arXiv:2301.02355v1 [math.NA] 6 Jan 2023

从弹性散射数据恢复源位置、极化和障碍物形状

Yan Chang*、Yukun Guo†、Hongyu Liu‡和DeyueZhang§

摘要

我们研究一个利用近场测量数据同时重建刚性障碍物和激励源的弹性波反散射问题。为实现多个目标的共反演，我们提出一种两阶段数值方法。第一阶段，我们构造若干指示泛函，根据总场数据确定源位置和极化，进而获得近似散射场。在这一阶段，计算仅涉及总场与基本解的内积，因此方法直接且计算效率高。第二阶段，我们提出一种牛顿型迭代方法，根据近似散射场重建障碍物形状。利用障碍物内部辅助曲线上的层势表示，可以轻松求得散射场及其在各迭代曲面上的导数。理论上，我们证明了联合反演问题的唯一性，并分析了采样型方案的指示行为。此外，我们为牛顿型方法给出了显式导数。数值结果验证了所提方法的有效性和效率。

关键词：共反演、反散射、反源、弹性波、牛顿型方法、采样。

1 引言

从散射数据中识别性质各异的多个目标，在无损检测、医学成像和地球物理勘探等诸多领域具有重要应用。在波动方程反问题中，激励源主动发射信号，而障碍物则对施加的信息作出被动响应。因此，在散射系统中，源和障碍物通常被视为两个本质不同的组成部分。由于实际需求各异，对源点或障碍物进行重建一直受到广泛关注。根据重建目标的不同，反源问题通常旨在从辐射场中恢复源，此时不存在障碍物；而障碍物反问题则旨在给定入射场的情况下识别障碍物。

*哈尔滨工业大学数学学院，中国哈尔滨。 $21B312002@stu.hit.edu.cn$
†哈尔滨工业大学数学学院，中国哈尔滨。 $ykguo@hit.edu.cn$（通讯作者）
‡香港城市大学数学系，中国香港特别行政区。 $hongyliu@cityu.edu.hk$§吉林大学数学学院，中国长春， $dyzhang@jlu.edu.cn$

弹性反源问题的典型数值方法包括 Bao 等人提出的递归算法 [7], 采样型方法 [33], 全波形反演方法 [32], 以及用于地震源反演的快速贝叶斯方法 [31]。与此同时，近年来弹性波散射问题受到越来越多的关注。例如，Ji 等人 [26] 研究了弹性反散射，并提出了三种直接采样方法，利用远场模式的不同分量进行位置和形状重建。Chen 和 Huang [14] 提出逆时偏移法，根据散射场重建扩展障碍物。最近，文献 [27] 的作者研究了时间反演法，用于重建三维空间中的多个弹性粒子。此外，弹性反散射问题的经典算法包括线性采样法 [2, 5], 、因子分解法 [13], ，以及近期提出的迭代法 [8] 和 Guizina 等人提出的拓扑导数方法 [23]。

在许多情形下，障碍物和源都未知，因此利用被动测量（即由异常源产生的测量波数据）同时重建这两个目标具有重要意义。作为上述问题的组合，共反演问题更加复杂，也更具实际意义。与大量关于单一反演问题的研究相比，关于共反演问题的研究相对较少。关于共反演问题的一些近期研究，参见 [12, 28, 29, 34, 35]。本文考虑一个弹性波反问题，旨在根据时谐总场数据同时重建刚性障碍物及其激励源点。本研究的总体思路分为两个步骤。首先，我们通过直接成像法，根据总场数据恢复源点及其极化。确定源之后，下一步便是通过一种易于实现的牛顿型迭代法确定障碍物形状。

具体而言，我们将所提出方法的主要特点总结如下。首先，我们提出一种两阶段采样法，根据总场确定源位置和极化。在第一阶段，我们针对空间位置实施采样过程，并通过指示函数的显著最大值点识别源位置。随后在第二阶段，提出另一种采样方案以确定极化方向。其次，将传统分解法 [16]的思想融入牛顿迭代，我们构建了一种新颖的牛顿型框架，分别处理反问题的病态性和非线性。具体而言，通过Helmholtz分解和层势技术，可以轻松计算边界到数据映射的导数，因此，该算法无需正向求解器，也无需在新颖的牛顿型方法中交替迭代源和障碍物，因而计算效率高。第三，我们通过大量数值实验验证了所提出方法的有效性和效率。此外，我们将该方法扩展至三维问题中的共反演。最后但同样重要的是，所提出的混合方法由用于源恢复的采样方案和用于障碍物恢复的迭代方案组成；这两种方案本身都是解决反源问题和障碍物反散射问题的新颖方法。

本文其余部分安排如下：下一节介绍所考虑的共反演问题，并讨论唯一性结果。第 3 节提出两种采样方案，以便从测量总场中识别源位置和极化，并为这些采样方案提供数学论证。从总场中减去重建源所产生的入射场后，共反演问题便可改写为障碍物反散射问题。随后，第 4 节提出一种基于单层技术的牛顿型方法，用于根据近似散射场恢复障碍物形状。第 5 节开展若干数值实验，以验证其有效性

以及我们方法的效率。最后，第6节给出了一些结论。

2 问题设置与唯一性

本节首先简要描述所考虑的正问题和反问题，然后讨论一个唯一性结果。

2.1 模型问题

设 $D \subset \mathbb{R}^d\,(d=2,\ 3)$ 是一个开且有界的利普希茨区域，其外部 $\mathbb{R}^d\backslash D$ 连通。假设 $\mathbb{R}^d\backslash\overline{D}$ 被一种具有归一化质量密度的均匀各向同性弹性介质占据。令 $\omega>0$ 为角频率，λ，μ 为 Lamˊe 常数，且满足 $\mu>0$，$d\lambda+2\mu>0$。分别用 ~~k_p~~ $=\omega/\sqrt{\lambda+2\mu}=\omega/c_p$ 和 $k_s=\omega/\sqrt{\mu}=\omega/c_s$ 表示压缩波数和剪切波数。给定任意点 $z\in\mathbb{R}^d\backslash D$ 和极化 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{S}^{d-1}:=\{x\in\mathbb{R}^d:\ |x|=1\}$，由位于 z 的源产生的入射场 $\boldsymbol{u}^i$ 满足纳维方程

$$\Delta^*\boldsymbol{u}^i+\omega^2\boldsymbol{u}^i=-\delta(x-z)\boldsymbol{p}\quad\text{in }\mathbb{R}^d\backslash\overline{D},\tag{2.1}$$

where $\delta(x-z)$ 是位于点 z 的狄拉克δ分布，Lamˊe 算子 Δ^* 定义为 by

$$\Delta^*\boldsymbol{u}:=\mu\Delta\boldsymbol{u}+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}.$$

具体而言，我们有

$$\boldsymbol{u}^i=\boldsymbol{u}^i(x;z,\boldsymbol{p})=\mathbb{G}(x,z)\boldsymbol{p},\quad x\in\mathbb{R}^d\backslash(\overline{D}\cup\{z\}),\tag{2.2}$$

其中，$\mathbb{G}(x,\ z)$ 是纳维方程的基本解，即（参见 [10]）

$$\mathbb{G}(x,z)=\frac{1}{\mu}\Phi_s(x,z)\mathbb{I}_d+\frac{1}{\omega^2}\nabla_x\nabla_x^\top(\Phi_s(x,z)-\Phi_p(x,z)).\tag{2.3}$$

这里，$\mathbb{I}_d$ 是 $d\times d$ 单位矩阵，$\Phi_\alpha(\alpha=p,\ s)$ 表示波数为 k_α 的亥姆霍兹方程的基本解，即

$$\Phi_\alpha(x,z)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k_\alpha|x-z|), & d=2,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\alpha|x-z|}}{4\pi|x-z|}, & d=3,\end{cases}\qquad\alpha=p,s,\tag{2.4}$$

其中 $H_n^{(1)}$ 阶数为 n 的第一类汉克尔函数。成立关系 $\mathbb{G}=\mathbb{G}_p+\mathbb{G}_s$，其中

$$\mathbb{G}_p(x,z)=-\frac{1}{\mu k_s^2}\nabla_x\nabla_x^\top\Phi_p(x,z),\quad\mathbb{G}_s(x,z)=\frac{1}{\mu}\left(\mathbb{I}_d+\frac{1}{k_s^2}\nabla_x\nabla_x^\top\right)\Phi_s(x,z),\tag{2.5}$$

设障碍物受到 $\boldsymbol{u}^i$, 照射，则散射波的位移场由边值问题的解 $\boldsymbol{v}$ 描述

$$\begin{cases}\Delta^*\boldsymbol{v}+\omega^2\boldsymbol{v}=0, & \text{in }\mathbb{R}^d\backslash\overline{D},\\ \boldsymbol{u}=0, & \text{on }\partial D,\end{cases}\tag{2.6}$$

其中 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^i+\boldsymbol{v}$ 为总场，散射场 $\boldsymbol{v}$ 满足 Kupradze-Sommerfeld辐射条件

$$\lim_{\rho\to\infty}\rho^{\frac{d-1}{2}}(\partial_\rho \boldsymbol{v}_p-\mathrm{i}k_p\boldsymbol{v}_p)=0,\quad \lim_{\rho\to\infty}\rho^{\frac{d-1}{2}}(\partial_\rho \boldsymbol{v}_s-\mathrm{i}k_s\boldsymbol{v}_s)=0,\quad \rho=|x|.$$

这里， $\boldsymbol{v}_p=\frac{1}{k_p^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{v}$. 的纵波分量。 $\boldsymbol{v}$ 的横波分量为

$$\boldsymbol{v}_s=\begin{cases}\dfrac{1}{k_s^2}\mathbf{curl}\mathrm{curl}\boldsymbol{v}, & d=2,\\ \dfrac{1}{k_s^2}\mathbf{curlcurl}\boldsymbol{v}, & d=3,\end{cases}$$

其中，旋度算子定义为

$$\begin{aligned}&\mathrm{curl}\boldsymbol{w}=\partial_{x_1}w_2-\partial_{x_2}w_1,\quad \mathbf{curl}w=(\partial_{x_2}w,-\partial_{x_1}w)^\top,\quad d=2,\\ &\mathbf{curl}\boldsymbol{w}=(\partial_{x_2}w_3-\partial_{x_3}w_2,\partial_{x_3}w_1-\partial_{x_1}w_3,\partial_{x_1}w_2-\partial_{x_2}w_1)^\top,\quad d=3.\end{aligned}$$

这里， w 是一个标量函数，而 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)^\top$ 或（w_1,w_2,w_3）$^\top$ 表示一个向量函数。

对于方程 (2.6) 的任意解 $\boldsymbol{v}$，Helmholtz分解将其分解为纵波部分和横波部分:

$$\boldsymbol{v}=\begin{cases}\nabla\phi+\mathbf{curl}\psi, & d=2,\\ \nabla\phi+\mathbf{curl}\boldsymbol{\psi}, & d=3,\end{cases}\tag{2.7}$$

其中， ϕ 和 ψ 是标量势函数， $\boldsymbol{\psi}$ 是满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$的矢量势函数。结合 (2.6) 和 (2.7) 可得亥姆霍兹方程:

$$\Delta\phi+k_p^2\phi=0,\quad \Delta\psi+k_s^2\psi=0,\quad d=2,\tag{2.8}$$

$$\Delta\phi+k_p^2\phi=0,\quad \Delta\boldsymbol{\psi}+k_s^2\boldsymbol{\psi}=\mathbf{0},\quad d=3.\tag{2.9}$$

此外， ϕ、 ψ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 均假设满足Sommerfeld辐射条件

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to\infty}\rho^{\frac{d-1}{2}}(\partial_\rho\phi-\mathrm{i}k_p\phi)=0,\quad \lim_{\rho\to\infty}\sqrt{\rho}(\partial_\rho\psi-\mathrm{i}k_s\psi)=0,\\ &\lim_{\rho\to\infty}\rho(\mathbf{curl}\boldsymbol{\psi}\times\hat{x}-\mathrm{i}k_s\boldsymbol{\psi})=0,\quad \rho=|x|.\end{aligned}\tag{2.10}$$

已在 [11] 中证明，正问题 (2.6) 和 (2.10) 存在唯一解 $\boldsymbol{v}\in\left(H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d\backslash D)\right)^d$。

本文取 $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^d:\ |x|<R\}$，其中包含 D，且 $B_R\backslash D$ 是连通的。对于$N\in\mathbb{N}_+$，设 $S:=\cup_{j=1}^N\{z_j\}\subset B_R\backslash D$ 为由 N 个互异源点组成的集合， $P:=\cup_{j=1}^N\{\boldsymbol{p}_j\}\subset\mathbb{S}^{d-1}$为极化方向集合。给定形式为 (2.2) 的入射场 $\boldsymbol{u}^i(x;\ z_j,\boldsymbol{p}_j)\ \ j=1,\cdots,N$，我们在测量曲线$\Gamma_R:=\partial B_R=\{x\in\mathbb{R}^d:\ |x|=R\}$上采集总场 $\boldsymbol{u}(x;z_j,\boldsymbol{p}_j)=\boldsymbol{u}^i(x;\ z_j,\boldsymbol{p}_j)+\boldsymbol{v}(x;\ z_j,\boldsymbol{p}_j)$，其中 $\boldsymbol{v}(x;z_j,\boldsymbol{p}_j)$是与入射场 $\boldsymbol{u}^i(x;\ z_j,\boldsymbol{p}_j)$相对应的散射场。于是，我们所关注的联合反演问题表述如下:

问题 2.1（联合反演问题）。根据测量数据 $\mathbb{U}$ 同时确定障碍物 ∂D、源点 S 和极化方向 P: $=\{\boldsymbol{u}(x;\ \ z,\boldsymbol{p}):\ x\in\Gamma_R,z\in S,\boldsymbol{p}\in P\}$，即，

$$\mathbb{U}\to(\partial D,S,P).\tag{2.11}$$

关于问题 2.1 的几何配置示意图，请参见图 1。

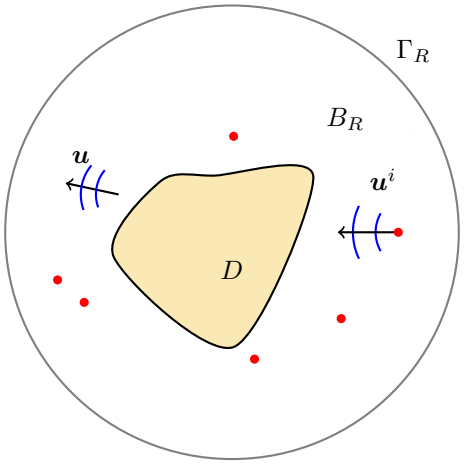

图 1：用于对障碍物和源进行成像的共反演示意图。

2.2 唯一性

本小节讨论问题 2.1 的唯一性问题。具体而言，我们证明可以根据总场测量唯一确定 S 和 ∂D 。关于弹性反散射问题唯一性的更多研究，请参见 [17, 18, 19, 24] 及其中的参考文献。

定理 2.1。 源点 S 可由总场 $\mathbb{U}.$ 唯一确定。令 N_0 由 (A.3) 定义。若对于某一固定角频率 ω 和某一固定极化$\boldsymbol{p} \in \mathbb{S}^{d-1}$， $N \geq N_0 + 1$ ，则障碍物 D 也可由总场数据 $\mathbb{U}$.唯一确定。

证明。 我们首先通过反证法证明源点的唯一识别性。

设 D_1 和 D_2 是两个弹性刚性障碍物，满足 $D_1 \cup D_2 \subset B_R.$ 。假设 $w_1 \neq w_2$ 是 S 中两个不同的源点，并分别以$\boldsymbol{u}(x;\ D_1, w_1)$ $\boldsymbol{u}(x; D_2, w_2)$，表示由 (D_1, w_1) 和 (D_2, w_2) 产生的总场。假设

$$\boldsymbol{u}(x; D_1, w_1) = \boldsymbol{u}(x; D_2, w_2), \quad \forall\, x \in \Gamma_R. \tag{2.12}$$

根据纳维方程外部狄利克雷边值问题的唯一性，我们可推出

$$\boldsymbol{u}(x; D_1, w_1) = \boldsymbol{u}(x; D_2, w_2), \quad \text{in } \mathbb{R}^d \backslash \overline{B_R}.$$

此外，解析性导出以下结论

$$\boldsymbol{u}(x; D_1, w_1) = \boldsymbol{u}(x; D_2, w_2), \quad \text{in } \mathbb{R}^d \backslash \left(\overline{D_1 \cup D_2} \cup \{w_1\} \cup \{w_2\} \right).$$

设 $x \to w_1$，则 $\boldsymbol{u}(x; D_1,\ w_1)$ 趋于无穷大。同时，由于 $\boldsymbol{v}(x;\ D_\ell,\ w_\ell)$，$(\ell = 1,\ 2)$ 有界，我们知道 $\boldsymbol{u}(x; D_2,\ w_2)$ 有界，这就导致了矛盾。因此， $w_1 = w_2$.

接下来，我们通过反证法证明，若 $N \geq N_0 + 1$，则 ∂D 可由 $\mathbb{U}.$ 唯一确定

假设 D_1 和 D_2 是两个有界区域，且 $\boldsymbol{v}_i,$ $i = 1,\ 2$ 分别满足将 D 替换为 $D_i,$ 后的 (2.6)。令 G 为 $D_1 \cup D_2$ 的补集的无界连通分支，并且

总波场在 ∂G.上消失。不失一般性，假设 $D^* := (\mathbb{R}^d \backslash G) \backslash D_2 \neq \emptyset$. 那么 $\boldsymbol{v}_2(\cdot, z)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{v}_2 + \omega^2 \boldsymbol{v}_2 = 0, & \text{in } D^*, \\ \boldsymbol{v}_2(\cdot, z) = -\boldsymbol{u}^i(\cdot, z), & \text{on } \partial D^*. \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{w}(\cdot, z) = \boldsymbol{v}_2(\cdot, z) + \boldsymbol{u}^i(\cdot, z)$，对固定的 $z \in S,$，则 $\boldsymbol{w}$ 满足

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{w} + \omega^2 \boldsymbol{w} = 0, & \text{in } D^*, \\ \boldsymbol{w} = 0, & \text{on } \partial D^*. \end{cases} \tag{2.13}$$

因此， $\boldsymbol{w}$ 是 D^* 中关于 $-\Delta^*$ 、特征值为 ω^2 的狄利克雷特征函数。接下来，我们证明对应于同一特征值 ω^2 的特征函数 $\boldsymbol{w}(\cdot, z_j)$ $z_j \in S, j = 1, \cdots, N_0 + 1$ 线性无关。假设

$$\sum_{j=1}^{N_0+1} c_j \boldsymbol{w}(x, z_j) = 0, \quad x \in D^*, \tag{2.14}$$

对某些常数 c_j 以及两个不同的源点 $N_0 + 1$、 $z_j, j = 1, \cdots, N_0 + 1.$ 成立。那么，根据解析性，式 (2.14) 在包含 D_1 和 $D_2.$ 的某个圆的外部也成立。对固定的 $j_0 \in [1, N_0 + 1]$,，我们取充分小的 $h > 0$，使得 $x_s^{j_0} = z_{j_0} + {}_s^h \nu(z_{j_0})$ $s = 1, 2, \cdots$ 位于 $z_{j_0}.$ 的邻域内。于是，

$$c_{j_0} \boldsymbol{w}(x_s^{j_0}, z_{j_0}) = - \sum_{j=1, j \neq j_0}^{N_0+1} c_j \boldsymbol{w}(x_s^{j_0}, z_j).$$

进一步，我们推导得出

$$c_{j_0} \boldsymbol{u}^i(x_s^{j_0}, z_{j_0}) = - \sum_{j=1, j \neq j_0}^{N_0+1} c_j \boldsymbol{u}^i(x_s^{j_0}, z_j) - \sum_{j=1}^{N_0+1} c_j \boldsymbol{v}(x_s^{j_0}, z_j). \tag{2.15}$$

注意到 $\boldsymbol{u}^i(x_s^{j_0}, z_{j_0})$ 趋于无界，而 (2.15) 式右端保持有界；当 $s \to \infty,$ 时，我们推导得出 $c_{j_0} = 0$ 对于 $j_0 = 1, 2, \cdots, N_0 + 1,$ 这意味着 $\boldsymbol{w}(\cdot, z_j)$ $j = 1, \cdots, N_0 + 1,$ 线性无关。

我们可以按照定理 5.2 的证明中的相同方法继续证明。设 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m = \omega^2$ 为 D^* 中小于或等于 ω^2 的狄利克雷特征值，且 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \mu_m$ 为 B_R 中前 m 个特征值，则 $\mu_m < \lambda_m = \omega^2.$。根据 $-\Delta^*$的狄利克雷特征值的强单调性，我们得到 λ_m 的重数 M 小于或等于圆盘 B_R 中小于 $\omega^2.$ 的特征值重数之和。换言之， $M \leq N_0,$ 这与以下事实矛盾： $N_0 + 1$ 个不同的入射波产生了 $N_0 + 1$ 个线性无关、特征值为 ω^2 的特征函数，其中 D^*。因此，$D_1 = D_2.$

□

3 恢复源

本节将构造若干新颖的指示泛函，以根据总场 $\mathbb{U}$确定源点 S和极化方向 P。值得注意的是，这与

现有的反源问题直接采样方法不同，我们在成像函数中采用总场，而非入射场。为方便起见，我们用$(\cdot,\ \cdot)$表示 $\mathbb{C}^2$ 上的实内积，用上横线表示复共轭，并用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示定义在$(L^2(\Gamma_R))^2$上的内积。

3.1 位置的恢复

本小节旨在根据 $\mathbb{U}.$ 确定源点的位置。令 $\Omega\ \subset \mathbb{R}^d$ 为一个有界采样区域，使得 $D \cup S \subset \Omega$。对于任意采样点 $y \in \Omega$，我们定义如下的 N 指示泛函:

$$I_j^{\boldsymbol{q}}(y) = \langle \boldsymbol{u}(\cdot; z_j), \mathbb{G}(\cdot, y)\boldsymbol{q}\rangle\,, \quad j = 1, \cdots, N, \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{S}^{d-1}.$ 。我们想指出，为了确定源点 S，辅助极化 $\boldsymbol{q}$ 不必与 $\boldsymbol{p}_j.$ 相同。

为了研究指标函数 (3.1) 的特性，我们需要几个关键引理。

引理 3.1。 $[14, Lemma\ 3.4]$ 对于所有 $y, z \in B_R$, $y \neq z$，均有

$$\begin{aligned}
\omega c_\alpha \langle \mathbb{G}_\alpha(x,z), \mathbb{G}_\alpha(x,y)\rangle &= \Im\{\mathbb{G}_\alpha(y,z)\} + \mathbb{W}_\alpha^r(y,z), \quad \alpha = p, s,\\
\omega \langle \mathbb{G}_p(x,z), \mathbb{G}_s(x,y)\rangle &= \mathbb{W}_{ps}^r(y,z),\\
\omega \langle \mathbb{G}_s(x,z), \mathbb{G}_p(x,y)\rangle &= \mathbb{W}_{sp}^r(y,z),
\end{aligned}$$

其中 $\|\mathbb{W}_\alpha^r\|_{L^\infty(B_R\times B_R)} + \|\nabla_x \mathbb{W}_\alpha^r\|_{L^\infty(B_R\times B_R)} \leq CR^{-\frac{d-1}{2}}$对 $\alpha \in \{p, s, ps, sp\}.$一致成立。这里，$\|A\|_{L^\infty(B_R\times B_R)} = \max_{i,j=1,\cdots,d} \|A_{ij}\|_{L^\infty(B_R\times B_R)}$，其中 $A(x,y) = (A_{ij}(x,y)) \in \mathbb{C}^{d\times d}(i,j = 1, \cdots, d)$。

对于格林张量的迹，我们有以下性质。

引理 3.2。 对于 $d = 2,3$，有

$$\mathrm{tr}(\mathbb{G}_\alpha) = C_\alpha \Phi_\alpha, \quad \alpha = p, s, \tag{3.2}$$

其中 迹 表示对角项之和，并且

$$C_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda + 2\mu}, & \alpha = p,\\ \dfrac{d-1}{\mu}, & \alpha = s. \end{cases}$$

证明。定义

$$f_n = \begin{cases} H_n^{(1)}, & d = 2,\\ h_n^{(1)}, & d = 3, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

and

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} \pi, & d = 2,\\ k_\alpha, & d = 3, \end{cases} \quad \alpha = p, s.$$

于是我们看到

$$f_n'(z) = \frac{n}{z} f_n(z) - f_{n+1}(z), \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.3}$$

$$df_1(z)/z = f_0(z) + f_2(z), \quad d = 2, 3, \tag{3.4}$$

$$\Phi_\alpha(x, y) = \frac{\mathrm{i}\sigma_\alpha}{4\pi} f_0(k_\alpha|x - y|), \quad \alpha = p, s. \tag{3.5}$$

由 (3.3) 可直接推导得出

$$\nabla_x \nabla_x^\top f_0(k_\alpha|x - y|) = k_\alpha^2 f_2(k_\alpha|x - y|) \frac{(x - y) \otimes (x - y)}{|x - y|^2} - \frac{k_\alpha}{|x - y|} f_1(k_\alpha|x - y|)\mathbb{I}, \quad \alpha = p, s,$$

其中 $\otimes$ 表示外积。因此，结合 (2.5) 和 (3.5)，格林张量可改写为

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_p(x, y) &= -\frac{\mathrm{i}\sigma_p}{4\pi c_p^2} \left(f_2(k_p|x - y|) \frac{(x - y) \otimes (x - y)}{|x - y|^2} - \frac{f_1(k_p|x - y|)}{k_p|x - y|} \mathbb{I} \right), \\
\mathbb{G}_s(x, y) &= \frac{\mathrm{i}\sigma_s}{4\pi c_s^2} \left[\left(f_0(k_s|x - y|) - \frac{f_1(k_s|x - y|)}{k_s|x - y|} \right) \mathbb{I} + f_2(k_s|x - y|) \frac{(x - y) \otimes (x - y)}{|x - y|^2} \right].
\end{aligned}$$

此外，利用 (3.4)，可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\mathbb{G}_p(x, y)\right) &= -\frac{\mathrm{i}\sigma_p}{4\pi c_p^2} \left(f_2(k_p|x - y|) - \frac{df_1(k_p|x - y|)}{k_p|x - y|} \right) = \frac{\mathrm{i}\sigma_p}{4\pi c_p^2} f_0(k_p|x - y|) = \frac{1}{c_p^2} \Phi_p(x, y), \\
\operatorname{tr}\left(\mathbb{G}_s(x, y)\right) &= \frac{\mathrm{i}\sigma_s}{4\pi c_s^2} \left(df_0(k_s|x - y|) - \frac{df_1(k_s|x - y|)}{k_s|x - y|} + f_2(k_s|x - y|) \right) \\
&= \frac{\mathrm{i}\sigma_s (d - 1)}{4\pi c_s^2} f_0(k_s|x - y|) \\
&= \frac{d - 1}{c_s^2} \Phi_s(x, y),
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

为分析指标函数 (3.1) 的指示行为，我们将 (3.1) 改写为以下两部分：

$$I_j^{\boldsymbol{q}}(y) = I_j^{S,\boldsymbol{q}}(y) + I_j^{D,\boldsymbol{q}}(y),$$

其中

$$I_j^{S,\boldsymbol{q}}(y) = \left\langle \boldsymbol{u}^i(\cdot, z_j), \mathbb{G}(\cdot, y)\boldsymbol{q} \right\rangle, \tag{3.6}$$

$$I_j^{D,\boldsymbol{q}}(y) = \left\langle \boldsymbol{v}(\cdot, z_j), \mathbb{G}(\cdot, y)\boldsymbol{q} \right\rangle. \tag{3.7}$$

命题 3.1. 设 $I^S{}_j{}^{\boldsymbol{q}}(y)$ $j = 1, \cdots, N$ 由 (3.6) 定义。则有

$$I_j^{S,\boldsymbol{q}}(y) = \sum_{\alpha \in \{p,s\}} \frac{1}{\omega c_\alpha} \Im\left\{ \left(\boldsymbol{p}_j, \mathbb{G}_\alpha(y, z_j)\boldsymbol{q} \right) \right\} + \mathcal{O}\left(R^{-\frac{d-1}{2}} \right), \quad R \to \infty.$$

证明. 为证明这一性质，我们发现 $j=1,\cdots,N$，以及 $y\in\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbb{G}(\cdot,z_j)\boldsymbol{p}_j,\mathbb{G}(\cdot,y)\boldsymbol{q}\rangle\\
=&\sum_{\alpha\in\{p,s\}}\langle\mathbb{G}_\alpha(x,z_j)\boldsymbol{p}_j,\mathbb{G}_\alpha(x,y)\boldsymbol{q}\rangle+\langle\mathbb{G}_p(x,z_j)\boldsymbol{p}_j,\mathbb{G}_s(x,y)\boldsymbol{q}\rangle+\left\langle\mathbb{G}_s(x,z_j)\boldsymbol{p}_j,\mathbb{G}_p(x,y)\boldsymbol{q}\right\rangle\\
=&\sum_{\alpha\in\{p,s\}}\frac{1}{\omega c_\alpha}\Im\left\{\left(\boldsymbol{p}_j,\mathbb{G}_\alpha(y,z_j)\boldsymbol{q}\right)\right\}+\frac{1}{\omega}\left(\frac{(\boldsymbol{p}_j,\mathbb{W}_p^r\boldsymbol{q})}{c_p}+\frac{(\boldsymbol{p}_j,\mathbb{W}_s^r\boldsymbol{q})}{c_s}+(\boldsymbol{p}_j,\mathbb{W}_{ps}^r\boldsymbol{q})+(\boldsymbol{p}_j,\mathbb{W}_{sp}^r\boldsymbol{q})\right)\\
=&\sum_{\alpha\in\{p,s\}}\frac{1}{\omega c_\alpha}\Im\left\{\left(\boldsymbol{p}_j,\mathbb{G}_\alpha(y,z_j)\boldsymbol{q}\right)\right\}+\mathcal{O}\left(R^{-\frac{d-1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

令 J_0 为零阶贝塞尔函数。根据引理 3.2，我们知道关键量

$$\frac{1}{\omega c_\alpha}\Im\{\mathrm{tr}(\mathbb{G}_\alpha(y,z_j))\}=\begin{cases}\dfrac{C_\alpha}{4\omega c_\alpha}J_0(k_\alpha|y-z_j|), & d=2,\\ \dfrac{C_\alpha}{4\pi\omega c_\alpha}\dfrac{\sin(k_\alpha|y-z_j|)}{|y-z_j|}, & d=3,\end{cases}$$

在 $y=z_j$、$j=1$、$\cdots$、N. 处取得其显著值。否则，该项相对较小，这意味着式 (3.6) 中提出的指示泛函可以指示源点的存在。

为分析式 (3.7) 的指示行为，我们注意到，通过单层表示，散射场可表示为

$$\boldsymbol{v}_j(x)=(\mathcal{S}_1\boldsymbol{\varphi}_j)(x)=\int_{\partial D}\mathbb{G}(x,w)\boldsymbol{\varphi}_j(w)\mathrm{d}s(w),\tag{3.8}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_j\in(L^2(\Lambda))^d$ 是与第 j 个源点 z_j. 对应的密度

命题 3.2。 令 $I^{D,\boldsymbol{q}}_j$、$j=1$、2、$\cdots$、N 由(3.7)定义，则有:

$$I_j^{D,\boldsymbol{q}}(y)=\int_{\partial D}\boldsymbol{\varphi}_j(w)\cdot\boldsymbol{q}\sum_{\alpha\in\{p,s\}}\frac{1}{\omega c_\alpha}\Im(\mathbb{G}_\alpha(w,y))\mathrm{d}s(w)+\mathcal{O}\left(R^{-\frac{d-1}{2}}\right).\tag{3.9}$$

证明。 将 (3.8) 代入 (3.7)，可得

$$I_j^{D,\boldsymbol{q}}(y)=\langle\boldsymbol{v}_j(x),\mathbb{G}(x,y)\boldsymbol{q}\rangle=\int_{\partial D}\boldsymbol{\varphi}_j(w)\cdot\boldsymbol{q}\mathrm{d}s(w)\left\langle\mathbb{G}(x,w),\mathbb{G}(x,y)\right\rangle.$$

注意到引理 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}
\langle\mathbb{G}(x,w),\mathbb{G}(x,y)\rangle&=\langle\mathbb{G}_p(x,w)+\mathbb{G}_s(x,w),\mathbb{G}_p(x,y)+\mathbb{G}_s(x,y)\rangle\\
&=\langle\mathbb{G}_p(x,w),\mathbb{G}_p(x,y)\rangle+\langle\mathbb{G}_s(x,w),\mathbb{G}_s(x,y)\rangle\\
&\quad+\langle\mathbb{G}_p(x,w),\mathbb{G}_s(x,y)\rangle+\langle\mathbb{G}_s(x,w),\mathbb{G}_p(x,y)\rangle\\
&=\frac{1}{\omega c_p}\Im\{\mathbb{G}_p(w,y)\}+\frac{1}{\omega c_s}\Im\{\mathbb{G}_s(w,y)\}+\mathbb{W}(w,y),
\end{aligned}$$

其中

$$\mathbb{W} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\mathbb{W}_p^r}{c_p} + \frac{\mathbb{W}_s^r}{c_s} + \mathbb{W}_{ps}^r + \mathbb{W}_{sp}^r\right).$$

此外，

$$\begin{aligned} I_j^{D,\boldsymbol{q}}(y) &= \int_{\partial D} \boldsymbol{\varphi}_j(w)\cdot\boldsymbol{q}\left(\sum_{\alpha\in\{p,s\}}\frac{1}{\omega c_\alpha}\Im(\mathbb{G}_\alpha(w,y)) + \mathbb{W}(w,y)\right)\mathrm{d}s(w) \\ &= \int_{\partial D} \boldsymbol{\varphi}_j(w)\cdot\boldsymbol{q}\sum_{\alpha\in\{p,s\}}\frac{1}{\omega c_\alpha}\Im(\mathbb{G}_\alpha(w,y))\mathrm{d}s(w) + \mathcal{O}\left(R^{-\frac{d-1}{2}}\right), \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

由引理 3.2 可知，$I^{D,\boldsymbol{q}}_{\cdot,j}(y)$ 在 $y = w \in \partial D$, 处取得最大值，这表明障碍物的存在。

综合以上分析可知，通过选择合适的极化 $\boldsymbol{q}$，指标泛函 (3.1) 可以指示源点和障碍物的存在。正如后续数值实验所示，指标泛函 (3.1) 能够准确识别源点，但由于只涉及单个源点，无法正确识别障碍物。

3.2 识别极化方向

在第 3.1 节中，我们指出，指示函数 $I_j^{\boldsymbol{q}}$ 中极化 $\boldsymbol{q}$ 的选择不必与 $\boldsymbol{p}_j$. 相同。尽管如此，只有源位置 z_j 和极化 $\boldsymbol{p}_j$ 共同决定入射场 $\boldsymbol{u}^i(\cdot; z_j, \boldsymbol{p}_j)$。换句话说，仅凭源位置无法确定入射场。因此，我们还需要根据 $\mathbb{U}$ 确定极化 $\boldsymbol{p}_j$ 。

为方便起见，我们只考虑 $d = 2$ 的情形。令 $[0, \pi)$ 为一个角度采样区间。随机选取一个角度 $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$，并令 $\theta_2 = \pi - \theta_1$. 计算

$$I_j^{\boldsymbol{q}_i}(y) = \langle \boldsymbol{u}(\cdot; z_j), \mathbb{G}(\cdot, y)\boldsymbol{q}_i\rangle, \quad j = 1, \cdots, N, \tag{3.10}$$

极化为 $\boldsymbol{q}_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$ $i = 1, 2$，然后收集每个指标函数 $|I_j^{\boldsymbol{q}_i}(y)|$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \cdots, N$，的所有最大值点 $\tilde{z}_j^i$，这些点可视为重建源点。

现在，对于每个 $j = 1, 2, \cdots, N$，我们得到了两个重建源点 $\tilde{z}_j^i$, $i = 1, 2$。将 $[0, \pi)$ 均匀划分为 $\theta_\ell = \frac{\ell\pi}{N_q}$, $\ell = 1, 2, \cdots, N_q$.。然后对于每个 $\tilde{z}_j^i$, $i = 1, 2$，我们计算如下定义的指标函数：

$$I_j^i(\boldsymbol{q}_\ell) = \left\langle \boldsymbol{u}(\cdot; z_j), \mathbb{G}(\cdot, \tilde{z}_j^i)\boldsymbol{q}_\ell\right\rangle, \quad j = 1, \cdots, N, \tag{3.11}$$

其中 $\boldsymbol{q}_\ell = (\cos\theta_\ell, \sin\theta_\ell)^\top$. 对于每个 $i = 1, 2$，我们取 ℓ_j^i 使得

$$\left|I_j^i(\boldsymbol{q}_{\ell_j^i})\right| = \max_{\ell=1,\cdots,N_q}\left|I_j^i(\boldsymbol{q}_\ell)\right|.$$

此外，我们取 i_0 ，使得

$$\left|I_j^{i_0}(\boldsymbol{q}_{\ell_j^{i_0}})\right| = \max_{i=1,2}\left|I_j^i(\boldsymbol{q}_{\ell_j^i})\right|,$$

算法1： 根据总场确定源点和极化。

步骤1 **数据采集：** 测量数据 $\mathbb{U} = \{\boldsymbol{u}(x;\ z_j, \boldsymbol{p}_j) :\ x \in \Gamma_R, j = 1, \cdots, N\}$;

步骤2 **确定位置：**

(a) 选择一个采样区域 $\Omega\ \subset\ B_R$ 使得 $D \cup S\ \subset \Omega$，并生成采样区域 Ω 上的采样网格 $\mathcal{T}$。选择两个极化 $\boldsymbol{q}_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$，其中 $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\theta_2 = \pi - \theta_1$;

(b) 对于每个采样点 $y \in \mathcal{T}$,，计算 $I_j^{\boldsymbol{q}_i}(y)$、$i = 1, 2$, $j = 1, 2, \cdots, N$;

(c) 收集每个指标函数 $|I_j^{\boldsymbol{q}_i}(y)|$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \cdots, N$的最大值点 $\tilde{z}_j^i$;

步骤 3 **确定极化：**

(a) 定义采样偏振 $\boldsymbol{q}_\ell = \left(\cos\frac{\ell\pi}{N_q}, \sin\frac{\ell\pi}{N_q}\right)^\top$, $\ell = 1, 2, \cdots, N_q$;

(b) 对于每个 $j = 1, 2, \cdots, N$, 以及 $\ell = 1, 2, \cdots, N_q$, 计算指标函数 (3.11)，并取 ℓ_j^i 使得 $I_j^i(\boldsymbol{q}_{\ell_j^i}) = \max\limits_{\ell=1,2,\cdots,N_q} |I_j^i(\boldsymbol{q}_\ell)|$;

(c) 对于每个 $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$，我们取 i_0，使得

$$I_j^{i_0}(\boldsymbol{q}_{\ell_j^{i_0}}) = \max_{i=1,2} \left| I_j^i(\boldsymbol{q}_{\ell_j^i}) \right|,$$

并将 $\tilde{\boldsymbol{q}}_j = \boldsymbol{q}_{\ell_j^{i_0}}$ 作为极化 $\boldsymbol{p}_j$ 的近似

步骤 4 一旦极化 $\boldsymbol{p}_j$ 由 $\tilde{\boldsymbol{q}}_j$近似得到，我们进一步取由 (3.12) 定义的 $\tilde{z}_j$，作为源点 z_j的重建;

并取 $\tilde{\boldsymbol{q}}_j = \boldsymbol{q}_{\ell_j^{i_0}}$作为极化 $\boldsymbol{p}_j$的近似

Onc若极化 $\boldsymbol{p}_j,\ \ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$由 $\tilde{\boldsymbol{q}}_j$近似得到，我们将取 $\tilde{z}_j$，使得 t

$$\left| I_j^{\tilde{\boldsymbol{q}}_j}(\tilde{z}_j) \right| = \max_{i=1,2} \left| I_j^{\tilde{\boldsymbol{q}}_j}(\tilde{z}_j^i) \right| \tag{3.12}$$

作为精确源点 z_j.的重建

最后，将恢复源的反演方案总结在算法中 1.

4 重建障碍物

上一节中的源识别使我们能够通过从总场中减去入射波，将共反演问题转化为障碍物反散射问题。本节将进一步根据近似散射场确定障碍物。

由于未知源的存在，无法直接测量散射场。然而，根据第 3 节，可以从总场中恢复源点和极化。记 $\tilde{z}_j$和 $\tilde{\boldsymbol{p}}_j$、$j = 1$、$\cdots$、N为重建源点和极化方向。于是，通过从测量总场 $\boldsymbol{u}(x; z_j$、$\boldsymbol{p}_j)$ 中减去由数值源点 $\tilde{z}_j$ 引起的入射场$\boldsymbol{u}^i(x;\ \tilde{z}_j$、$\tilde{\boldsymbol{p}}_j)$，即可近似得到对应于 z_j 的散射场，即

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x; z_j, \boldsymbol{p}_j) = \boldsymbol{u}(x; z_j, \boldsymbol{p}_j) - \boldsymbol{u}^i(x; \tilde{z}_j, \tilde{\boldsymbol{p}}_j), \quad j = 1, \cdots, N. \tag{4.1}$$

于是，反问题简化为散射反问题：根据 ∂D 重建

$$\{\tilde{\boldsymbol{v}}(x; z_j, \boldsymbol{p}_j) : x \in \Gamma_R, j = 1, \cdots, N\}.$$

为便于阐述，我们主要考虑利用一个（精确或近似的）入射波重建障碍物。在第4.1节中，我们将针对传统的障碍物反散射问题提出一种新颖的牛顿型方法。不失一般性，我们将为更一般的弹性波反散射问题设计牛顿型方法，并将与 z_j 对应的散射场记为 $\boldsymbol{v}(x;\ z_j,\ \boldsymbol{p}_j)$。通过用近似散射场 $\tilde{\boldsymbol{v}}(x;\ z_j,\ \boldsymbol{p}_j)$替代散射场$(;\ ,\ \boldsymbol{p}_j)$，即可处理联合反演问题。下文中，我们始终假设：根据有关障碍物的某些先验信息，可以选取一个闭曲面 $\Lambda \subset D$，使得 ω^2 不是 Λ内部区域对应的狄利克雷特征值。

4.1 用层势近似波场

为建立迭代方案，我们首先将近似散射场表示为定义在辅助曲面 Λ 上的适当层势。由于这种表示依赖于维数，我们先考虑二维形式，然后讨论其向三维情形的推广。

利用辅助曲线 Λ，散射波 $\boldsymbol{v}$ 可表示为式 (2.7) 的形式，其中标量势函数 ϕ 和 ψ 分别由密度为 $g_1,\ g_2,$ 的单层势给出，即:

$$\phi(x) = \int_\Lambda \Phi_p(x,y) g_1(y) \mathrm{d}s(y), \tag{4.2}$$

$$\psi(x) = \int_\Lambda \Phi_s(x,y) g_2(y) \mathrm{d}s(y). \tag{4.3}$$

给定在 $\Gamma_R,$ 上的散射场 $\boldsymbol{v} = (v_1,\ v_2)^\top$，标量势函数 ϕ 和 ψ 应满足 $\nabla\phi + \mathbf{旋度}\psi = \boldsymbol{v}$ 于 $\Gamma_R,$ 因此密度 $\boldsymbol{g} = (g_1,\ g_2)^\top$ 满足以下积分方程:

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{g})(x) = \boldsymbol{v}(x), \quad x \in \Gamma_R, \tag{4.4}$$

其中算子 $\mathcal{S} : (L^2(\Lambda))^2 \to (L^2(\Gamma_R))^2$ 定义为

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{g})(x) = \int_\Lambda \mathbb{K}(x,y)\boldsymbol{g}(y)\mathrm{d}s(y),$$

其中 $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)^\top \in (L^2(\Lambda))^2,$，核由下式给出

$$\mathbb{K}(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\Phi_p(x,y) & \partial_{x_2}\Phi_s(x,y) \\ \partial_{x_2}\Phi_p(x,y) & -\partial_{x_1}\Phi_s(x,y) \end{bmatrix}.$$

因此，伴随算子 $\mathcal{S}^* : (L^2(\Gamma_R))^2 \to (L^2(\Lambda))^2$ 由下式给出

$$(\mathcal{S}^*\boldsymbol{\psi})(y) = \int_{\Gamma_R} \mathbb{K}^*(y,x)\boldsymbol{\psi}(x)\mathrm{d}s(x),$$

其中 $\mathbb{K}^*$ 是 $\mathbb{K}$ 的共轭转置，且 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2)^\top \in (L^2(\Gamma_R))^2.$

积分算子 $\mathcal{S}$ 具有解析核，因此（4.4）是严重病态的，这促使我们采用蒂ikhonov正则化，通过求解来获得正则化密度 $\boldsymbol{g}^\xi = (g_1^\xi,\ g_2^\xi)^\top$

$$(\xi\mathbb{I}_2 + \mathcal{S}^*\mathcal{S})\boldsymbol{g}^\xi = \mathcal{S}^*\boldsymbol{v}, \tag{4.5}$$

其中 $\xi > 0$ 是正则化参数。

通过求解 (4.5) 得到正则化密度函数 $\boldsymbol{g}^{\xi} = (g_1^{\xi},\ g_2^{\xi})^{\top}$ 后，散射场 $\boldsymbol{v}$ 的近似 $\boldsymbol{v}^{\xi} = (v_1^{\xi},\ v_2^{\xi})^{\top}$ 可表示为

$$\boldsymbol{v}^{\xi} = \nabla\phi^{\xi} + \mathbf{curl}\psi^{\xi},$$

其中，ϕ^{ξ} 和 ψ^{ξ} 分别通过将正则化密度 g_1^{ξ} 和 g_2^{ξ} 代入单层势表示 (4.2) 和 (4.3) 得到。具体而言，我们有

$$\boldsymbol{v}^{\xi}(x) = \int_{\Lambda} \mathbb{K}(x,y)\boldsymbol{g}^{\xi}(y)\mathrm{d}s(y). \tag{4.6}$$

与二维情形类似，也可以推导出势的三维表述。假设散射场 $\boldsymbol{v}$ 按照 (2.7) 分解为标量势 ϕ 和矢量势 $\boldsymbol{\psi}$:

$$\phi(x) = \int_{\Lambda} \Phi_p(x,y) g_p(y)\mathrm{d}s(y), \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \frac{1}{k_s^2}\mathbf{curlcurl}\int_{\Lambda} \Phi_s(x,y)\boldsymbol{g}_s(y)\mathrm{d}s(y), \tag{4.8}$$

其中，$g_p \in L^2(\Lambda)$ $\boldsymbol{g}_s = (g_{s1},\ g_{s2},\ g_{s3})^{\top} \in (L^2(\Lambda))^3$ 分别为标量密度和矢量密度。记 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)^{\top} \in \mathbb{S}^2$ 为 Γ_R的单位法向量，并令 $\nabla\phi + \mathbf{curl}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{v}$ 作用于 Γ_R。分别对上述方程与 $\boldsymbol{\nu}$取点积和叉积，得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nu}\cdot\nabla\phi + \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{curl}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v}, & \text{on } \Gamma_R, \\ \boldsymbol{\nu}\times\nabla\phi + \boldsymbol{\nu}\times\mathbf{curl}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{v}, & \text{on } \Gamma_R. \end{cases} \tag{4.9}$$

利用$\mathbf{curlcurl} = \nabla(\nabla\cdot) - \Delta$，很容易推导出$\mathbf{curl}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{curl}\int_{\Lambda}\Phi_s(x,\ y)\boldsymbol{g}_s(y)\mathrm{d}s(y)$。因此，在（4.9）中用（4.7）–（4.8）替换 ϕ 和 $\boldsymbol{\psi}$，经过直接计算可得

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{g})(x) = \int_{\Lambda}\mathbb{K}(x,y)\boldsymbol{g}(y)\mathrm{d}s(y) = \boldsymbol{t}(x), \quad x \in \Gamma_R, \tag{4.10}$$

其中

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\nu}}\Phi_p & (\boldsymbol{\nu}\times\nabla\Phi_s)^{\top} \\ \boldsymbol{\nu}\times\nabla\Phi_p & \nabla\Phi_s\otimes\boldsymbol{\nu} - \partial_{\boldsymbol{\nu}}\Phi_s\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_p \\ \boldsymbol{g_s} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{v} \end{bmatrix}.$$

由于（4.10）中的算子 $\mathcal{S}: (L^2(\Lambda))^4 \to (L^2(\Gamma_R))^4$ 定义良好且具有解析核，因此采用 Tikhonov 正则化策略求解病态方程（4.10）：

$$(\xi\mathbb{I}_4 + \mathcal{S}^*\mathcal{S})\boldsymbol{g}^{\xi} = \mathcal{S}^*\boldsymbol{t}, \tag{4.11}$$

其中，$\xi > 0$ 是正则化参数，$\mathbb{I}_4$ 是 4×4 单位矩阵，而 $\mathcal{S}^*: (L^2(\Gamma_R))^4 \to (L^2(\Lambda))^4$ 是 $\mathcal{S}$的伴随算子。

给定正则化密度 $\boldsymbol{g}^{\xi} = \left(g_p^{\xi},\ \boldsymbol{g}_s^{\xi}\right)^{\top}$，近似散射场 $\boldsymbol{v}^{\xi} = (v_1^{\xi},\ v_2^{\xi},\ v_3^{\xi})^{\top}$可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^{\xi}(x) &= \nabla\phi^{\xi}(x) + \mathbf{curl}\boldsymbol{\psi}^{\xi}(x) \\ &= \nabla\int_{\Lambda}\Phi_p(x,y)g_p^{\xi}(y)\mathrm{d}s(y) + \frac{1}{k_s^2}\mathbf{curlcurlcurl}\int_{\Lambda}\Phi_s(x,y)\boldsymbol{g}_s^{\xi}(y)\mathrm{d}s(y) \\ &= \int_{\Lambda}\left(\nabla\Phi_p(x,y)g_p^{\xi}(y) + \mathbf{curl}(\Phi_s(x,y)\boldsymbol{g}_s^{\xi}(y))\right)\mathrm{d}s(y). \end{aligned}$$

4.2 显式梯度线性化

获得试探场 $\boldsymbol{v}^\xi$ 后，即可显式计算梯度。在二维中，近似散射场 $\boldsymbol{v}^\xi$ 的梯度可计算为

$$\nabla \boldsymbol{v}^\xi = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} v_1^\xi & \partial_{x_2} v_1^\xi \\ \partial_{x_1} v_2^\xi & \partial_{x_2} v_2^\xi \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
\partial_{x_1} v_1^\xi &= \int_\Lambda \left(\partial^2_{x_1 x_1} \Phi_p(x,y) g_1^\xi(y) + \partial^2_{x_1 x_2} \Phi_s(x,y) g_2^\xi(y) \right) \mathrm{d}s(y), \\
\partial_{x_2} v_1^\xi &= \int_\Lambda \left(\partial^2_{x_1 x_2} \Phi_p(x,y) g_1^\xi(y) + \partial^2_{x_2 x_2} \Phi_s(x,y) g_2^\xi(y) \right) \mathrm{d}s(y), \\
\partial_{x_1} v_2^\xi &= \int_\Lambda \left(\partial^2_{x_1 x_2} \Phi_p(x,y) g_1^\xi(y) - \partial^2_{x_1 x_1} \Phi_s(x,y) g_2^\xi(y) \right) \mathrm{d}s(y), \\
\partial_{x_2} v_2^\xi &= \int_\Lambda \left(\partial^2_{x_2 x_2} \Phi_p(x,y) g_1^\xi(y) - \partial^2_{x_1 x_2} \Phi_s(x,y) g_2^\xi(y) \right) \mathrm{d}s(y).
\end{aligned}$$

类似地，近似散射场 $\boldsymbol{v}^\xi$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的梯度可以显式计算为 3×3 张量 $\nabla^\top \boldsymbol{v}^\xi$，其第（$i$，$j$）项为 $\left(\partial_{x_j} v_i^\xi\right)$，$i$，$j=1$，2，3。

基于近似散射场的梯度，我们现在可以提出用于恢复 ∂D的牛顿型迭代格式。给定入射场 $\boldsymbol{u}^i$ 和近似散射场 $\boldsymbol{v}^\xi$，我们定义算子 F^ξ，将边界曲线 γ映射到近似总场 $\boldsymbol{u}^\xi = \boldsymbol{u}^i + \boldsymbol{v}^\xi = (u_1^\xi, \cdots, u_d^\xi)^\top$，供后续使用，记

$$F^\xi : \gamma \mapsto \boldsymbol{u}^\xi. \tag{4.12}$$

为了寻找总场 $\boldsymbol{u}^\xi$ 为零的狄利克雷边界，我们只需找到边界曲线 γ 的参数化 p，使得

$$F^\xi(p) = \mathbf{0}, \quad p \in \gamma. \tag{4.13}$$

现在，我们考虑上述方程的线性化。设 γ_j, $j = 0, \mathbf{1}, \cdots, n$ 是边界 ∂D的近似，我们希望求得 γ_{n+1}，使得 $F(p_{n+1}) = 0.$。注意到映射 F 是非线性的，因此我们通过以下步骤更新近似

$$\begin{cases} F^\xi(p_n) + F'^\xi(p_n) h_n = \mathbf{0}, \\ p_{n+1} = p_n + h_n, \end{cases} \tag{4.14}$$

其中，h_n 是第 n 次迭代中的位移，式 **(4.14)** 中的梯度 $F'^\xi = \nabla^\top \boldsymbol{u}^\xi$ 是一个 $d \times d$ 张量，其元素可通过以下公式显式计算

$$\left[F'^\xi\right]_{ij} = \partial_{x_j} u_i^\xi, \quad i,j = 1, \cdots, d.$$

备注 4.1. 上述过程可以很容易地推广到多个入射波的情形。例如，这里简要提及涉及多个源的三维修改。其他类似细节从略。

令 $\boldsymbol{v}_j(j=1,\cdots,N)$ 表示由入射波 $\boldsymbol{u}_j^i(j=1,\cdots,N)$ 产生的散射场。相应地，(4.10) 中的向量函数 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 应替换为矩阵值函数

$$\boldsymbol{g}=\left[\boldsymbol{g}_1\cdots\boldsymbol{g}_N\right],\quad \boldsymbol{t}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v}_N\\ \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{v}_N\end{bmatrix}.$$

于是，近似散射场 $\boldsymbol{v}_j^\xi$ 可表示为由正则化密度 $\boldsymbol{g}_j^\xi(j=1,\cdots,N)$ 生成的层势。相应地，算子 F^ξ 按列扩展为以下形式：

$$F^\xi:\gamma\mapsto\boldsymbol{u}^\xi=[\boldsymbol{u}_1^\xi\cdots\boldsymbol{u}_N^\xi],$$

其中，$\boldsymbol{u}_j^\xi=\boldsymbol{u}_j^i+\boldsymbol{v}_j^\xi(j=1,\cdots,N)$ 为近似总场。

4.3 星形近似

为了数值实现迭代，我们仍需要用适当的方式表示可容许曲面 $p(t)$，以近似 ∂D。因此，我们简要介绍边界曲线的二维星形近似，其参数形式为

$$p(t)=\{r(t)(\cos t,\sin t):t\in[0,2\pi]\},$$

其中，$r\in C^2([0,2\pi],\mathbb{R}_+)$ 表示径向函数。为简便起见，下文也用 r 表示对 ∂D 的近似。为了数值近似 r，我们假设 r 表示为次数小于或等于 $M\in\mathbb{N}_+$ 的三角多项式，即：

$$r(t)=a_0+\sum_{\ell=1}^{M}(a_\ell\cos\ell t+b_\ell\sin\ell t).$$

对于径向函数的迭代序列 $\{r_n\}$，第 n 步的位移相应地写作 r_n^h，即 $r_{n+1}=r_n+r_n^h$，$n=1,2,\cdots$。或者，若将 $\boldsymbol{c}=(a_0,a_1,\cdots,a_M,b_1,\cdots,b_M)^\top$ 记为 r 的傅里叶系数，则迭代过程通过以下更新来实现：$\boldsymbol{c}_{n+1}=\boldsymbol{c}_n+\boldsymbol{c}_n^h$ 其中，$\{\boldsymbol{c}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{c}_n^h\}$ 分别是 r_n 和 r_n^h 的傅里叶系数。

现在，迭代过程 (4.14) 可改写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^\xi(r_n\hat{x})+(\nabla^\top\boldsymbol{u}^\xi(r_n\hat{x})\hat{x})r_n^h=\boldsymbol{0},\\ r_{n+1}=r_n+r_n^h,\end{cases}$$

或者更具体地说，

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}^\xi(B\boldsymbol{c}_n\hat{x})+(\nabla^\top\boldsymbol{u}^\xi(B\boldsymbol{c}_n\hat{x})\hat{x})B\boldsymbol{c}_n^h=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{c}_{n+1}=\boldsymbol{c}_n+\boldsymbol{c}_n^h,\end{cases}$$

其中 $\hat{x}(t)=(\cos t,\sin t)^\top$ 以及 $B(t)=(1,\cos t,\cdots,\cos Mt,\sin t,\cdots,\sin Mt)$。为进一步离散化，设 $t_j=2\pi j/J$，$j=1,\cdots,J$，为一组求积点，则可通过求解线性系统得到更新量 $\boldsymbol{c}_n^h$

$$(\nabla^\top\boldsymbol{u}^\xi(B(t_j)\boldsymbol{c}_n\hat{x}(t_j))\hat{x}(t_j))B(t_j)\boldsymbol{c}_n^h=-\boldsymbol{u}^\xi(B(t_j)\boldsymbol{c}_n\hat{x}(t_j)),\quad j=1,\cdots,J.$$

算法 2:	用于弹性障碍物反问题的牛顿型方法。
步骤 1	通过从总场测量数据 Γ_R 中减去精确或近似的入射场，在 Γ_R 上生成近似散射数据 根据总场测量数据 $\mathbb{U}$ 近似入射场;
步骤 2	选择一个辅助曲面 $\Lambda \subset D$，并将近似散射场表示为 层势，方法是求解 (4.5) 或 (4.11);
步骤 3	为 ∂D 选择一个初始猜测 $\gamma^{(0)}$，并设定误差容限 ε. 。令 $n = 1$;
步骤 4	求解 (4.14) 以更新近似 p_n，并评估误差 E_n;
步骤 5	如果 $E_n > \varepsilon$，则设置 $n = n + 1$ 并转到 **步骤 4**。否则，取当前的 近似 p_n 作为 ∂D.的最终重建

通常，对于迭代算法，我们最终需要设置停止准则来终止迭代过程。为方便起见，我们用相对误差来量化迭代的收敛情况

$$E_n = \frac{\|h_n\|_{L^2}}{\|p_{n-1}\|_{L^2}}, \tag{4.15}$$

并选择某个常数 $\varepsilon > 0$. 一旦 $E_n < \varepsilon$，即可停止更新过程。关于确定障碍物的反演算法的描述，请参见算法 2。

5 数值实验

在本节中，我们将进行若干数值实验，以验证所提出方法的效率和有效性。在数值实验中，我们通过将正问题重新表述为耦合的边界积分方程（参见 [20, 21]）来生成合成散射场，并采用基于 Alpert 求积的 Nystr¨om 方法求解这些积分方程。接收器的位置选为 $x_r = 10(\cos\ \theta_r,\ \sin\ \theta_r)$ $\theta_r = \pi r/60,\ \ r = 1,\ 2,\ \cdots,\ 120$。正向求解器生成总场数据

$$\boldsymbol{u}(x_r; z_j), \quad r = 1, \cdots, 120,\ j = 1, \cdots, N.$$

为检验所提出算法的稳定性，在测量数据中加入随机噪声。含噪总场数据按以下公式给出:

$$\boldsymbol{u}^{\epsilon} = \boldsymbol{u} + \epsilon r_1 |\boldsymbol{u}| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi r_2},$$

其中 $r_1,\ \ r_2$ 是两个均匀分布的随机数，取值范围为 -1 至 1，$\epsilon > 0$ 为噪声水平。

在以下实验中，Lam´e 常数设为 $\lambda = \mu = 1$。用于定位源点的采样区域设为 $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$，其中包含 200×200 个等间距的采样网格点。为确定极化 $\boldsymbol{p}$，我们在算法 1的 **步骤 3** 中设置 $N_q = 40$，即在采样角度 $\theta_\ell = \frac{\ell\pi}{40}$，$\ell = 0,\ 1,\ \cdots,\ 39$ 上寻找 $\boldsymbol{p}$。除非另有说明，噪声水平设为 $\epsilon = 5\%$。辅助曲线选为以原点为圆心、半径为 0。7。 辅助曲线上的积分通过采用 100 个网格点的梯形法则进行数值近似。正则化参数 ξ 设为 10^{-2}。障碍物边界参数化如下:

$$L\text{-leaf:} \quad x(t) = (1 + 0.2\cos Lt)(\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad L = 3, 5, \tag{5.1}$$

$$\text{Kite:} \quad x(t) = (\cos t + 0.65\cos 2t - 0.65, 1.5\sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi. \tag{5.2}$$

5.1 反源问题

在本小节中，我们测试算法1利用测得的总场重建源的性能，即现在考虑障碍物未知时的源识别。

例 5.1.1. 在第一个例子中，我们考虑根据含噪总场数据重建源点的位置和极化。角频率设为 $\omega = 8.$。两个初始极化设为 $\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^\top$和 $\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^\top$。源位置和极化以及重建结果列于表1。如表1所示，根据含噪总场数据，所有位置和极化都得到了良好的重建。值得注意的是，尽管不同点的极化各不相同，但所有极化都得到了良好恢复。

此外，我们指出，有必要像第 3.2 节所做的那样，使用不同的辅助极化 $\boldsymbol{q}_i,\ i = 1, 2$，两次确定源位置和极化。否则，可能无法正确重建源（位置或极化）。为阐明这一点，我们进一步考虑表 2–表3 中四个源点及其相应极化的重建。表 2 显示，位置可以得到良好重建。从表3可以看出，极化的重建在很大程度上取决于 $\boldsymbol{q}_i$ 的选择。然而，经过第 3.2 节所述的第二次校准后，极化也能够得到稳定且良好的恢复。这些结果表明，我们的方法能够根据含噪总场数据良好地识别源位置及其相应极化。

表1：位置和极化的比较。

	精确源		重构源	
	位置	极化	位置	极化
点 1	$(3, 0)$	$(0.86, 0.5)$	$(2.98, -0.03)$	$(0.89, 0.45)$
点2	$(1.5, 2.59)$	$(0.5, 0.86)$	$(1.47, 2.56)$	$(0.52, 0.85)$
点3	$(-1.5,\ 2。59)$	$(0, 1)$	$(-1.47, 2.62)$	$(-0.07,\ 0。99)$
点 4	$(-3,\ 0)$	$(-0.5,\ 0。86)$	$(-3.04,\ 0.03)$	$(-0.52,\ 0。85)$
点 5	$(-1.5,\ -2.59)$	$(-0.86,\ 0.5)$	$(-1.53,\ -2.62)$	$(-0.85,\ 0。52)$

表 2：四个点源（位置）的重建。

	点 1	点2	点3	点 4
精确	$(3,\ 0)$	$(0,\ 3)$	$(-3,\ 0)$	$(0, -3)$
重建结果	$(2.98, -0.03)$	$(-0.03, 2.98)$	$(-3.04,\ 0。03)$	$(-0.03,\ -2.98)$

5.2 障碍物逆散射问题

在本小节中，我们测试在源已知的假设下，算法 2 根据散射场恢复障碍物的性能。本小节所有图中，

表3：四个点源的重建（极化）。

	极化	$\boldsymbol{q}_{\ell_j^1}$	$\boldsymbol{q}_{\ell_j^2}$	$\tilde{\boldsymbol{q}}_j$
点 1	$(0.76, 0.64)$	(0。76，0。64)	$(-0.99,\ 0.07)$	$(0.76, 0.64)$
点2	$(0, 1)$	(0，1)	(0，1)	(0，1)
点3	$(-0.71,\ 0.71)$	$(0.99, 0.07)$	$(-0.71,\ 0$。71)	$(-0.71,\ 0.71)$
点 4	$(-1,\ 0)$	(0。80，0。58)	$(-1,\ 0)$	$(-1,\ 0)$

红色实线表示精确边界，黑色虚线表示重建边界。

例 5.2.1. 在本例中，我们采用第 4 节提出的牛顿型方法来重建三叶形和风筝形障碍物。这里，12 个源点等间距分布在半径为 $R = 3.$ 的测量圆上。极化方向选为 $\boldsymbol{p} = (\cos(\pi/3),\ \sin(\pi/3))$。

我们首先考虑三叶形障碍物的重建。取 $\omega = 5$，8 和 10，给出图 2 中三叶形障碍物的重建结果。从图 2 可以看出，利用三个角频率即可很好地重建三叶形障碍物。

此外，我们考虑风筝形障碍物的重建。令 ω 为 3，5 和 6，我们展示了图 3–图 4 中风筝形障碍物的重建结果。可以看出，重建结果十分准确。

在图2–图4中，绿色虚线表示牛顿型方法的初始猜测。从结果中可以很容易看出，无论障碍物是否为星形，该方法都表现良好。特别是对于风筝形障碍物，使用所提出的方法可以很好地重建其两个翅膀和凹区域。

此外，图 3 第二行绘出了相对误差估计量 E_n （定义见（4.15））随迭代次数的变化曲线。从误差曲线可以看出，相对误差估计量 E_n 快速下降，这表明我们的方法收敛很快。

例5.2.2. 在第二个例子中，我们考虑星形障碍物的重建，其边界曲线的径向函数 $r(t)$通过以下过程随机生成：

- 在整数集合 $\{8, 9, \cdots, 20\}$ 中随机选择 N_t，并生成节点 $T_t = 2t\pi/N_t,\quad t =$0，1，$\cdots$，$N_t - 1$;

- 对于每个 T_t，我们随机生成径向网格节点 $r(T_t) \sim \mathcal{U}[0.8, 1.8]$，即 $r(T_t)$ 在 $[0.8, 1.8].$ 中服从均匀分布。在此设定下，边界曲线位于内半径为 0。8、外半径为 1。8 的环形区域内;

- 给定随机径向网格节点 $(T_t,\ r(T_t))$ $t = 0,\ 1,\ \cdots,\ n_T - 1$，我们通过对 $(T_t,\ r(T_t))$ 进行三次样条插值，生成径向函数 $r(t)$。此外，为确保生成的星形曲线闭合，需要施加周期条件 $r(T_0) = r(T_{n_T})$;

一些随机生成的此类形状示例见图5。图5中，红色实线表示障碍物的边界，黑色小圆圈表示随机生成的径向网格节点 $r(T_t)$，黑色实线标示径向边界，而半径分别为 0.8 和 1.4 的蓝色虚线圆则界定了包含边界曲线的区域。

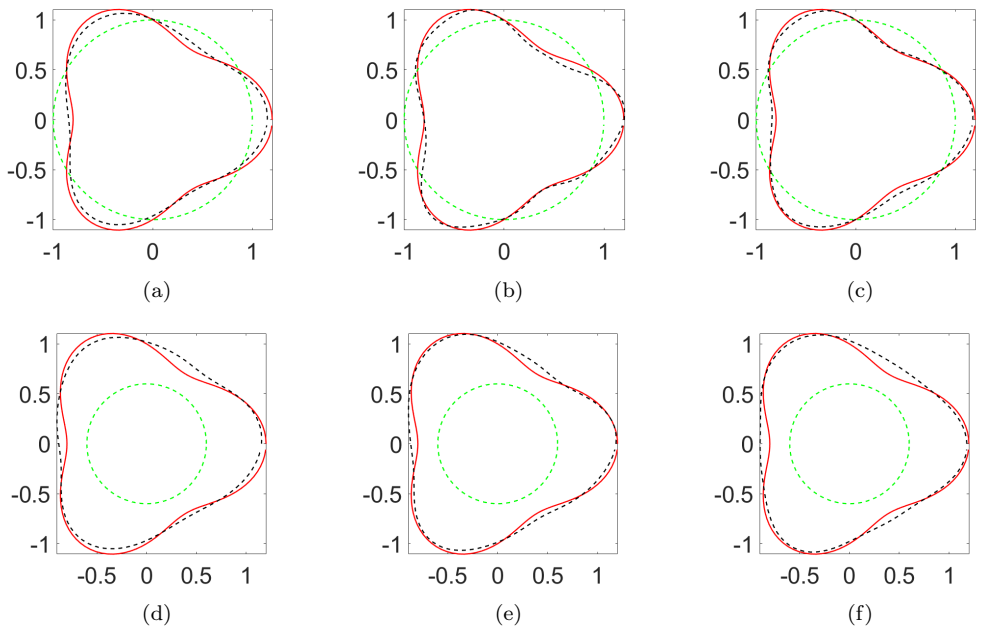

图 2：不同频率下三叶形障碍物的重建。左列： $\omega = 6$；中列： $\omega = 8$；右列： $\omega = 10$。

取 $\omega = 9$，我们在图6中展示了不同初始猜测下的重建结果。从图6可以看出，新颖的牛顿型方法能够很好地重建非对称障碍物。尽管初始猜测不同，这些算法的表现都令人满意。此外，我们发现，与非凸部分相比，非对称障碍物的凸部分重建效果更好，这是因为凸域能够得到更充分的照射，且总场为我们提供了更多几何信息。

在本小节中，我们通过两个数值实验，从散射场数据中重建障碍物，以测试新型牛顿法的性能。尽管牛顿法不涉及正向求解器，但重建结果相当准确。

5.3 共反演问题

本小节将算法1与算法 2相结合，旨在根据总场对障碍物-源对进行共反演。在本小节的每个示例中，我们假设所有源的极化方向固定，并专注于重建源位置和障碍物形状。在整个小节中，障碍物的初始猜测设为以原点为圆心的单位圆。极化选为$\boldsymbol{p} = (\cos(\pi/5),\ \sin(\pi/5))^\top$ 和 $\boldsymbol{q} = (\cos(\pi/4),\ \sin(\pi/4))^\top$.

在重建相关图中，绿色实线表示障碍物的精确边界，蓝色虚线表示重建的边界，黑色“+”标记和小红圆分别表示精确源点和重建源点。

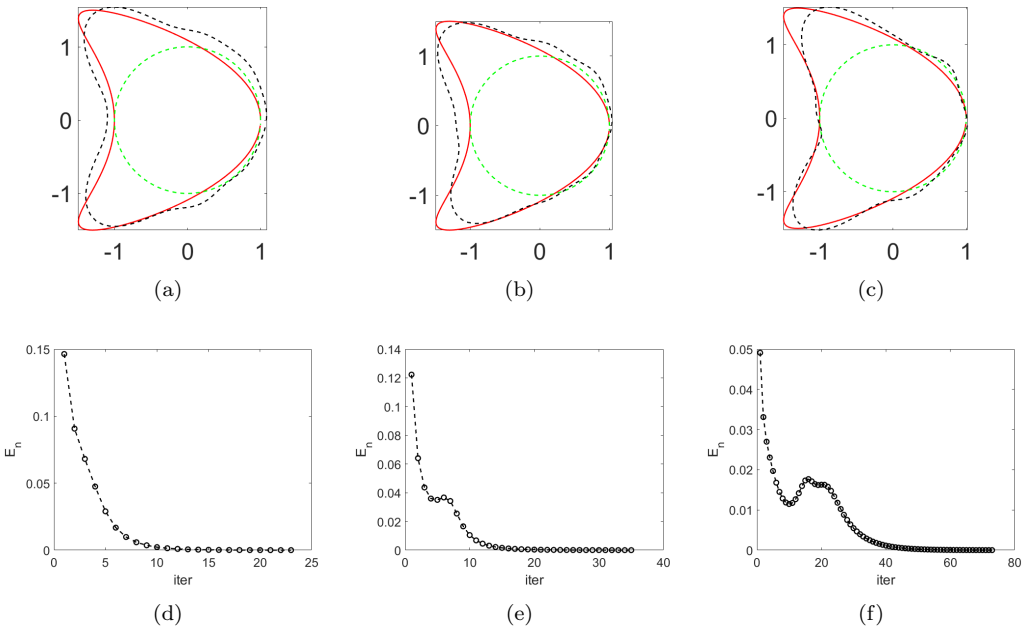

图 3：不同频率下风筝形障碍物的重建。左列： $\omega = 3$；中列： $\omega = 4$；右列： $\omega = 6$。

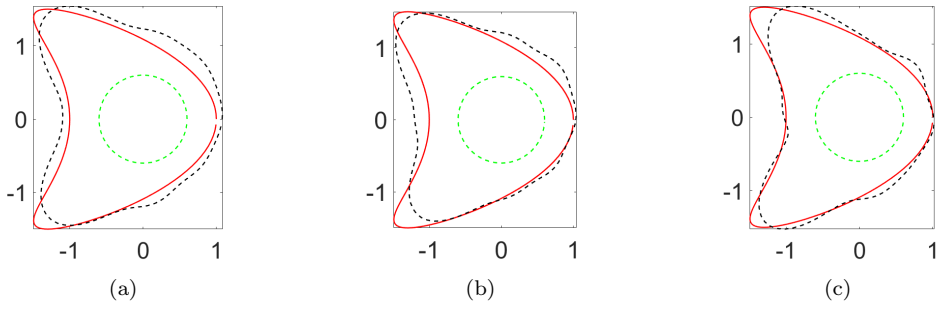

图 4：初始猜测不同于图 3 中初始猜测的风筝形障碍物重建。(a) $\omega = 3$；(b) $\omega = 4$；(c) $\omega = 6$。

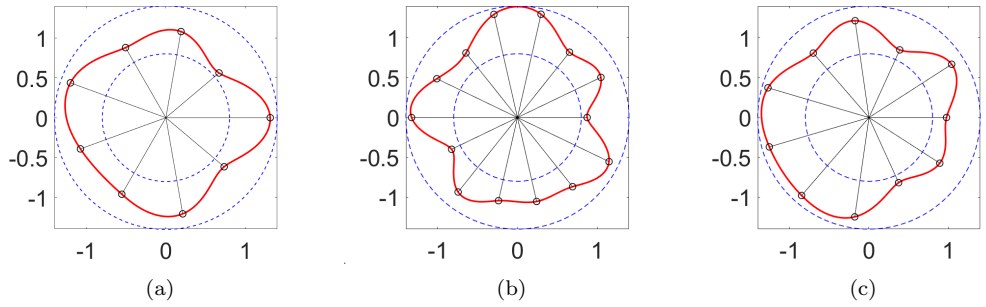

图5：随机生成形状的示意图。

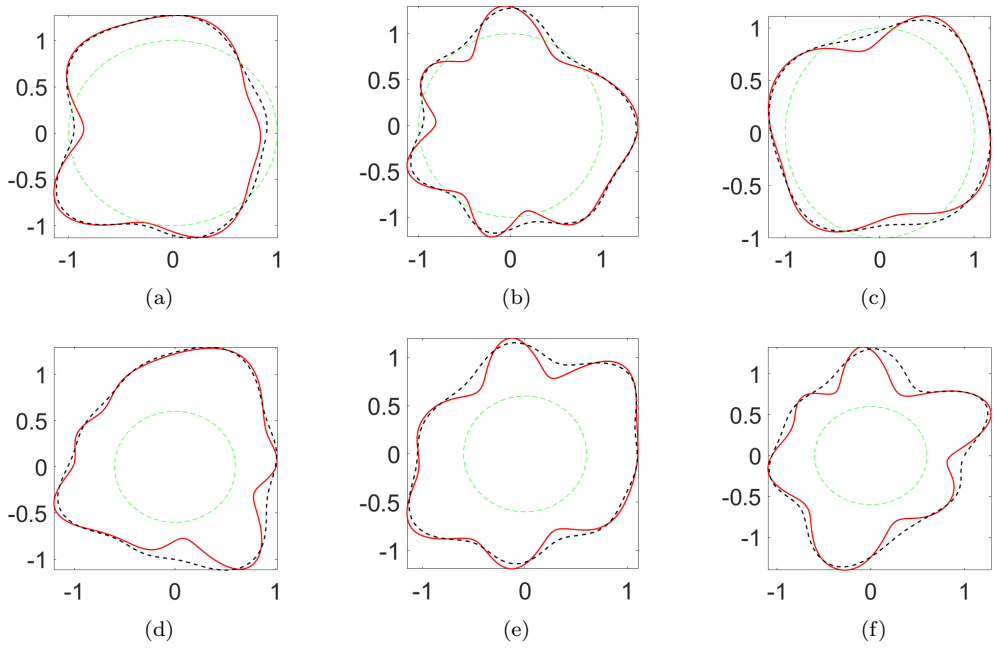

图6：重建非对称形状的障碍物。

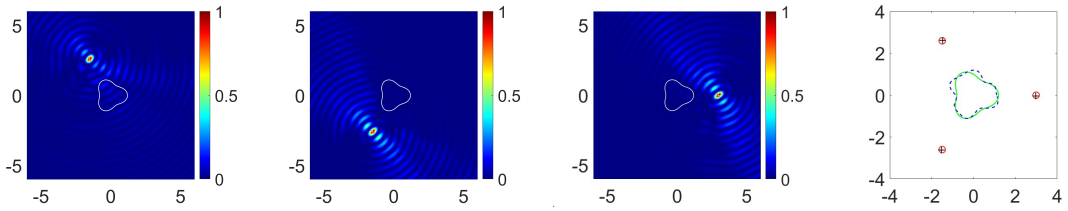

图7：不同分布下障碍物和源点的重建。

表 4：图8中极化的重建

图 $\tilde{\boldsymbol{q}}$	8(a) (0.8088, 0.5881)	8(b) (0.8172, 0.5763)	8(c) (0.8104, 0.5859)
图 $\tilde{\boldsymbol{q}}$	8(d) (0.8083, 0.5887)	8(e) (0.8099, 0.5881)	8(f) (0.7992, 0.6060)

示例 5.3.1。 本例中，我们考虑重建 L 叶形（$L = 3, 5$）障碍物及其激励源点。

图7展示了三叶形障碍物及三个源点的重建结果。在图7(a)–图7(c)中，我们展示了采样区域 Ω. 上的成像函数 $I_j(y)$ $j = 1,2,3$。可以清楚地看到，每个成像函数都在源点处达到峰值，并且整体上重建出了障碍物。正如后续数值实验所示，确定更多源点后，可以提高障碍物的重建质量。

通过选取不同的角频率，我们在图8中展示了不同障碍物—源组合的重建结果，这表明障碍物和源点都能够得到良好的重建。此外，可以看出，源点分布会影响障碍物重建的准确性。这一现象自然反映了源与散射体之间的波场相互作用。

接下来，我们将重建得到的极化方向与精确值 $\boldsymbol{p} = (\cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}) \approx$(0。8090，0。5878)进行比较。在表 4 中，我们列出了与图8对应的极化。表 4 显示，极化也能够得到良好的重建。因此，我们的方法能够从总场中重建障碍物、其激励源点以及极化方向。

在图9中，我们考察了源相对于障碍物局限于有限角度扇区区域的情形。显然，所有源点都得到了良好恢复，但只有障碍物的照射部分能够轻易重建。由于散射体未被源包围，传感器无法从后方充分感知几何信息，因此“阴影区域”的恢复分辨率较低。

例 5.3.2. 本例讨论风筝形障碍物及相应源的重建。图 10 展示了重建结果，以说明源点数量的影响。这些结果表明，源位置始终可以得到良好的

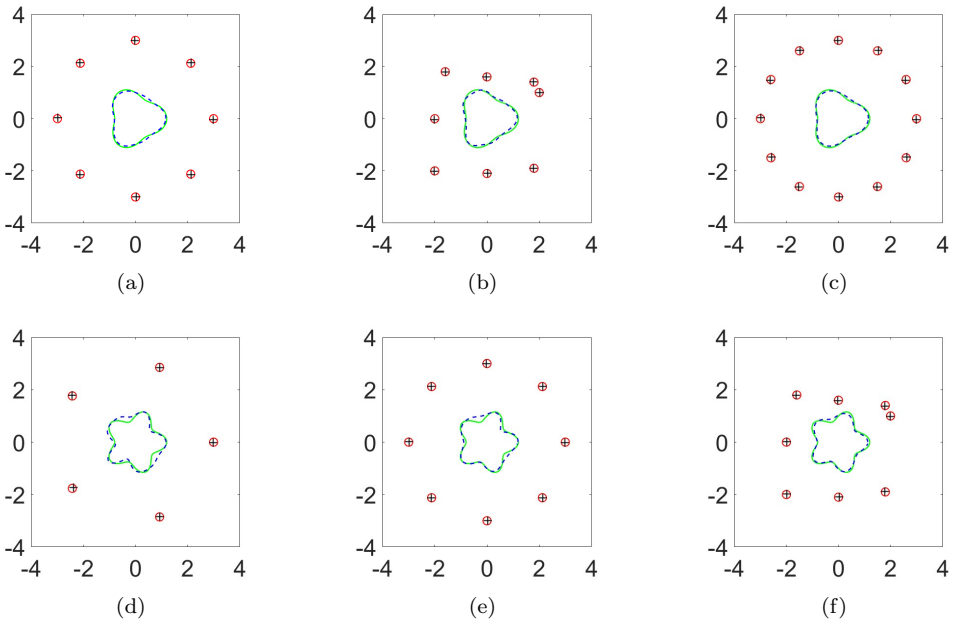

图8：障碍物及不同分布的源点重建。上排：$\omega = 6$；下排： $\omega = 9$。

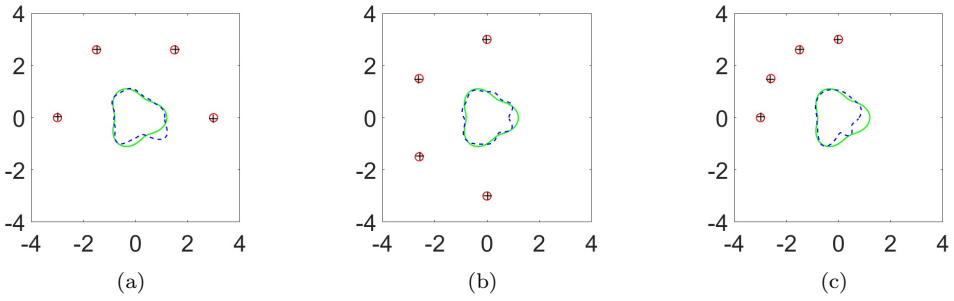

图9：部分照明条件下障碍物及源点的重建。

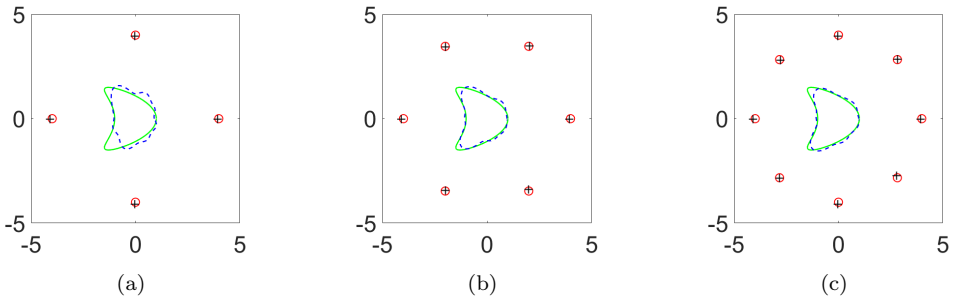

图10：使用 $\omega = 6$ 对风筝和源点进行反演。

表5：图8和图10中障碍物重建的计算时间

图	8(a)	8(b)	8(c)	10(a)	10(b)	10(c)
CPU（秒）	29.17	74.32	81.61	39.43	38.59	39.35
iter	29	75	81	38	37	38

已识别。此外，除仅有少量照明源可用的情况外，障碍物形状也能够得到较为满意的重建；例如，参见图10(d)。我们想强调的是，与典型的逆散射问题不同，在后者中，入射波通常可以人为布置以适应重建，而在联合反演问题中，源点通常并不由我们支配。因此，图10(d)所示的精度较低的重建是由于信息量不足造成的，而数据缺失可能不可避免地发生。

我们在表5中列出了各次重建所需的计算CPU时间，以量化所提出算法的效率。数值实验中的所有代码均使用MATLAB编写，并在英特尔酷睿2.6 GHz笔记本电脑上运行。由于每次迭代都不需要求解任何正问题，计算成本较低。更重要的是，这为将我们的算法扩展到三维重建提供了一种计算成本可承受的可行性依据。

例5.3.3。 在最后一个例子中，我们测试了利用含噪总场对非对称障碍物及其激励源点进行共反演。该非对称障碍物按照例5.1.2中所述的步骤构造。采用 $\omega = 8$ 得到的重建结果如图11所示。

如图11所示，所有源点都得到了良好的重建。对于障碍物，与凹部相比，凸部能够得到更好的重建，这是因为凸部受到的照射更充分。

6 结论

我们提出了一种用于弹性联合反演问题的新方法，可根据测量总场确定刚性障碍物及其激励点源。我们提出了一种直接采样法，从总

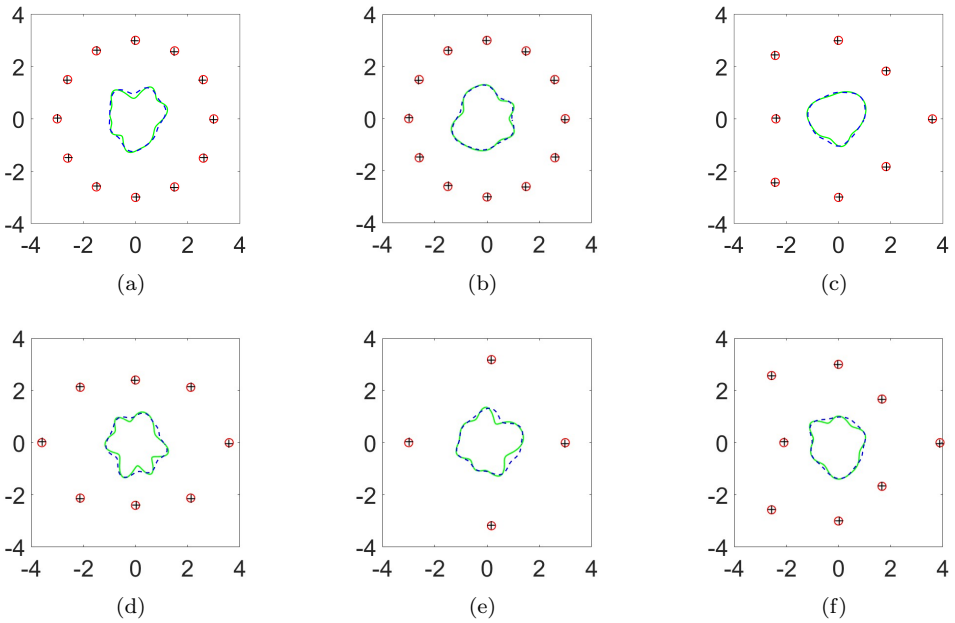

图11：非对称障碍物和源点的重建。

场测量中恢复源点及其相应的极化方向。通过从总场中减去重建源点产生的入射波，将联合反演问题改写为障碍物反问题的子问题后，我们提出了一种新颖的牛顿型方法，将散射场近似为适当的层势。从理论上，我们分析了联合反演的唯一性，以及指示函数的指示行为，并给出了形状导数的显式公式。值得指出的是，指示函数和牛顿型方法不仅可用于联合反演问题，也可独立用于求解反源问题和反散射问题。我们算法的一项显著优势是完全不依赖任何正问题的解，因此该方法易于实现且速度快。最后，我们进行了若干数值实验，结果表明，所提出的采样迭代方法能够利用含噪总场数据，良好地同时重建源和障碍物。

我们认为，本工作的基本思路可以应用于许多其他类似的反散射模型，例如声学和电磁学中的成像。由于时间和计算资源有限，目前尚未开展三维数值实验。此外，迭代方法的收敛性等理论问题尚未经过数学分析。我们目前正在进行的工作以及未来的研究将继续探索这些相关方向。

致谢

Yan Chang 和 Yukun Guo 获国家自然科学基金项目（11971133）资助。Hongyu Liu 获香港研究资助局普通研究基金（项目 12302919、12301420 和 11300821）资助，以及

国家自然科学基金委员会／研究资助局联合研究基金（项目 N CityU 101/21）、法国—香港 ANR／研究资助局联合研究资助和 A-CityU203/19 的资助。张德悦获国家自然科学基金项目（12171200）资助。

附录：球内 $-\Delta^*$ 的狄利克雷特征值重数

本附录给出球内负拉梅 ′ 算子的狄利克雷特征值的重数。对于 $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，分别用 J_n 和 j_n 表示 n 阶贝塞尔函数和球贝塞尔函数。

引理 6.1。对于 $r = |x|$ 和 $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，令

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} k_p r J_n'(k_p r) & \mathrm{i}n J_n(k_s r) \\ \mathrm{i}n J_n(k_p r) & -k_s r J_n'(k_s r) \end{vmatrix}, \tag{A.1}$$

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} k_p r j_n'(k_p r) & n(n+1) j_n(k_s r) \\ j_n(k_p r) & j_n(k_s r) + k_s r j_n'(k_s r) \end{vmatrix}. \tag{A.2}$$

那么，球内 $-\Delta^*$ 的狄利克雷特征值重数之和为

$$N_0 := \begin{cases} \displaystyle\sum_{p_{nl}<R} (2n+1), & d = 2, \\ \displaystyle\sum_{t_{nl}<k_s R} (2n+1) + \sum_{q_{nl}<R} (2n+1), & d = 3, \end{cases} \tag{A.3}$$

其中，p_{nl}、q_{nl} 和 $t_{nl}(l = 0,\ 1,\ \cdots;\ n = 0,\ 1,\ \cdots)$ 分别是 l 阶 P_n、Q_n 和 j_n 的第 l 个正零点，即 $P_n(p_{nl}) = Q_n(q_{nl}) = j_n(t_{nl}) = 0$。

证明。我们考虑 $B_R \subset \mathbb{R}^d$ 内的狄利克雷特征值问题：

$$\begin{cases} \Delta^* \boldsymbol{v} + \omega^2 \boldsymbol{v} = \mathbf{0}, & \text{in } B_R, \\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0}, & \text{on } \Gamma_R. \end{cases} \tag{A.4}$$

(i) $d = 2$。在二维情形下，(A.4) 的特征函数 $\boldsymbol{v}$ 可由 (2.7) 分解为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v}_s = \nabla\phi + \mathbf{旋度}\psi$，其中标量函数 ϕ 和 ψ 可表示为

$$\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n J_n(k_p|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \quad \psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n J_n(k_s|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{A.5}$$

其中极坐标为 $x = |x|(\cos\theta, \sin\theta)^\top$，相应的系数为 ϕ_n 和 ψ_n。定义 $\boldsymbol{e}_\rho = (\cos\theta, \sin\theta)^\top$ 以及 $\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)^\top$，则由

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{|x|}\frac{\partial w}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta, \quad \mathbf{curl} w = \frac{1}{|x|}\frac{\partial w}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\rho - \frac{\partial w}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\theta,$$

我们有

$$\boldsymbol{v}_p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n \nabla\left(J_n(k_p|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n \left(k_p J_n'(k_p|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{\mathrm{i}n}{|x|} J_n(k_p|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right),$$

$$\boldsymbol{v}_s(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n\mathbf{curl}\left(J_n(k_s|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi_n\left(\frac{\mathrm{i}n}{|x|}J_n(k_s|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\boldsymbol{e}_\rho-k_sJ_n'(k_s|x|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right).$$

根据狄利克雷边界条件（$\boldsymbol{v}_p+\boldsymbol{v}_s$）$|_{\Gamma_R}=\mathbf{0}$ 和正交性 $\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{e}_\theta=0$，我们得到

$$\begin{cases}k_pRJ_n'(k_pR)\phi_n+\mathrm{i}nJ_n(k_sR)\psi_n=0,\\ \mathrm{i}nJ_n(k_pR)\phi_n-k_sRJ_n'(k_sR)\psi_n=0,\end{cases}\qquad\forall n=1,2,\cdots.$$

此外，根据 [16, 定理 2.7], ，狄利克雷特征值的重数为

$$\sum_{q_{nl}<R}(2n+1),$$

其中，q_{nl} 是 (A.1) 中定义的 P_n 的第 l个零点。

(ii) $d=3$。令$\hat{x}=x/|x|\in\mathbb{S}^2$和 $Y_n^m(\hat{x})(m=-n,\cdots,n;\ n=0,1,2,\cdots)$为球谐函数 [16]。与二维情形类似，我们引入

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_p(x)&:=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_n^m\nabla(j_n(k_p|x|)Y_n^m(\hat{x})),\\ \boldsymbol{v}_s(x)&:=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(b_n^mM_n^m(|x|,\hat{x})+c_n^m\nabla\times M_n^m(|x|,\hat{x})\right),\end{aligned}$$

其中 $a_n^m,\,b_n^m,c_n^m$为系数，且 $M_n^m(|x|,\hat{x})=\nabla\times(xj_n(k_s|x|)Y_n^m(\hat{x}))$. 为了后续分析，我们将 $\boldsymbol{v}$ 明确改写如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(x)=&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_n^m\left(k_pj_n'(k_p|x|)Y_n^m(\hat{x})\hat{x}+\frac{j_n(k_p|x|)}{|x|}\mathrm{Grad}Y_n^m(\hat{x})\right)\\&+b_n^mj_n(k_s|x|)\mathrm{Grad}Y_n^m(\hat{x})\times\hat{x}\\&+c_n^m\left(n(n+1)\frac{j_n(k_s|x|)}{|x|}Y_n^m(\hat{x})\hat{x}+\left(\frac{j_n(k_s|x|)}{|x|}+k_sj_n'(k_s|x|)\right)\mathrm{Grad}Y_n^m(\hat{x})\right),\end{aligned}$$

其中 Grad 是曲面梯度。

由狄利克雷条件 $(\boldsymbol{v}_p+\boldsymbol{v}_s)|_{\Gamma_R}=\mathbf{0}$，可推出

$$\begin{cases}a_n^mk_pj_n'(k_pR)+n(n+1)c_n^m\dfrac{j_n(k_sR)}{R}=0,\\ a_n^m\dfrac{j_n(k_pR)}{R}+c_n^m\left(\dfrac{j_n(k_sR)}{R}+k_sj_n'(k_sR)\right)=0,\\ b_n^mj_n(k_sR)=0,\end{cases}\quad\forall m=-n,\cdots,n;\ n=0,1,2,\cdots\tag{A.6}$$

由（A.6）可知，狄利克雷特征值的重数为

$$\sum_{t_{nl}<k_sR}(2n+1)+\sum_{q_{nl}<R}(2n+1),$$

使得 $j_n(t_{nl})=0$ 且 $Q_n(q_{nl})=0$，其中 Q_n 由 (A.2) 定义。 □

参考文献

[1] Abdelaziz B, Badia A. E, Hajj, A. E 2015 多极源重建的直接算法 《数学分析及其应用杂志》 428 306–336[2] Alvex C, Kress R 2002 关于弹性障碍物散射中的远场算子 《SIAM 应用数学杂志》, 67 1–21[3] Alzaalig A, Hu G, Liu X, Sun J 2019 利用多频稀疏数据进行快速声源成像 《逆问题》 36 025009[4] Ammari H, Bretin E, Garnier J 等 2013 黏弹性介质中的时间反演算法 《欧洲应用数学杂志》, 24 565–600[5] Arens T 2001 二维弹性波逆散射的线性采样方法 《逆问题》17 1445–1464[6] Badia A, Nara T 2013 时谐麦克斯韦方程的偶极子源逆问题：代数算法与 H¨older 稳定性 《逆问题》29 015007[7] Bao G, Chen C, Li P 2017 弹性波随机源逆散射 《SIAM 数值分析杂志》55 2616—2643[8] Bao G, Hu G, Sun J, and Yin T 2018 各向异性介质中的直接与反弹性散射 《纯粹与应用数学杂志》117 263–301[9] Bao G, Li P, Lin J, Triki F 2015 多频逆散射问题 《逆问题》31 093001[10] Bao G, Xu L, Yin T 2017 二维外部弹性散射问题的高精度边界元法 《计算物理学杂志》348 343—363[11] Bramble J H, Pasciak J E 2008 关于频域弹性波问题解的存在性与唯一性的一则注记：先验估计 《数学分析及其应用杂志》345 396–404[12] Chang Y, Guo Y 2022 基于近场散射数据同时重建障碍物及其激励源 《电子研究档案》30 1296–1321[13] Charalambopoulos A, Kirsch A, Anagnostopoulos K, Gintides D Kiriaki K 2007 可穿透物体弹性反散射中的因子分解法 《逆问题》23 27–51[14] Chen Z, Huang G 2015 扩展障碍物的逆时偏移：弹性波 《中国科学：数学》45 1103–1114[15] Colton D, Kress R 2018 回顾逆散射理论 《SIAM 评论》60 779–807[16] Colton D, Kress R 2019 《声学与电磁散射逆问题理论》, 4th 版，Springer Nature，瑞士[17] Diao H, Liu H and Wang L 2020 关于拉梅算子的广义霍姆格伦原理及其在弹性逆问题中的应用 《微积分与变分》59 179

[18] Diao H、Liu H 和 Wang L，2021，关于广义霍姆格伦原理应用于 Lam´e 算子的进一步结果，《微分方程杂志》309，841–82[19] Diao H、Liu H 和 Sun B，2021，广义弹性透射特征函数的局部几何性质及其应用，《逆问题》37，105015[20] Dong H、Lai J、Li P，2019，基于有相位或无相位远场数据的弹性波障碍物逆散射，《SIAM 影像科学杂志》12，809–838[21] Dong H、Lai J、Li P，2021，弹性障碍物散射问题的高精度边界积分法，《数学计算》90，2785–2814[22]Gilbarg D、Trudinger N S，1997，《二阶椭圆偏微分方程》，施普林格，柏林[23] Guizina B、Chikichev I，2007，从成像到材料识别：拓扑灵敏度的一般化概念，《力学与固体物理学杂志》55，245–279[24] Hu G、Li J 和 Liu H，2014，利用单个远场模式重建复杂弹性散射体，《微分方程杂志》257，469–489[25] He Y、Liu H、Wang X，一种利用内部共振模态的新型定量逆散射方案，arXiv:2205.03984v1[26] Ji X、Liu X、Xi Y，2018，弹性反散射问题的直接采样方法，《逆问题》34，035008[27] Lai J 和 Zhang J，2022，三维多个粒子的快速弹性反散射，《逆问题》38，104002[28] Li J、Liu H、Ma S，2019，求解具有未知源和势的随机 Schr¨odinger 方程，《SIAM 数学分析杂志》51，3465–3491[29] Li J、Liu H、Ma S，2021，确定随机 Schr¨odinger 算子：势和源均为随机量，《数学物理通讯》381，527–556[30] Ling L、Hon Y、Yamamoto M，2005，泊松方程的逆源识别，《逆问题科学与工程》13，433–447[31] Long Q、Motamed M、Tempone R，2015，用于地震源反演的快速贝叶斯最优实验设计，《计算方法与应用力学和工程》291，123–145[32] Sj´ogreen B、Petersson N.A.，2014，通过全波形反演进行源估计，《科学计算杂志》59，247–276[33] Wang X、Guo Y、Bousba S，2022，弹性波矩张量点源的直接成像，《计算物理学杂志》448，110731[34] Zhang D、Guo Y、Wang Y 和 Chang Y，散射空腔及其内部源的共反演：唯一性、解耦与成像，arXiv: 2207.06133[35] Zhang D、Wu Y 和 Guo Y，基于无相位近场数据对声学障碍物及其激励源进行成像，arXiv: 2212.09369