $\langle u,v\rangle=\int u^*wv$ （请回想正分布就是正测度）。其元素是满足 $\|f\|^2=\int f^*wf<\infty$ 的函数 $[f]$ 的等价类；通常，若 $\|f-g\|=0$，则函数 f 和 g 等价。

我们分别用 Q 和 W 表示 q 和 w 的左连续原函数。 $\Delta_q(x)=Q^+(x)-Q^-(x)$ 表示 Q 在点 x 处的跳跃。类似地，$\Delta_w(x)=W^+(x)-W^-(x)$。

假设 $\xi_0\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$。当 $f\in L^2(w)$ 时（以下均假定如此），文献[4] 已证明，初值问题 $Ju'+qu=wf$, $u(\xi_0)=u_0\in\mathbb{C}^n$ 在矩阵 $B_\pm(x)=J\pm\Delta_q(x)/2$ 对所有 $x\in(\xi_1,\xi_2)$ 均可逆的条件下，在 (ξ_1,ξ_2) 中存在唯一的局部有界变差平衡解。在 Q 或 W 的间断点 x 处，微分方程要求

$$J(u^+(x)-u^-(x))+\Delta_q(x)u(x)=\Delta_w(x)f(x)$$

其中，u 为平衡的，$u(x)=(u^+(x)+u^-(x))/2$。这等价于

$$B_+(x)u^+(x)-B_-(x)u^-(x)=\Delta_w(x)f(x). \tag{2.1}$$

由此显然可见，如果 $B_+(x)$（或 $B_-(x)$）不可逆，我们可能无法将解从左向右（或从右向左）延拓跨过 x。在我们的具体情形中，$J^*=-J$ 且 $\Delta_q(x)^*=\Delta_q(x)$，我们有 $B_-(x)=-B_+(x)^*$，因此 $B_-(x)$ 可逆，当且仅当 $B_+(x)$ 可逆。

由于 Q 是局部有界变差的，显然，点集 x （在这些点处 $B_{\pm}(x)$ 不可逆）在 (a,b) 的紧子区间上是离散且有限的，尽管 Q 的所有跳跃点集可能是稠密的。

现在固定一个区间 $[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$，并假设在 (ξ_1,ξ_2) 中， $B_{\pm}$ 不可逆的点都属于点集 $x_1<\ldots<x_N$。通常会选择恰好所有 $B_{\pm}$ 不可逆的点作为这些点，但为避免出现 $N=1$ 这种情形，这样做更为有利。为方便起见，我们还令 $x_0=\xi_1$ 以及 $x_{N+1}=\xi_2$。如上所述，我们确实有初值问题的唯一解；事实上，在任意区间 (x_j,x_{j+1}) 上还有常数变易公式。这些解在区间端点处存在极限，我们甚至可以利用左端点来设定初始条件。因此， $Ju'+qu=wf$ 在 (x_j,x_{j+1}) 上的通解可表示为

$$u^-(x)=U_j^-(x)(c_j+J^{-1}\int_{(x_j,x)}U_j^*wf) \tag{2.2}$$

其中 c_j 是 $\mathbb{C}^n$ 中的任意元素，而 U_j 是 $Ju'+qu=0$ 在 (x_j,x_{j+1}) 上的一个平衡基本矩阵，我们可以选择它使得 $\lim_{x\downarrow x_j}U_j(x)=\mathbb{I}$。然后我们定义 $U_j(x_{j+1})=\lim_{x\uparrow x_{j+1}}U_j^-(x)$。要使 u 成为 $Ju'+qu=wf$ 在 (x_0,x_{N+1}) 上的一个解，必须在相应区间内根据式 (2.2)（适当选取 c_j）确定 u。此外，根据方程 (2.1)， u 必须满足

$$B_+(x_j)u^+(x_j)-B_-(x_j)u^-(x_j)=\Delta_w(x_j)f(x_j)\quad\text{for } j=1,\ldots,N. \tag{2.3}$$

注意到 $u^+(x_j)=c_j$ 和 $u^-(x_j)=U_{j-1}(x_j)(c_{j-1}+J^{-1}I_{j-1}(f))$，其中 $I_{j-1}(f)=\int_{(x_{j-1},x_j)}U_{j-1}^*wf$。因此，我们可以将方程（2.3）改写为

$$(-B_-(x_j)U_{j-1}(x_j),B_+(x_j))\begin{pmatrix}c_{j-1}\\ c_j\end{pmatrix}=\Delta_w(x_j)f(x_j)+B_-(x_j)U_{j-1}(x_j)J^{-1}I_{j-1}(f).$$

此时，引入以下记号似乎很有帮助。令

$$\begin{aligned}\mathcal{B}&=\operatorname{diag}(B_+(x_1),\ldots,B_+(x_N)),\\ \mathcal{U}&=\operatorname{diag}(U_0(x_1),\ldots,U_{N-1}(x_N)),\\ \mathcal{J}&=\operatorname{diag}(J,\ldots,J),\end{aligned}$$

以及 $E_\top=(0,\mathbb{I})$ 和 $E_\perp=(\mathbb{I},0)$，它们是两个 $nN\times n(N+1)$-矩阵，分别从向量中去掉第一个和最后一个 n 坐标。于是我们有

$$\begin{aligned}B&=\mathcal{B}^*\mathcal{U}E_\perp+\mathcal{B}E_\top\\ &=\begin{pmatrix}-B_-(x_1)U_0(x_1)&B_+(x_1)&0&\cdots&0\\ 0&-B_-(x_2)U_1(x_2)&B_+(x_2)&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&-B_-(x_N)U_{N-1}(x_N)&B_+(x_N)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

现在，如果引入以下缩写

$$\begin{aligned}\tilde{u}&=(c_0,\ldots,c_N)^\diamond,\\ \mathcal{R}(f)&=(\Delta_w(x_1)f(x_1),\ldots,\Delta_w(x_N)f(x_N))^\diamond,\\ \mathcal{I}(f)&=(I_0(f),\ldots,I_{N-1}(f))^\diamond,\end{aligned}$$

并且，为后续用途，

$$\tilde{\mathcal{I}}(f)=(0,\ldots,0,I_N(f))^\diamond\in\mathbb{C}^{nN},$$

方程（2.3）可以写为

$$B\tilde{u}=\mathcal{R}(f)-\mathcal{B}^*\mathcal{U}\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}(f). \tag{2.4}$$

我们证明了以下结果。

定理 2.2. 若 u 是 $Ju' + qu = wf$ 在 (x_0, x_{N+1}) 上的任意解，则 $\tilde{u} = (u^+(x_0) ..., u^+(x_N))^\diamond$ 是方程 (2.4) 的一个解。反之，方程 (2.4) 的一个解 $\tilde{u} = (c_0, ..., c_N)^\diamond$ 可给出 $Ju' + qu = wf$ 在 (x_0, x_{N+1}) 上的一个解，该解由 (2.2) 对 $j = 0, ..., N$ 给出。

显然， B 的秩不大于 nN，因此 B 的核的维数至少为 n。然而请注意， B 的核的维数可能大于 n，也就是说，齐次微分方程 $Ju' + qu = 0$可能有多于 n 个线性无关的解。

考虑 $Ju' + qu = 0$的平衡解时，$\tilde{u}$ 与 u 在点 x_1、……、 x_N处的值向量之间的关系，即向量 $\hat{u} = (u(x_1) ..., u(x_N))^\diamond$，由 $\hat{u} = C\tilde{u}$ 给出，其中

$$C = \frac{1}{2}(\mathcal{U}E_\perp + E_\top) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U_0(x_1) & \mathbb{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_1(x_2) & \mathbb{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & U_{N-1}(x_N) & \mathbb{I} \end{pmatrix}.$$

我们还引入矩阵 B_m 和 C_m ，它们分别由 B 和 C删除第一列和最后 n 列后得到。此前我们不失一般性地选择 $N \geq 2$ ，以避免 B_m 和 C_m 没有列的情形。

B 与 C之间有如下关系。

引理 2.3. $C^*B - B^*C = \text{diag}(-J, 0, ..., 0, J)$. 特别地， $C_m^*B - B_m^*C = 0$。

证明。由于 $\mathcal{B} - \mathcal{B}^* = 2\mathcal{J}$，我们得到

$$C^*B - B^*C = (E_\top^*\mathcal{J}E_\top - E_\perp^*\mathcal{U}^*\mathcal{J}\mathcal{U}E_\perp).$$

文献 [4] 证明了 $u^{-*}Jv^-$ 在 $B_\pm$ 处处可逆的任意区间上为常数，只要 u 和 v 是 $Ju' + qu = 0$的解。特别地，$U_j(x_{j+1})^*JU_j(x_{j+1}) = \lim_{x\uparrow x_{j+1}} U_j^-(x)^*JU_j^-(x) = J$。这意味着 $\mathcal{U}^*\mathcal{J}\mathcal{U} = \mathcal{J}$ 因此结论得证。□

引理 2.4. 假设$\hat{u} \in \ker B_m^*$。那么存在唯一向量 $\tilde{u}$ ，使得$B\tilde{u} = 0$且 $C\tilde{u} = \hat{u}$。此外，若$\hat{u} \in \ker B^* \subset \ker B_m^*$，则 $\tilde{u}$ 的首末n 个分量均为 0。

证明。若解 $\tilde{u}$ 确实存在，则它必须满足 $\mathcal{U}E_\perp\tilde{u} = 2\hat{u} - E_\top\tilde{u}$，因此$0 = 2\mathcal{B}^*\hat{u} + (\mathcal{B} - \mathcal{B}^*)E_\top\tilde{u}$。这意味着 $E_\top\tilde{u} = -\mathcal{J}^{-1}\mathcal{B}^*\hat{u}$。类似地，利用 $E_\top\tilde{u} = 2\hat{u} - \mathcal{U}E_\perp\tilde{u}$，可得 $E_\perp\tilde{u} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{U}^*\mathcal{B}^*\hat{u}$。因此，解是唯一的。

为证明存在性，注意到 $\hat{u} = (\hat{u}_1, ..., \hat{u}_N)^\diamond \in \ker B_m^*$ 蕴含

$$B_+(x_k)^*\hat{u}_k + U_k(x_{k+1})^*B_+(x_{k+1})\hat{u}_{k+1} = 0$$

对于 $k = 1, ..., N-1$。因此，赋值 $E_\top\tilde{u} = -\mathcal{J}^{-1}\mathcal{B}^*\hat{u}$和 $E_\perp\tilde{u} = \mathcal{J}^{-1}\mathcal{U}^*\mathcal{B}^*\hat{u}$定义明确。此外， $\tilde{u}$满足 $B\tilde{u} = 0$和 $C\tilde{u} = \hat{u}$。

对于最后一个结论，注意到（$C^*B - B^*C$）$\tilde{u} = 0$。若 $\tilde{u} =$（c_0，……， c_N）$^\diamond$，引理 2.3给出 $-Jc_0 = Jc_N = 0$，因此 $c_0 = c_N = 0$ 如所述成立。□

定理 2.5. 若 $\hat{u} \in \ker B_m^*$，则 $Ju' + qu = 0$ 在区间（x_0, x_{N+1}）上有唯一解 u，使得 $\tilde{u} = (u^+(x_0) ..., u^+(x_N))^\diamond$满足 $B\tilde{u} = 0$且$C\tilde{u} = (u(x_1) ..., u(x_N))^\diamond = \hat{u}$。若 $\hat{u} \in \ker B^* \subset \ker B_m^*$，则此外有 $u^+(x_0) = u^-(x_{N+1}) = 0$，从而 $\text{supp}\ u \in [x_1, x_N]$。

证明。 这是定理 2.2 和引理 2.4的直接推论。 □

引理 2.6. 假设 $f \in L^2(w)$ 且 $\hat{u} \in \ker B_m^*$。那么存在一个函数 u，满足 $Ju' + qu = 0$ 于 (x_0, x_{N+1})，$(u(x_1) ..., u(x_N))^\diamond = \hat{u}$，且 $\hat{u}^* \mathcal{F}(f) = \int_{(x_0, x_{N+1})} u^* w f$，其中

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{R}(f) - \mathcal{B}^* \mathcal{U} \mathcal{J}^{-1} \mathcal{I}(f) + \mathcal{B} \mathcal{J}^{-1} \tilde{\mathcal{I}}(f).$$

证明。设 u 是定理2.5 给出的函数，并设 $\tilde{u}$ 是向量 $(u^+(x_0) ..., u^+(x_N))^\diamond$。那么 $\mathcal{B} E_\top \tilde{u} = -\mathcal{B}^* \mathcal{U} E_\perp \tilde{u}$因为 $B\tilde{u} = 0$。我们还有$2C\tilde{u} = \mathcal{U} E_\perp \tilde{u} + E_\top \tilde{u}$。利用 $\mathcal{B} - \mathcal{B}^* = 2\mathcal{J}$可得 $\mathcal{B} C \tilde{u} = \mathcal{J} \mathcal{U} E_\perp \tilde{u}$并且$\mathcal{B}^* C \tilde{u} = -\mathcal{J} E_\top \tilde{u}$或者，取伴随后，

$$\tilde{u}^* C^* \mathcal{B}^* = -\tilde{u}^* E_\perp^* \mathcal{U}^* \mathcal{J} \quad \text{and} \quad \tilde{u}^* C^* \mathcal{B} = \tilde{u}^* E_\top^* \mathcal{J}.$$

这些以及 $\mathcal{U}^* \mathcal{J} \mathcal{U} = \mathcal{J}$推出

$$\begin{aligned} \hat{u}^* \mathcal{F}(f) &= \hat{u}^* \mathcal{R}(f) - \tilde{u}^* C^* \mathcal{B}^* \mathcal{U} \mathcal{J}^{-1} \mathcal{I}(f) + \tilde{u}^* C^* \mathcal{B} \mathcal{J}^{-1} \tilde{\mathcal{I}}(f) \\ &= \hat{u}^* \mathcal{R}(f) + \tilde{u}^* E_\perp^* \mathcal{I}(f) + \tilde{u}^* E_\top^* \tilde{\mathcal{I}}(f) \\ &= \hat{u}^* \mathcal{R}(f) + \tilde{u}^* (I_0(f), ..., I_N(f))^\diamond = \int_{(x_0, x_{N+1})} u^* w f \end{aligned}$$

利用 $u(x) = U_j(x) u^+(x_j)$ 对于 $x \in (x_j, x_{j+1})$。 □

3. Minimal and maximal relations

我们的微分方程 $Ju' + qu = wf$ 导出以下两个线性关系。$T_{\max}$ 是所有满足以下条件的有序对 $([u], [f]) \in L^2(w) \times L^2(w)$ 的集合：存在代表元 $u \in [u]$ 和 $f \in [f]$ 使得 $Ju' + qu = wf$（特别地，u 是局部有界变差的平衡函数）。$T_{\min}$ 是 $T_{\max}$ 中那些元素的集合，对于这些元素，解 $u \in [u]$ 可以选为具有紧支撑。

回顾一下，线性关系 $S \subset L^2(w) \times L^2(w)$ 的伴随定义为

$$S^* = \{(v, g) \in L^2(w) \times L^2(w) : \forall (u, f) \in S : \langle g, u \rangle = \langle v, f \rangle\}.$$

本文的主要结果是下面的定理。

定理 3.1. $T_{\min}^* = T_{\max}$。

我们的证明需要做一些准备工作，下面就从这里开始。设 $[\xi_1, \xi_2] \subset (a, b)$，并考虑与 J、q 和 w 相关联、但限制在区间 (ξ_1, ξ_2) 上的关系 $\check{T}_{\max}$。当然，$Ju' + qu = wf$ 的解在 ξ_1 和 ξ_2 处都有极限。我们用 $\check{w}$ 表示 w 在 (ξ_1, ξ_2) 上的限制，并令 $T_0 = \{([u], [f]) \in \check{T}_{\max} : u^+(\xi_1) = u^-(\xi_2) = 0\}$ 和 $K_0 =$ 的核 $\check{T}_{\max}$。

引理 3.2. $\operatorname{ran} T_0 = L^2(\check{w}) \ominus K_0$。

证明。令 $[f] \in \operatorname{ran} T_0$ 和 $[r] \in K_0$。于是，对于某个 u，有 $Ju' + qu = \check{w} f$，它在 ξ_1 处消失，并且 ξ_2 和 r（在 $[r]$中适当选取）满足 $Jr' + qr = 0$。因此，由分部积分可得

$$\int f^* \check{w} r = \int u^* (Jr' + qr) = 0.$$

因此，$\operatorname{ran} T_0 \subset L^2(\check{w}) \ominus K_0$。

反之，假设 $[f] \in L^2(\check{w}) \ominus K_0$。我们要证明存在一个有界变差的平衡函数 u，定义在 (ξ_1, ξ_2) 上，在端点处取零，并满足 $Ju' + qu = \check{w} f$。采用第 2 节中确立的记号，尤其是定理 2.2，我们需要证明存在一个解

$\tilde{u} = (\gamma_0, ..., \gamma_N)^\diamond$，它满足方程 (2.4)，且满足 $\gamma_0 = 0$ 和 $\gamma_N = -J^{-1}I_N(f)$（因此 $u^+(\xi_1) = u^-(\xi_2) = 0$）。因此，我们需要找到 $\tilde{u}_0 = (\gamma_1, ..., \gamma_{N-1})^\diamond$，使得 $B_m\tilde{u}_0 = \mathcal{F}(f)$，其中与引理 2.6 中一样，

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{R}(f) - \mathcal{B}^*\mathcal{U}\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}(f) + \mathcal{B}\mathcal{J}^{-1}\tilde{\mathcal{I}}(f).$$

当且仅当 $\mathcal{F}(f)$ 属于 ran $B_m = (\ker B_m^*)^\perp$ 时，该系统有解。

因此，假设 $\hat{r} \in \ker B_m^*$。根据定理 2.5，与 $\hat{r}$ 相对应的函数是 r 中的某个元素的代表元，K_0 从而 $\int r^*\breve{w}f = 0$。但是，引理2.6 表明 $\hat{r}^*\mathcal{F}(f) = \int r^*\breve{w}f$，保证了 u的存在。□

引理 3.3. 若 $g \in \text{ran } T_{\min}^*$，则微分方程 $Ju' + qu = wg$ 在 (a, b) 上至少有一个解。

证明。设 $\tau_n, n \in \mathbb{Z}$ 是区间 (a, b) 内各点的一个枚举，其中包含所有矩阵 $J \pm \Delta_q(x)/2$ 不可逆的点。标记方式满足 $\tau_n < \tau_{n+1}$，并且我们可以安排使得 a 和 b 是序列 τ_n 的聚点，且除此之外没有其他聚点。

根据定理 2.2 存在一个平衡解 v_j 在 $Ju' + qu = wg$ 上（ξ_1, ξ_2）$= (\tau_{-j}, \tau_j)$（至少当 $j > 1$时），前提是 $B\tilde{v}_j = G$ 其中

$$G = \mathcal{R}(g) - \mathcal{B}^*\mathcal{U}\mathcal{J}^{-1}\mathcal{I}(g) = \mathcal{F}(g) - \mathcal{B}\mathcal{J}^{-1}(0, ..., 0, I_N(g))^\diamond.$$

这当且仅当 $G \in \text{ran } B = (\ker B^*)^\perp$ 时成立，下面将对此进行证明。

对于任意 $\hat{r} \in \ker B^*$，定理 2.5 和引理 2.6 表明，存在一个解r 在 $Ju' + qu = 0$ 上（ξ_1, ξ_2），使得 $\tilde{r} = (r^+(x_0) ..., r^+(x_N))^\diamond$ 满足 $B\tilde{r} = 0$，$r^+(x_0) = r^+(x_N) = 0$，并且 $\hat{r}^*\mathcal{F}(g) = \int_{(\xi_1,\xi_2)} r^*wg$（此处 $N = 2j-1$ 和 $x_\ell = \tau_{-j+\ell}$）。事实上，由于 r 在 x_0 和 x_{N+1}附近消失，我们可以将其延拓为 0，从而得到一个解 $Ju'+qu = 0$ 在整个（a, b）上。因此 $\langle r, g\rangle = \hat{r}^*\mathcal{F}(g)$，并且如引理 2.6 的证明中那样，可得 $\hat{r}^*G = \langle r, g\rangle - \tilde{r}^*E_\top^*(0, ..., 0, I_N(g))^\diamond$。由于 $([r], 0) \in T_{\min}$，我们有$\langle r, g\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$，而由于 $r^+(x_N) = 0$，我们也有 $\tilde{r}^*E_\top^*(0, ..., 0, I_N(g))^\diamond = 0$。因此 $G \in \text{ran } B$，这保证了 v_j 的存在。

现在，对任意 $j \geq k \geq 2$，定义集合 $A_{k,j}$ 为 $Ju' + qu = wg$ 在 (τ_{-j}, τ_j) 上的解在 (τ_{-k}, τ_k) 上的限制所组成的集合。根据上述内容，$A_{k,j}$ 非空，并且按如下意义构成嵌套集合：$A_{k,j+1} \subset A_{k,j}$。每个 $A_{k,j}$ 都是某个空间（例如定义在 (τ_{-k}, τ_k) 上的所有函数构成的空间）的仿射子空间，并且它们的维数在 j 中构成一个非负整数非增序列，因此最终必定保持不变（可能为零）。因此，对于充分大的 m，有 $B_k = \bigcap_{j\geq k} A_{k,j} = A_{k,m}$。现在我们归纳地定义函数序列 v_k，其逐点极限是 $Ju'+qu = wg$ 在 (a, b) 上的一个解。对于 v_2，我们任选 B_2 中的一个元素。接着，假设我们已经构造了序列 $(v_2, ..., v_k)$，使得 $v_j \in B_j$ 且 $v_{j-1} = v_j|_{(\tau_{-j+1},\tau_{j-1})}$。注意，$B_k$ 中的元素是 B_{k+1} 中的元素在 (τ_{-k}, τ_k) 上的限制（反之亦然）。因此，我们可以为 v_{k+1} 选取 B_{k+1} 中一个延拓 v_k 的元素，从而完成序列 v_k 的定义；唯一还需做的是将其中每个元素任意延拓到 (a, b)。现在，v，即 v_k 的逐点极限，就是所需的 $Ju' + qu = wg$ 在 (a, b) 上的解。□

定理的证明 3.1。若 $([v], [g])$ 和 $([u], [f])$ 属于 $T_{\max}$ 拉格朗日恒等式（参见[4]）指出

$$\langle v, f\rangle - \langle g, u\rangle = (v^*Ju)^-(b) - (v^*Ju)^+(a). \tag{3.1}$$

因此，若 $([u], [f]) \in T_{\min}$，使得 u具有紧支撑，我们得到 $\langle v, f\rangle = \langle g, u\rangle$，这证明了 $T_{\max} \subset T_{\min}^*$。

为证明 $T^*\min \subset T_{\max}$，假设 $([v],[g]) \in T^*_{\min}$，并令 v_0 为由引理 3.3 构造的、在 (a,b) 上满足 $Ju' + qu = wg$ 的一个解。接下来我们将使用引理 3.2。考虑区间 $[\xi_1,\xi_2] \subset (a,b)$，并像此前一样定义 $\breve{w}$, T_0 和 K_0。给定 $([u],[f]) \in T_0$，将 u 和 f 都延拓为定义在整个 (a,b) 上的零函数（延拓后仍分别记作 u 和 f）。于是我们有 $Ju' + qu = wf$，从而 $([u],[f]) \in T_{\min}$ 且 $\langle f, v\rangle = \langle u, g\rangle$。为建立 v 与 v_0 之间的关系，我们进行分部积分，得到

$$\int_{(\xi_1,\xi_2)} f^*\breve{w}v = \int_{(a,b)} u^* wg = \int_{(a,b)} u^*(Jv_0' + qv_0)$$
$$= \int_{(a,b)} (Ju' + qu)^* v_0 = \int_{(\xi_1,\xi_2)} f^*\breve{w}v_0.$$

因此 $\int f^*\breve{w}(v - v_0) = 0$，由引理 3.2 可知，$[v - v_0] \in K_0$ 这表明 $[v]$有一个代表元 $v = v_0 + k_0$，其中 $Jk_0' + qk_0 = 0$，因此在 (ξ_1,ξ_2) 上 $Jv' + qv = wg$。我们以与引理 3.3 证明中类似的方式，在整个 (a,b) 上得到一个解。我们只需修改集合 $A_{k,j}$ 的定义，明确指出所考虑的解 u 是 v的局部代表元，即 $\int_{(\tau_{-j},\tau_j)}(u - v)^* w(u - v) = 0$。□

Acknowledgements

我们感谢匿名审稿人提出的宝贵意见和问题。

References

[1] Jonathan Eckhardt、Fritz Gesztesy、Roger Nichols 和 Gerald Teschl。具有分布势的 Sturm-Liouville 算子的 Weyl-Titchmarsh 理论。 *Opuscula Math.*, 33 563, 2013 3 467( ): – .[2] Jonathan Eckhardt 和 Gerald Teschl。具有测度值系数的 Sturm-Liouville 算子。 *J. Anal. Math.*, 120:151–224, 2013年。[3] F. Gesztesy 和 H. Holden。量子力学中描述直线上的点相互作用的一类新型可解模型。 *J. Phys. A*, 20(15):5157–5177, 1987年。[4] Ahmed Ghatasheh 和 Rudi Weikard。具有分布系数的常微分方程组的谱理论。

Submitted 46 pages 2018 arXiv:1807.09653v2 , , . M. G.

[5] Kreın。关于 Stieltjes 研究成果的一般化。

Doklady Akad. Nauk SSSR , : – . [6] A. M. Savchuk 和 A. A. Shkalikov。具有奇异势的 Sturm-Liouville 算子。 *Mathematical Notes* 66 6 741 753, 1999 66, 897 912 , ( ): – . 译自《Mat. Zametki》，第 卷，页 –（1999年）。

Department of Mathematics, University of Alabama at Birmingham, Birmingham, AL35226-1170, USA*Email address*: campke@uab.edu, minhnt@uab.edu, weikard@uab.edu