arXiv:2301.02343v1 [math.PR] 6 Jan 2023

连续空间随机 SIR 流行病模型：大数定律与中心极限定理

Alphonse Emakoua
emakouaal@gmail.com

艾克斯-马赛大学，数学与计算机科学中心（*C.M.I*），弗雷德里克·约里奥-居里街*39*号，马赛*13013*，法国

2023年1月9日

摘要

空间结构对流行病传播的影响，是传染病传播中的一个重要问题。近期的确定性和随机研究使我们得以理解人群中个体移动对地方性疾病持续存在或消亡的重要性。本文研究一种分舱式SIR随机流行病模型，其中人群在 R^d 上移动，其运动遵循由相互独立的布朗运动驱动的随机微分方程。我们定义经验测度序列，用以描述易感者、感染者和移除个体位置的演变。接着，我们将这些测度序列的大种群近似表示为一组反应扩散方程的弱解。最后，我们通过中心极限定理研究随机模型围绕其大种群极限的涨落。其极限是一个取值于分布空间的 Ornstein-Uhlenbeck 过程，并可表示为一组随机偏微分方程的解。

关键词：随机模型 · 确定性 · 大数定律 · 中心极限定理 · 测度值过程。

1 引言

近几十年来，流行病的确定性模型取得了显著发展。相比之下，随机模型的研究起步较晚，例如参见[4], [8], [7],[21],[31] 和[29]。Anderson 和 Britton [4], 以及 Britton 和 Pardoux [8] 表明，流行病的确定性模型是齐次随机模型的大数定律极限（即人群规模趋于 ∞时的极限）；而中心极限定理以及中等偏差和大偏差（参见[8] 和 [31]）则提供了准确描述随机模型与确定性模型之间差距的工具。

然而，他们的模型忽略了人群分布于某个空间区域这一事实。但空间异质性、栖息地连通性和移动速率在疾病持续存在和灭绝中发挥着重要作用。易感者或感染个体的移动可能增强或抑制疾病传播，这取决于空间环境的异质性和连通性。关于确定性情形，参见例如 [3] 及其中的参考文献；关于随机情形，参见 [17] 和 [29] 。

鉴于上述结论，Emakoua 和 Pardoux [7], 研究了紧集上两个空间 SIR 流行病模型的大数定律和中心极限定理。在第一个模型中，人群会移动；在第二个模型中，人群不移动（用于描述植物流行病）。对于第一个模型，大数定律的极限模型是一个抛物型偏微分方程系统，它是连续空间中的确定性流行病模型；对于第二个模型，极限模型则是一个常微分方程系统。通过中心极限定理研究围绕大数定律极限的涨落，可得出两个模型的极限均为取值于负指标 Sobolev 空间的 Ornstein-Uhlenbeck 过程。此外，第一个模型假设所有个体的扩散系数相同，且感染率不依赖于感染者的位置。该研究未考虑环境异质性的影响。本文研究了一个 SIR 随机流行病模型的大数定律和中心极限定理，其中人群规模为常数 N，分布于 $\mathbb{R}^d$. 初始条件与 [7]中的相同。

下面描述我们的模型。我们考虑一个规模恒定为 N 的人群，生活在 $\mathbb{R}^d$ 中。假设在时刻 t=0, 人群由两类个体组成：易感者 S(0) 和感染者 I(0)，使得 $S(0) + I(0) = N$，具体描述如下。

给定 A 一个任意的 $\mathbb{R}^d$ 的 Borel 子集以及 $0 < p \leq 1$，每个个体 i 都独立于其他个体，被放置在 $\mathbb{R}^d$ 中的位置 X_0^i。如果 $X_0^i \in A^c$，则该个体 i 为易感者；如果 $X_0^i \in A$，则该个体 i 以概率 p 感染，以概率 $1-p$ 易感。这种情况可用经验测度建模：

$$\mu_0^{S,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{1_A(X_0^i)(1-\xi_i) + 1_{A^c}(X_0^i)\}\delta_{X_0^i}$$
$$\mu_0^{I,N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_A(X_0^i)\xi_i\delta_{X_0^i}$$

其中 $\{\xi_i, 1 \leq i \leq N\}$ 是一组相互独立的 Ber(p) 随机变量，且与 $\{X_0^i, 1 \leq i \leq N\}$ 全局独立；而 $\{X_0^i, 1 \leq i \leq N\}$ 又是一组相互独立的随机变量。

流行病期间，人群分为三个类别：易感者 S、感染者 I 和康复者 R（康复个体指死亡或已经康复并获得永久免疫的个体）。我们通过作出以下假设，放宽了 [7], 中第一个模型的假设：个体 i 按照由以下随机微分方程驱动的扩散过程在 $\mathbb{R}^d$ 中移动。

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t m(E_r^i, X_r^i)dr + \int_0^t \theta(E_r^i, X_t^i)dB_r^i. \tag{1.1}$$

其中

- $\{B^i, 1 \leq i \leq N\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一族相互独立的标准布朗运动，且与 $\{X_0^i, 1 \leq i \leq N\}$. 全局独立
- E_t^i 是个体 i 在时间 t 的状态， $E_t^i \in \mathbb{C} = \{S, I, R\}$.
- 环境异质性由函数 m: $\mathbb{C} \times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ 建模。
- 扩散矩阵是函数 θ: $\mathbb{C} \times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$。
- 我们假设函数 m和 θ 关于空间变量有界且利普希茨连续。

感染是 非局部的，易感者 i 在时间 t 以如下速率被感染。

$$\frac{1}{N^\gamma}\sum_{j=1}^{N}\frac{K(X_t^i,X_t^j)}{\Big[\sum_{\ell=1}^{N}K(X_t^\ell,X_t^j)\Big]^{1-\gamma}}1_{\{E_t^j=I\}},\quad \text{with}\quad \gamma\in[0,1] \tag{1.2}$$

为了减少参数，我们令 $K(X_t^i,X_t^j)=\beta(X_t^j)F(X_t^i,X_t^j)$，其中 β 是 $\mathbb{R}^d$ 上的函数， F 是 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上的对称函数。这样的感染率可以解释如下。由于我们考虑了空间结构，一个传染个体j以 $\frac{1}{N^\gamma}K(X_t^i,X_t^j)\Big[\sum_{\ell=1}^{N}K(X_t^\ell,X_t^j)\Big]^{1-\gamma}$ 的速率与个体 i 接触，因此对 th

e infectious individuals at time t gives the ab[以上速率] te.
情形 $\gamma=0$，已在 [7]，中研究，本文关注情形 $\gamma=1$，因此（$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K$（$X_t^i$， X_t^j）$1_{\{E_t^j=I\}}$.

情形 $\gamma\in$（0，1）将在未来的工作中研究。易感者、感染者和移除者数量的演变由以下方程描述。

$$\begin{aligned}
S(t)&=S(0)-P_{inf}\left(\int_0^t\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^i=S\}}1_{\{E_r^j=I\}}dr\right)\\
I(t)&=I(0)+P_{inf}\left(\int_0^t\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^i=S\}}1_{\{E_r^j=I\}}dr\right)-P_{cu}\left(\alpha\int_0^t\sum_{j=1}^{N}1_{\{E_r^j=I\}}dr\right)\\
R(t)&=R(0)+P_{cu}\left(\alpha\int_0^t\sum_{j=1}^{N}1_{\{E_r^j=I\}}dr\right),
\end{aligned}$$

其中 P_{inf} 和 P_{cu} 是相互独立的标准泊松过程。
最后，我们通过定义重归一化点过程来结束模型的描述，这使我们能够控制易感者、感染者和康复个体的位置变化，以及 d维欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$.$\forall t>0$ 的任意子集内易感者、感染者和康复个体的比例，

$$\begin{aligned}
\mu_t^{S,N}&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_{\{E_t^i=S\}}\delta_{X_t^i},\\
\mu_t^{I,N}&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_{\{E_t^i=I\}}\delta_{X_t^i},\\
\mu_t^{R,N}&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_{\{E_t^i=R\}}\delta_{X_t^i}.
\end{aligned}$$

由于初始序列$(\mu^{I,N}_{\cdot,0},\mu^{S,N}_{\cdot,0})_{N\geq1}$的大数定律和中心极限定理已在[7], 中得到研究，假设 (H0) 成立，即 X_0^1 的分布相对于勒贝格测度绝对连续。本文首先写出人群规模 N 固定时 ($\mu^{S,N}_{\cdot,t},\mu^{I,N}_{\cdot,t},\mu^{R,N}_{\cdot,t}$) 的演化方程。接下来，我们将研究这些序列的大数定律和中心极限定理。大数定律的结果将是测度值过程空间中的一个收敛结果。收敛性证明将从适当空间中的紧性开始，然后将任意模糊收敛子序列的极限识别为某个偏微分方程组的唯一确定性解，

由此可推出整个序列的弱收敛，进而推出依概率收敛。

中心极限定理在技术上更为复杂。首先，我们的定义域不是紧集，这带来了第一个难点。近似序列属于取值为有符号测度的过程空间，而需要解决的主要问题之一，是找到一个合适的空间，使该序列及其极限都以此空间为取值空间。

我们证明，近似序列在 Skorokhod 空间 $[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, H^{-s,\sigma}(\mathrm{R}^d))]^3, (\sigma > d/2, 1 + \lceil \frac{d}{2} \rceil < s < 2 + \lceil \frac{d}{2} \rceil)$ 中收敛到一个连续过程，该过程由一个线性高斯过程值随机偏微分方程（下文简称随机偏微分方程）唯一确定。本文所考虑的加权索伯列夫空间 $H^{-s,\sigma}(\mathrm{R}^d)$ 由 Métivier[28], 针对 $s.$ 的整数取值引入。Mélérad [24] 将该空间用于研究相互作用粒子系统经验（随机）测度序列的中心极限定理。Clé- mençon 等人 [11] 也使用该空间，研究一种特定随机流行病模型的中心极限定理；该模型考虑了接触者追踪对感染性疾病传播的影响。Löfstrom [22] 和 [23] 的工作使我们能够利用实插值技术，将该空间推广到 s 的非整数取值情形。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾后文将用到的一些结果。第 3 节首先建立测度值过程 $\mu^{S、N}, \mu^{I、N}$ 和 $\mu^{I、N}$ 的演化方程，然后证明序列 $\{(\mu^{S、}{}_t{}^N, \mu^{I、}{}_t{}^N, \mu^{R、}{}_t{}^N)\ t \geq 0\}$ 当 $N \to \infty$ 时依概率收敛到 (μ^S, μ^I, μ^R)，即一个抛物型偏微分方程系统的唯一解。第 5 节研究涨落过程序列 $(U^N = \sqrt{N}(\mu^{S、N} - \mu)\ V^N = \sqrt{N}(\mu^{I、N} - \mu^I)\ W^N = \sqrt{N}(\mu^{R、N} - \mu^R))$ 在 $N \to \infty$ 时的收敛性。

2 预备知识

记号： 对于任意度量空间 E,

- $\mathcal{M}_F$(E) 表示 E 上有限测度构成的空间。
- 对于任意整数 $k \geq 0$, C^k(E)（分别为 C_c^k(E)）表示定义在 E 上连续且 k次连续可微的实值函数空间（分别为具有紧支撑的函数空间）。对于 $k = 0$，我们用 C(E)（分别为 C_c(E)）代替 C^0(E)（分别为 C_c^0(E)）。
- 对于任意整数 $k \geq 0$, C_b^k(E) 表示 E 上具有 C^k 类有界导数的实值函数空间，导数阶数不超过 k （包括 0 阶）。
- C_0(E) 表示在无穷远处消失的 E 上连续函数空间。
- 对于 $\mu \in \mathcal{M}_F$(E) 和 $\varphi \in C$(E)，我们将积分 $\int_{\mathbb{E}} \varphi(x)\mu(dx)$ 记作 (μ, φ)。
- 下文中，字母 C 表示一个（常数）正实数，它可以逐行改变。
- 我们赋予 $\mathcal{M}_F$(E) 弱收敛拓扑。
- 设 E 是一个完备可分度量空间，C(R+, E)（分别为 D(R+, E)）是从 R+ 到 E 的连续（分别为 càdlàg）函数空间，并赋予局部一致拓扑（分别为 Skorokhod 拓扑）。关于 Skorokhod 拓扑及其相应度量的介绍，请参阅 [6] 第 12 节。

2.1 函数的加权空间

对于每个非负整数 m 和 $\sigma \in \mathbb{R}_+$，我们考虑定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的所有实值函数 φ 所构成的空间，这些函数具有最高至 m 阶的偏导数，并满足：

$$\|\varphi\|_{m,\sigma} = \Big(\sum_{|\gamma| \le m} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|D^\gamma \varphi(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma}} dx \Big) < +\infty,$$

其中 $|.|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的欧几里得范数，并且对于 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2 ..... \gamma_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\gamma| = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i$ 和 $D^\gamma \varphi = (\partial^{|\gamma|}\varphi)/(\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} ..... \partial x_d^{\gamma_d})$.

令 $W^{m,\,0}{}^{\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 为关于该范数的紧支撑 C^∞ 类函数集合的闭包。 $W^{m,\,0}{}^{\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 关于范数 $\|.\|_{m,\,\sigma}$ 构成一个希尔伯特空间。对于非负实数 s，我们将上述空间扩展如下。

令 $\mathcal{J}^s$ 为定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的势算子 $(\mathcal{J}^s\varphi) = \mathcal{F}^{-1}[(1+|.|^2)^{s/2}\widehat{\varphi}]$（其中 th e 函数 φ 的傅里叶变换 $\widehat{\varphi}$ 有良好定义， $\mathcal{F}^{-1}$ 表示傅里叶逆变换）。$H^{s,\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 表示满足以下条件的函数空间 φ。

$$\|\varphi\|_{s,\sigma} = \|(\mathcal{J}^s\varphi)\|_{0,\sigma} < \infty.$$

文献 [22] 中证明了，对于任意非负整数 $m.$, $H^{m,\,\sigma}(\mathbb{R}^d) = W^{m,\,0}{}^{\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$。
我们用 $H^{-s,\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $H^{s,\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 的对偶空间。

令 $C^{m,\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 为函数空间，其中函数 φ 具有最高阶为 m 的连续偏导数，并且满足对所有 $|\gamma| \le m.$, $\lim_{|x| \longrightarrow \infty} |D^\gamma \varphi(x)|^2/1+|x|^{2\sigma} = 0$
该空间赋予如下范数

$$\|\varphi\|_{C^{m,\sigma}} = \sum_{|\gamma| \le m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{|D^\gamma \varphi(x)|}{1+|x|^\sigma}.$$

令 $C^{-m,\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $C^{m,\,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 的对偶空间。
我们有以下连续嵌入（见 [1] 和 [28]）。

$$C^{m+j,\sigma} \hookrightarrow C^{m,\sigma+r} \qquad m \ge 0, \quad j \ge 0, \quad \sigma > 0, \quad r \ge 0. \tag{2.1}$$

$$H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{\ell,\sigma}(\mathbb{R}^d), \qquad s > d/2 + \ell, \quad \ell \ge 0, \quad \sigma > 0. \tag{2.2}$$

$$C^{m,\sigma}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W_0^{m,\sigma+\eta}(\mathbb{R}^d), \qquad \eta > d/2, \quad m \ge 0, \quad \sigma > 0. \tag{2.3}$$

引理 2.1. （*[19]*中定理 *2.1* 的一个特例）
设 $(H, \|.\|_H)$ 是一个可分希尔伯特空间， M 是一个取值于 $H-$ 的局部平方可积右连续左极限鞅，且 $\mathbf{T}(t)$ 是 $\mathcal{L}(H)$ 上的压缩半群算子。 那么存在一个有限常数 C，它仅依赖于希尔伯特范数 $\|.\|_H$，使得对所有 $T > 0.$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} \left\| \int_0^t \mathbf{T}(t-r) dM_r \right\|_H^2 \right) \le C e^{4\sigma T} \mathbb{E}\Big(\|M_T\|_H^2 \Big),$$

其中 σ 是一个实数，满足 $\|\mathrm{T}(t)\|_{\mathcal{L}} \le e^{\sigma t}.$

定义 2.2. *(*白噪声*)*
定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的 $\mathbb{R}^d$ 上的白噪声是一种随机分布 $\mathcal{W}$，使得映射 $\varphi \mapsto (\mathcal{W}, \varphi)$ 是从 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的线性连续映射，并且$\{(\mathcal{W}, \varphi)\ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ 是满足以下条件的中心高斯广义过程：

$$\mathbb{E}((\mathcal{W}, \varphi)(\mathcal{W}, \phi)) = (\varphi, \phi)_{L^2}, \ for\ any\ \varphi, \phi \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

其中，$(.,.)_{L^2}$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$上的内积。
时空白噪声是定义在$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.上的白噪声

3 大数定律

本节旨在研究（$\mu^{S,\ N}$， $\mu^{I,\ N}$， $\mu^{R,\ N}$）在 $N \to \infty$ 时，满足下文假设（H1）条件下的收敛性。

为此，我们将：

- 写出（$\mu^{S,\ N}$， $\mu^{I,\ N}$， $\mu^{R,\ N}$）的演化方程组。
- 研究（$\mu^{S,\ N}$， $\mu^{I,\ N}$， $\mu^{R,\ N}$）$_{N\geq 1}$在 Skorokhod 空间 $[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+,\ (\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)\ v)\ )]^3$,中的紧性，其中（$\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)\ v$）是 R^d上的有限测度空间，并赋予模糊拓扑。
- 求满足以下条件的演化方程组：收敛子序列（$\mu^{S,\ N}{}_{\mu^{I,\ N}}$， $\mu^{R,\ N}$）的依分布收敛极限（μ^S，μ^I， μ^R）$_{N\geq 1}$
- 证明由（μ^S, μ^I, μ^R）满足的偏微分方程组在$\Lambda = \{(\mu^1, \mu^2, \mu^3)/0 \leq (\mu^i,\ 1)\ \leq 1,$ $i \in \{1, 2, 3\}\}$. 中存在唯一解。

本节中始终假设以下条件成立。

假设（H1）

- X_0^1 的分布相对于勒贝格测度绝对连续，且其密度有界。
- $K \in C_c(\mathrm{R}^d \times \mathrm{R}^d)$。
- 对于任意 $A \in \{S, I, R\}$以及 $x \in \mathrm{R}^d$，矩阵（$\theta\theta^t$）(A, x)是可逆的。

.

3.1 $(\mu^{S,\ N}, \mu^{I,\ N}, \mu^{R,\ N})$的演化方程组

本小节将证明以下结果。

命题 3.1。 对于任意 $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$，$\{(\mu^{S,\ {}_t\ N},\ \varphi)$，$(\mu^{I,\ {}_t\ N},\ \varphi)$，$(\mu^{R,\ {}_t\ N},\ \varphi)\}$ 满足 ，

$$(\mu_t^{S,N}, \varphi) = (\mu_0^{S,N}, \varphi) + \int_0^t (\mu_r^{S,N}, \mathcal{Q}_S\varphi)dr - \int_0^t \left(\mu_r^{S,N}, \varphi(\mu_r^{I,N}, K)\right) dr + M_t^{N,\varphi}, \tag{3.1}$$

$$(\mu_t^{I,N}, \varphi) = (\mu_0^{I,N}, \varphi) + \int_0^t (\mu_r^{I,N}, \mathcal{Q}_I\varphi)dr + \int_0^t \left(\mu_r^{S,N}, \varphi(\mu_r^{I,N}, K)\right) dr - \alpha \int_0^t (\mu_r^{I,N}, \varphi)dr + L_t^{N,\varphi}, \tag{3.2}$$

$$(\mu_t^{R,N}, \varphi) = \int_0^t (\mu_r^{R,N}, \mathcal{Q}_R\varphi)dr + \alpha \int_0^t (\mu_r^{I,N}, \varphi)dr + Y_t^{N,\varphi}. \tag{3.3}$$

其中

$$\left(\mu_r^{S,N}, \varphi(\mu_r^{I,N}, K)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)\mu_r^{I,N}(dy)\mu_r^{S,N}(dx);$$

$$\mathcal{Q}_A\varphi(x) = m(A, x).\ \bigtriangledown\ \varphi(x) + \frac{1}{2} \sum_{1\leq \ell,u\leq d} (\theta\ \theta^t)_{\ell,u}(S, x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(x),$$

并且，$\{M^i\}_{1\le i\le N}$、$\{Q^i\}_{1\le i\le N}$是定义在$\mathbb{R}_+^2$上的两组标准（即均值为勒贝格测度）泊松随机测度（下文简称泊松随机测度），它们满足B^1、M^1、Q^1、.....、B^N、M^N、Q^N相互独立。记 M^i 和 Q^i对应的补偿泊松随机测度分别为 $\overline{M}^i$和 $\overline{Q}^i$，则有

$$
\begin{aligned}
M_t^{N,\varphi} &= -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{E^i_{r^-}=S\}}\varphi(X_r^i)1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}\overline{M}^i(dr,du)\\
&\quad+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(S,X_r^i)dB_r^i.\\
L_t^{N,\varphi} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{E^i_{r^-}=S\}}\varphi(X_r^i)1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}\overline{M}^i(dr,du))\\
&\quad+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(I,X_r^i)dB_r^i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E_r^i=I\}}\varphi(X_r^i)\overline{Q}^i(dr,du).\\
Y_t^{N,\varphi} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(R,X_r^i)dB_r^i+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E^i_{r^-}=I\}}\varphi(X_r^i)\overline{Q}^i(dr,du).
\end{aligned}
$$

证明。 首先回顾，对于任意 $t\ge 0$,

$$
X_t^i=X_0^i+\int_0^t m(E_r^i,X_r^i)dr+\int_0^t\theta(E_r^i,X_t^i)dB_r^i.
$$

令 $\varphi\in C_c^2(\mathbb{R}^d)$，根据伊藤公式，我们有,

$$
\begin{aligned}
\varphi(X_t^i)&=\varphi(X^i)+\int_0^t\bigtriangledown\varphi(X_r^i).m(E_r^i,X_r^i)dr+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{1\le\ell,u\le d}(\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(E_r^i,X_r^i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(X_r^i)dr\\
&\quad+\int_0^t\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(E_r^i,X_r^i)dB_r^i. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
1_{\{E_t^i=S\}}=1_{\{E_0^i=S\}}-\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}1_{\{E^i_{r^-}=S\}}M^i(du,dr). \qquad (3.5)
$$

因此利用（3.4）和（3.5），我们有

$$
\begin{aligned}
1_{\{E_t^i=S\}}\varphi(X_t^i)&=1_{\{E_0^i=S\}}\varphi(X^i)+\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i).m(S,X_r^i)dr\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\sum_{1\le\ell,u\le d}(\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(S,X_r^i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(X_r^i)dr\\
&\quad+\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(S,X_r^i)dB_r^i\\
&\quad-\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}1_{\{E^i_{r^-}=S\}}\varphi(X_r^i)M^i(du,dr).
\end{aligned}
$$

对 i 求和并乘以 $\frac{1}{N}$，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_{\{E_t^i=S\}}\varphi(X_t^i)&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_{\{E_0^i=S\}}\varphi(X^i)\\
&\quad+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i).m(S,X_r^i)dr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\sum_{1\le\ell,u\le 2}(\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(S,X_r^i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(X_r^i)dr\\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(S,X_r^i)dB_r^i\\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}1_{\{E_{r-}^i=S\}}\varphi(X_r^i)\overline{M}^i(du,dr)\\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}1_{\{E_r^i=S\}}\varphi(X_r^i)dr,
\end{aligned}
$$

由此可得（3.1）。类似地，再次令 $\varphi\in C_c^2(\mathbb{R}^d)$，$\{1_{\{E_t^i=I\}}\varphi(X_t^i)\ t\ge 0\}$ 是一个满足以下条件的跳过程，

$$
\begin{aligned}
1_{\{E_t^i=I\}}\varphi(X_t^i)=&\,1_{\{E_0^i=I\}}\varphi(X^i)+\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i).m(I,X_r^i)dr\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\sum_{1\le\ell,u\le 2}(\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(I,X_r^i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(X_r^i)dr\\
&+\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(I,X_r^i)dB_r^i\\
&+\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}1_{\{E_{r-}^i=S\}}\varphi(X_r^i)M^i(du,dr)\\
&-\int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E_{r-}^i=I\}}\varphi(X_r^i)Q^i(du,dr).
\end{aligned}
$$

对 i 求和并乘以 $\frac{1}{N}$，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_{\{E_t^i=I\}}\varphi(X_t^i)=&\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}1_{\{E_0^i=I\}}\varphi(X^i)\\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i).m(I,X_r^i)dr\\
&+\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\sum_{1\le\ell,u\le d}(\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(I,X_r^i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(X_r^i)dr\\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(I,X_r^i)dB_r^i\\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}1_{\{E_{r-}^i=S\}}\varphi(X_r^i)\overline{M}^i(du,dr)\\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}1_{\{E_r^i=S\}}\varphi(X_r^i)dr\\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E_{r-}^i=I\}}\varphi(X_r^i)\overline{Q}^i(du,dr)-\frac{\alpha}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\varphi(X_r^i)dr,
\end{aligned}
$$

由此 (3.2) 得出。类似地，再次利用 $\varphi\in C_c(\mathbb{R})$，$\{1_{\{E_t^i=R\}}\varphi(X_t^i)\ t\ge 0\}$ 是一个满足以下条件的跳过程，

$$
\begin{aligned}
1_{\{E_t^i=R\}}\varphi(X_t^i) = &\int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}} \bigtriangledown \varphi(X_r^i).m(R,X_r^i)dr \\
&+ \int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}} \sum_{1\le \ell,u\le d} (\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(R,X_r^i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(X_r^i)dr \\
&+ \int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}} \bigtriangledown \varphi(X_r^i)\theta(R,X_r^i)dB_r^i + \int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E_{r^-}^i=I\}}\varphi(X_r^i)Q^i(du,dr).
\end{aligned}
$$

S对某个 mu t p yng y 求和 $\frac{1}{N}$，我们得到，b i

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N 1_{\{E_t^i=R\}}\varphi(X_t^i) = &\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}} \bigtriangledown \varphi(E_r^i,X_r^i).m(R,X_r^i)dr \\
&+ \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}} \sum_{1\le \ell,u\le d} (\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(R,X_r^i)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(X_r^i)dr \\
&+ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}} \bigtriangledown \varphi(X_r^i)\theta(R,X_r^i)dB_r^i \\
&+ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E_{r^-}^i=I\}}\varphi(X_r^i)\overline{Q}^i(du,dr) + \frac{\alpha}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\varphi(X_r^i)dr,
\end{aligned}
$$

f证明3.3 如下。) f ll □

3.2 （μ^S, $_N$， μ^I, $_N$， μ^R, $_N$）在$[\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\ \mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d))]^3$

回忆一下，我们赋予 $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 弱收敛拓扑，并赋予从$\mathbb{R}_+$ 到 $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 上的 càdlág 函数的 Skorokhod 空间 Skorokhod 拓扑（明确的定义请参见第 63 页[18] ）。

注释3.2。 对于 $A\in\{S,I,R\}$，我们有 $(\mu^A{}_{,t}{}^N, 1_{\mathbb{R}^d}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N 1_{\{E_t^i=A\}} \le 1$，因此对于任意 $\varphi\in C_c(\mathbb{R}^d)$， $A\in\{S,I,R\}$，$|(\mu^A{}_{,t}{}^N,\varphi)| \le \|\varphi\|_\infty$.

现在我们可以证明所需的紧性。

命题 3.3. 序列 $(\mu^S{}_{,N})_{N\ge1}$；$(\mu^I{}_{,N})_{N\ge1}$和$(\mu^R{}_{,N})_{N\ge1}$在$\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,(\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)\ \ v))$ 中是紧的，其中 $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 赋予模糊收敛拓扑。

证明。 下面证明 $(\mu^S{}_{,N})_{N\ge1}$ 在 D(R+, ($\mathcal{M}_F$(R^d) v)) 中是紧的，其中 $\mathcal{M}_F$(R^d) 赋予模糊拓扑。我们参考 Roelly定理2.2 [32]。令 Ξ 为C_0(R^d)的一个稠密子集；要使 $(\mu^S{}_{,N})_{N\ge1}$ 在 D(R+, ($\mathcal{M}_F$(R^d) v)) 中是紧的，一个充分条件是：

$$
\text{for any}\quad \varphi\in\Xi,\quad \{(\mu_t^{S,N},\varphi),\quad t\ge0,\quad N\ge1\}\ \text{is tight in}\ \mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}).
$$

我们选取 $\Xi = C_c^\infty$(R^d)（= 即具有紧支撑的无穷次可微函数空间）。令 $\varphi\in C_c^\infty$(R^d)，则有

$$
(\mu_t^{S,N},\varphi) = (\mu_0^{S,N},\varphi) + \int_0^t(\mu_r^{S,N},\mathcal{Q}_S\varphi)dr - \int_0^t\left(\mu_r^{S,N},\varphi(\mu_r^{I,N},K)\right)dr + M_t^{N,\varphi},
$$

我们注意到，$(\mu^S{}_{,N},\varphi)$ 是一个半鞅，因为 $M^{N,\varphi}$ 是一个平方可积鞅。事实上， $M^{N,\varphi}$ 是一个局部鞅，因为它是若干局部鞅之和，并且

$$
\begin{aligned}
< M^{N,\varphi} >_t &= \frac{1}{N}\int_0^t \left(\mu_r^{S,N}, \varphi^2(\mu_r^{I,N}, K)\right) dr \\
&+ \frac{1}{N}\int_0^t \Big(\mu_r^{S,N}, \sum_{1\le \ell\le d}\big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\big)^2 \sum_{1\le u\le d}\theta^2_{\ell,u}(S,.) + 2\sum_{\substack{1\le \ell\le d-1\\ \ell+1\le u\le d\\ 1\le e\le d}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big) dr, \\
&\le \frac{1}{N}\int_0^t \left|\int_{\overline{\mathbb{X}}} \varphi^2(x)\int_{\overline{\mathbb{X}}\times\overline{\mathbb{X}}} K(x,y)\mu_r^{I,N}(dy)\mu_r^{S,N}(dx)\right| dr \\
&+ \frac{t}{N}\sum_{1\le \ell,u\le d}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\right\|^2_\infty \|\theta_{\ell,u}(S,.)\|^2_\infty + \frac{2t}{N}\sum_{\substack{1\le \ell\le d-1\\ \ell+1\le u\le d\\ 1\le e\le d}} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\right\|_\infty \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_u}\right\|_\infty \|\theta_{\ell,e}(S,.)\|_\infty \|\theta_{u,e}(S,.)\|_\infty, \\
&\le \frac{t\|\varphi\|^2_\infty\|K\|_\infty}{N} + \frac{t}{N}C.
\end{aligned}
$$

因此 E(< $M^{N,\varphi}$ >$_t$) $< \infty$, $\forall t \ge 0$.

另一方面 hand

$$
(\mu_t^{S,N}, \varphi) = (\mu_0^{S,N}, \varphi) + \int_0^t \omega_r^{N,\varphi} dr + M_t^{N,\varphi} \text{ with } < M^{N,\varphi} >_t = \int_0^t \varpi_r^{N,\varphi} dr,
$$

and

$$
\omega_t^{N,\varphi} = \left(\mu_t^{S,N}, m(A,.).\bigtriangledown\varphi(.) + \tfrac{1}{2}\sum_{1\le\ell,u\le d}(\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(S,.)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(.)\right) - \left(\mu_t^{S,N}, \varphi(\mu_t^{I,N}, K)\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\varpi_t^{N,\varphi} &= \frac{1}{N}\left(\mu_t^{S,N}, \varphi^2(\mu_t^{I,N}, K)\right) \\
&+ \frac{1}{N}\Big(\mu_t^{S,N}, \sum_{1\le\ell\le d}\big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\big)^2 \sum_{1\le u\le d}\theta^2_{\ell,u}(S,.) + 2\sum_{\substack{1\le \ell\le d-1\\ \ell+1\le u\le d\\ 1\le e\le d}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big).
\end{aligned}
$$

此外， $\omega^{N,\varphi}$ 和 $\varpi^{N,\varphi}$ 均为渐进可测的，因为它们适应且右连续，因此根据 [30]， $\{(\mu^{S,N}_t, \varphi)\ t \ge 0,\ N \ge 1\}$在 D(R+,R) 中紧的充分条件是以下两点均成立：

- $(\mu^{S,N}_0, \varphi)_{N\ge1}$ 在 R 中是紧的，
- $\forall T \ge 0$， $\sup_{0\le t\le T}(|\omega^{N,\varphi}_t| + \varpi^{N,\varphi}_t)$ 在 R 中是紧的。

这些结论可由以下事实直接得到：

- $|(\mu_0^{S,N}, \varphi)| \le \|\varphi\|_\infty$.
- $|\omega_t^{N,\varphi}| \le \sum_{1\le\ell\le d}\|m_\ell\|_\infty\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}(x_1,...,x_d)\|_\infty + \frac{1}{2}\sum_{1\le\ell,u\le d}\|(\theta\,\theta^t)_{\ell,u}(S,.)\|_\infty\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}\|_\infty + \|\varphi\|_\infty\|K\|_\infty$.
  $\leqslant C$
- $\varpi_t^{N,\varphi} \le \frac{\|\varphi\|^2_\infty\|K\|_\infty}{N} + C \le C$.

同样的论证可得 $\{\mu_t^{I,N}, t \ge 0, N \ge 1\}$ 和 $\{\mu_t^{R,N}, t \ge 0, N \ge 1\}$ 在 D(R+, ($\mathcal{M}_F$(R^d) v)) 中的紧性。 □

下面的命题源于以下事实： $\mu^{A,N}$ 的跳跃量为 $1/N$ 阶（ [7] 中命题 3.3 的证明给出了详细证明）。

命题 3.4. 序列 (μ^S)、(μ^I)和(μ^R) 的极限点，以及序列 $(\mu^{S,N})_{N\ge1}$、$(\mu^{I,N})_{N\ge1}$和$(\mu^{R,N})_{N\ge1}$ 的极限点，都是$\mathbb{C}$(d维欧几里得空间+, $\mathcal{M}_F$(d维欧几里得空间^d))中的元素。

定理 3.5. 序列 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq 1}$ 在 $\left[D(d\text{维欧几里得空间}_+, \mathcal{M}_F(d\text{维欧几里得空间}^d))\right]^3$ 中依概率收敛到 $(\mu^S, \mu^I, \mu^R) \in \left[C(d\text{维欧几里得空间}_+, \mathcal{M}_F(d\text{维欧几里得空间}^d))\right]^3$，后者是以下方程组的唯一解。对于任意 $\varphi \in C_c^2(d\text{维欧几里得空间}^d)$,

$$(\mu_t^S, \varphi) = (\mu_0^{S,N}, \varphi) + \int_0^t (\mu_r^S, \mathcal{Q}_S\varphi)dr - \int_0^t \left(\mu_r^S, \varphi(\mu_r^I, K)\right) dr, \tag{3.6}$$

$$(\mu_t^I, \varphi) = (\mu_0^I, \varphi) + \int_0^t (\mu_r^I, \mathcal{Q}_I\varphi)dr + \int_0^t \left(\mu_r^S, \varphi(\mu_r^I, K)\right) dr - \alpha \int_0^t (\mu_r^I, \varphi)dr, \tag{3.7}$$

$$(\mu_t^R, \varphi) = \int_0^t (\mu_r^R, \mathcal{Q}_R\varphi)dr + \alpha \int_0^t (\mu_r^I, \varphi)dr. \tag{3.8}$$

3.2.1 定理3.5 的证明

根据命题 3.3，序列 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq 1}$ 在 $\left[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, (\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)\ v))\right]^3$ 中是紧的，因此根据普罗霍罗夫定理，存在 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq}$ 的一个子序列，仍记为 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq 1}$，它在 $\left[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, (\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)\ v))\right]^3$ 中依分布收敛到 (μ^S, μ^I, μ^R)，其中 $\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)$ 配备了模糊拓扑。

因此，为完成定理3.5 的证明，还需：

- 找出由 $\{(\mu_t^S, \mu_t^I, \mu_t^R)\ t \geq 0\}$ 满足的偏微分方程组
- 证明由 $(\mu_t^S、\ \mu_t^I、\ \mu_t^R)$ 验证的系统在$\Lambda = \{\ (\mu^1、\ \mu^2、\ \mu^3)\ /0 \leq\ (\mu^i,\ 1_{\mathbb{R}^d})\ \leq 1,\ i \in \{1,2,3\}\}$上存在唯一解。
- 得证。

很容易得到以下引理，因此我们省略证明。

引理 3.6。若令 $\Sigma = \{(\mu^1, \mu^2) \in \mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d), (\mu^i, 1_{\mathbb{R}^d}) \leq 1, \forall i \in \{1,2\}\}$, 对于任意 $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, 以下映射是连续的。

$$G_{\varphi,\psi} : (\Sigma, v) \times (\Sigma, v) \to (\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), v)$$
$$(\mu, \nu) \longmapsto (\mu \otimes \nu, \varphi\psi)$$

$$where\ (\mu \otimes \nu, \varphi\psi) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(x)\psi(y)\nu(dy)\mu(dx).$$

以下命题给出了 $(\mu^S、\ \mu^I、\ \mu^R)$ 所满足的方程组。

命题 3.7。过程 (μ^S, μ^I, μ^R) 满足由方程（3.6）、（3.7）和（3.8）组成的系统。

证明。我们通过对方程（3.1）、（3.2）和（3.3）取极限来证明该命题。下面建立 (3.6)。

1- 已在 [7] 中证明，序列 $\{(\mu^{S,\ _0{}^N}, \mu^{I,\ _0{}^N})\ N \geqslant 1\}$ 几乎必然收敛到一对确定性测度 (μ_0^S, μ_0^I)。

2- 由于映射 $x \in \mathrm{R}^d \mapsto \mathcal{Q}_S\varphi(x) = m(A, x).\bigtriangledown\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq\ell,u\leq d}(\theta\ \theta^t)_{\ell,u}(S, x)\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\ell x_u}(x)$ 连续且具有紧支撑，$\int_0^t \left(\mu^{S,\ _r{}^N}, \mathcal{Q}_S\varphi\right) dr$ 依分布收敛至 $\int_0^t \left(\mu_r^S, \mathcal{Q}_S\varphi\right) dr$.2- 根据命题 3.3，序列 $\mu^{S,\ _N{}^N \otimes \mu^{I,N}}$ 也是紧的，因此由普罗霍罗夫定理可知

可以提取一个子序列，仍记为 $(\mu^{S,N}\otimes\mu^{I,N})_{N\geq 1}$，使得 $(\mu^{S,N}\otimes\mu^{I,N})_{N\geq 1}$以及上述子序列 $(\mu^{S,N},\mu^{I,N},\mu^{R,N})_{N\geq 1}$分别收敛至 $\chi^{S,I}$和 (μ^S,μ^I,μ^R)。此外，对于任意 $t\geq 0$, $\chi^{S,I}_t=\mu^S_t\otimes\mu^I_t$，由引理 3.6 可知这一事实。因此，我们有

$$\int_0^t\left(\mu_r^{S,N},\varphi(\mu_r^{I,N},K)\right)dr=\int_0^t\left(\mu_r^{S,N}\otimes\mu_r^{I,N},\varphi K\right)dr\xrightarrow{L}\int_0^t\left(\mu_r^{S}\otimes\mu_r^{I},\varphi K\right)dr.$$

3- 让 我们证明序列 $M^{N,\varphi}_t$；$L^{N,\varphi}_t$ 和 Y^N_t 依概率收敛到 0

– $M^{N,\varphi}_t$. 的收敛。我们上文已经看到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mid M_t^{N,\varphi}\mid^2)&=\mathbb{E}(<M^{N,\varphi}>_t)\\&\leq\frac{t}{N}\|\varphi\|_\infty^2\|k\|_\infty+\frac{tC}{N}\xrightarrow{N\to\infty}0,\end{aligned}$$

因此，$M^{N,\varphi}_t$ 收敛到 0，因此也依概率收敛。通过类似的论证，我们得到序列 $L^{N,\varphi}_t$ 和 $Y^{N,\varphi}_t$ 依概率收敛到 0。

因此，(3.6) 由 1-、2-、3- 得出。类似的论证可得 (3.7) 和 (3.8)。 □

现在来证明下面的命题，它将有助于证明方程组 (3.6),(3.7) 和 (3.8) 存在唯一解。

引理 3.8. 对于 $A\in\{S,I,R\}$，$\Upsilon_A(t)$，表示扩散矩阵为 $\theta(A,.)$ 且漂移系数为 $m(A,.)$ 的扩散过程的马尔可夫半群。对于任意 $\varphi\in C_c(\mathbb{R}^d)$，有

$$(\mu_t^S,\varphi)=(\mu_0^S,\Upsilon_S(t)\varphi)-\int_0^t\left(\mu_r^S,\Upsilon_S(t-r)\varphi(\mu_r^I,K)\right)dr,\tag{3.9}$$

$$(\mu_t^I,\varphi)=(\mu_0^I,\Upsilon_I(t)\varphi)+\int_0^t\left(\mu_r^S,\Upsilon_I(t-r)\varphi(\mu_r^I,K)\right)dr-\alpha\int_0^t(\mu_r^I,\Upsilon_I(t-r)\varphi)dr,\tag{3.10}$$

$$(\mu_t^R,\varphi)=\alpha\int_0^t(\mu_r^I,\Upsilon_R(t-r)\varphi)dr.\tag{3.11}$$

证明。我们可以从 (3.6) 经典地推导出一个类似的公式，其中检验函数 $\varphi(x)$ 被 $\psi_r(x)=\psi(r,x)$ 替代，该函数在 $[0,t]\times\mathbf{R}^d$ 上属于 $C^{1,2}$ 类：

$$\begin{aligned}(\mu_t^S,\psi_t(.))=(\mu_0^S,\psi_0(.))&+\int_0^t\left(\mu_r^S,\frac{\partial}{\partial r}\psi_r(.)\right)dr+\int_0^t(\mu_r^S,m(S,.)\cdot\bigtriangledown\varphi)dr\\&+\frac{1}{2}\int_0^t(\mu_r^S,Tr[(\theta\,\theta^t)(S,.)D^2\varphi])dr-\int_0^t\left(\mu_r^S,\psi_r(.)(\mu_r^I,K)\right)dr.\end{aligned}\tag{3.12}$$

现在考虑 $\mathbf{R}^d$ 上一个具有紧支撑的连续函数 φ，并固定一个时间$t\in\mathbf{R}_+$。我们定义，对于 $(r,x)\in[0,t]\times\mathbf{R}^d$, $\psi_r(x)=\Upsilon_A(t-r)\varphi(x)$。那么 ψ 是以下方程的解

$$\frac{d\psi_r(x)}{dr}+\mathcal{Q}_S\varphi(x)=0\quad\text{ on }[0,t]\times\mathbb{R}^d.$$

将方程（3.12）应用于此函数 ψ 可得（3.9）。通过类似的论证可得（3.10）和（3.11）。 □

命题 3.9。 由方程（*3.9*）、（*3.10*）和（*3.11*）构成的系统，在集合 $\Lambda=\{(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3)\in[\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)]^3/(\mu_i,\ \mathbb{1})\leq 1\quad\forall i\in\{1,2,3\}\}$.上有唯一解

证明。回顾一下，在 $\mathcal{M}_F(\mathbf{R}^d)$ 上的全变差距离定义为

$\|\mu-\nu\|_{VT}=\sup\{|(\mu-\nu,\varphi)|,\ \ \varphi$连续且具有紧支撑，并且 $\|\varphi\|_\infty\leq 1\}$。

现在令 $(\mu_t^1,\ \mu_t^2,\ \mu_t^3)$和 $(\nu_t^1,\ \nu_t^2,\ \nu_t^3)$是方程组 (3.9),(3.10) 以及

(3.11) 的两个解，它们具有相同的初始条件，且 $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$。由于 $\Upsilon_S(t)$ 是定义在 $C_c(\mathbb{R}^d)$上的压缩半群，因此有

$$\begin{aligned}
&\Big|(\mu_r^1, \Upsilon_S(t-r)\varphi(\mu_r^2, K)) - (\nu_r^1, \Upsilon_S(t-r)\varphi(\nu_r^2, K))\Big| \\
&\quad = \Big|\big(\mu_r^1 - \nu_r^1, \Upsilon_S(t-r)\varphi(\mu_r^2, K)\big) - \big(\nu_r^1, \Upsilon_S(t-r)\varphi(\nu_r^2 - \mu_r^2, K)\big)\Big|, \\
&\quad \leq \Big|\int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_S(t-r)\varphi(x)(\mu_r^2, K(x,.))(\mu_r^1 - \nu_r^1)(dx)\Big| \\
&\quad + \Big|\int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_S(t-r)\varphi(x) \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)(\mu_r^2 - \nu_r^2)(dy)\nu_r^1(dx)\Big|, \\
&\quad \leq \|\Upsilon_S(t-r)\varphi(\mu_r^2, K)\|_\infty \|\mu_r^1 - \nu_r^1\|_{VT} + \|\Upsilon_S(t-r)\varphi\|_\infty \|K\|_\infty \|\mu_r^2 - \nu_r^2\|_{VT}, \\
&\quad \leq \|\varphi\|_\infty \|K\|_\infty \Big\{\|\mu_r^1 - \nu_r^1\|_{VT} + \|\mu_r^2 - \nu_r^2\|_{VT}\Big\}.
\end{aligned}$$

因此，分别利用方程（3.9）、（3.10）和（3.11），可得

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} |(\mu_t^1 - \nu_t^1, \varphi)| \leq \|K\|_\infty \int_0^t \Big\{\|\mu_r^1 - \nu_r^1\|_{VT} + \|\mu_r^2 - \nu_r^2\|_{VT}\Big\} dr, \tag{3.13}$$

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} |(\mu_t^2 - \nu_t^2, \varphi)| \leq \|K\|_\infty (1+\alpha) \int_0^t \Big\{\|\mu_r^1 - \nu_r^1\|_{VT} + \|\mu_r^2 - \nu_r^2\|_{VT}\Big\} dr, \tag{3.14}$$

$$\sup_{\|\varphi\|_\infty \leq 1} |(\mu_t^3 - \nu_t^3, \varphi)| \leq \alpha \int_0^t \|\mu_r^2 - \nu_r^2\|_{VT}, \tag{3.15}$$

其中，上确界取遍所有具有紧支撑的连续函数。因此，将方程（3.13）、（3.14）和（3.15）相加后，由格朗沃尔引理即可得到结论。 □

现在我们可以完成定理 3.5 的证明。

由于 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq 1}$ 在 $[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, (\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)\ v))]^3$ 中是紧的，且序列 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq 1}$ 的所有收敛子列都在 $[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, (\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)\ v))]^3$ 中依分布收敛到同一极限 (μ^S, μ^I, μ^R)，其中 $\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)$赋予模糊拓扑，因此序列 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq 1}$在 $[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, (\mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)\ v))]^3$ 中依分布收敛到 (μ^S, μ^I, μ^R)。为了将这一结果推广到弱拓扑，我们使用文献 [25] 中证明的一个判据（命题 3）。由于根据命题 3.4，极限过程 (μ^S, μ^I, μ^R) 是连续的，因此只需证明序列 $\Big((\mu^{S,N}, 1), (\mu^{I,N}, 1), (\mu^{R,N}, 1)\Big)_{N\geq 1}$ 依分布收敛到 $\Big((\mu^S, 1), (\mu^I, 1), (\mu^R, 1)\Big)$ 于 $[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, \mathrm{R})]^3$，这由命题 3.9 以及以下事实得出：

- 命题 3.1 对函数仍然成立 $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$。
- 沿用命题 3.3 的证明，我们看到序列$\Big((\mu^{S,\ N}, 1), (\mu^{I,\ N}, 1), (\mu^{R,\ N}, 1)\Big)_{N\geq 1}$ 在 $[\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, \mathrm{R})]^3$. 中是紧的
- 由普罗霍罗夫定理，我们推得存在一个子序列依分布收敛到 $\Big((\mu^S, 1), (\mu^I, 1), (\mu^R, 1)\Big)$。
- 命题 3.8 当检验函数 φ 为常数时仍然成立。

最后，由于序列 $(\mu^{S,N}, \mu^{I,N}, \mu^{R,N})_{N\geq 1}$ 在 $(\mathrm{D}(\mathrm{R}_+, \mathcal{M}_F(\mathrm{R}^d)))^3$ 中弱收敛至 (μ^S, μ^I, μ^R)，且 (μ^S, μ^I, μ^R) 是确定性的，因此我们得到依概率收敛。

3.3 密度的存在性

第三个假设　假设（$H1$）使我们能够得到以下结果（参见 [26] 中的定理 22）　　).

注 3.10。 在假设（*H1*）下，对于 $A \in \{S, I, R\}$，存在一个可测函数 $\Upsilon_A(t)(x,\ y)$，定义在$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$上，它是 $y \in \mathbb{R}^d$ 中的一个密度，并且对于定义在$\mathbb{R}^d$上的每个连续函数 φ，都有

$$\Upsilon_A(t)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_A(x,y)\varphi(y)dy.$$

P命题 3.11。 存在$(f^S,\ f^I,\ f^R) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+,\ (L^1(\mathbb{R}^d)^3)$满足　　*s:*

$$\begin{aligned}
\partial_t f_t^S(x) &= \mathcal{Q}_S^* f_t^S(x) - f_t^S(x)\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f_t^I(y)dy,\\
\partial_t f_t^I(x) &= \mathcal{Q}_I^* f_t^I(x) + f_t^S(x)\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f_t^I(y)dy - \alpha f_t^I(x),\\
\partial_t f_t^R(x) &= \mathcal{Q}_R^* f_t^R(x) + \alpha f_t^I(x),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $\mathcal{Q}_A^*$ 是伴随算子。

证明。 回顾一下，初始测度 $\mu_0^S,\ \mu_0^I$ 关于勒贝格测度绝对连续（参见 [7] 中的定理 3.1）。

我们通过归纳构造函数序列 (f^n, g^n, h^n)，使其在弱意义下满足以下系统。

$$\begin{aligned}
\partial_t f_t^{n+1}(x) &= \mathcal{Q}_S^* f_t^{n+1}(x) - f_t^{n+1}(x)\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) g_t^n(y)dy,\\
\partial_t g_t^{n+1}(x) &= \mathcal{Q}_I^* g_t^{n+1}(x) + f_t^{n+1}(x)\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) g_t^n(y)dy - \alpha g_t^{n+1}(x),\\
\partial_t h_t^{n+1}(x) &= \mathcal{Q}_R^* h_t^{n+1}(x) + \alpha g_t^{n+1}(x),\\
f_0^{n+1}(x) &= f_0^S(x),\ g_0^{n+1}(x) = f_0^I(x),\ h_0^{n+1}(x) = 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

利用 f_0^S 的非负性并应用 Feynman–Kac公式，我们证明 f^n 非负。通过递推、比较原理、Feynman–Kac公式以及 f_0^I 非负这一事实，可得 g^n 非负。最后，利用比较原理和Feynman–Kac公式可得 h_n 非负。

由系统（3.17）可轻易看出，对于任意 $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$，

$$\begin{aligned}
(f_t^{n+1}, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_0^S(x)\int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_S(t)(x,y)\varphi(y)dydx\\
&\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f_r^{n+1}(x)\int_{\mathbb{R}^d} K(x,u) g_r^n(u)du \int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_S(t-r)(x,y)\varphi(y)dydxdr,\\
(g_t^{n+1}, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_0^I(x)\int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_I(t)(x,y)\varphi(y)dydx\\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f_r^{n+1}(x)\int_{\mathbb{R}^d} K(x,u) g_r^n(u)du \int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_I(t-r)(x,y)\varphi(y)dydxdr\\
&\quad - \alpha\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g_r^{n+1}(x)\int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_I(t-r)(x,y)\varphi(y)dydxdr,\\
(h_t^{n+1}, \varphi) &= \alpha\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g_r^{n+1}(x)\int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_R(t-r)(x,y)\varphi(y)dydxdr.
\end{aligned}$$

由富比尼定理可得,

$$f_t^{n+1}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f_0^S(x)\Upsilon_S(t)(x,y)dx - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f_r^{n+1}(x) \int_{\mathbb{R}^d} K(x,u)g_r^n(u)du\Upsilon_S(t-r)(x,y)dxdr, \tag{3.18}$$

$$g_t^{n+1}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f_0^I(x)\Upsilon_I(t)(x,y)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f_r^{n+1}(x) \int_{\mathbb{R}^d} K(x,u)g_r^n(u)du\Upsilon_I(t-r)(x,y)dxdr$$
$$- \alpha \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g_r^{n+1}(x)\Upsilon_I(t-r)(x,y)dxdr, \tag{3.19}$$

$$h_t^{n+1}(y) = \alpha \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} g_r^{n+1}(x)\Upsilon_R(t-r)(x,y)dxdr. \tag{3.20}$$

首先，由于 $\forall n \in \mathbf{N}$， $f_t^n \geq 0$并且 $g_t^n \geq 0$, $f_t^{n+1}(y) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0^S(x)\Upsilon_S(t)(x,y)dx$.

因此，在 $y \in \mathbf{R}^d$ 上积分，利用富比尼定理以及 $\int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_S(t)(x,y)dy = 1, \forall t \geq 0$ 这一事实，我们得到

$$\sup_n \sup_{0\leq t\leq T} \|f_t^n\|_{L^1} \leq \|f_0^S\|_{L^1} \leq 1. \tag{3.21}$$

最后一个不等式源于以下事实：如果 $H(x)$ 是 X_0^1 的分布的密度，$f_0^S(x) = \{(1-p)1_A(x) + 1_{A^c}(x)\}H(x)$(参见 [7] 中的定理 3.1），其中 A和 p已在引言中定义。

此外，由于 $\forall n \in \mathbf{N}$， $g_t^n \geq 0$,

$$g_t^{n+1}(y) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_0^I(x)\Upsilon_I(t)(x,y)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f_r^{n+1}(x) \int_{\mathbb{R}^d} K(x,u)g_r^n(u)du\Upsilon_I(t-r)(x,y)dxdr.$$

因此，在 $y \in \mathbb{R}^d$ 上积分，利用（3.21）、富比尼定理和格朗沃尔引理，我们很容易推出

$$\sup_n \sup_{0\leq t\leq T} \|g_t^n\|_{L^1} \leq \|f_0^I\|_{L^1} \exp(T\|K\|_\infty) \leq \exp(T\|K\|_\infty), \tag{3.22}$$

其中，最后一个不等式是由以下事实得出的：若 $H(x)$ 是 X_0^1 的分布的密度，则 $f_0^I(x) = p1_A(x)H(x)$。

另一方面，采用与上文相同的论证，由 (3.20) 和 (3.22) 可得

$$\sup_n \sup_{0\leq t\leq T} \|h_t^n\|_{L^1} \leq \alpha T \exp(T\|K\|_\infty). \tag{3.23}$$

现在证明序列 (f^n, g^n, h^n) 在 $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}_+, [L^1(\mathbf{R}^d)]^3)$ 中的收敛 .

利用 (3.18) 进行直接计算，并采用与上文类似的论证，可得

$$f_t^{n+1}(y) - f_t^n(y) = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (f_r^{n+1}(x) - f_r^n(x)) \int_{\mathbb{R}^d} K(x,u)g_r^n(u)du\Upsilon_S(t-r)(x,y)dxdr$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f_r^n(x) \int_{\mathbb{R}^d} K(x,u)(g_r^{n-1}(u) - g_r^n(u))du\Upsilon_S(t-r)(x,y)dxdr$$

$\|f_t^{n+1} - f_t^n\|_{L^1} \leq \|K\|_\infty${上确界 上确界 $\|f_t^n\|_{L^1}$+上确界 上确界 $\|g_t^n\|_{L^1}$}
$n \ 0\leq t\leq T$ $n \ 0\leq t\leq T$

$$\times \int_0^t \{\|f_r^{n+1}-f_r^n\|_{L^1}+\|g_r^n-g_r^{n-1}\|_{L^1}\}dr$$

$$\leq C(T)\|K\|_\infty \int_0^t \{\|f_r^{n+1}-f_r^n\|_{L^1}+\|g_r^n-g_r^{n-1}\|_{L^1}\}dr. \tag{3.24}$$

同理，我们有

$$\|g_t^{n+1}-g_t^n\|_{L^1}\leq C(T)(1+\alpha)\|K\|_\infty \int_0^t \{\|g_r^n-g_r^{n-1}\|_{L^1}+\|g_r^{n+1}-g_r^n\|_{L^1}+\|f_r^{n+1}-f_r^n\|_{L^1}\}dr, \tag{3.25}$$

$$\|h_t^{n+1}-h_t^n\|_{L^1}\leq \alpha \int_0^t \|g_r^{n+1}-g_r^n\|_{L^1}dr. \tag{3.26}$$

将（3.24）、（3.25）和（3.26）相加并应用格朗沃尔引理，可得

$$\sup_{0\leq r\leq t}\left\{\|f_r^{n+1}-f_r^n\|_{L^1}+\|g_r^{n+1}-g_r^n\|_{L^1}+\|h_r^{n+1}-h_r^n\|_{L^1}\right\}$$

$$\leq C(t)\int_0^t \sup_{0\leq u\leq r}\left\{\|f_u^n-f_u^{n-1}\|_{L^1}+\|g_u^n-g_u^{n-1}\|_{L^1}+\|h_r^n-h_u^{n-1}\|_{L^1}\right\}dr,$$

由皮卡引理可得

$$\sum_n \sup_{0\leq t\leq T}\left\{\|f_t^{n+1}-f_t^n\|_{L^1}+\|g_t^{n+1}-g_t^n\|_{L^1}+\|h_t^{n+1}-h_t^n\|_{L^1}\right\}<\infty, \text{ for any } T>0.$$

因此，序列 $(f^n,\ g^n,\ h^n)_n$ 在 $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+,\ (L^1)^3)$ 中收敛到 $(f^S,\ f^I,\ f^R)$，并且分别满足（3.21）、（3.22）和（3.23）

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|f_t^S\|_{L^1}\leq 1,\ \sup_{0\leq t\leq T}\|f_t^I\|_{L^1}\leq \exp(T\|K\|_\infty) \text{ and } \sup_{0\leq t\leq T}\|f_t^R\|_{L^1}\leq T\alpha\exp(T\|K\|_\infty\|).$$

此外 容易看出，$(f^S,\ f^I,\ f^R)$ 在弱意义下满足方程组（3.16） . □

由于 $(\mu_t^S,\ \mu_t^I,\ \mu_t^R)$ 满足（3.6）、（3.7）和（3.8），由命题 3.11 和 3.9，我们可得以下结果。

推论 3.12。 对于任意 $t\geq 0$，测度 $\mu_t^S,\ \mu_t^I$ 和 μ_t^R 关于勒贝格测度均绝对连续。它们的密度 $(f^S,\ f^I,\ f^R)\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+,\ (L^1(\mathbb{R}^d)^3)$。

注 3.13。 根据上文定理*3.5* 中的方程组，也可以证明测度 $\mu_t^S,\ \mu_t^I$ 和 μ_t^R 关于勒贝格测度绝对连续；这次可利用假设（*H1*）、*Feynman–Kac*公式，以及以$\mathcal{Q}_S^*$ 或 $\mathcal{Q}_I^*$ 或 $\mathcal{Q}_R^*$ 为无穷小生成元的马尔可夫过程的分布相对于勒贝格测度绝对连续这一事实。

4 中心极限定理

本节将研究涨落过程序列的收敛

$$(U^N=\sqrt{N}(\mu^{S,N}-\mu^S), V^N=\sqrt{N}(\mu^{I,N}-\mu^I), W^N=\sqrt{N}(\mu^{R,N}-\mu^R)),$$

如 $N\to\infty$，在下文的假设（H2）下。请注意，这些过程的轨迹属于 $(\mathrm{D}(\mathrm{R}_+,\mathcal{E}(\mathrm{R}^d)))^3$,，其中 $\mathcal{E}(\mathrm{R}^d)$ 是 R^d 上有符号测度构成的空间。然而，由于极限过程可能不如其近似过程规则，我们将首先:

- 写出由 (U^N, V^N, W^N) 验证的方程。
- 确定建立收敛结果所用的空间。

接下来我们将研究上述序列的收敛性。

令 $D = \lceil d/2 \rceil$ （其中 $\lceil . \rceil$ 表示不大于该数的最大整数），本节以下内容均假定下述条件成立。

假设 (H2):

- 对于任意 $A \in \{S, I, R\}$，以及任意 $\ell, u \in \{1, 2...d\}$，两个函数 $\theta_{\ell,\ u}(A,.)$ 和 $m_\ell(A,.)$ 均属于 $C_b^{3+D}(\mathbb{R}^d)$。
- $K \in C_c^{2+D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$。

4.1 过程的演化方程组 $(U^N,\ V^N,\ W^N)$

令 $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$，则有

$$(\mu_t^{S,N}, \varphi) = (\mu_0^{S,N}, \varphi) + \int_0^t (\mu_r^{S,N}, \mathcal{Q}_S\varphi)dr - \int_0^t \left(\mu_r^{S,N}, \varphi(\mu_r^{I,N}, K)\right) dr + M_t^{N,\varphi},$$

$$(\mu_t^{S}, \varphi) = (\mu_0^{S}, \varphi) + \int_0^t (\mu_r^{S}, \mathcal{Q}_S\varphi)dr - \int_0^t \left(\mu_r^{S}, \varphi(\mu_r^{I}, K)\right) dr.$$

Thus

$$(U_t^N, \varphi) = (U_0^N, \varphi) + \int_0^t (U_r^N, \mathcal{Q}_S\varphi)dr - \int_0^t (U_r^N, \varphi(\mu_r^{I,N}, K))dr - \int_0^t (\mu_r^S, \varphi(V_r^N, K))dr + \sqrt{N}M_t^{N,\varphi}.$$

因此令 $\widetilde{M}^{N,}{}_t{}^{\varphi} = \sqrt{N}M^{N,}{}_t{}^{\varphi}$，则有

$$(U_t^N, \varphi) = (U_0^N, \varphi) + \int_0^t (U_r^N, \mathcal{Q}_S\varphi)dr - \int_0^t (U_r^N, G_r^{I,N}\varphi)dr - \int_0^t (V_r^N, G_r^S\varphi)dr + \widetilde{M}_t^{N,\varphi}, \quad (4.1)$$

并且

$$(V_t^N, \varphi) = (V_0^N, \varphi) + \int_0^t (V_r^N, \mathcal{Q}_I\varphi)dr + \int_0^t (U_r^N, G_r^{I,N}\varphi)dr + \int_0^t (V_r^N, G_r^S\varphi)dr - \alpha\int_0^t (V_r^N, \varphi)dr + \widetilde{L}_t^{N,\varphi}, \quad (4.2)$$

and

$$(W_t^N, \varphi) = \int_0^t (W_r^N, \mathcal{Q}_R\varphi)dr + \alpha\int_0^t (V_r^N, \varphi)dr + \widetilde{Y}_t^{N,\varphi}. \quad (4.3)$$

其中 $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$G_r^{I,N}\varphi(x) = \varphi(x)(\mu_r^{I,N}, K(x,.)) = \varphi(x)\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)\mu_r^{I,N}(dy),$$

$$G_r^{S}\varphi(y) = (\mu_r^{S}, \varphi K(.,y)) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)K(x,y)\mu_r^{S}(dx).$$

4.2 序列的收敛空间 （U^N、V^N、W^N ）

在本小节中， σ 是任意正实数，并假设以下条件成立：

假设 (H3)： $\mathbb{E}\left(|X_0^1|^{2\sigma}\right) < \infty$。

下一个引理可由 X_t^i 的定义（见（1.1））、函数m 和 θ 有界这一事实以及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式轻易得到。

引理 4.1。 在假设 *(H3)* 下，对于任意 $T > 0$，存在 $C\left(T\right) > 0$，使得

$$\sup_{1\le i\le N}\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}|X_t^i|^{2\sigma}) < C(T).$$

推论4.2。 在假设 *(H3)* 下，对于任意 $T > 0$，存在 $C\left(T\right) > 0$，使得

$$\sup_{N\ge 1}\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}(\mu_t^{S,N},|.|^{2\sigma})) < C(T),\ and\ \sup_{0\le t\le T}(\mu_t^{S},|.|^{2\sigma}) < C(T).$$

引理4.3。 对于任意固定的 $y \in \mathbb{R}^d$, $\ell \in \{1, 2.....d\}$，映射 $\delta_y, \mathcal{P}_y^\ell$: $H^{s,\sigma} \to \mathbb{R}$ 由$\delta_y\varphi = \varphi(y)$ 和 $\mathcal{P}_y^\ell\varphi = \frac{\partial}{\partial y_\ell}\varphi(y)$ 定义，分别关于 $s > d/2$ 和 $s > 1 + d/2$ 连续，并且

$$\|\delta_y\|_{-s,\sigma} \le C(1 + |y|^\sigma) \quad if\ s{>}d/2, \tag{4.4}$$
$$\|\mathcal{P}_y^\ell\|_{-s,\sigma} \le C(1 + |y|^\sigma) \quad if\ s{>}d/2{+}1. \tag{4.5}$$

证明。 由 Sobolev嵌入可容易得到连续性。另一方面，对于任意函数$\varphi \in H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 由 (2.2) （见小节 2.1）可推出：

$$|\varphi(y)|\le (1 + |y|^\sigma)\|\varphi\|_{C^{0,\sigma}}\le C(1 + |y|^\sigma)\|\varphi\|_{s,\sigma}.$$

不等式 (4.5)可用类似的方法证明。 □

C推论4.4。 若 $(\varphi_p)_{p\ge1}$ 是 $H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 中的完备正交基，则有 e

$$\|\delta_y\|^2_{-s,\sigma}= \sum_{p\ge1}(\varphi_p(y))^2 \le C(1 + |y|^{2\sigma}), \quad if\ s > d/2$$
$$\|\mathcal{P}_y^\ell\|^2_{-s,\sigma}= \sum_{p\ge1}(\frac{\partial}{\partial y_\ell}\varphi_p(y))^2 \le C(1 + |y|^{2\sigma}), \quad if\ s > d/2 + 1.$$

命题4.5。 在假设 *(H3)* 下，序列 $(M^N)_{N\ge1}$的每个聚点 $\mathcal{M}^1$均满足，

$$\forall T \ge 0, \quad \sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}(\|\mathcal{M}_t^1\|^2_{-s,\sigma}) < \infty \quad if\ s > 1 + d/2.$$

证明。我们有

$$\widetilde{M}_t^{N,\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{E^i_{r-}=S\}}\varphi(X_r^i)1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}\overline{M}^i(dr,du)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(S,X_r^i)dB_r^i,$$

$$<\widetilde{M}^{N,\varphi}>_t = \int_0^t\left(\mu_r^{S,N},\varphi^2(\mu_r^{I,N},K)\right)dr$$
$$+\int_0^t\Big(\mu_r^{S,N},\sum_{1\le\ell\le d}(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell})^2\sum_{1\le u\le d}\theta^2_{\ell,u}(S,.)+2\sum_{\substack{1\le\ell\le d-1\\1\le e\le d\\1\le u\le d}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big)dr,$$

由定理3.5可得

$$< \widetilde{M}^{N,\varphi} >_t \xrightarrow{P} \int_0^t \left(\mu_r^S, \varphi^2(\mu_r^I, K)\right) dr + \int_0^t \Big(\mu_r^S, \sum_{1\le \ell\le d} (\frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell})^2 \sum_{1\le u\le d} \theta^2_{\ell,u}(S,.) + 2 \sum_{\substack{1\le \ell\le d-1 \\ \ell+1\le u\le d \\ 1\le e\le d}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big) dr.$$

此外

$$\int_0^t \left(\mu_r^S, \varphi^2(\mu_r^I, K)\right) dr + \int_0^t \Big(\mu_r^S, \sum_{\substack{1\le \ell\le d \\ 1\le u\le d}} (\frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell})^2 \theta^2_{l,u}(S,.) + 2 \sum_{\substack{1\le \ell\le d-1 \\ \ell+1\le u\le d \\ 1\le e\le d}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}\frac{\partial \varphi}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big) dr,$$

作为形式为（$\mathcal{M}^1, \varphi$）的高斯鞅的二次变差（关于其高斯性质，见下文命题 4.17 ），我们的目标是找出使 $\mathbb{E}(\|\mathcal{M}_t^1\|^2_{-s,\sigma}) < \infty$ 成立的最小 s 值。同样，设（φ_p）$_{p\ge 1}$ 为 $H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 的一组正交归一基，则有

$$\mathbb{E}(\|\mathcal{M}_t^1\|^2_{-s,\sigma}) = \mathbb{E}(\sum_{p\ge 1} |(\mathcal{M}_t^1, \varphi_p)|^2) = \sum_{p\ge 1} \mathbb{E}(< (\mathcal{M}^1, \varphi_p) >_t).$$

根据推论 4.2 和推论 4.4 以及假设 (H3)，有

$$\begin{aligned}
\sum_{p\ge 1} < \mathcal{M}^1, \varphi_p >_t &= \sum_{p\ge 1} \Big\{ \int_0^t \left(\mu_r^S, \varphi_p^2(\mu_r^I, K)\right) dr \\
&\quad + \int_0^t \Big(\mu_r^S, \sum_{1\le \ell\le d} (\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_\ell})^2 \sum_{1\le u\le d} \theta^2_{\ell,u}(S,.) + 2 \sum_{\substack{1\le \ell\le d-1 \\ \ell+1\le u\le d \\ 1\le e\le d}} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_\ell}\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big) dr \Big\}, \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)\mu_r^I(dy)\Big) \sum_{p\ge 1} \varphi_p^2(x)\mu_r^S(dx)dr \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ \sum_{1\le \ell\le d} \sum_{1\le u\le d} \theta^2_{\ell,u}(S,x) \sum_{p\ge 1} (\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_\ell})^2 + 2 \sum_{\substack{1\le \ell\le d-1 \\ \ell+1\le u\le d \\ 1\le e\le d}} \theta_{\ell,e}(S,x)\theta_{u,e}(S,x) \sum_{p\ge 1} \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_\ell}(x)\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_u}(x) \Big\} \mu_r^S(dx)dr, \\
&\le \|K\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{p\ge 1} \varphi_p^2(x)\mu_r^S(dx)dr + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\substack{1\le \ell\le d \\ 1\le u\le d}} \|\theta^2_{\ell,u}\|_\infty \sum_{p\ge 1} (\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_\ell})^2(x)\mu_r^S(dx)dr \\
&\quad + 4 \sum_{\substack{1\le \ell\le d-1 \\ \ell+1\le u\le d \\ 1\le e\le d}} \|\theta_{\ell,e}\|_\infty \|\theta_{u,e}\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{p\ge 1} \Big\{ \Big(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_\ell}(x)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x_u}(x)\Big)^2 \Big\} \mu_r^S(dx)dr, \\
&\le C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^{2\sigma})\mu_r^S(dx)dr + C(d) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^{2\sigma})\mu_r^S(dx)dr, \\
&\le C(d,T).
\end{aligned}$$

□

根据 Doob 不等式，并通过与上述类似的计算，我们得到以下结果。

推论 *4.6.* 在假设 *(H4)* 下，对于任意 $T > 0$, $s > 1 + D$, $\exists\, C(T) > 0$，满足：

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\sup_{N\ge 1} E(\sup_{0\le t\le T} \|M_t^N\|^2_{-s,\sigma}) \le C(T)$, $\sup_{N\ge 1} E(\sup_{0\le t\le T} \|L_t^N\|^2_{-s,\sigma}) \le C(T)$, $\sup_{N\ge 1} E(\sup_{0\le t\le T} \|Y_t^N\|^2_{-s,\sigma}) \le C(T)$.

在本节余下部分中，我们任意选取 $\sigma > d/2$ **和** $1 + D < s < 2 + D$.此外，在后文中，假设 (H3) 对该值 σ.成立。因此，我们将证明序列 $(U^N, V^N, W^N)_{N\geq 1}$ 在 $[\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, H^{-s,\sigma})]^3$,中收敛，其中我们赋予 $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, H^{-s,\sigma})$ Skorokhod 拓扑（关于该拓扑的明确定义，请参见 [6] ）。

注4.7。 注意到假设 *(H3)* 以及 $\sigma > d/2$ 这一事实，可得:

$$\sup_x \|K(x,.)\|_{2+D,\sigma} < \infty \text{ and } \sup_y \|K(.,y)\|_{2+D,\sigma} < \infty.$$

4.3 $(U^N,\ V^N,\ W^N)_{N\geq 1}$ 的收敛

我们首先估计涨落过程 U^N、 V^N 和 W^N 的范数，该估计不关于 N 一致。

L引理 4.8。 对于任意 $N \geq 1,\ T > 0$，存在一个常数 $C(T) > 0$，使得 at

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2) \leq C(T)N,\quad \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2) \leq C(T)N \text{ and } \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2) \leq C(T)N.$$

证明。 我们对 U^N. 证明该结果。首先回顾 $C^{1,\ \sigma} \hookrightarrow C^{0,\ 2\sigma}$.此外，由于$s > 1 + D$、 $H^{s,\ \sigma} \hookrightarrow C^{1,\ \sigma}$。现在有

$$\begin{aligned}
|(U_t^N, \varphi)| &= \sqrt{N}\Big|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N 1_{\{E_t^i=S\}}\varphi(X_t^i) - (\mu_t^S, \varphi)\Big|,\\
&\leq \sqrt{N}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N 1_{\{E_t^i=S\}}(1+|X_t^i|^{2\sigma})\frac{|\varphi(X_t^i)|}{1+|X_t^i|^{2\sigma}} + \Big(\mu_t^S, (1+|.|^{2\sigma})\frac{|\varphi(.)|}{1+|.|^{2\sigma}}\Big)\Big\},\\
&\leq \sqrt{N}\|\varphi\|_{C^{0,2\sigma}}\Big\{\Big(\mu_t^{S,N}, 1+|.|^{2\sigma}\Big) + \Big(\mu_t^S, 1+|.|^{2\sigma}\Big)\Big\},\\
&\leq \sqrt{N}\|\varphi\|_{s,\sigma}\Big\{\Big(\mu_t^{S,N}, 1+|.|^{2\sigma}\Big) + \Big(\mu_t^S, 1+|.|^{2\sigma}\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

结合推论 4.2 以及 $\|U_t^N\|_{-s,\sigma} = \sup_{\varphi\neq 0, \varphi\in H^{s,\sigma}} \frac{(U_t^N\ \varphi\ |\ ,)}{\|\varphi\|_{s\ \sigma}}$,这一事实，可得

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2) \leq 4C(T)N.$$

通过相同的论证，我们可以得到关于 V^N和 W^N.的相同结果 □

现在给出时刻 0 涨落的估计。它关于 N是一致的 .

命题 4.9。 对于任意 $s > d/2$，存在 C 使得

$$\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}(\|U_0^N\|_{-s,\sigma}^2) < C \text{ and } \sup_{N\geq 1}\mathbb{E}(\|V_0^N\|_{-s,\sigma}^2) < C.$$

证明。 我们只证明 $\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}\big(\|V_0^N\|_{-s,\sigma}^2\big) < C$。另一个估计可用类似的论证得出。由于 $1_A(X_j)\xi_j\delta_{X_j}$ 是服从分布 μ_0^I的独立同分布随机变量，根据推论 4.4 和假设 (H3),

若 s>d/2，则有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|V_0^N\|_{-s,\sigma}^2) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{p\geq 1}(V_0^N,\varphi_p)^2\Big),\\
&= N\sum_{p\geq 1}\mathbb{E}\left(\Big((\mu_0^{I,N},\varphi_p)-(\mu_0^I,\varphi_p)\Big)^2\right),\\
&= \frac{1}{N}\sum_{i,n_1,n_2}\mathbb{E}\left(\left[\sum_{j=1}^N[1_A(X_j)\xi_j\varphi_p(X_j)-(\mu_0^I,\varphi_p)]\right]^2\right),\\
&= \frac{1}{N}\sum_{p\geq 1}\sum_{j=1}^N\mathbb{E}\left(\big[1_A(X_j)\xi_j\varphi_p(X_j)-(\mu_0^I,\varphi_p)\big]^2\right)\\
&\leq \frac{1}{N}\sum_{p\geq 1}\sum_{j=1}^N\mathbb{E}\left([1_A(X_j)\xi_j\varphi_p(X_j)]^2\right),\\
&\leq p\int_A\sum_{p\geq 1}\varphi_p^2(x)d\mathbb{P}_{X_0^1}(x),\\
&\leq pC\int_A(1+|x|^{2\sigma})d\mathbb{P}_{X_0^1}(x)\leq C.
\end{aligned}$$

□

注 *4.10.* 利用命题 *4.9*，并遵循 *[7],* 中定理 *3.3* 的证明，我们容易证明，对于任意 $s>d/2$, 序列 $(U_0^N,V_0^N)_N$ 在 $H^{-s,\sigma}(R^d)$ 中依分布收敛到 (U_0,V_0)；其中对于任意 $\varphi,\psi\in H^{s,\sigma}$，高斯向量 $((U_0,\varphi),(V_0,\psi))$ 的表达式为

$$\begin{aligned}
(U_0,\varphi) &= W_1[\varphi\sqrt{g}\{(1-p)1_A+1_{A^c}\}-(1-p)W_1(\sqrt{g})\int_A\varphi(x)g(x)dx-W_1(\sqrt{g})\int_{A^c}\varphi(x)g(x)dx\\
&\quad + W_2(1_A\varphi\sqrt{(p-p^2)g}),\qquad (4.6)\\
(V_0,\psi) &= pW_1(1_A\psi\sqrt{g})-pW_1(\sqrt{g})\int_A\psi(x)g(x)dx-W_2(1_A\psi\sqrt{(p-p^2)g}),\qquad (4.7)\\
(Z_0,\phi) &= W_1(\phi\sqrt{g})-W_1(\sqrt{g})\left(\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)g(x)dx\right),\qquad (4.8)
\end{aligned}$$

其中 g 是 X_0^1 和 W_1 的分布的密度，而 W_2 是相互独立的二维白噪声。

下一个引理的证明见 [7] （参见 [7], 中的引理 5.15 的证明，这里使用下文的推论5.2）。

引理 4.11。对于每个 $N\geq 1$，过程 U^N, V^N和 W^N都属于$\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\ H^{-s,\ \sigma})$。

下面给出本节的主要结果。

定理 4.12。 在 *(H2)* 和 *(H3)* 条件下，过程序列 $(U^N,\ V^N,\ W^N)_{N\geq 1}$在$(\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,\ H^{-s,\ \sigma}))^3$ 中依分布收敛于过程$(U,\ V,\ W)$，其轨迹属于

$(\mathbb{C}(\mathbb{R}_+,\ H^{-s,\ \sigma}))^3$ 且对任意 $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
U_t &= U_0 + \int_0^t \mathcal{Q}_S^* U_r dr - \int_0^t (G_r^I)^* U_r dr - \int_0^t (G_r^S)^* V_r dr + \mathcal{M}_t^1, \\
V_t &= V_0 + \int_0^t \mathcal{Q}_I^* V_r dr + \int_0^t (G_r^I)^* U_r dr + \int_0^t ((G_r^S)^* - \alpha I_d) V_r dr + \mathcal{M}_t^2, \\
W_t &= \int_0^t \mathcal{Q}_R^* W_r dr + \alpha \int_0^t V_r dr + \mathcal{M}_t^3,
\end{aligned}
$$

其中，对任意 $r > 0$、G_r^I 和 G_r^S，其定义与小节 *4.1* 中相同（分别将 μ^S、$_r{}^N$和 μ^I、$_r{}^N$替换为 μ_r^S和 μ_r^I），而 $\forall \varphi$、ψ、$\phi \in H^s$、$^{\sigma}$、*(*$\mathcal{M}^1$、φ*)*、*(*$\mathcal{M}^2$、ψ*)*、*(*$\mathcal{M}^3$、ϕ*))* 是一个中心高斯鞅，满足：

$$
\begin{aligned}
< (\mathcal{M}^1, \varphi) >_t &= \int_0^t \left(\mu_r^S, \varphi^2(\mu_r^I, K)\right) dr \\
&\quad + \int_0^t \Big(\mu_r^S, \sum_{1 \leq \ell \leq d} \big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}\big)^2 \sum_{1 \leq u \leq d} \theta_{\ell,u}^2(S,.) + 2 \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq d-1 \\ \ell+1 \leq u \leq d \\ 1 \leq e \leq d}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} \frac{\partial \varphi}{\partial x_u} \theta_{\ell,e}(S,.) \theta_{u,e}(S,.)\Big) dr,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< (\mathcal{M}^2, \psi) >_t &= \int_0^t \left(\mu_r^S, \psi^2(\mu_r^I, K)\right) dr \\
&\quad + \int_0^t \Big(\mu_r^I, \sum_{1 \leq \ell \leq d} \big(\frac{\partial \psi}{\partial x_\ell}\big)^2 \sum_{1 \leq u \leq d} \theta_{\ell,u}^2(I,.) + 2 \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq d-1 \\ \ell+1 \leq u \leq d \\ 1 \leq e \leq d}} \frac{\partial \psi}{\partial x_\ell} \frac{\partial \psi}{\partial x_u} \theta_{\ell,e}(I,.) \theta_{u,e}(I,.)\Big) dr,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< (\mathcal{M}^3, \phi) >_t &= \alpha \int_0^t (\mu_r^R, \phi^2) dr \\
&\quad + \int_0^t \Big(\mu_r^I, \sum_{1 \leq \ell \leq d} \big(\frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\big)^2 \sum_{1 \leq u \leq d} \theta_{\ell,u}^2(I,.) + 2 \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq d-1 \\ \ell+1 \leq u \leq d \\ 1 \leq e \leq d}} \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x_u} \theta_{\ell,e}(I,.) \theta_{u,e}(I,.)\Big) dr,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< (\mathcal{M}^1, \varphi), (\mathcal{M}^2, \psi) >_t &= -\int_0^t \left(\mu_r^S, \varphi\psi(\mu_r^I, K)\right) dr, \\
< (\mathcal{M}^2, \psi), (\mathcal{M}^3, \phi) >_t &= \alpha \int_0^t (\mu_r^I, \psi\phi) dr, \ and \ < (\mathcal{M}^1, \varphi), (\mathcal{M}^3, \phi) >_t = 0.
\end{aligned}
$$

在证明此定理之前，我们先陈述一个 Aldous 型条件，用于保证一列 $H^{-s,\ \sigma}$ 值的 càdlàg 过程的紧性；这里利用了 $H^{-s,\ \sigma}$ 是一个希尔伯特空间这一事实（参见 [27]定义 2.2.1）。

~命题 4.13。 设 $(\vartheta^n)_n$ 是一列 $H^{-s,\ \sigma}$ 值的 *càdlàg* 过程，若其分布 *(*P^n*)* 在$\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, H^{-s,\ \sigma})$ 中构成紧序列，则：

(T_1) 对于稠密子集$\mathbb{T}$ 中的每个 *t*，$\mathbb{R}_+$上的序列$(\vartheta_t^n)_n$ 在 $H^{-s,\sigma}$.中是紧的

(T_2) 对于每个 $T > 0$，$\forall \varepsilon_1$，$\varepsilon_2 > 0$，都存在 $\delta > 0$，$n_0 \geq 1$，使得对于任意一组停时 $\tau^n \leq T$,

$$
\sup_{\substack{n \geq n_0 \\ \varrho \leq \delta}} \mathbb{P}(\|\vartheta^n_{(\tau^n + \varrho)} - \vartheta^n_{\tau^n}\|_H > \varepsilon_1) \leq \varepsilon_2.
$$

定理4.12 的证明将在下文的4.3.3 小节中给出，不过我们先来证明一些预备结果。

4.3.1 预备结果

命题 4.14. 序列$(M^N)_{N\geq 1}$、$(L^N)_{N\geq 1}$和$(Y^N)_{N\geq 1}$在$\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, H^{-s,\sigma})$中是紧的。

证明。 –$(M^N)_{N\geq 1}$的紧性

我们来证明 $(M^N)_{N\geq 1}$满足命题 4.13.– 为了证明 (T1)，只需证明：

$\forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0$ 存在一个紧子集 $\mathcal{K}$ 属于 $H^{-s,\sigma}$ 使得 $\mathrm{P}(M_t^N \notin \mathcal{K}) < \varepsilon$。这直接由以下事实得出：对于每个 $1 + D < s' = \frac{s+1+D}{2} < s$, $\sigma' > \sigma > d/2$，存在 $C(T)$，使得

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \|\widetilde{M}_t^N\|^2_{-s',\sigma'}) \leq C(T) \text{ (see Corollary 4.6).}$$

事实上，由于对于任意 $1 + D < s' = \frac{s+1+D}{2} < s$，嵌入 $H^{-s',\,\sigma'}(\mathrm{R}^d) \hookrightarrow H^{-s,\,\sigma}(\mathrm{R}^d)$ 是紧的（见下方附录中的推论 5.2），$\mathrm{B}_{-s',\,\sigma'}(R) = \{\mu \in H^{-s',\sigma'};\ \|\mu\|_{H^{-s',\,\sigma'}} \leq R\}$ 是 $H^{-s',\,\sigma'}$ 的闭有界子集，因此是 $H^{-s,\,\sigma}$ 的紧子集。于是

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\widetilde{M}_t^N \notin \mathbb{B}_{-s',\sigma'}(R)) &= \mathbb{P}(\|\widetilde{M}_t^N\|_{-s',\sigma'} > R)\\ &\leq \frac{1}{R^2}\mathbb{E}(\|\widetilde{M}_t^N\|^2_{-s',\sigma'})\\ &\leq \frac{C(T)}{R^2},\end{aligned}$$

对于任意 $N \geq 1$。通过任意增大 R，我们可以使右端尽可能小，从而得到所需结果。

– 证明 (T2)。首先注意到 $< \widetilde{M}^N,\ \varphi >_t = \int_0^t \Gamma_r^N(\varphi)dr$，其中

$$\begin{aligned}\Gamma_r^N(\varphi) = &\left(\mu_r^{S,N}, \varphi^2(\mu_r^{I,N}, K)\right)\\ &+ \Big(\mu_r^{S,N}, \sum_{1\leq \ell\leq d} \big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\big)^2 \sum_{1\leq u\leq d} \theta^2_{\ell,u}(S,.) + 2 \sum_{\substack{1\leq \ell\leq d-1\\ \ell+1\leq u\leq d\\ 1\leq e\leq d}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big).\end{aligned}$$

根据 [27] 中的定理 2.3.2，只需证明

$$\forall T > 0 \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta > 0, N_0 \geq 1 \text{ such as for any stopping times } \tau^N \leq T,$$

$$\sup_{N\geq N_0} \sup_{\varrho\leq\delta} \mathbb{P}(|< \widetilde{M}^N >_{(\tau^N+\varrho)} - < \widetilde{M}^N >_{\tau^N}| > \varepsilon_1) < \varepsilon_2 \tag{4.9}$$

其中，$< M >$ 是递增的连续过程，使得 $\|M_t\|^2_{H^{-s,\,\sigma}} < M >_t$ 是一个鞅。

设 $T > 0$、ε_1，$\varepsilon_2 > 0$，$\ell > 1$，我们发现 $\delta > 0$ 使得 $\tau^N + \delta \leq \ell T$并且使得4.9 成立。

我们有

$$
\begin{aligned}
|<\widetilde{M}^N>_{(\tau^N+\varrho)}-<\widetilde{M}^N>_{\tau^N}| &= |\sum_{p\geq 1}\{<\widetilde{M}^{N,\varphi_p}>_{(\tau^N+\varrho)}-<\widetilde{M}^{N,\varphi_p}>_{\tau^N}\}| \\
&= \Big|\sum_{p\geq 1}\int_{\tau^N}^{(\tau^N+\varrho)}\Gamma_r^N(\varphi_p)dr\Big| \\
&= \Big|\sum_{p\geq 1}\int_0^{\varrho}\Gamma^N_{(\tau^N+r)}(\varphi_p)dr\Big| \\
&\leq C(\|K\|_\infty,d)\int_0^{\varrho}\int_{\mathbb{R}^d}\{1+|x|^{2\sigma}\}\mu^{S,N}_{\tau^N+r}(dx)dr \\
&\leq \varrho C(\|K\|_\infty,d)\sup_{N\geq 1}\sup_{0\leq t\leq \ell T}\big(\mu_t^{S,N},1+|.|^{2\sigma}\big). \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

因此，根据马尔可夫不等式、引理 4.2 和（4.10），可得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|<\widetilde{M}^N>_{(\tau^N+\varrho)}-<\widetilde{M}^N>_{\tau^N}|>\varepsilon_1) &\leq \frac{\mathbb{E}(|<\widetilde{M}^N>_{(\tau^N+\varrho)}-<\widetilde{M}^N>_{\tau^N}|)}{\varepsilon_1} \\
&\leq \frac{C\delta}{\varepsilon_1}.
\end{aligned}
$$

（T2）成立。

由（T1）和（T2）可知，$(M^N)_{N\geq 1}$ 在 $\mathbf{D}(\mathbb{R}_+,H^{-s,\sigma})$ 中是紧的。同样的论证可得 $(L^N)_{N\geq 1}$ 和 $(Y^N)_{N\geq 1}$ 在 $\mathbf{D}(\mathbb{R}_+,H^{-s,\sigma})$ 中也是紧的。 □

引理 *4.15*。（证明见 *[7]*，中命题 *6.17* 的证明）序列 $(M^N,L^N,Y^N)_{N\geq 1}$ 的每一个聚点 $(\mathcal{M}^1,\mathcal{M}^2,\mathcal{M}^3)$ 都满足：对于任意 $\varphi,\psi,\phi\in H^{s,\sigma}$，$((\mathcal{M}^1,\varphi),(\mathcal{M}^2,\psi),(\mathcal{M}^3,\phi)$ 是一个鞅。

得到以下结果的主要论据是，U^N、V^N和 W^N的跳跃分别具有 $\frac{1}{\sqrt{N}}$.的量级

命题 4.16。（详细证明请参见 *[7]*，中的命题 *6.16* 的证明）序列 $(\mathcal{M}^1,\mathcal{M}^2,\mathcal{M}^3)$ $(M^N,L^N,Y^N)_{N\geq 1}$ 的每个聚点都属于 $(\mathbf{C}(\mathbb{R}_+,H^{-s,\sigma}))^3$.

命题 4.17。序列 $(M^N,L^N,Y^N)_{N\geq 1}$ 在 $(\mathbf{D}(\mathbb{R}_+,H^{-s,\sigma}))^3$ 中依分布收敛于过程 $(\mathcal{M}^1,\mathcal{M}^2,\mathcal{M}^3)\in(\mathbf{C}(\mathbb{R}_+,H^{-s,\sigma}))^3$ 其中 $\forall\varphi,\psi,\phi\in H^{s,\sigma}$，

$((\mathcal{M}^1,\varphi),(\mathcal{M}^2,\psi),(\mathcal{M}^2,\phi))$ 是一个中心高斯鞅，其分布与.....相同

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}_t^1,\varphi) =& -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{f_S(r,x)\int_{\mathbb{R}^d} f_I(r,y)K(x,y)dy}\varphi(x)\mathcal{W}_1(dr,dx)\\
&+\sum_{\ell=1}^d\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{f_S(r,x)}\Big\{\sum_{1\le u\le d}\frac{\partial\varphi}{\partial x_u}(x)\theta_{u,l}(S,x)\Big\}\mathcal{W}_{\ell+1}(dr,dx), \qquad (4.11)\\
(\mathcal{M}_t^2,\psi) =& \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{f_S(r,x)\int_{\mathbb{R}^d} f_I(r,y)K(x,y)dy}\psi(x)\mathcal{W}_1(dr,dx)\\
&+\sum_{\ell=1}^d\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{f_I(r,x)}\Big\{\sum_{1\le u\le d}\frac{\partial\psi}{\partial x_u}(x)\theta_{u,l}(I,x)\Big\}\mathcal{W}_{\ell+1+d}(dr,dx)\\
&-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\sqrt{\alpha f_I(r,x)}\mathcal{W}_{3d+2}(dr,dx), \qquad (4.12)\\
(\mathcal{M}_t^3,\phi) =& +\sum_{\ell=1}^d\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{f_R(r,x)}\Big\{\sum_{1\le u\le d}\frac{\partial\phi}{\partial x_u}(x)\theta_{u,l}(R,x)\Big\}\mathcal{W}_{\ell+1+2d}(dr,dx)\\
&+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)\sqrt{\alpha f_I(r,x)}\mathcal{W}_{3d+2}(dr,dx), \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

其中，$\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$,.....,$\mathcal{W}_{3d+1}$, $\mathcal{W}_{3d+2}$ 是相互独立的时空标准白噪声。

~~~证明。根据命题 4.14，$(M^N,L^N,Y^N)_{N\ge1}$ 在 $(\mathbf{D}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma}))^3$ 中是紧的，因此根据普罗霍罗夫定理，存在一个子序列，仍记为 $(M^N,L^N,Y^N)_{N\ge1}$，它在分布意义下收敛于 $(\mathbf{D}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma}))^3$ 中的 $(\mathcal{M}^1,\mathcal{M}^2,\mathcal{M}^3)$。由引理 4.15 和命题 4.16 可知，$\forall\varphi,\psi,\phi\in H^{s,\sigma}$, $((\mathcal{M}^1,\varphi),(\mathcal{M}^2,\psi),(\mathcal{M}^3,\phi)$ 是连续鞅。因此，只需证明中心化的连续鞅 $((\mathcal{M}^1$

$,\varphi),(\mathcal{M}^2,\psi),(\mathcal{M}^3,\phi))$ 为高斯分布，并满足（4 .11), (4.12) 和（4 .13).

对于任意 φ、ψ、$\psi\in C_b^2$，有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{M}_t^{N,\varphi} =& -\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{E^i_{r^-}=S\}}\varphi(X_r^i)1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}\overline{M}^i(dr,du)\\
&+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\varphi(X_r^i)\theta(S,X_r^i)dB_r^i\\
=&-M_t^{1,N,\varphi}+M_t^{2,N,\varphi},\\
\widetilde{L}_t^{N,\psi} =& \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^\infty 1_{\{E^i_{r^-}=S\}}\psi(X_r^i)1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}\overline{M}^i(dr,du))+\\
&+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=I\}}\bigtriangledown\psi(X_r^i)\theta(I,X_r^i)dB_r^i-\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E^i_{r^-}=I\}}\psi(X_r^i)\overline{Q}^i(dr,du)\\
=&M_t^{1,N,\psi}+M_t^{3,N,\psi}-M_t^{4,N,\psi},\\
\widetilde{Y}_t^{N,\phi} =& \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t 1_{\{E_r^i=R\}}\bigtriangledown\phi(X_r^i)\theta(R,X_r^i)dB_r^i+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_0^t\int_0^\alpha 1_{\{E^i_{r^-}=I\}}\phi(X_r^i)\overline{Q}^i(dr,du)\\
=&\ M_t^{5,N,\phi}+M_t^{4,N,\phi}.
\end{aligned}
$$

对于 φ、ψ、$\phi\in C_c^2$，考虑以下鞅序列

$$\widetilde{M}_t^{N,\varphi}+\widetilde{L}_t^{N,\psi}+\widetilde{Y}_t^{N,\phi}=-M_t^{1,N,\varphi}+M_t^{2,N,\varphi}+M_t^{1,N,\psi}+M_t^{3,N,\psi}-M_t^{4,N,\psi}+M_t^{4,N,\phi}+M_t^{5,N,\phi}$$
~~~

该 m 鞅 $M^{1,\,N,\,t\quad\varphi}$、$M^{2,\,N,\,t\quad\varphi}$、$M^{3,\,N\psi,\,t}$、$M^{4,\,N\psi,\,t}$、$M^{5,\,N\phi,\,t}$ 两两正交，

$$< \widetilde{M}^{N,\varphi}+\widetilde{L}^{N,\psi} >_t=< M^{1,N,\varphi} >_t + < M^{2,N,\varphi} >_t + < M^{1,N,\psi} >_t + < M^{3,N,\psi} >_t + < M^{4,N,\psi} >_t$$
$$+ < M^{4,N,\phi} >_t + < M^{5,N,\phi} >_t -2 < M^{1,N,\varphi}, M^{1,N,\psi} >_t -2 < M^{4,N,\psi}, M^{4,N,\phi} >_t .$$

此外，我们还有以下依概率收敛

$$< M^{1,N,\varphi} >_t \xrightarrow{P} \int_0^t \big(\mu_r^S, \varphi^2(\mu_r^I, K)\big)\, dr,$$

$$< M^{2,N,\varphi} >_t \xrightarrow{P} \int_0^t \Big(\mu_r^S, \sum_{1\le\ell\le d} \big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\big)^2 \sum_{1\le u\le d} \theta^2_{\ell,u}(S,.) + 2 \sum_{\substack{1\le\ell\le d-1\\ \ell+1\le u\le d\\ 1\le e\le d}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\frac{\partial\varphi}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big) dr.$$

另一方面:

$-\widetilde{M}^{N,\varphi}+\widetilde{L}^{N,\psi}+\widetilde{Y}^{N,\phi} \xrightarrow{L} (\mathcal{M}^1,\varphi) + (\mathcal{M}^2,\psi) + (\mathcal{M}^3,\phi)$ 沿某个子序列成立，因为 $(\widetilde{M}^{N,\varphi}, \widetilde{L}^{N,\psi}, \widetilde{L}^{N,\phi}) \xrightarrow{L} ((\mathcal{M}^1,\varphi), (\mathcal{M}^2,\psi), (\mathcal{M}^3,\phi))$– $(\mathcal{M}^1,\varphi)+(\mathcal{M}^2,\psi)+(\mathcal{M}^3,\phi)$ 是连续鞅，因为 $(\mathcal{M}^1,\varphi)$、$(\mathcal{M}^2,\psi)$ 和 $(\mathcal{M}^3,\phi)$ 都具有这一性质。

因此，$(\mathcal{M}^1,\varphi) + (\mathcal{M}^2,\psi) + (\mathcal{M}^3,\phi)$ 是时间变换布朗运动。

二次变差

$$< (\mathcal{M}^1,\varphi) + (\mathcal{M}^2,\psi) + (\mathcal{M}^3,\phi) >_t$$
$$= \int_0^t \big[\, \big(\mu_r^S, \varphi^2(\mu_r^I,K)\big) + \big(\mu_r^S, \psi^2(\mu_r^I,K)\big) - 2\big(\mu_r^S, \varphi\psi(\mu_r^I,K)\big)\,\big] dr$$
$$+ \sum_{A\in\{S,I,R\}} \int_0^t \Big(\mu_r^A, \sum_{\substack{1\le\ell\le d\\ 1\le u\le d}} \big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial x_\ell}\big)^2 \theta^2_{\ell,u}(A,.) + 2 \sum_{\substack{1\le\ell\le d-1\\ \ell+1\le u\le d\\ 1\le e\le d}} \frac{\partial\varphi_A}{\partial x_\ell}\frac{\partial\varphi_A}{\partial x_u}\theta_{\ell,e}(A,.)\theta_{u,e}(A,.)\Big) dr$$
$$+ \alpha \int_0^t \Big\{(\mu_r^I,\psi^2) + (\mu_r^I,\phi^2) - 2(\mu_r^I,\psi\phi)\Big\} dr,$$

（其中我们令 $\varphi_S = \varphi$, $\varphi_I = \psi$ 和 $\varphi_R = \phi$）的 $(\mathcal{M}^1,\varphi) + (\mathcal{M}^2,\psi) + (\mathcal{M}^3,\phi)$ 为确定性，则我们得出

$(\mathcal{M}^1,\varphi) + (\mathcal{M}^2,\psi) + (\mathcal{M}^3,\phi)$ 是一个高斯鞅，其分布与.....相同

$$\mathcal{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f_S(r,x) \int_{\mathbb{R}^d} f_I(r,y)K(x,y)dy}(\psi(x)-\varphi(x))\mathcal{W}_1(dr,dx)$$
$$+ \sum_{1=1}^d \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f_S(r,x)}\Big\{ \sum_{1\le u\le d} \frac{\partial\varphi}{\partial x_u}(x)\theta_{u,l}(S,x)\Big\}\mathcal{W}_{l+1}(dr,dx)$$
$$+ \sum_{1=1}^d \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f_I(r,x)}\Big\{ \sum_{1\le u\le d} \frac{\partial\psi}{\partial x_u}(x)\theta_{u,l}(I,x)\Big\}\mathcal{W}_{l+d+1}(dr,dx)$$
$$+ \sum_{1=1}^d \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f_R(r,x)}\Big\{ \sum_{1\le u\le d} \frac{\partial\phi}{\partial x_u}(x)\theta_{u,l}(R,x)\Big\}\mathcal{W}_{2d+1}(dr,dx)$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\alpha f_I(r,x)}(\phi(x)-\psi(x))\mathcal{W}_{3d+2}(dr,dx),$$

其中 $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathcal{W}_{3d+1}, \mathcal{W}_{3d+2}$ 是相互独立的时空白噪声 S.

因此，分别取 $(\psi\equiv 0, \phi\equiv 0)$、$(\varphi\equiv 0, \phi\equiv 0)$ 和 $(\varphi\equiv 0, \psi\equiv 0)$，代入上式可知，$(\mathcal{M}^1,\varphi)$、$(\mathcal{M}^2,\psi)$ 和 $(\mathcal{M}^3,\phi)$ 满足 (4.11)、(4.12) 和 (4.13)。 □

Pro命题 4.18. 存在一个常数 $C>0$，使得对于任意 $\varphi \in H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d$ ），

$$\|G_r^{I,N}\varphi\|_{s,\sigma} \leq C\|\varphi\|_{s,\sigma}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}, \tag{4.14}$$

$$\|G_r^{S}\varphi\|_{s,\sigma} \leq C\|\varphi\|_{s,\sigma}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}, \tag{4.15}$$

$$\|G_r^{I}\varphi\|_{s,\sigma} \leq C\|\varphi\|_{s,\sigma}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}. \tag{4.16}$$

证明。 我们首先回顾一下， $\forall x,y\in \mathrm{R}^d$,

$$G_r^{I,N}\varphi(x)=\varphi(x)(\mu_r^{I,N},K(x,.))=\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^d}K(x,y)\mu_r^{I,N}(dy),$$

$$G_r^{S}\varphi(y)=(\mu_r^{S},\varphi K(.,y))=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)K(x,y)\mu_r^{S}(dx).$$

（4.14）的证明。由于 $H^{s,\sigma}$ 是一个巴拿赫代数（参见下文附录中的注 5.4 ），因此我们有

$$\|G_r^{I,N}\varphi\|_{s,\sigma}\leq C\|\varphi\|_{s,\sigma}\|(\mu_r^{I,N},K)\|_{s,\sigma}\leq C\|\varphi\|_{s,\sigma}\|(\mu_r^{I,N},K)\|_{2+D,\sigma}. \tag{4.17}$$

此外

$$\begin{aligned}
\|(\mu_r^{I,N},K)\|_{2+D,\sigma}^2 &= \sum_{|\gamma|\leq 2+D}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma(\mu_r^{I,N},K(x,.))|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx,\\
&= \sum_{|\gamma|\leq 2+D}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^d}D^\gamma K(x,y)\mu_r^{I,N}(dy)\right|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx,\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{|\gamma|\leq 2+D}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma K(x,y)|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx\mu_r^{I,N}(dy),\\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d}\|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

因此，4.14）由（4.17）和（4.18）得出。

4.15的证明。再一次，由于 $H^{2+D,\sigma}\hookrightarrow H^{s,\sigma}$，我们有

$$\|G_r^{S}\varphi\|_{s,\sigma}=\|(\mu_r^{S},\varphi K)\|_{s,\sigma}\leq C\|(\mu_r^{S},\varphi K)\|_{2+D,\sigma}. \tag{4.19}$$

此外，根据推论4.2，我们有

$$\begin{aligned}
\|(\mu_r^{S},\varphi K)\|_{D,\sigma}^2 &= \sum_{|\gamma|\leq 2+D}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma(\mu_r^{S},\varphi K(.,y))|^2}{1+|y|^{2\sigma}}dx,\\
&= \sum_{|\gamma|\leq 2+D}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)D^\gamma K(x,y)\mu_r^{S}(dx)\right|^2}{1+|y|^{2\sigma}}dx,\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(x)\mu_r^{S}(dx)\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{|\gamma|\leq 2+D}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma K(x,y)|^2}{1+|y|^{2\sigma}}dy\mu_r^{S}(dx),\\
&\leq \|\varphi\|_{C^{0,\sigma}}^2\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|K(x,.)\|_{2+D,\sigma}^2.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

因此（4.15）由（4.19）和（4.20）以及嵌入 $H^{s,\sigma}\hookrightarrow C^{0,\sigma}$.（4.16）的证明与（4.14）的证明类似。 □

推论 **引理 4.19**。 存在一个常数 $C>0$，使得对于任意 $\mathcal{U}\in H^{-s,\sigma}$，我们有

$$\|(G_r^{I,N})^*\mathcal{U}\|_{-s,\sigma}\leq C\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}\|\mathcal{U}\|_{-s,\sigma}, \tag{4.21}$$

$$\|(G_r^{S})^*\mathcal{U}\|_{-s,\sigma}\leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|K(x,.)\|_{2+D,\sigma}\|\mathcal{U}\|_{-s,\sigma}, \tag{4.22}$$

$$\|(G_r^{I})^*\mathcal{U}\|_{-s,\sigma}\leq C\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}\|\mathcal{U}\|_{-s,\sigma}. \tag{4.23}$$

4.3.2 演化半群

我们将演化半群定义为巴拿赫空间中有界线性算子构成的半群。暂且假设，在一般情形下，对任意 $A\in\{S,I,R\}$，系数 $m(A,.)$ 和 $\theta(A,.)$ 属于 C_b^{j+1}，其中 j 是正整数。设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是定义在 $\mathbf{R}^d$. 上的标准布朗运动。对任意 $A\in\{S,I,R\}$，定义（例如参见 Kunita[20] ）微分同胚流（ C^j 类），它是从时刻 u 的 $x\in\mathbf{R}^d$ 出发的伊藤随机微分方程的唯一解:

$$X_{u,t}^{A,x}=x+\int_u^t m(A,X_{u,t}^{A,x})dr+\int_u^t\theta(A,X_{u,t}^{A,x})dB_r. \tag{4.24}$$

此外，对任意可测有界函数 φ, $A\in\{S,I,R\}$，我们定义

$\Upsilon_A(t-u)\varphi(x)$ =E($\varphi(X^{A,\,x}_{u\,t}$,)) 并且在下文中， $\Upsilon_A^*(t)$ 表示伴随算子。

当 $u=0$, $X^{A,\,x}_{u\,t}$，表示 $X^{A,\,x}_{t}$.

我们注意到，在假设（$H2$）下，对于任意 $0\leq u<t$，映射 $x\in\mathbf{R}^d\longmapsto X^{A,\,x}_{u\,t}$，属于 C^{2+D} 类，并且以下结果成立。

– （感谢 [20] 中的推论 4.6.7）对于任意 $0\leq|\gamma|\leq 2+D$，对于任意 $p\geq 1$，存在一个与 t 无关的常数 C，使得

$$\sup_x\mathbb{E}(|D^\gamma X_t^{A,x}|^{2p})\leq C. \tag{4.25}$$

–（见引理 ma 4.5.3 in [20]) 任意实数 p，都存在一个正的常数 C_p，使得

$$\mathbb{E}[(1+|X_t^{A,x}|^2)^p]\leq C_p(1+|x|^2)^p,\quad\forall x\in\mathbb{R}^d. \tag{4.26}$$

现在我们得到以下结果。

引理 4.20. 在假设 *(H2)* 下，对于任意 $A\in\{S,I,R\}$, $t>0$, $m\in\{0,1,....2+D\}$,$\varphi\in W^{m,\sigma}_0(\mathbb{R}^d)$, 存在一个正的常数 C, 使得:

$$\|\Upsilon_A(t)\varphi\|_{m,\sigma}\leq Ce^{Ct}\|\varphi\|_{m,\sigma}$$

证明。我们有

$$\|\Upsilon_A(t)\varphi\|_{m,\sigma}^2=\sum_{|\gamma|\leq m}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma\Upsilon_A(t)\varphi(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx,$$

此外，对于 $|\gamma|=0$，利用（4.26）和下文附录中的引理 5.3 ，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\Upsilon_A(t)\varphi|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\mathbb{E}(\varphi(X_t^{A,x}))|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx&\leq\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{1+|x|^{2\sigma}}\mathbb{E}[(1+|X_t^{A,x}|^\sigma)^2]\mathbb{E}\Big(\frac{|\varphi(X_t^{A,x})|^2}{(1+|X_t^{A,x}|^\sigma)^2}\Big)dx,\\&\leq C\int_{\mathbb{R}^d}\frac{(1+|x|^2)^\sigma}{1+|x|^{2\sigma}}\int_{\mathbb{R}^d}\Upsilon_A(t)(x,y)\frac{|\varphi(y)|^2}{1+|y|^{2\sigma}}dydx,\\&\leq C(\sigma)\|\varphi\|_{L^{2,\sigma}}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Upsilon_S(t)(x,y)dx\Big),\\&\leq C(\sigma)\|\varphi\|_{m,\sigma}e^{Ct}.\end{aligned}$$

对于 $\gamma=(1,\ 0,\ 0...0)$ 利用（4.25）和引理 5.3，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma\Upsilon_A(t)\varphi|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\mathbb{E}(D^\gamma\varphi(X_t^{A,x}))|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx,\\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{1+|x|^{2\sigma}}\mathbb{E}[\{D^\gamma X_t^{A,x}(1+|X_t^{A,x}|^\sigma)\}^2]\mathbb{E}\Big(\frac{|\nabla\varphi(X_t^{A,x})|^2}{(1+|X_t^{A,x}|^\sigma)^2}\Big)dx,\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^d}\frac{(1+|x|^2)^\sigma}{1+|x|^{2\sigma}}\mathbb{E}[(D^\gamma X_t^{A,x})^4]^{1/2}\mathbb{E}[(1+|X_t^{A,x}|^\sigma)^4]^{1/2}\\ &\qquad\times\int_{\mathbb{R}^d}\Upsilon_A(t)(x,y)\frac{|\nabla\varphi(y)|^2}{1+|y|^{2\sigma}}dydx,\\ &\le C(\sigma,d)\|\varphi\|_{1,\sigma}\sup_{y\in\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Upsilon_A(t)(x,y)dx\Big),\\ &\le C(\sigma,d)\|\varphi\|_{m,\sigma}e^{Ct}.\end{aligned}$$

类似的论证可得，对于所有$|\gamma|\le m$的取值，$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma\Upsilon_S(t\ \varphi|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx\ \le\ C^{)}(\sigma,d)\|\varphi\|_{m,\ \sigma}e^{Ct}$。

因此证明完成。 □

推论 4.21。对于任意正的非整数 $1+D<s<2+D,\ \ \varphi\in H^{s,\sigma}$，存在一个正常数 C，使得 $\|\Upsilon_S(t)\varphi\|_{s,\sigma}\le Ce^{Ct}\|\varphi\|_{s,\sigma}$.

证明。我们利用空间 $H^{s,\sigma}$.的插值定义来证明这一结果。对于任意非整数 $s>0$，存在 $\rho\in]0,1[$使得 $s=(1-\rho)(1+D)\ +\rho(2+D)$，且$(W^{1+D}{}_{,0}\ \ {}^{\sigma},W^{2+D}{}_{,0}\ \ {}^{\sigma})_{\rho,2}=H^{s,\sigma}$。关于空间$(.,.)_{\rho,q}$的定义，请参阅[22]或 [37]。因此，利用 [23], 中的引理 3.1.1，我们在 $H^{s,\sigma}$上得到一个等价范数，其表达式为:

$$\|\varphi\|_{s,\sigma}=\left(\int_0^\infty\{t^{-\rho}K(t,1+D,2+D)\}^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

其中 $K(t,1+D,2+D)\ =\inf_{\varphi=\varphi_1+\varphi_2}\{\|\varphi_1\|_{1+D,\sigma}+t\|\varphi_2\|_{2+D,\sigma}\}$.

因此很容易看出，结论由引理 4.20 及上述定义即可得出。 □

下面证明以下结果，它们将有助于证明序列 $(U^N,V^N,W^N)_N$属于 $\mathbf{D}(\mathbb{R}_+,H^{-s,\ \sigma})$ 的紧性。

引理 4.22. 过程序列 (U^N,V^N,W^N) 满足 $\forall\,0\le u<t$,

$$\begin{aligned}U_t^N &= \Upsilon_S^*(t-u)U_u^N-\int_u^t\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^{I,N})^*U_r^Ndr-\int_u^t\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^S)^*V_r^Ndr\\ &\quad+\int_u^t\Upsilon_S^*(t-r)d\widetilde{M}_r^N,\end{aligned}\tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}V_t^N &= \Upsilon_I^*(t-u)V_u^N+\int_u^t\Upsilon_I^*(t-r)(G_r^{I,N})^*U_r^Ndr+\int_u^t\Upsilon_I^*(t-r)[(G_r^{I,N})^*-\alpha]V_r^Ndr\\ &\quad+\int_u^t\Upsilon_I^*(t-r)d\widetilde{L}_r^N,\end{aligned}\tag{4.28}$$

$$W_t^N=\Upsilon_R^*(t-u)W_u^N+\alpha\int_u^t\Upsilon_R^*(t-r)V_r^Ndr+\int_u^t\Upsilon_R^*(t-r)d\widetilde{Y}_r^N.\tag{4.29}$$

证明. 考虑一个属于 $\phi \ C^{1}{}_{c}{}^{2}(\mathbb{R}_{+}\times\mathbb{R}^{d})$ 的函数。对$\phi(t,X_t^i)$ 应用伊藤公式，并采用与小节 3.1 和 4.1中类似的计算，可得对于 $0\le u<t$,

$$(U_t^N,\phi_t)=(U_u^N,\phi_u)+\int_u^t(U_r^N,\mathcal{Q}_S\phi_r)dr+\int_u^t(U_r^N,\frac{\partial\phi_r}{\partial r})dr-\int_u^t\left(U_r^N,\phi_r(\mu_r^{I,N},K)\right)dr$$
$$-\int_u^t\left(V_r^N,(\mu_r^S,\phi_rK)\right)dr+\int_u^t(\phi_r,d\widetilde{M}_r^N).$$

设 $\varphi\in C_b^2$和 $0\le u<t$，对于 $r\in[u,t]$，考虑映射 $\psi_r(x)=\Upsilon_S(t-r)\varphi(x)$。事实上，我们有 $\psi_\cdot(\cdot)\in C^{1,}{}_{c}{}^{2}([u,t]\times\mathrm{R}^d)$,

- 对任意 $r\in[u,t]$, $\psi_r(\cdot)\in C_c^2(\mathrm{R}^d)$

- $\forall x\in\mathrm{R}^d$，映射 $r\in[u,t]\mapsto\psi_r'(x)=-\mathcal{Q}_S(\Upsilon_S(t-r)\varphi(x))$ 是连续的，因为 $\Upsilon_S(t)$ 是强连续半群，而 $-\mathcal{Q}_S(\Upsilon_S(t-r)\varphi(x))=\Upsilon_S(t-r)(-\mathcal{Q}_S\varphi(x))$。因此，在上式中用 ψ 替换 ϕ，得到

$$(U_t^N,\varphi)=(U_u^N,\Upsilon_S(t-u)\varphi)-\int_u^t\left(U_r^N,\Upsilon_S(t-r)\varphi(\mu_r^{I,N},K)\right)dr$$
$$-\int_u^t\left(V_r^N,(\mu_r^S,\Upsilon_S(t-r)\varphi K)\right)dr+\int_u^t(\Upsilon_S(t-r)\varphi,d\widetilde{M}_r^N).$$

这证明了（4.27）。通过类似的论证，我们得到（4.28）和（4.29）。 □

命题 4.23。 存在 $C>0$，使得对于任意 $T>0$, $\varrho>0$ 以及任意满足 $\overline{\tau}+\varrho<T$ 的停时$\overline{\tau}$，都有

$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}\Upsilon_S^*(\overline{\tau}+\varrho-r)d\widetilde{M}_r^N\right\|_{-s,\sigma}^2\right)\le C\varrho, \tag{4.30}$$
$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}\Upsilon_I^*(\overline{\tau}+\varrho-r)d\widetilde{L}_r^N\right\|_{-s,\sigma}^2\right)\le C\varrho, \tag{4.31}$$
$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}\Upsilon_R^*(\overline{\tau}+\varrho-r)d\widetilde{Y}_r^N\right\|_{-s,\sigma}^2\right)\le C\varrho. \tag{4.32}$$

证明。 ((4.30))的证明。回顾一下

$$\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}(\Upsilon_S(\overline{\tau}+\varrho-r)\varphi,d\widetilde{M}_r^N)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}1_{\{E_r^i=S\}}\bigtriangledown\Upsilon_S(\overline{\tau}+\varrho-r)\varphi(X_r^i)\theta(S,X_r^i)dB_r^i$$
$$-\sqrt{\frac{1}{N}}\sum_{i=1}^N\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}\int_0^\infty1_{\{E_{r^-}^i=S\}}\Upsilon_S(\overline{\tau}+\varrho-r)\varphi(X_r^i)1_{\{u\le\frac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^N K(X_r^i,X_r^j)1_{\{E_r^j=I\}}\}}\overline{M}^i(dr,du).$$

现在由注 4.4、（4.25）和（4.26），可得对所有 $\ell\in\{1,2,.....,d\}$、$0\le r\le\varrho$,

$$\sum_{p\ge1}\Big(\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p(x)\Big)^2=\sum_{p\ge1}\Big\{\mathbb{E}(\varphi_p(X_{\varrho-r}^{S,x}))\Big\}^2\le\mathbb{E}\Big(\sum_{p\ge1}|\varphi_p(X_{\varrho-r}^{S,x})|^2\Big),$$
$$\le C\mathbb{E}(1+|X_{\varrho-r}^{S,x}|^{2\sigma}),$$
$$\le C(\sigma)(1+|x|^{2\sigma}). \tag{4.33}$$

$$\sum_{p\geq 1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p(x)\Big)^2=\sum_{p\geq 1}\Big\{\frac{\partial}{\partial x_\ell}\mathbb{E}(\varphi_p(X^{S,x}_{\varrho-r}))\Big\}^2\leq \mathbb{E}(|\partial_{x_\ell}X^{S,x}_{\varrho-r}|^2)\mathbb{E}\Big(\sum_{p\geq 1}|(\nabla\varphi_p)(X^{S,x}_{\varrho-r})|^2\Big),$$
$$\leq C(d)\mathbb{E}(1+|X^{S,x}_{\varrho-r}|^{2\sigma}),$$
$$\leq C(d,\sigma)(1+|x|^{2\sigma}). \tag{4.34}$$

因此，由（4.33）和（4.34），以及引理 4.1，可得

$$\mathbb{E}\left(\Big\|\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}\Upsilon_S(\overline{\tau}+\varrho-r)d\widetilde{M}^N_r\Big\|^2_{H^{-s}}\right)=\sum_{p\geq 1}\mathbb{E}\left(\Big(\int_{\overline{\tau}}^{\overline{\tau}+\varrho}\Upsilon_S(\overline{\tau}+\varrho-r)\varphi_p,d\widetilde{M}^N_r\Big)^2\right),$$
$$=\sum_{p\geq 1}\Big\{\mathbb{E}\left(\int_0^\varrho\Big(\mu^{S,N}_{r+\overline{\tau}},(\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p)^2(\mu^{I,N}_{r+\overline{\tau}},K)\Big)dr\right)$$
$$+\mathbb{E}\Big(\int_0^\varrho\Big(\mu^{S,N}_{r+\overline{\tau}},\sum_{1\leq\ell\leq d}\big(\frac{\partial\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p}{\partial x_\ell}\big)^2\sum_{1\leq u\leq d}\theta^2_{\ell,u}(S,.)\Big)dr\Big)$$
$$+\mathbb{E}\Big(\int_0^\varrho\Big(\mu^{S,N}_{r+\overline{\tau}},\sum_{\substack{1\leq\ell\leq d-1\\1\leq e\leq d\\1\leq u\leq d}}\frac{\partial\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p}{\partial x_\ell}\frac{\partial\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p}{\partial x_u}\theta_{l,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)\Big)dr\Big)\Big\},$$
$$\leq\mathbb{E}\left(\int_0^\varrho\Big(\mu^{S,N}_{r+\overline{\tau}},\sum_{p\geq 1}(\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p)^2(\mu^{I,N}_{r+\overline{\tau}},K)\Big)dr\right)$$
$$+\mathbb{E}\Big(\int_0^\varrho\Big(\mu^{S,N}_{r+\overline{\tau}},\sum_{\substack{1\leq\ell\leq d\\1\leq u\leq d}}\theta^2_{\ell,u}(S,.)\sum_{p\geq 1}\big(\frac{\partial\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p}{\partial x_\ell}\big)^2\Big)dr\Big)$$
$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\int_0^\varrho\Big(\mu^{S,N}_{r+\overline{\tau}},\sum_{\substack{1\leq\ell\leq d-1\\1\leq e\leq d\\1\leq u\leq d}}|\theta_{\ell,e}(S,.)\theta_{u,e}(S,.)|\Big\{\sum_{p\geq 1}\big(\frac{\partial\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p}{\partial x_\ell}\big)^2+\sum_{p\geq 1}\big(\frac{\partial\Upsilon_S(\varrho-r)\varphi_p}{\partial x_u}\big)^2\Big\}\Big)dr\Big),$$
$$\leq\varrho\|K\|_\infty\sup_{N\geq 1}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}((\mu^{S,N}_t,1+|.|^{2\sigma}))$$
$$+\varrho C(\sigma)\sum_{\substack{1\leq\ell\leq d\\1\leq u\leq d}}\|\theta^2_{\ell,u}(S,.)\|_\infty\sup_{N\geq 1}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}((\mu^{S,N}_t,1+|.|^{2\sigma}))$$
$$+\varrho\sum_{\substack{1\leq\ell\leq d-1\\1\leq e\leq d\\1\leq u\leq d}}\|\theta_{\ell,e}(S,.)\|_\infty\|\theta_{u,e}(S,.)\|_\infty\sup_{N\geq 1}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}((\mu^{S,N}_t,1+|.|^{2\sigma})),$$
$$\leq\varrho C.$$

类似的论证可得（4.31）和（4.32）。 □

命题 4.24。对于所有 $T>0$,

$$\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}\|U^N_t\|^2_{-s,\sigma})<\infty, \tag{4.35}$$
$$\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}\|V^N_t\|^2_{-s,\sigma})<\infty, \tag{4.36}$$
$$\sup_{N\geq 1}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}\|W^N_t\|^2_{-s,\sigma})<\infty. \tag{4.37}$$

证明。 在方程 $u=0$ 中取值（4.27）、（4.28）和（4.29），可得

$$\|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2 \le 4\|\Upsilon_S^*(t)U_0^N\|_{-s,\sigma}^2+4t\int_0^t\Big\{\|\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^{I,N})^*U_r^N\|_{-s,\sigma}^2+\|\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^S)^*V_r^N\|_{-s,\sigma}^2\Big\}dr$$
$$+4\Big\|\int_0^t\Upsilon_S^*(t-r)d\widetilde{M}_r^N\Big\|_{-s,\sigma}^2,$$
$$\|V_t^N\|_{-s,\sigma}^2 \le 5\|\Upsilon_I^*(t)V_0^N\|_{-s,\sigma}^2+5t\int_0^t\Big\{\|\Upsilon_I^*(t-r)(G_r^{I,N})^*U_r^N\|_{-s,\sigma}^2+\|\Upsilon_I^*(t-r)G_r^SV_r^N\|_{-s,\sigma}^2\Big\}dr$$
$$+5t\alpha^2\int_0^t\|\Upsilon_I^*(t-r)V_r^N\|_{-s,\sigma}^2dr+5\Big\|\int_0^t\Upsilon_I^*(t-r)d\widetilde{L}_r^N\Big\|_{-s,\sigma}^2,$$
$$\|W_t^N\|_{-s,\sigma}^2 \le 2\alpha^2t\int_0^t\|\Upsilon_R^*(t-r)V_r^N\|_{-s,\sigma}^2dr+2\Big\|\int_u^t\Upsilon_R^*(t-r)d\widetilde{Y}_r^N\Big\|_{-s,\sigma}^2.$$

由推论 4.19 和 4.21，可得

$$\|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2 \le C4e^{Ct}\|U_0^N\|_{-s,\sigma}^2+4Cte^{Ct}\sup_y\|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}^2\int_0^t\{\|U_r^N\|_{-s,\sigma}^2+\|V_r^N\|_{-s,\sigma}^2\}dr$$
$$+4\Big\|\int_0^t\Upsilon_S^*(t-r)d\widetilde{M}_r^N\Big\|_{-s,\sigma}^2,$$
$$\|V_t^N\|_{-s,\sigma}^2 \le 5e^{Ct}\|V_0^N\|_{-s,\sigma}^2+5Cte^{Ct}(1+\alpha^2)\sup_x\|K(x,.)\|_{2+D,\sigma}^2\int_0^t\{\|U_r^N\|_{H^{-s}}+\|V_r^N\|_{-s,\sigma}^2\}dr$$
$$+5\Big\|\int_0^t\Upsilon_I^*(t-r)d\widetilde{L}_r^N\Big\|_{-s,\sigma}^2,$$
$$\|W_t^N\|_{-s,\sigma}^2 \le 2Ce^{Ct}\alpha^2t\int_0^t\|V_r^N\|_{-s,\sigma}^2dr+2\Big\|\int_0^t\Upsilon_R^*(t-r)d\widetilde{Y}_r^N\Big\|_{-s,\sigma}^2.$$

因此，由推论 4.6 和推论 4.21、引理 2.1 以及假设 (H3)，我们有

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2) \le 4e^{CT}\mathbb{E}(\|U_0^N\|_{-s,\sigma}^2)+4CTe^{CT}\int_0^T\Big\{\mathbb{E}(\sup_{0\le r\le t}\|U_r^N\|_{-s,\sigma}^2)+\mathbb{E}(\sup_{0\le r\le t}\|V_r^N\|_{-s,\sigma}^2)\Big\}dt$$
$$+CT, \tag{4.38}$$
$$\mathrm{E}(\sup_{0\le t\le T}\|V_t^N\|_{-s,\sigma}^2) \le 5e^{CT}\mathrm{E}(\|V_0^N\|_{-s,\sigma}^2)$$
$$+5TC(1+\alpha^2)e^{CT}\int_0^T\Big\{\mathbb{E}(\sup_{0\le r\le t}\|U_r^N\|_{-s,\sigma}^2)+\mathbb{E}(\sup_{0\le r\le t}\|V_r^N\|_{-s,\sigma}^2)\Big\}dt+CT, \tag{4.39}$$
$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\|W_t^N\|_{-s,\sigma}^2) \le 2\alpha^2Te^{CT}\int_0^T\Big\{\mathbb{E}(\sup_{0\le r\le t}\|W_r^N\|_{-s,\sigma}^2)+\mathbb{E}(\sup_{0\le r\le t}\|V_r^N\|_{-s,\sigma}^2)\Big\}dt+CT. \tag{4.40}$$

因此，将 (4.38)、(4.39) 和 (4.40) 相加，并应用格朗沃尔引理，即可由命题 4.9得出结论。□

4.3.3 定理 4.12的证明

我们先在本小节中证明以下结果。

命题 4.25。 过程序列 U^N、 V^N 和 W^N 在 $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+,H^{-s,\sigma})$ 中是紧的。

证明。 我们通过验证命题 U^N 满足命题 4.13 的条件，来证明其紧性。

– 根据命题4.24，我们通过与命题$(T1)$ 的证明中所用的相同论证，推出$(T1)$ 。4.14。

–(T2) 的证明。令 T>0, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 >0$, $(\tau^N)_N$ 为一族停时，且 $\tau^N \leq T$。我们有

$$\begin{aligned} U^N_{\tau^N+\varrho} - U^N_{\tau^N} &= (\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N} - \int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho} \Upsilon^*_S(\tau^N+\varrho-r)(G^{I,N}_r)^* U^N_r dr \\ &\quad - \int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho} \Upsilon^*_S(\tau^N+\varrho-r)(G^S_r)^* V^N_r dr + \int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho} \Upsilon^*_S(\tau^N+\varrho-r) d\widetilde{M}^N_r, \\ &= (\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N} - \int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho} \Upsilon^*_S(\tau^N+\varrho-r) J^{S,I,N}_r(U^N, V^N) dr \\ &\quad + \int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho} \Upsilon^*_S(\tau^N+\varrho-r) d\widetilde{M}^N_r, \end{aligned}$$

其中 $J^{S,}_{\ r}{}^{I\,N,}(U^N, V^N) = (G^{I,}_{\ r}{}^{N})^* U^N_r + (G^S_r)^* V^N_r$.

我们找到 $\delta > 0$ 和 $N_0 \geq 1$ ，使得:

$$\sup_{N\geq N_0}\sup_{\delta\geq\varrho} \mathbb{P}(\|(\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N}\|_{-s,\sigma} \geq \varepsilon_1) \leq \varepsilon_2, \tag{4.41}$$

$$\sup_{N\geq N_0}\sup_{\delta\geq\varrho} \mathbb{P}\left(\left\| \int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho} \Upsilon^*_S(\tau^N+\varrho-r) J^{S,I,N}_r(U^N, V^N) dr \right\|_{-s,\sigma} \geq \varepsilon_1 \right) \leq \varepsilon_2, \tag{4.42}$$

$$\sup_{N\geq N_0}\sup_{\delta\geq\varrho} \mathbb{P}\left(\left\| \int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho} \Upsilon^*_S(\tau^N+\varrho-r) d\widetilde{M}^N_r \right\|_{-s,\sigma} \geq \varepsilon_1 \right) \leq \varepsilon_2. \tag{4.43}$$

1– 证明 (4.41)。
在 $H^{s,\sigma}$ 中引入由函数 $(\varphi_p)_{p\geq 1}$, φ_p 组成的完备正交基，这些函数属于具有紧支撑的 C^∞ 类，而 $F_m (m \in \mathbf{N}^*)$ 表示由 $(\varphi_p)_{1\leq p\leq m}$ 生成的 $H^{s,\sigma}$ 子空间。令 $(\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_t\,|_{F_m}$ 表示 $(\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_t$ 在 F_m. 的对偶空间上的正交投影。我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|(\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N}\|_{-s,\sigma} \geq \varepsilon_1) &\leq \mathbb{P}(\|(\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N}\,|_{F_m}\,\|_{-s,\sigma} \geq \frac{\varepsilon_1}{2}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\|(\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N} - (\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N}\,|_{F_m}\,\|_{-s,\sigma} \geq \frac{\varepsilon_1}{2}) \end{aligned} \tag{4.44}$$

下面分别估计右侧各项。
–有

$$\mathbb{P}\Big(\|(\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N} - (\Upsilon^*_S(\varrho) - I_d)U^N_{\tau^N}\,|_{F_m}\,\|_{-s,\sigma} \geq \frac{\varepsilon_1}{2}\Big) \leq \frac{4}{\varepsilon_1^2}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\sum_{p>m}(U^N_t, (\Upsilon_S(\varrho) - I_d)\varphi_p)^2\Big). \tag{4.45}$$

此外，序列 $\Big(\sup_{1\leq N}\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq\varrho\leq\delta}\sum_{p>m}(U^N_t, (\Upsilon_S(\varrho) - I_d)\varphi_p)^2\Big)$ 当 $m \longrightarrow \infty$ 时趋于 0，因为它是一致收敛函数级数的 m 阶余项。因此存在一个与 N 和 ϱ 无关的 $m_0 \in \mathbf{N}^*$ ，使得对任意 $m \geq m_0$,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq\varrho\leq\delta}\sum_{p>m}(U^N_t, (\Upsilon_S(\varrho) - I_d)\varphi_p)^2 < \varepsilon, \text{ for any } \varepsilon > 0.$$

此外，上确界 $0\le t\le T$ 上确界 $\sum_{0\le\varrho\le\delta}\sum_{p>m}(U_t^N,\ (\Upsilon_S(\varrho)-I_d)\varphi_p)^2$ 有界于 $\max(Ce^{C\delta},\ 1)$ 上确界 $\|U_t^N\|^2_{-s,\ \sigma}$，因此一致可积（见命题 4.24）。由此可推得存在 $m_0\in\mathbb{N}^*$，其与 N 和 ϱ 无关，使得对任意 $m\ge m_0$,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}\sum_{p>m}(U_t^N,(\Upsilon_S(\varrho)-I_d)\varphi_p)^2\Big)<\varepsilon,\forall\varepsilon>0. \tag{4.46}$$

–有

$$\mathbb{P}(\|(\Upsilon_S^*(\varrho)-I_d)U_{\tau^N}^N\ |_{F_m}\ \|_{-s,\sigma}\ge\frac{\varepsilon_1}{2})\le\frac{4}{\varepsilon_1^2}\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\|(\Upsilon_S^*(\varrho)-I_d)U_t^N\ |_{F_m}\ \|^2_{-s,\sigma}). \tag{4.47}$$

此外，根据 Dynkin 公式以及 $\Upsilon_S(t)$ 的压缩性，有

$$\begin{aligned}\|(\Upsilon_S^*(\varrho)-I_d)U_t^N\ |_{F_m}\ \|^2_{-s,\sigma}&=\sum_{p=1}^m\Big((\Upsilon_S^*(\varrho)-I_d)U_t^N,\varphi_p\Big)^2,\\&=\sum_{p=1}^m\Big(U_t^N,(\Upsilon_S(\varrho)-I_d)\varphi_p\Big)^2,\\&=\sum_{p=1}^m\Big(U_t^N,\int_0^\varrho\Upsilon_S(r)\mathcal{Q}_S\varphi_p(.)dr\Big)^2,\\&\le\varrho\sup_{0\le t\le T}\|U_t^N\|^2_{-s,\sigma}\sum_{p=1}^m\int_0^\varrho\|\Upsilon_S(r)\mathcal{Q}_S\varphi_p\|^2_{s,\sigma}dr,\\&\le\varrho^2\sup_{0\le t\le T}\|U_t^N\|^2_{-s,\sigma}\sum_{p=1}^m\|\mathcal{Q}_S\varphi_p\|^2_{s,\sigma}.\end{aligned} \tag{4.48}$$

其中 $\mathcal{Q}_S$ 是算子 $\Upsilon_S(t)$ 的无穷小生成元。因此，根据假设（H2），存在 $C>0$ 使得

$$\sum_{p=1}^m\|\mathcal{Q}_S\varphi_p\|^2_{s,\sigma}\le\sum_{p=1}^m\|\mathcal{Q}_S\varphi_p\|^2_{2+D,\sigma}\le mC,$$

由式（4.47）和式（4.48），可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\|(\Upsilon_S^*(\varrho)-I_d)U_{\tau^N}^N\ |_{F_m}\ \|_{-s,\sigma}\ge\frac{\varepsilon_1}{2})\le\\&\le\frac{4mC\sup_{N\ge1}\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\|U_t^N\|^2_{-s,\sigma})}{\varepsilon_1^2}\varrho^2.\end{aligned} \tag{4.49}$$

因此，将式（4.49）与式（4.46）和式（4.44）结合，得到式（4.41）。

证明 (4.42)。令 $\ell>1$，我们找到 $\delta>0$ 使得 $\tau^N+\delta\le\ell T$ 并且使得 (4.42) 成立。由于 $\forall\varphi\in H^{s,\ \sigma}$，$\|\Upsilon(t)\varphi\|_{s,\ \sigma}\le Ce^{Ct}\|\varphi\|_{s,\ \sigma}$ 于是得到命题 4.24，根据推论 4.19，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\|\int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho}\Upsilon_S^*(\tau^N+\varrho-r)J_r^{S,I,N}(U^N,V^N)dr\right\|_{-s,\sigma}\geq\varepsilon_1\right)\leq\\
\leq\frac{1}{\varepsilon_1^2}\mathbb{E}\left(\left\|\int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho}\Upsilon_S^*(\tau^N+\varrho-r)J_r^{S,I,N}(U^N,V^N)dr\right\|_{-s,\sigma}^2\right),\\
\leq\frac{\varrho}{\varepsilon_1^2}\mathbb{E}\left(\int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho}\|\Upsilon_S^*(\tau^N+\varrho-r)J_r^{S,I,N}(U^N,V^N)\|_{-s,\sigma}^2dr\right),\\
\leq\frac{\varrho C}{\varepsilon_1^2}e^{C\ell T}\sup_y\|K(.,y)\|_{s,\sigma}\mathbb{E}\left(\int_{\tau^N}^{\tau^N+\varrho}\{\|U_r^N\|_{-s,\sigma}^2+\|V_r^N\|_{-s,\sigma}^2\}dr\right),\\
\leq\frac{\delta^2C}{\varepsilon_1^2}e^{\ell T}\sup_{N\geq1}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\ell T}\{\|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2+\sup_{0\leq t\leq\ell T}\|V_t^N\|_{-s,\sigma}^2\}),\\
\leq\frac{\delta^2C}{\varepsilon_1^2}.
\end{aligned}$$

因此 (4.42)得证。

- 证明 (4.43)。 令 $\ell>1$，我们找到 $\delta>0$ 使得 $\tau^N+\delta\leq\ell T$ 并且使得 (4.43) 成立。由命题 4.23，可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\|\int_{\tau^N}^{\tau^N+\theta}\Upsilon_S^*(\tau^N+\theta-r)d\widetilde{M}_r^N\right\|_{-s,\sigma}\geq\varepsilon_1\right)&\leq\frac{1}{\varepsilon_1^2}\mathbb{E}\left(\left\|\int_{\tau^N}^{\tau^N+\theta}\Upsilon_S^*(\tau^N+\theta-r)d\widetilde{M}_r^N\right\|_{-s,\sigma}^2\right),\\
&\leq\frac{C}{\varepsilon_1^2}\delta.
\end{aligned}$$

因此 (4.43)得证。

□

为了建立 $(U^N,V^N,W^N)_{N\geq1}$ 的所有收敛子列的极限方程组，我们需要下面的引理。

引理 4.26. 对于任意 $t\geq0$, $\varphi\in H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)$，当 $N\longrightarrow\infty$ 时，

$$\int_0^t\mathbb{E}\Big(\|[G_r^{I,N}-G_r^I]\Upsilon_S(t-r)\varphi\|_{s,\sigma}^2\Big)dt\longrightarrow0.$$

证明。 由于 $H^{s,\sigma}$ 是巴拿赫代数（见注 5.4），且 $H^{2+D,\sigma}\hookrightarrow H^{s,\sigma}$（因为 $s<2+D$），并且 $\|\Upsilon(t)\varphi\|_{s,\sigma}\leq Ce^{Ct}\|\varphi\|_{s,\sigma}$,

$$\Big\|\Upsilon(t-r)\varphi\Big(\mu_r^{I,N}-\mu_r^I,K\Big)\Big\|_{s,\sigma}\leq C\|\varphi\|_{s,\sigma}\Big\|\Big(\mu_r^{I,N}-\mu_r^I,K\Big)\Big\|_{2+D,\sigma}.$$

On the other hand

$$\Big\|\Big(\mu_r^{I,N}-\mu_r^I,K\Big)\Big\|_{2+D,\sigma}^2=\sum_{|\eta|\leq2+D}\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^{2\sigma})^{-1}\Big|\int_{\mathbb{R}^d}D^\eta K(x,y)(\mu_r^{I,N}-\mu_r^I)(dy)\Big|^2dx,$$

此外，由假设 (H2) 可知，映射 $y\in\mathbb{R}^d\mapsto D^\eta K(x,y)$ 是连续且有界的。因此，由定理 3.5 可推得

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d}D^\eta K(x,y)(\mu_r^{I,N}-\mu_r^I)(dy)\Big|^2\xrightarrow{P}0.$$

根据勒贝格控制收敛定理，$\mathbf{E}\Big(\Big\|\Big(\mu_r^{I,N}-\mu_r^I,K\Big)\Big\|_{2+D,\sigma}^2\Big)\longrightarrow0$,

当 $N \longrightarrow \infty$ 时。因此

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{E}\Big(\|[G_r^{I,N} - G_r^I]\Upsilon(t-r)\varphi\|_{2+D,\sigma}^2\Big)dt \\ \leq C\|\varphi\|_{s,\sigma}^2 \int_0^t \mathbb{E}\Big(\Big\|\Big(\mu_r^{I,N} - \mu_r^I, K\Big)\Big\|_{2+D,\sigma}^2\Big)dr \\ \longrightarrow 0, \text{ as } N \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

因此结论得证。 □

下一个命题将建立序列 (U^N, V^N, W^N) 的所有极限点 (U, V, W) 所满足的演化方程。

命题 4.27。 序列 (U^N, V^N, Z^N) 的所有极限点 (U, V, W) 满足

$$U_t = \Upsilon_S^*(t)U_0 - \int_0^t \Upsilon_S^*(t-r)(G_r^I)^* U_r dr - \int_0^t \Upsilon_S^*(t-r)(G_r^S)^* V_r dr + \int_0^t \Upsilon_S^*(t-r)d\mathcal{M}_r^1, \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}V_t = \Upsilon_I^*(t)V_0 + \int_0^t \Upsilon_I^*(t-r)(G_r^I)^* U_r dr + \int_0^t \Upsilon_I^*(t-r)(G_r^S)^* V_r dr - \alpha\int_0^t \Upsilon_I^*(t-r)V_r dr \\ + \int_0^t \Upsilon_I^*(t-r)d\mathcal{M}_r^2,\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$W_t = \alpha\int_0^t \Upsilon_R^*(t-r)V_r dr + \int_0^t \Upsilon_R^*(t-r)d\mathcal{M}_r^3. \tag{4.52}$$

证明。 我们通过在方程（4.27）、（4.28）和（4.29）中取弱极限来证明此命题。首先注意，根据命题 4.25，存在一个子序列，使得序列 $(U^N, V^N, W^N)_N$ 依分布收敛到 (U, V, W)。对于任意 $\varphi \in H^{s,\sigma}$，有

$$\begin{aligned}(\Upsilon_S^*(t)U_0^N, \varphi) + \int_0^t \big(\Upsilon_S^*(t-r)\varphi, d\widetilde{M}_r^N\big) = (U_t^N, \varphi) + \int_0^t (\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^I)^* U_r^N, \varphi)dr \\ + \int_0^t (\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^S)^* V_r^N, \varphi)dr + \int_0^t (\Upsilon_S^*(t-r)[(G_r^{I,N})^* - (G_r^I)^*]U_r^N, \varphi)dr,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Upsilon_I^*(t)V_0^N, \varphi) + \int_0^t \big(\Upsilon_I^*(t-r)\varphi, d\widetilde{L}_r^N\big) = (V_t^N, \varphi) - \int_0^t (\Upsilon_I^*(t-r)(G_r^I)^* U_r^N, \varphi)dr \\ - \int_0^t (\Upsilon(t-r)[(G_r^S)^* - \alpha]V_r^N, \varphi)dr - \int_0^t ([\Upsilon_I^*(t-r)(G_r^{I,N})^* - (G_r^I)^*]U_r^N, \varphi)dr,\end{aligned}$$

$$\int_0^t \big(\Upsilon_I^*(t-r)\varphi, d\widetilde{Y}_r^N\big) = (W_t^N, \varphi) + \alpha\int_0^t (\Upsilon_R^*(t-r)V_r^N, \varphi)dr. \tag{4.53}$$

因此，鉴于（4.53），只需证明 (U, V) 满足（4.50）和（4.51）。因此，我们有

,

$$\begin{aligned}(\Upsilon_S^*(t)U_0^N, \varphi) + \int_0^t \big(\Upsilon_S^*(t-r)\varphi, d\widetilde{M}_r^N\big) = \Psi_{1,t,\varphi}\big(U^N, V^N\big) \\ + \int_0^t ([\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^{I,N})^* - (G_r^I)^*]U_r^N, \varphi)dr,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Upsilon_I^*(t)V_0^N, \varphi) + \int_0^t \big(\Upsilon_I^*(t-r)\varphi, d\widetilde{L}_r^N\big) = \Psi_{2,t,\varphi}\big(U^N, V^N\big) \\ - \int_0^t ([\Upsilon_I^*(t-r)(G_r^{I,N})^* - (G_r^I)^*]U_r^N, \varphi)dr.\end{aligned}$$

With

$$\Psi_{1,t,\varphi}\big(U^N,V^N\big)=(U_t^N,\varphi)+\int_0^t(\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^I)^*U_r^N,\varphi)dr$$
$$+\int_0^t(\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^S)^*V_r^N,\varphi)dr,$$
$$\Psi_{2,t,\varphi}\big(U^N,V^N\big)=(V_t^N,\varphi)-\int_0^t(\Upsilon_I^*(t-r)(G_r^I)^*U_r^N,\varphi)dr$$
$$-\int_0^t(\Upsilon_I^*(t-r)[(G_r^S)^*-\alpha]V_r^N,\varphi)dr.$$

1– 根据引理 4.26 和命题 4.24，$\int_0^t\big(U_r^N,\ [G_r^{I,N}-G_r^I]\Upsilon(t-r)\varphi\big)\,dr\longrightarrow 0$ 在 $L^1(\mathbb{P})$，关于 t 局部一致。

Indeed, $\mathbb{E}\left(\Big|\sup_{0\le t\le T}\int_0^t\big(U_r^N,[G_r^{I,N}-G_r^I]\Upsilon(t-r)\varphi\big)\,dr\Big|\right)\le$

$$\le\sqrt{T}\sup_{N\ge1}\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\|U_t^N\|_{-s,\sigma}^2)^{\frac12}\Big[\int_0^T\mathbb{E}(\|[G_r^{I,N}-G_r^I]\Upsilon(t-r)\varphi\|_{s,\sigma}^2)dr\Big]^{\frac12}.$$

2- 利用命题 4.16 中的（4.18），容易看出映射 $(\Psi_{1,.,\varphi},\Psi_{2,.,\varphi})$ 是从 $[\mathbf{D}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma})]^2$ 到 $\mathbf{C}(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}^2)$ 的连续映射。因此，当 (U^N,V^N) 在 $[\mathbf{D}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma})]^2$ 中依分布收敛到 (U,V) 时，则 $\Big(\Psi_{1,.,\varphi}(U^N,V^N)\ \Psi_{2,.,\varphi}(U^N,V^N)\Big)$ 依分布收敛到 $\Big(\Psi_{1,.,\varphi}(U,V)\ \Psi_{2,.,\varphi}(U,V)\ \Big)$.

3- $\Big((\Upsilon_S^*(.)U_0^N,\varphi)+\int_0^\cdot(\Upsilon_S^*(.-r)\varphi,d\widetilde{M}_r^N),(\Upsilon_I^*(.)V_0^N,\varphi)+\int_0^\cdot(\Upsilon_I^*(.-r)\varphi,d\widetilde{L}_r^N)\Big)$ 依分布收敛到 $\Big((\Upsilon_S^*(.)U_0,\varphi)+\int_0^\cdot(\Upsilon_S^*(.-r)\varphi,d\mathcal{M}_r^1),(\Upsilon_I^*(.)V_0,\varphi)+\int_0^\cdot(\Upsilon_I^*(.-r)\varphi,d\mathcal{M}_r^2)\Big)$ 在 $(\mathbf{D}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma}))^2$ 中，因为 $\Big((\Upsilon_S^*(.)U_0^N,\varphi),(\Upsilon_I^*(.)V_0^N,\varphi)\int_0^\cdot(\Upsilon_S^*(.-r)\varphi,d\widetilde{M}_r^N),\int_0^\cdot(\Upsilon_I^*(.-r)\varphi,d\widetilde{L}_r^N)\Big)$ 在 $(\mathbf{C}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma}))^2\times(\mathbf{D}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma}))^2$，中依分布收敛到 $\Big((\Upsilon_S^*(.)U_0,\varphi),(\Upsilon_I^*(.)V_0,\varphi)\int_0^\cdot(\Upsilon_S^*(.-r)\varphi,d\mathcal{M}_r^1),\int_0^\cdot(\Upsilon_I^*(.-r)\varphi,d\mathcal{M}_r^2)\Big)$；这又是由以下事实得出的：$\Big((\Upsilon_S^*(.)U_0^N,\varphi),(\Upsilon_I^*(.)V_0^N,\varphi)\Big)$ 在 $(\mathbf{C}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma}))^2$中依分布收敛到 $\Big((\Upsilon_S^*(.)U_0,\varphi),(\Upsilon_I^*(.)V_0,\varphi)\Big)$（见注 4.10），且 $\Big(\int_0^\cdot(\Upsilon_S^*(.-r)\varphi,d\widetilde{M}_r^N),\int_0^\cdot(\Upsilon_I^*(.-r)\varphi,d\widetilde{L}_r^N)\Big)$ 在 $(\mathbf{D}(\mathbf{R}_+,H^{-s,\sigma}))^2$中依分布收敛到 $\Big(\int_0^\cdot(\Upsilon_S^*(.-r)\varphi,dW_r^1),\int_0^\cdot(\Upsilon_I^*(.-r)\varphi,dW_r^2)\Big)$（这由命题 4.17 得出），并且 $\Big((\Upsilon_S^*(.)U_0^N,\varphi),(\Upsilon_I^*(.)V_0^N,\varphi)\Big)$ 与 $\Big(\int_0^\cdot(\Upsilon_S^*(.-r)\varphi,d\widetilde{M}_r^N),\int_0^\cdot(\Upsilon_I^*(.-r)\varphi,d\widetilde{L}_r^N)\Big)$ 整体独立。

因此，根据 1、2 和 3，我们得到了该陈述的结论。 □

由命题 4.16 可知，$(U^N,V^N,W_N)_{N\ge1}$的所有极限点 (U,V,W) 都属于 $(\mathbf{C}(\mathbf{R}_+,H^{-s}))^3$,。因此，我们只需证明方程组 (4.50)、(4.51) 和 (4.52) 存在唯一解 $(U,V,W)\in(\mathbf{C}(\mathbf{R}_+,H^{-s}))^3$，即可完成定理 4.12 的证明。

命题 4.28. 假设 (U^1,V^1,W^1) 和 (U^2,V^2,W^2) 是方程 (4.50)、(4.51) 和 (4.52) 的解，且 $(U_0^1,V_0^1)=(U_0^2,V_0^2)$，则 $(U^1,V^1,W^1)=(U^2,V^2,W^2)$。

证明。我们只需证明方程组 (4.50) 和 (4.51) 有唯一解。因此，我们有

$$U_t^1 - U_t^2 = -\int_0^t \Upsilon_S^*(t-r)(G_r^I)^*(U_r^1 - U_r^2)dr - \int_0^t \Upsilon_S^*(t-r)(G_r^S)^*(V_r^1 - V_r^2)dr,$$

Hence

$$\|U_t^1 - U_t^2\|_{H^{-s}} \leq \int_0^t \|\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^I)^*(U_r^1 - U_r^2)\|_{-s,\sigma}dr + \int_0^t \|\Upsilon_S^*(t-r)(G_r^S)^*(V_r^1 - V_r^2)\|_{-s,\sigma}dr.$$

因此，由推论 4.19，我们可推得

$$\|U_t^1 - U_t^2\|_{-s,\sigma} \leq C\sup_y \|K(.,y)\|_{2+D,\sigma}\int_0^t \{\|U_r^1 - U_r^2\|_{-s,\sigma} + \|V_r^1 - V_r^2\|_{-s,\sigma}\}dr. \tag{4.54}$$

类似地，我们得到

$$\|V_t^1 - V_t^2\|_{-s,\sigma} \leq C(\sup_x \|K(x,.)\|_{2+D,\sigma} + \alpha)\int_0^t \{\|U_r^1 - U_r^2\|_{-s,\sigma} + \|V_r^1 - V_r^2\|_{-s,\sigma}\}dr. \tag{4.55}$$

将 (4.54)、(4.55) 相加并应用格朗沃尔引理，我们得到 $(U^1, V^1) = (U^2, V^2)$，证明完毕。

□

5 附录

在本附录中，我们证明以下引理。

引理 5.1. 对于任意非负整数 $m_1 > m_2 \geq 0$ 和任意实数 $0 < \sigma < \sigma'$，以下嵌入是紧的

$$W_0^{m_1,\sigma}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W_0^{m_2,\sigma'}(\mathbb{R}^d).$$

证明。 要证明此引理，只需证明对于任意在 $W^{m_1,\sigma}_0(\mathbb{R}^d)$ 中弱收敛到 0 的序列 $(\varphi_n)_n$，其中元素属于 $W^{m_1,\sigma}_0(\mathbb{R}^d)$，该序列在 $W^{m_2,\sigma'}_0(\mathbb{R}^d)$ 中强收敛。

令 $\overline{B}(R) = \{x \in \mathbb{R}^d / |x| \leq R\}$ 一个 has:

$$\|\varphi_n\|^2_{m_2,\sigma'} = \sum_{|\gamma|\leq m_2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|D^\gamma\varphi_n(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma'}}dx = \sum_{|\gamma|\leq m_2}\int_{\overline{B}(R)}\frac{|D^\gamma\varphi_n(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma'}}dx + \sum_{|\gamma|\leq m_2}\int_{\overline{B}^c(R)}\frac{|D^\gamma\varphi_n(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma'}}dx,$$

此外，由于函数 $R \in]1,\infty[\mapsto \frac{1+R^{2\sigma}}{1+R^{2\sigma'}}$ 是非增的，

$$\begin{aligned}\sum_{|\gamma|\leq m_2}\int_{\overline{B}^c(R)}\frac{|D^\gamma\varphi_n(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma'}}dx &= \sum_{|\gamma|\leq m_2}\int_{\overline{B}^c(R)}\frac{1+|x|^{2\sigma}}{1+|x|^{2\sigma'}}\frac{|D^\gamma\varphi_n(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx,\\ &\leq \frac{1+R^{2\sigma}}{1+R^{2\sigma'}}\sum_{|\gamma|\leq m_2}\int_{\overline{B}^c(R)}\frac{|D^\gamma\varphi_n(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma}}dx,\\ &\leq \frac{1+R^{2\sigma}}{1+R^{2\sigma'}}\sup_{n\geq 1}\|\varphi_n\|^2_{m_1,\sigma} \underset{R\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

另一方面，由于 $W^{m_1,\sigma}_0(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{m_1,\sigma'}_0(\overline{B}(R)) \hookrightarrow W^{m_2,\sigma'}_0(\overline{B}(R))$，且第二个嵌入是紧的，因此 $W^{m_1,\sigma}_0(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{m_2,\sigma'}_0(\overline{B}(R))$ 是紧的（见 [1] 中的注6.3）。因此

$$\sum_{|\gamma|\leq m_2}\int_{\overline{B}(R)}\frac{|D^\gamma\varphi_n(x)|^2}{1+|x|^{2\sigma'}}dx \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

推论 5.2。 对于任意非整数 $1+D<s<2+D$ 和 $1+D<s'=\frac{s+1+D}{2}<s<2+D$以及任意 $0<\sigma<\sigma'$， 下面的嵌入是紧的。

$$H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow H^{s',\sigma'}(\mathbb{R}^d).$$

证明。 我们利用空间 $H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)$ 的插值定义来证明这一结果。我们对 $d=2$ 证明这一结果; 类似的论证可得到其他 d 取值下的结果。由于 $2<s'=\frac{s+2}{2}<s<3$， 存在 $\rho\in(1/2,1)$, 使得 $s'=3(1-\rho)+2\rho$ 并且$s=4(1-\rho)+2\rho$. 此外,

$$\left(W_0^{3,\sigma'}(\mathbb{R}^2),W_0^{2,\sigma'}(\mathbb{R}^2)\right)_{\rho,2}=H^{s',\sigma'}(\mathbb{R}^2)\text{ and }\left(W_0^{4,\sigma}(\mathbb{R}^2),W_0^{2,\sigma}(\mathbb{R}^2)\right)_{\rho,2}=H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^2),$$

参见[23] 或 [37] 以了解实插值空间 $(.,.)_\rho$的显式定义， q.
因此，由引理 5.1 可知，嵌入 $W_0^{\sigma}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow W_\sigma^{3,\prime}$ $_0(\mathbb{R}^2)$是紧的，因此由[12]中的推论 3.5 可知，以下嵌入是紧的。

$$H^{s,\sigma}(\mathbb{R}^d)=\left(W_0^{4,\sigma}(\mathbb{R}^2),W_0^{2,\sigma}(\mathbb{R}^2)\right)_{\rho,2}\hookrightarrow\left(W_0^{3,\sigma'}(\mathbb{R}^2),W_0^{2,\sigma'}(\mathbb{R}^2)\right)_{\rho,2}=H^{s,\sigma'}(\mathbb{R}^2).$$

□

引理 5.3。 在假设 *(H2)* 下，对于任意 $A\in\{S,I,R\}$， 由算子 $\mathcal{Q}_A$生成的马尔可夫半群， 存在一个常数 $C>0$, 使得

$$\sup_y\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\Upsilon_A(t)(x,y)dx\Big)\le e^{Ct}.$$

证明。 回顾一下， $\{X_t^A,t\ge\}$ 是以算子 $\mathcal{Q}_A$ 为无穷小生成元的马尔可夫过程。令 $P_A(t)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}\Upsilon_A(t)(x,y)dx$，利用 Dynkin 公式，容易看出

$$\Upsilon_A(t)(x,y)=\delta_0(x-y)+\int_0^t(\mathcal{Q}_A)_y^*\Upsilon_A(r)(x,y)dr,\tag{5.1}$$

因此，对 x 上的 (5.1) 积分， 可得

$$P_A(t)(y)=1+\int_0^t(\mathcal{Q}_A)_y^*P_A(r)(y)dr.$$

Furthermore,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P_A(t)(y)=&-\sum_{1\le\ell\le d}m_\ell(A,y)\frac{\partial}{\partial y_\ell}P_A(t)(y)+\frac{1}{2}\sum_{1\le\ell,u\le d}\frac{\partial}{\partial y_\ell}(\theta\theta^t)_{\ell,u}(A,y)\frac{\partial}{\partial y_u}P_A(t)(y)\\&+\frac{1}{2}\sum_{1\le\ell,u\le d}\frac{\partial}{\partial y_u}(\theta\theta^t)_{\ell,u}(A,y)\frac{\partial}{\partial y_\ell}P_A(t)(y)\\&+\frac{1}{2}\sum_{1\le\ell,u\le 2}(\theta\theta^t)_{\ell,u}(A,y)\frac{\partial^2}{\partial y_uy_\ell}P_A(t)(y)\\&+\Big[-\sum_{1\le\ell\le d}\frac{\partial}{\partial y_\ell}m_l(A,y)+\frac{1}{2}\sum_{1\le\ell,u\le d}\frac{\partial^2}{\partial y_u\partial y_\ell}(\theta\theta^t)_{\ell,u}(A,y)\Big]P_A(t)(y).\end{aligned}$$

因此， $P_A(t)$ 是以下系统的解。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P_A(t)(y)&=\sum_\ell F_\ell^{m,\theta}(A,y)\frac{\partial}{\partial y_\ell}P_A(t)(y)+\frac{1}{2}\sum_{1\le\ell,u\le d}(\theta\theta^t)_{\ell,u}(A,y)\frac{\partial^2}{\partial y_uy_\ell}P_A(t)(y)\\&\quad+H(A,y)P_A(t)(y)\\&=\mathcal{G}_AP_A(t)(y)+H(A,y)P_A(t)(y)\end{aligned}$$

$P_A(0)(y)=1.$

因此固定 $T > 0$，根据 Feynman–Kac公式，对于任意 $t \in [0, T]$，有

$$P_A(t)(y) = P_A(T - t_1)(y) = \mathbb{E}\Big(exp\Big(- \int_{t_1}^{T} H(A, Y_r)dr\Big)/Y_{t_1} = y\Big), \text{ (with } t + t_1 = T).$$

其中，$\{Y_t, t \geq 0\}$ 是以 $\mathcal{G}_A$ 为无穷小生成元的马尔可夫过程。因此，根据假设 (H2)，函数 H 有界；对于任意 $y \in \mathbb{R}^d$，我们有

$$P_A(t)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Upsilon_A(t)(x, y)dx \leq e^{Ct}.$$

. □

注释 5.4. 由于可以毫无困难地将 *[1]* 中的定理*5.4*的证明推广到空间 $W^{m,}{}_0{}^{\sigma}\ (m \in \mathbb{N})$，通过沿用 *[1],* 中的定理*5.23*的证明，我们很容易证明，对于任意整数 $m > d/2$，空间 $W^{m,}{}_0{}^{\sigma}$ 是一个巴拿赫代数。此外，利用 *[22]*（定理*4*）和 *[10]*（小节*10.2*）关于复插值的结果，我们得出，对于任意实数 $s > d/2$，空间 $H^{s,\sigma}$ 是一个巴拿赫代数。

参考文献

[1] R.A. Adams. *Sobolev*空间。Academic Press，1975。

[2] D. Aldous 。停时与紧性。《概率年刊》6(2), 335-340, 197 8

[3] L.J.S. Allen, B.M Bolker, Y. Lou 和 A.L. Nevai 稳态的渐近轮廓：针对 SIS流行病反应扩散模型，*Discrete Contin. Dyn. Syst.* Ser. A 21, 1-20, 2008年。

[4]H. Andersson, T. Britton。随机流行病模型及其统计分析。Springer统计学讲义。Springer，纽约，2000年。

[5] H. Bahouri, J. Y. Chemin 和 R. Danchin。傅里叶分析与非线性偏微分方程，Springer，2011年。

[6] P. Billingsley，概率测度的收敛，第2版。Wiley，纽约，1999年。

[7] S. Bowong、A. Emakoua 和 E Pardoux。《连续空间中的随机流行病模型：大数定律与中心极限定理》。arXiv:2007.0663v1. [math.PR] 13 2020年7月

[8]T. Britton、E. Pardoux。《同质社区中的随机流行病》，载于《带有推断的随机流行病模型》第一部分。T. Britton、E. Pardoux 编，《数学讲义》**2225**，第 1–120 页，Springer，2019 年。

[9] A. Bücher 和 I. Kojadinovic，《关于自助法一致性结果中条件弱收敛与联合无条件弱收敛的说明》，arXiv:1706.01031v4 [math.ST] 1 2018年3月。

[10] A. P. Calderón。《中间空间与插值：复方法》。Studia Math. 24, 113-190 (1964)。

[11] S. Clémençon、V.C. Tran 和 H. de Arazoza. 带接触者追踪的随机SIR模型：大种群极限与统计推断，*J. of Biol. Dynamics***2:4**，第 392–414 页，2008年。

[12] F. Cobos 和 J. Peetre. 利用 Aronszajn-Gagliardo函子进行紧性插值? 《以色列数学杂志》68 (1989), 220-240.[13] I. Gihman, A. V. Skorohod. 随机微分方程. 施普林格出版社 柏林 纽约 1972年.[14] L. Grafakos. 经典傅里叶分析，第 2 版. Springer, 2008年.[15] B. Hanouzet. 带权索伯列夫空间. 半空间中的狄利克雷问题的应用. 帕多瓦大学数学研讨会报告, 第 46 卷 (1971 年), 第 227-272 页 .[16] J. Jacod 和 A.N. Shiryaev. 随机过程极限定理 . 施普林格出版社, 柏林, 1987年.[17] I. Kaj. 扩散粒子间的弱相互作用流行病，载于《随机偏微分方程》，A. Etheridge 编，伦敦数学会讲义系列 216，第 189–208 页，剑桥大学出版社，1995年.[18] C. Kipnis 和 C. Landim. 相互作用粒子系统的标度极限，数学科学基础丛书第 320 卷 /数学科学基本原理/. Springer-Verlag，柏林，1999年.[19] P. Kotelenez，随机卷积积分和随机演化方程的停止型杜布不等式，《随机分析与应用》，2(3)，245-265，1984年.[20] H. Kunita. 随机流与随机微分方程. 剑桥大学出版社，剑桥，1990年.[21] S.P. Lalley, E.A. Perkins 和 X. Zheng. 测度值SIR流行病过程的相变，《概率年刊》42，第 237–310 页，2014年.[22] J. Löfström. R^d. 《纯粹与应用数学年刊》132 (1982年), 189?214. 上可微函数的加权空间插值.[23] J. Löfström. 插值空间导论，Springer，1976年.[24] S. Méléard. 与玻尔兹曼方程相关的带跳跃相互作用扩散过程的涨落收敛. 《随机学与随机学报告》，63：195-225，1998年.[25] S. Méléard 和 S. Roelly：测度值过程的窄收敛或模糊收敛. 巴黎科学院院报，丛刊 1，317:785-788，1993年.[26] S. Méléard. 布朗运动与随机演算，工程师技术，(2003).[27] M. Métivier. 索伯列夫空间中取值的鞅的弱收敛与不变性原理. 高等科学研究所年刊，20(4)：329-348，1984年.[28] M. Métivier. (1987). 利用索伯列夫嵌入技巧的测度值过程弱收敛，《随机偏微分方程会议论文集》，特伦托 1985年。《数学讲义》1236. 172-183.[29] M. N’zi、É. Pardoux 和 T. Yeo. 细化空间网格上的 SIR 模型 I——大数定律，《应用数学与优化》，即将发表.[30] E. Pardoux. 种群演化的概率模型：标度极限、谱系与相互作用，Springer，2016年。

[31] E. Pardoux。《中等偏差与流行病消亡》。《*Election. J. Probab* **25**》，第25篇，1-27页，2020年。[32] S. Roelly-Coppoletta。测度值过程收敛的判据：在测度分枝过程中的应用。《随机过程》，17：43-65，1985年。[33] L. Roques、O. Bonnefon、V. Baudrot、S. Soubeyrand、H. Berestycki：COVID-19传播中空间传播与异质性的简约模型。《*R. Soc.Open Sci.* 》7：201382，2020年。[34] W. Rudin：《实分析与复分析》，第3版。McGraw-Hill，纽约（1987年）。[35] k. Sato 和 T. Ueno。多维扩散与边界上的马尔可夫过程。《京都大学数学杂志》4(3)，529-605。[36] M.E. Taylor。《偏微分方程 *III*：非线性方程》。Springer，1991年。[37] H. Triebel，《插值理论、函数空间、微分算子》，*North-HollandPublishing Comp.*，1978年。[38] V.C. Tran，《适应性演化问题的随机粒子模型及统计解的近似》，博士论文，2006年。