时空行列式点过程

Nafiseh Vafaei

计算机与统计科学系，理学院，University of Mohaghegh Ardabili，阿尔达比勒，伊朗 电子邮箱：N.Vafaei@uma.ac.ir**Mohammad Ghorbani**[1]工程科学与数学系，吕勒奥理工大学，瑞典 电子邮箱：mohammad.ghorbani@ltu.se

Masoud Ganji

计算机与统计科学系，理学院，University of Mohaghegh Ardabili，阿尔达比勒，伊朗 电子邮箱：mganji@uma.ac.ir

Mari Myllymäki

芬兰自然资源研究所（Luke），芬兰赫尔辛基。电子邮件：mari.myllymaki@luke.fi

arXiv:2301.02353v1 [math.ST] 6 Jan 2023

摘要

行列式点过程是描述规则空间点模式的模型，具有令人瞩目的概率性质。我们介绍其时空对应过程，并举例说明这些模型，包括基于空间与时间可分离和不可分离的时空协方差函数的模型。

关键词： 协方差函数；点过程；规则性；时空；谱密度

1 引言

时空点过程是$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$中的随机可数子集$X$，其中点（$u$，$t$）$\in X$对应于在时间$t \in \mathbb{R}^+$发生的事件$u \in \mathbb{R}^2$。我们假设各点互不重叠，即（$u_1, t_1$）$\neq$（$u_2$,$t_2$）。这类事件的例子包括流行病（如新冠或流感）的发生、某个物种的目击记录或出生事件，以及火灾、地震、海啸或火山喷发的发生。本文关注时空规则点过程，其中过程内的邻近点往往彼此排斥。

在空间点过程的背景下，吉布斯点过程（包括马尔可夫点过程和成对相互作用点过程模型）通常用于刻画排斥性。另一类规则空间点过程模型是行列式点过程（DPPs），它们

[1]通讯作者

起源于量子物理学。最初由Macchi （1975年）将其识别为一类过程，并称之为费米子过程，因为它们反映了处于热平衡状态且表现出排斥行为的费米子系统的分布。行列式点过程在概率论中得到了广泛研究，并已应用于随机矩阵理论、量子物理学、无线网络建模、蒙特卡罗积分和机器学习等领域（例如参见Lavancier 等人；2015年）。近期，Lavancier 等人（2015年）研究了行列式点过程的统计性质。

一些规则空间点过程模型已经有了相应的时空对应过程，但基于似然的推断或模拟通常复杂且耗时。为克服这些挑战，我们在此旨在介绍时空行列式点过程（时空决定点过程），并研究其性质；根据 Lavancier 等人 (2015年, 第 875–876 页），这是一个尚未解决的问题。我们介绍这些过程的基本性质，并基于可分离和不可分离时空协方差函数给出相关示例。我们推导出这些示例的关键汇总特征，可用于模型拟合和评估等用途。

2 基本概念与统计性质

设 X 是一个时空点过程，其 n 阶乘积密度为 $\rho^{(n)}$，$n \geq 1$，用于描述 n 个点可能构型出现的频率。假设 $B_1, \ldots, B_n$是两两不相交的柱状区域，其无穷小体积分别为 $dV_1, \ldots, dV_n$，并分别包含点 $((u_1, t_1), \ldots, (u_n, t_n))$。那么，$\rho^{(n)}((u_1, t_1), \ldots, (u_n, t_n))dV_1, \ldots dV_n$ 表示 X 在每个 $B_1, \ldots, B_n$ 中各有一个点的概率。

定义1. 设 C 是一个从 $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+) \times (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ 到 $\mathbb{R}$ 的核函数。若时空点过程 X 是核函数为 C 的行列式点过程，记作 $X \sim$ 时空决定点过程(C)，且其 n 阶乘积密度函数为

$$\rho^{(n)}((u_1, t_1), \ldots, (u_n, t_n)) = \det\{C((u_i, t_i), (u_j, t_j))\}_{1 \leq i, j \leq n},$$

对于 $(u_i, t_i) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$ 且 $n = 1, 2, \ldots$，其中 $\{C((u_i, t_i), (u_j, t_j))\}_{1 \leq i, j \leq n}$是一个 $n \times n$ 矩阵，其第(i, j)个元素为 $C((u_i, t_i), (u_j, t_j))$，而 $\det\{A\}$ 是矩阵 A 的行列式。

若对于每个 n，$\rho^{(n)}((u_1, t_1), \cdots, (u_n, t_n)) \geq 0$对所有 $\{(u_i, t_i)\}_{i=1}^n$ 均成立，则点过程 X 定义良好。这意味着，在定义1中，$C = \{C((u_i, t_i), (u_j, t_j))\}_{1 \leq i, j \leq n}$应为非负定矩阵。那么，矩阵 C 的所有特征值均非负，因此其行列式也非负（这是因为矩阵的行列式等于其特征值的乘积）（Radhakrishna Rao 和 Bhaskara Rao； 1998 ）。因此，协方差函数可以作为核函数 C 的候选。将 C 的特征值记为 $\lambda_l (l = 1, 2, \ldots)$，时空决定点过程 (C) 存在的另一个条件是 $\lambda_l \leq 1 (l = 1, 2, \ldots)$。这是从空间情形直接推广而来，详情参见 Lavancier 等人（2015年）及其中的参考文献。强度为 $\rho(u, s)$ 的泊松过程是时空决定点过程(C) 的一个特例，其设定为 $C((u, s), (u, s)) = \rho(u, s)$，且当 $u \neq v$ 或 $s \neq t$ 时，$C((u, s), (v, t)) = 0$。

根据定义 1，可以轻松得到 STDPPs 的任意阶矩特征 $n (n \geq 1)$，例如，强度函数为 $\rho(u, t) = C((u, t), (u, t))$，而二阶乘积

密度为

$$\rho^{(2)}((u_1,t_1),(u_2,t_2)) = C((u_1,t_1),(u_1,t_1))\,C((u_2,t_2),(u_2,t_2)) - C((u_1,t_1),(u_2,t_2))C((u_1,t_1),(u_2,t_2)).$$

下文假设核函数具有如下形式

$$C((u_1,t_1),(u_2,t_2)) = \sqrt{\rho(u_1,t_1)}R\Big((u_1,t_1)/\alpha_s,(u_2,t_2)/\alpha_t\Big)\sqrt{\rho(u_2,t_2)},$$

其中， ρ 在过程中起到强度函数的作用， $\alpha_s > 0$ 和 $\alpha_t > 0$ 分别为空间和时间相关参数，而$R(\cdot)$是与C对应的相关函数。于是，（非齐次时空）对相关函数为

$$g((u_1,t_1),(u_2,t_2)) = \frac{\rho^{(2)}((u_1,t_1),(u_2,t_2))}{\rho(u_1,t_1)\rho(u_2,t_2)} = 1 - \Big|R\Big((u_1,t_1)/\alpha_s,(u_2,t_2)/\alpha_t\Big)\Big|^2 \le 1. \tag{1}$$

由于$g \le 1$，X中的点彼此排斥，这是规则点模式的特征。

一般而言，如果时空对相关函数是空间差 $\mathrm{u} = \mathrm{u}_2 - \mathrm{u}_1$ 和时间差 $\mathrm{t} = \mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1$ 的函数，则称 STDPP 为二阶强度重加权平稳（SOIRS）（参见 Ghorbani；2013年及其中的参考文献）。因此，核函数为 C 的 STDPP 是 SOIRS，当且仅当相关函数 R 仅为 u 和 r 的函数，即对于某个函数 R_0，R 具有如下形式：$\mathrm{R}((\mathrm{u}_1,\mathrm{t}_1),(\mathrm{u}_2,\mathrm{t}_2)) = \mathrm{R}_0(\mathrm{u},\mathrm{t})$。对于 SOIRS STDPP(C)，$\mathrm{R}_0(0,0) = 1$，因此$\rho(\mathrm{u},\mathrm{t}) = \mathrm{C}(0,0)$。此外，如果相关函数 R_0 在旋转下保持不变，即具有各向同性，那么它和对相关函数 (1) 都只取决于空间距离 $\|\mathrm{u}\|$ 和时间滞后 $|\mathrm{t}|$。此时，对相关函数为

$$g(u,t) = 1 - \Big|R_0(\|u\|/\alpha_s,|t|/\alpha_t)\Big|^2. \tag{2}$$

此外，时空K-函数（例如参见Gabriel 和 Diggle；2009年；Møller 和 Ghorbani；2012年）定义为

$$K(u,t) = 2\pi\int_0^t\int_0^u g(u',t')u'\mathrm{d}u'\mathrm{d}t' = \pi u^2 t - \int_0^u\int_0^t |R_0(\|u'\|/\alpha_s,|t'|/\alpha_t)|^2 u'\mathrm{d}u'\mathrm{d}t'. \tag{3}$$

如果强度 ρ 为常数，即 $\rho(u,\ t) = \rho$，那么该过程是平稳的，并且在各向同性假设下，相应的平稳时空g-和K-函数具有相同的公式（2）和（3）。

3 时空行列式点过程示例

第 3.1 节回顾协方差函数与其谱密度之间的关系。接着，在第 3.2 节和3.3节中，利用正有限测度（即谱测度）的傅里叶变换来

构造平稳时空协方差函数，并推导具有这些核函数的时空确定性点过程的特征。

3.1 协方差函数及其谱密度

平稳过程的协方差函数可以表示为一个正有限测度的傅里叶变换。根据维纳–辛钦定理（例如参见 Rasmussen 和 Williams；2006），如果谱密度函数 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 存在，则协方差函数 $C(\cdot,\cdot)$ 与谱密度 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 互为傅里叶对偶，满足

$$\begin{aligned} C(u,t) &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{2\pi i(\omega^T u+\tau t)}\varphi(\omega,\tau)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau, \\ \varphi(\omega,\tau) &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-2\pi i(\omega^T u+\tau t)}C(u,t)\mathrm{d}u\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4}$$

其中T表示转置， ω 是d维空间分量， τ 是时间分量。

在$C(u,t)$连续且平稳的条件下，将 Lavancier 等人（2015年）中的命题 3.1 直接推广到时空情境；当$C(u,t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$时，若相应的谱密度满足下式，则存在一个核函数为$C$的时空决定点过程

$$\varphi(\omega,\tau) \le 1. \tag{5}$$

3.2 可分离时空协方差函数

一类可分离时空协方差函数通常定义为

$$C_0(u,t) \propto C_0^s(u)C_0^t(t), \tag{6}$$

当空间协方差函数 $C_0^s(u)$ 和时间协方差函数 $C_t0(t)$ 均为有效协方差函数时，该函数有效（即为正定函数）。对于一类可分离协方差函数，其谱密度 $\varphi(\omega,\tau)$ 也具有可分离形式，即

$$\varphi(\omega,\tau) \propto \left[\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\omega^T u}C_0^s(u)\mathrm{d}u\right] \times \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\tau t}C_0^t(t)\mathrm{d}t\right] = \varphi_0^s(\omega)\varphi_0^t(\tau),$$

其中 $\varphi_0^s(\omega)$ 和 $\varphi_0^t(\tau)$ 分别为空间谱密度和时间谱密度。根据（5），要使具有核函数（ $\varphi_0^s(\omega)\varphi_0^t(\tau) < 1$ 的时空决定点过程（STDPP ）存在，必须满足该条件。进一步，对于这一类过程，成对相关函数具有以下简单形式

$$g(u,t) = 1 - |R_0^s(\|u\|/\alpha_s)|^2|R_0^t(|t|/\alpha_t)|^2,$$

其中，R_0^s和R_0^t分别是与C_0^s和C_0^t相对应的空间和时间相关函数。因此，根据（3），相应的K函数为

$$K(u,t) = \pi u^2 t - \int_0^u u'|R_0^s(u'/\alpha_s)|^2\mathrm{d}u' \int_0^t |R_0^t(t'/\alpha_t)|^2\mathrm{d}t'.$$

文献中有许多有效空间协方差函数和有效时间协方差函数类别，例如 Matérn、幂指数和高斯类别，等等（参见 Cressie 和 Wikle，2011年）。作为一个例子，我们考虑高斯协方差函数 $C_0^s(u) = \rho\sigma_s^2 \exp(-\|u\|^2/\alpha_s)$，$u \in \mathbb{R}^2$，其谱密度为 $\varphi_0^s(\omega) = \rho\pi\sigma_s^2\alpha_s^2 \exp(-\pi^2\alpha_s^2\|\omega\|^2)$；以及指数协方差函数 $C\ t0(t) = \rho\sigma_t^2 \exp(-|t|/\alpha_t)$，$t \in \mathbb{R}^+$，其谱密度为 $\varphi_0^t(\tau) = (2\rho\sigma_t^2\alpha_t)/(1+4\pi^2\alpha_t^2|\tau|^2)$。这里，$\sigma_s^2$ 和 σ_t^2 分别是空间分量和时间分量的方差参数，$\alpha_s > 0$ 和 $\alpha_t > 0$ 是相应的范围参数。具有强度 ρ、并以这些分量构成的可分离协方差函数（6）的平稳时空确定性点过程，即

$$C_0(u,t) = \rho\sigma_s^2\sigma_t^2 \exp\left(-\frac{\|u\|^2}{\alpha_s} - \frac{|t|}{\alpha_t}\right) \tag{7}$$

将在以下条件下
存在

$$\varphi_{sep}(\omega,\tau) = \frac{2\pi\rho\alpha_s^2\alpha_t\sigma_s^2\sigma_t^2}{(1+4\pi^2\alpha_t^2\tau^2)} \exp\left(-\pi^2\alpha_s^2\|\omega\|^2\right) < 1.$$

由于谱密度在 $(0,0)$ 处达到最大值，因此当 $\varphi_{sep}(0,0) < 1$ 时，STDPP(C_0) 存在。这意味着 $\rho < (2\pi\alpha_s^2\alpha_t\sigma_s^2\sigma_t^2)^{-1}$，因此最大强度为 $\rho_{\max} = (2\pi\alpha_s^2\alpha_t\sigma_s^2\sigma_t^2)^{-1}$。对于这一过程，对相关函数可简单表示为

$$g(u,t) = 1 - \exp\left(-\frac{2\|u\|^2}{\alpha_s} - \frac{2|t|}{\alpha_t}\right). \tag{8}$$

相应的 K-函数也有一个闭式表达式，见 A。

图 1 （上排）显示，对相关函数（8）的值随空间范围增大而减小，时间延迟 α_s 增大时也会减小 α_t。因此，这些参数决定了上述可分离模型的排斥程度。

3.3 非可分离时空协方差函数

根据 Fuentes 等人 (2007年)，我们考虑时空谱密度

$$\varphi_\epsilon(\omega,\tau) = \gamma(\alpha_s^2\alpha_t^2 + \alpha_t^2|\omega|^2 + \alpha_s^2\tau^2 + \epsilon|\omega|^2\tau^2)^{-\nu}, \tag{9}$$

它是常用的*Matérn*谱密度(Cressie 和 Wikle；2011年）的扩展。这里，非负参数 α_s^{-1}（空间范围）解释了空间相关性的衰减速率，非负参数 α_t^{-1}（时间延迟）解释了时间相关性的衰减速率。此外，$\gamma > 0$ 是一个尺度参数。参数 ν 用于衡量该过程的光滑度，且必须大于 $(d+1)/2$，才能使谱密度定义良好。参数ϵ 控制空间和时间分量之间的相互作用。当 $0 \le \epsilon < 1$ 时，谱密度不可分离；而当 $\epsilon = 1$时，谱密度可分离。谱密度的最大值为$\gamma(\alpha_s^2\alpha_t^2)^{-\nu}$，因此，当时空决定点过程的谱密度为 (9) 时，该过程存在的条件是 $\gamma < (\alpha_s^2\alpha_t^2)^\nu$。

在可分情形下，即当 $\epsilon = 1$ 时，谱密度为

$$\varphi_{\epsilon=1}(\omega,\tau) = \gamma(\alpha_s^2 + \|\omega\|^2)^{-\nu}(\alpha_t^2 + \tau^2)^{-\nu} = \varphi_0^s(\omega)\varphi_0^t(\tau). \tag{10}$$

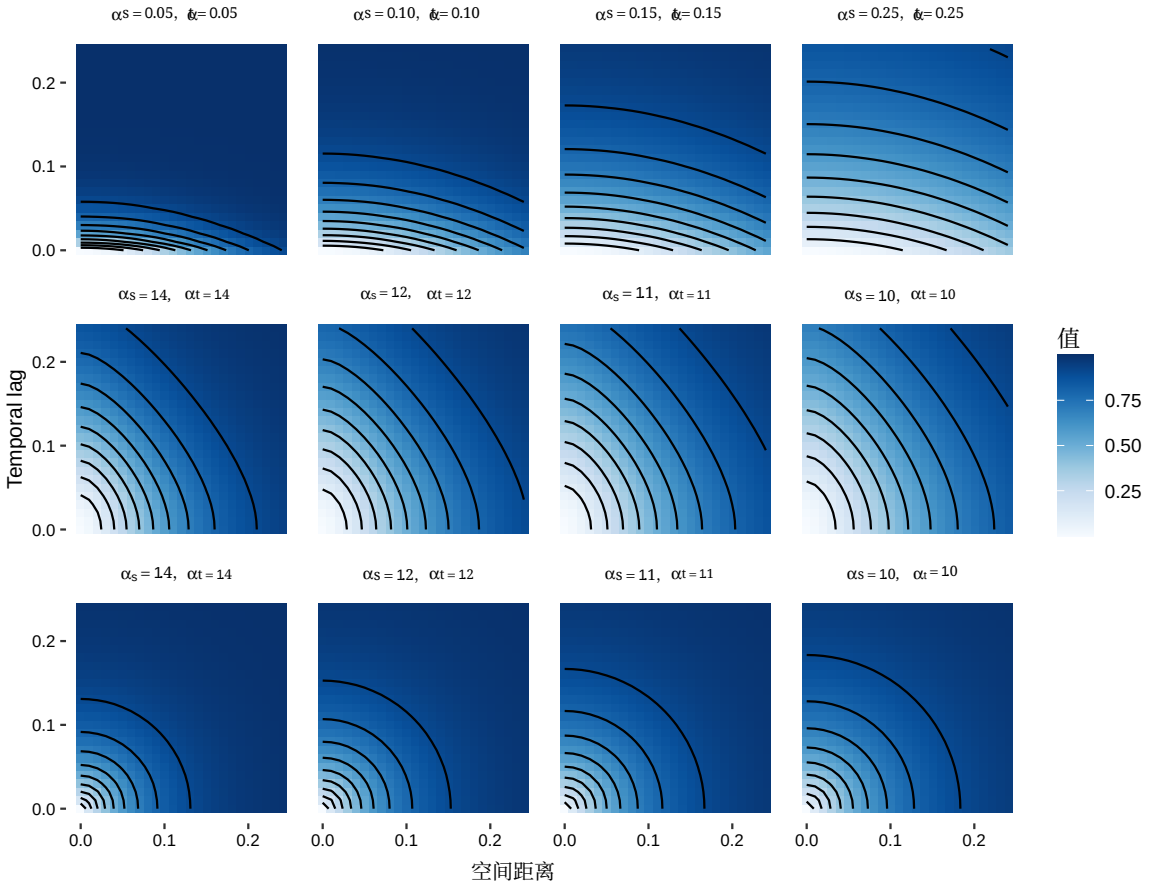


图1：理论二阶相关函数（8）（顶行）、（12）（中行）和（15）（底行），对应图上方所示的不同参数取值。

在此情形下，$\varphi_0^s(\omega)$ 和 $\varphi_0^t(\tau)$ 分别是空间与时间中的 *Matérn*型谱密度。因此，结合 (4) 和 (10，并使用 Gradshteyn 和 Ryzhik (2007 年) 中的公式 6.726.4 和 8.432.5，令 $d = 2$，相应的可分离时空协方差函数为

$$C_0(u,t) = \frac{4\gamma\pi\sqrt{\pi}}{2^{2\nu-1/2}(\Gamma(\nu))^2}\left(\frac{2\pi|t|}{\alpha_t}\right)^{\nu-1/2}\left(\frac{2\pi\|u\|}{\alpha_s}\right)^{\nu-1} \times \mathcal{K}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(2\pi\alpha_t|t|\right)\mathcal{K}_{\nu-1}\left(2\pi\alpha_s\|u\|\right),$$

其中，$\mathcal{K}_\nu(\cdot)$ 是 ν 阶第二类修正贝塞尔函数。$C_0(u, t)$ 与空间和时间上的 Matérn 协方差函数乘积成正比。利用特殊情形 $\mathcal{K}_1(r) = e^{-r}(2r/\pi)^{-1/2}$ 和 $\mathcal{K}_3(r) = e^{-r}(1 + r^{-1})(2r/\pi)^{-1/2}$（Abramowitz 和 Stegun；1992年），上述针对 $\nu = 2$ 的协方差函数可表示为

$$C_0(u,t) = \frac{\gamma\pi^2}{4\alpha_s^2\alpha_t^3}(2\pi\alpha_t|t|+1)\exp(-2\pi\alpha_t|t|)(2\pi\alpha_s\|u\|)\mathcal{K}_1(2\pi\alpha_s\|u\|). \tag{11}$$

对于这种情形，考虑到 $\lim_{x\to 0} x\mathcal{K}_1(x) = 1$ (Yang 和 Chu；2017年)，该过程的强度为

为 $\rho = C_0(0,0) = (\gamma\pi^2)/(4\alpha_s^2\alpha_t^3)$。因此，考虑到 $\gamma < \alpha_s^4\alpha_t^4$，具有核函数 (11) 的时空决定点过程存在的条件是 $4\rho \le \pi^2\alpha_s^2\alpha_t$。对于这一可分情形，给定 $\epsilon = 1$，根据 (2)，对相关函数为

$$g(u,t) = 1 - (2\pi\alpha_t|t| + 1)^2 \exp(-4\pi\alpha_t|t|)\left[(2\pi\alpha_s\|u\|).\mathcal{K}_1(2\pi\alpha_s\|u\|)\right]^2. \tag{12}$$

对于 $\epsilon \in (0,1)$，对应于（9）的时空协方差函数应进行数值计算，因为不存在精确的闭式表达式。对于 $\epsilon = 0$，平稳的不可分离时空谱密度为

$$\varphi_{\epsilon=0}(\omega,\tau) = \gamma(\alpha_s^2\alpha_t^2 + \alpha_t^2|\omega|^2 + \alpha_s^2\tau^2)^{-\nu}. \tag{13}$$

结合（4）和（13），并使用 Gradshteyn 和 Ryzhik （2007年）中的公式 6.726.4 和 8.432.5，当 $\epsilon = 0$ 时，协方差函数为

$$C_0(u,t) = \frac{\gamma\pi^{\frac{d+1}{2}}}{2^{\nu-\frac{d+1}{2}}\Gamma(\nu)\alpha_s^{(2\nu-d)}\alpha_t^{(2\nu-1)}}\left\{2\pi\alpha_s\left((\frac{\alpha_t}{\alpha_s}t)^2 + \|u\|^2\right)^{1/2}\right\}^{\nu-\frac{d+1}{2}}$$
$$\times\,\mathcal{K}_{\nu-\frac{d+1}{2}}\left(2\pi\alpha_s\left((\frac{\alpha_t}{\alpha_s}t)^2 + \|u\|^2\right)^{1/2}\right).$$

根据（5），对于 $d = 2$ 和 $\nu = 2$，存在一个核函数为以下形式的时空决定点过程：

$$C_0(u,t) = \frac{\gamma\pi^2}{2\alpha_s^2\alpha_t^3}\exp\left(-2\pi\left(\alpha_t^2|t|^2 + \alpha_s^2\|u\|^2\right)^{1/2}\right) \tag{14}$$

当且仅当 $\gamma < \alpha_s^4\alpha_t^4$。进一步，有 $\rho = C_0(0,0) = (\gamma\pi^2)/(2\alpha_s^2\alpha_t^3)$，对于协方差函数（14）。因此，在条件 $\gamma < \alpha_s^4\alpha_t^4$ 下，有 $2\rho \le \pi^2\alpha_s^2\alpha_t$。所以，对于具有上述协方差函数的时空决定点过程，其强度至多为 $\rho_{max} = \pi^2\alpha_s^2\alpha_t/2$。此外，对于该过程，对相关函数简单地表示为

$$g(u,t) = 1 - \exp\left(-4\pi\left(\alpha_t^2|t|^2 + \alpha_s^2\|u\|^2\right)^{1/2}\right). \tag{15}$$

对应的K函数表达式可见于A。

图1 （中间行和底部行）显示，理论成对相关（12）和（15）的值会随着 α_s^{-1}和 α_t^{-1}的增加而降低。因此，对于这些模型，参数 α_s^{-1}和 α_t^{-1}发挥着空间范围和时间延迟的作用，决定了排斥程度。此外，在范围参数固定时，采用（12）的可分离协方差模型会使对相关函数的值更小，因此比采用（15）的不可分离模型产生更具排斥性的模式。可分离协方差函数分别控制点在空间和时间上的排斥性；而在不可分离情形下，点在三维空间中彼此排斥。这导致了不同的小尺度相互作用。

4 讨论与结论

此处介绍的不同协方差函数形式，使得 时空决定点过程能够呈现不同类型的排斥。尽管时空情境下的实证研究有待未来开展，但对于 DPP，可通过最大似然法或最小对比法进行模型拟合（Lavancier 等人；2015年），并基于此处针对给定示例介绍的汇总函数（如对相关函数）开展分析；在模型评估方面，也可采用全局包络检验（Myllymäki 等人；2017年）。

致谢

作者感谢 Frederic Lavancier 和 Ege Rubak 所进行的有益讨论。MG 的经费由 Kempe 基金会（JCSMK22-0134）提供，MM 的经费则由芬兰科学院提供（项目编号 295100 和 327211）。

所提模型的 K 函数

下面给出第 *3* 节讨论的两个协方差模型的 K 函数。具有可分离协方差函数的模型（*7*）的 K 函数对应于对相关函数（8），其闭式表达式如下：

$$\begin{aligned} K(u,t) &= \pi u^2 t - \int_0^u \int_0^t \exp\Big(\frac{-2u'^2}{\alpha_s} - \frac{2t'}{\alpha_t}\Big) u' \mathrm{d}u' \mathrm{d}t' \\ &= \pi u^2 t - \alpha_s \alpha_t / \Big[8\Big(1 - e^{(-2u^2/\alpha_s)}\Big)\Big(1 - e^{(-2t/\alpha_t)}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{16}$$

利用协方差模型（*14*）的 K 函数通用公式（3），与对相关函数（*15*）对应的时空 K 函数为：

$$\begin{aligned} K(u,t) &= 2\pi \int_0^u \int_0^t \Big(1 - |R(u'/\alpha_s, t'/\alpha_t)|^2\Big) u' \mathrm{d}u' \mathrm{d}t' \\ &= \pi u^2 t - \frac{2\pi}{\rho^2} \int_0^u \int_0^t |C_0(u', t')|^2 u' \mathrm{d}u' \mathrm{d}t' \\ &= \pi u^2 t - \frac{\gamma^2 \pi^3}{8\rho^2 \alpha_s^6 \alpha_t^6} \Big[e^{-4\pi\alpha_t t} \Big(\frac{-2\pi\alpha_t t + e^{4\pi\alpha_t t} - 1}{2\pi\alpha_t} \Big) \\ &\quad - \Big(\frac{\alpha_s u}{\alpha_t} + \frac{4\pi\alpha_s^2 u^2}{\alpha_t} \frac{\sinh nt}{2nn!(n+1-(n+1)!)!} \Big) J_1(4\pi, t) \Big], \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $J_1(4\pi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2\pi)^n \sum_{m=0}^{n} \sinh\frac{(1+n-2m)tm!(n-m)!(1+n-2m)}{}$ 是不完全贝塞尔函数（更多细节见 Jones(2007年）。

参考文献

Abramowitz, M. 和 Stegun, I. A.（1992年）。数学函数手册：公式、图表与数学表，多佛出版社，纽约。

Cressie, N. 和 Wikle, C. K.（2011年）。时空数据统计学，约翰·威利父子出版社。Fuentes, M., Chen, L. 和 Davis, J.（2007年）。一类不可分离非平稳时空协方差函数，《环境计量学》*9*：487–507。Gabriel, E. 和 Diggle, P. J.（2009年）。非齐次时空点过程数据的二阶分析，《荷兰统计学》**63**：43–51。Ghorbani, M.（2013年）。时空点过程弱平稳性的检验，《随机环境研究与风险评估》**27**：517–524。Gradshteyn, I. S. 和 Ryzhik, I. M.（2007年）。积分、级数与乘积表。第7版，学术出版社。Jones, D. S.（2007年）。不完全贝塞尔函数 I，《爱丁堡数学学会会刊》**50**：173–183。Lavancier, F., Møller 和 Rubak, E.（2015年）。行列式点过程模型与统计推断，《皇家统计学会杂志：B辑（统计方法论）》**77**(4)：853–877。Macchi, O.（1975年）。随机点过程的重合方法，《应用概率进展》**7**：83–122。Møller, J. 和 Ghorbani, M.（2012年）。结构化非齐次时空点过程二阶分析的若干方面，《荷兰统计学》**66**(4)：472–491。Myllymäki, M., Mrkvi˘cka, T., Grabarnik, P., Seijo, H. 和 Hahn, U.（2017年）。空间过程的全局包络检验，《皇家统计学会杂志：B辑（统计方法论）》**79**(2)：381–404。Radhakrishna Rao, C. 和 Bhaskara Rao, M.（1998年）。矩阵代数及其在统计学与计量经济学中的应用，世界科学出版社。Rasmussen, C. E. 和 Williams, C. K. I.（2006年）。用于机器学习的高斯过程，麻省理工学院出版社，伦敦。Yang, Z. H. 和 Chu, Y. M.（2017年）。关于第二类修正贝塞尔函数的近似，《不等式与应用杂志》**41**。