Gr基于 ZX 演算的图示量子 Clifford 编码器编译器 S

Andrey Boris Khesin[1], * Jonathan Z. Lu[1], † 和 Peter W. Shor[1], ‡
[1] *Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA*（日期：2024年1月4日）

我们提出了一种量子编译算法，将 Clifford 编码器（即稳定子量子码的编码映射）映射为 ZX 演算中的唯一图示表示。具体而言，我们在 ZX 演算中构造了一种典范形式，并证明了任意 Clifford 编码器都具有典范性，且能够高效地约化为该典范形式。我们的编译器生成的图能够将编码器中的信息传播和纠缠结构可视化，从而揭示出在电路或稳定子表格表示中可能被掩盖的性质。因此，我们的典范表示可以通过图论分析，为新稳定子量子码的设计提供一种有信息价值的技术。

arXiv:2301.02356v2 [quant-ph] 4 Jan 2024

I. 引言

量子算法已被证明能够解决从搜索到物理模拟等广泛的计算问题 [1–8]。可扩展量子计算机实验实现方面的最新进展，进一步激发了人们对量子算法在实践中潜力的热情 [9–13]。然而，量子算法所采用的表示形式往往并不最适合人们研究它的方式。例如，算法可能以较高层次的酉操作表示（例如量子傅里叶变换算子、连续旋转门等），而实际的量子计算机只能实现有限的（尽管希望是通用的）门集。这类似于经典编译器的设计动机：编译器将表达算法的高级编程语言映射为通用的布尔电路门集。量子领域也可以采用类似的编译器，利用著名的 Solovay-Kitaev 定理；该定理近期得到改进，只需对有限门集本身作更少的假设 [14]。除这一基础性成果之外，近期还涌现出大量关于将高级操作编译为有限门集的量子编译研究 [15–21]。有限门集通常选择 Clifford 门集（Hadamard 门、相位门和受控非门）加上 T门，其中 $T = |0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}|1\rangle\langle 1|$，该门集是通用的 [8, 19]。

然而，编译的理念并不局限于量子门从高层到低层的转换；算法表示中的任何不理想属性，都可能促使人们构建一种编译器，将算法映射为更适用于当前任务的表示形式。我们的研究动机具体源于这样一个事实：量子操作的电路表示往往会模糊输出的纠缠结构（从直观上说，就是难以仅凭观察电路理解它如何使输入量子比特发生纠缠）。电路图还可能掩盖信息传播的结构，即哪些量子比特会影响其他哪些量子比特的数值。

本文旨在构建一种编译器，通过生成能够明确展示信息传播和纠缠结构的表示方式，来解决这些问题。我们设计的表示技术并非针对通用门集，而是针对受限的 Clifford 操作集。每个 Clifford 电路都会映射为一种可视化图，我们设计这种图使其具备上述性质。尽管 Clifford 操作并不具有通用性，但它们广泛应用于容错量子计算的研究 [8, 22] 和量子编码理论 [8, 23–27]。Clifford 操作在量子纠错中的核心重要性促使我们专门编译充当量子码编码器的 *Clifford* 电路。因此，我们专门为 Clifford 电路设计了一种规范的图示形式，使得所有产生相同编码映射的电路都具有相同的典范形式。这一概念将在下一节中正式定义。

A. 相关工作

我们的论文推广了 Hu 和 Khesin [28], 的先前工作，该工作为稳定子态生成了规范的形式。稳定子态可以被视为完整的稳定子表，即一个由 n 个 Pauli 稳定子完全指定的 n 量子比特态；而 Clifford 电路则可以被视为不完整的稳定子表。我们将在后面的章节中更明确地展示这种对应关系。在 Hu 和 Khesin [28], 的基础上，McElvanney 和 Back-

* khesin@mit.edu
† lujz@mit.edu
‡ shor@math.mit.edu

ens [29] 为特别适用于基于测量的量子计算的稳定子态推导出了另一种独特的规范形式。

Kissinger 的一项近期工作 [30] 独立于本工作开展，也构造了图示形式，但进一步将范围限定在 CSS 码。因此，我们的工作可视为对 Kissinger [30] 工作的规范化，并将其推广至所有稳定子码。事实上， [30] 的 CSS 构造产生了以二部图表示的图示，而我们的图示则是二部图的一种推广，称为半二分图，后文将对其进行定义。

更广泛地说，图形化方法已从两个方面应用于量子纠错。第一种是通过相应的图示形式分析编码构造，例如 Wu等人 [31]对图码的研究。第二种是利用某些图示对应关系，通过对经典类比进行量子化来设计 量子码，例如 Chancellor等人 [32]的构造。我们提出的新典范形式，既推动了根据量子码典范图示形式的性质来分析量子码，也推动了基于对应图示所满足的理想图论条件，构造新的、更一般的（不一定是 CSS）稳定子码。

II. 理论与构造

我们的主要工具是 ZX 演算，这是一种用于表示向量的图形语言，近年来在量子信息研究中引起了极大关注 [30, 33–37]。ZX 演算生成可视化的图，用于表示量子态、量子电路等。与任何形式逻辑系统一样，ZX 演算也有一组规则，这些规则可以迭代应用，将图转换为与其等价的图。这些规则代表了量子电路中的恒等式。ZX 演算在容错量子计算和量子编译器理论中比以往任何时候都更受关注，因为它能够以直观的方式明确呈现纠缠等量子性质。近年来，它已被应用于许多量子计算问题，包括晶格手术 [38] 和量子优化 [39]。重要的是，对于稳定子表格，ZX 演算是完备的（可以从相应的 ZX 图推导出表格之间的等式）、可靠的（反之亦然）且具有普适性（每个量子操作都可以用 ZX 演算表示） [33, 40]。

因此，我们希望利用 ZX 演算作为图形化表示，并将量子电路编译为这种表示。我们尤其感兴趣的是能够生成稳定子量子码的电路，这种码的新表示或许能为研究量子纠错开辟新途径。除了高效可计算性之外，ZX 演算图编译器的一个理想特性是唯一性——任何两个等价的输入表示都会映射到同一个 ZX 演算图。对于大多数编译问题（例如编程语言编译器）而言，这种特性要求过高。许多在实践中表现良好的启发式编译器并不具备唯一性。然而，我们将证明，对于将稳定子编译为 ZX 图的情形，确实能够实现唯一性。因此，我们将这些图称为*ZX*规范形式 （ZXCF）。ZXCF 编译器的一个直接结果，是能够以图形化方法检验稳定子码是否相等。在最一般的情形下，这类形式的构造仍有很大的探索空间。作为第一步，Hu 和 Khesin [28] 近期研究了稳定子态上的 ZXCF，并证明了以下结论。

定理 II.1 （Hu 和 Khesin [28]）。对于稳定子量子态，存在一种 ZXCF，我们称之为 HK 形式。

尽管 Hu 和 Khesin 在其研究中没有使用 ZX 演算，但他们的构造采用了装饰有单量子比特算子的图态，可以通过我们将简要介绍的方法直接映射到 ZX 演算中。HK 图由一个图态构成——该态对应一个无向图，其中节点变为$|+\rangle$量子比特，边变为受控-Z 门。随后，每个节点都附加一条自由边，它不与任何其他节点相连。然后对量子比特施加 $\langle H,\ S,\ Z\rangle$ 中的局部 Clifford 操作。这种构造能够表示任意稳定子态。通过直接映射，可以将 HK 图表示为 ZX 演算。

- HK 顶点变为 Z 节点，因为图态中的顶点初始处于状态 $|+\rangle$，它是一个带有单个输出的Z 节点。
- HK（非自由）边会变成带有 Hadamard 门的（非自由）边，因为这两者都对应于 CZ 门。
- S、 Z或 SZ 上的 HK 局部操作，分别会变成 $\frac{\pi}{2}$、 π和 $\frac{3\pi}{2}$ 对应节点上的相位。局部操作 H 会变成节点自由边上的 Hadamard 门。

因此，我们不失一般性地将 HK 形式视为 ZX 演算表示，并将其记作

ZX-HK 形式。我们指出，在其他情境中也曾研究过将类似的装饰图态族转换为 ZX 演算表示，例如 Backens [40]。

Hu 和 Khesin [28] 的分析启发了我们为量子电路构造 ZXCF，不过我们将范围限制在 Clifford 电路。更具体地说，我们编译*Clifford* 编码器，并以最自然的纠错方式对 Clifford 电路取商。

定义 II.2. 如果两个电路对所有可能的输入态都具有相同的像，则它们是等价的 Clifford 编码器。等价地，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是等价的编码器，当且仅当存在一个酉算符 U，使得 $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 U$ 或 $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 U$。

我们将首先构造一个 ZXCF，用以展示信息传播和纠缠。随后，我们将介绍完整的编译算法，并证明其高效性。最后，我们证明每个 Clifford 编码器都映射到唯一的 ZXCF，从而确立其典范性。

我们注意到，编码器与不完整稳定子表具有相同的表达能力——它们是大小为 $k \times n$、无法完全指定一个态的稳定子矩阵。完整稳定子表是 Gottesman-Knill 定理的核心，该定理通过使用完整稳定子表来表示稳定子态，证明了 Clifford 电路 [41] 的高效经典可模拟性。另一方面，由于不完整稳定子表无法唯一确定一个态，它们间接编码了稳定子量子码中的逻辑量子比特。事实上，不完整稳定子表与 Clifford 编码器完全等价，并广泛用于纠错协议 [26, 27, 42]。因此，在构造出针对 Clifford 编码器的图形化编译流程后，我们也将为不完整稳定子表构造同样的流程。

A. 规范形式构造

我们采用 Backens [40] 中所述的 ZX 演算图示法标准记号；关于 ZX 演算的基础知识和变换规则，请参阅该文。绿色节点对应 Z 算符，红色节点对应 X。每个节点都可以对应一个局部 Clifford 算符（可表示为 $\pi/2$ 的整数倍相位），每条边上也可以带有 Hadamard 门。如果一条边上带有 Hadamard 门，我们就将其标为蓝色 [43]（有些论文则使用带方框的线条，例如 [40]）。该电路将 $n-k$ 个输入量子比特映射为 n 个输出量子比特，其中 $k \geq 0$。本文将 ZXCF 定义为编码器相容形式，即图示按如下方式组织。

定义 II.3。编码器相容形式 $\mathcal{D}$仅包含绿色节点，并且其结构为半二分图。半二分图是由左簇和右簇组成的图，其中左簇节点只能与右簇节点相连，而右簇节点不受此类限制。在本文中，左簇和右簇分别称为输入簇和输出簇。输入簇 $\mathcal{I}$ 包含 $n-k$ 个节点，这些节点分别对应于相应编码器的 $n-k$ 个输入量子比特；输出簇 $\mathcal{O}$ 包含 n 个节点。每个输入节点都有一条自由边（不与任何其他节点相连），即输入边。同样，每个输出节点都有一条自由的输出边。输出边从 1 到 n 编号——在不完整稳定子表中按从左到右的顺序编号，或在 Clifford 电路输出线上按从上到下的顺序编号。为方便起见，我们将与编号为 i 的输出边相连的节点 v 称为编号为 i 的输出节点。

编码器相容形式的设计以图形方式展示了信息如何从输入传播到输出（哪些边连接 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{O}$），以及底层编码器的纠缠结构（哪些边连接$\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{O}$）。请注意，$\mathcal{D}$ 的结构自然产生了一个大小为（$n-k$）$\times$ n的二元“部分邻接矩阵” $M_{\mathcal{D}}$，用于描述 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{O}$ 之间的边，其作用类似于标准的图邻接矩阵。

给定良好的结构，编译器剩下的工作就是确保一种典范形式，从而使从编码器到ZX图的映射定义明确。我们通过另外四条规则，将编码器相容形式约束为 ZXCF。

1. 边规则：ZXCF 中每条自由边必须恰好对应一个Z 节点，并且 ZXCF 中的每条内部边上都必须有一个 Hadamard 门。

2. *Hadamard* 规则：任何输出节点 v 都不得同时在其输出边上有 Hadamard 门，并且有边连接 v 与编号较小的节点或输入节点。

3.简化行阶梯形规则：$M_{\mathcal{D}}$ 必须是简化行阶梯形（RREF）。

4. *Clifford* 规则：设 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$ 为与 RREF 矩阵 $M_{\mathcal{D}}$ 的主元列相关联的节点，因此 $|\mathcal{P}| = n-k$。输入节点或主元节点及其自由边上不能有局部 Clifford 操作 $\{I, S, Z, SZ, H, HZ\}$。不能有输入-输入边或主元节点之间的边。

直观而言，前两条规则可防止通过 ZX变换恒等式进行图示化简

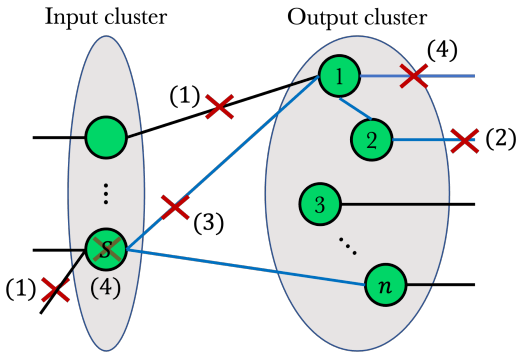


图 1. 编码器相容形式示例及其可能违反四条规则的若干方式。

。简化行阶梯形规则允许使用线性代数，唯一地化简输入与输出之间的连通关系。在 ZXCF 的图形表示中，主元节点对应于 $\mathcal{O}$ 中仅与一个输入相连的节点子集；该子集使得 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{I}$ 一一对应。Clifford 规则通过禁止主元之间的连接，扩展了边上的半二分约束。

这四条规则足以生成 ZXCF；我们将证明如下结论。

定理 II.4. 任意 Clifford 编码器都有唯一的等价 ZXCF，且满足边、Hadamard 门、RREF 和 Clifford 规则。存在一种高效算法可将 ZX 编码器规范化。

为直观说明这四条规则，图 1 展示了一个一般示例，说明可能违反这些规则的若干情形。

我们构造的映射序列用于得到 ZXCF，如图 2所示。

我们首先着重于将 Clifford 编码器映射为 ZXCF，随后再讨论下文中的不完整 tableau。首先，我们应用以下引理，以便建立在 Hu 和 Khesin [28] 所发展的方法基础之上。

引理 II.5. 存在一种高效转换，可将具有 $n-k$ 个输入边和 n 个输出边的 ZX 编码器图转换为相应的稳定子态 ZX 表示，其形式为 ZX-HK 形式，并具有 $n+$（$n-k$）个 $=2n-k$ 自由边。

该引理的证明放在附录中。

应用引理 II.5 后得到 ZX-HK 形式。也就是说，HK 形式的图中每个 Z 顶点对应一个节点，且每条内部边上都有一个 Hadamard 门。只有当自由边的相位是 π 的倍数时，自由边上才可以有 Hadamard 门，这对应于局部 Clifford 门 H 以及 HK 形式中的 HZ，并且相应节点未与任何编号较小的节点相连。自由边上没有 Hadamard 门的节点，其相位可以是 $\frac{\pi}{2}$ 的任意倍数，分别对应局部 Clifford 操作 I、S、Z 或 SZ。

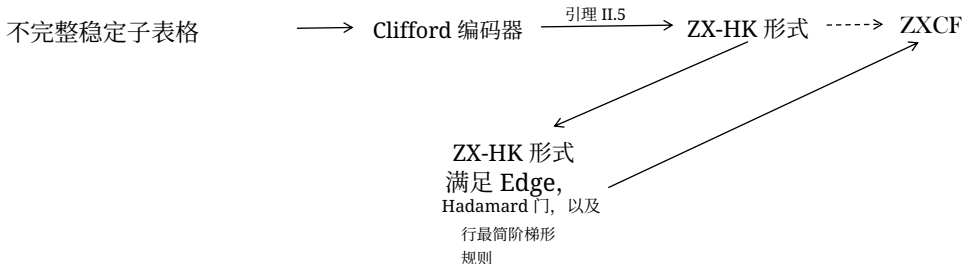
现在我们已经得到一个表示某个态的 ZX-HK 图。该图只有输出边。要将其还原为编码器图，我们将 $2n-k$ 个自由边划分为 $n-k$ 个输入边和 n 个输出边。在电路表示中，这等价于将刁矢转换为右矢，反之亦然，从而在算符与态之间进行映射。例如，$|00\rangle\langle 1|-|11\rangle\langle 0| \leftrightarrow |001\rangle-|110\rangle$。现在，如果输入节点（$\mathcal{I}$ 中的节点）之间存在边，我们只需将其移除。它们对应于受控-Z 操作；根据编码器的定义，我们可以去除输入端上的任何酉操作。$\mathcal{I}$ 上的局部 Clifford 操作也同样如此。

此时，得到的 ZX-HK 形式已是编码器相容形式。它也满足边规则与阿达马规则——ZX-HK 形式中没有输入边，因此类似的规则仅对编号较小的节点施加；但如果从头开始编号，使输入节点的编号都小于输出节点，那么变换后的 ZX-HK 形式就会满足我们的 ZXCF Hadamard 规则。因此，剩下的工作就是简化该图，使其满足简化行阶梯形规则和 Clifford 规则。前者由下述定理给出，该定理在附录中证明。

引理 II.6. 处于 ZX-HK 形式的编码器图可以高效地变换为满足简化行阶梯形规则，同时仍满足边规则与阿达马规则。

唯一剩下的任务是施加 Clifford 规则。对于任意相位非零的主元节点 $p\in\mathcal{P}$，记 v_{in} 为其关联的输入节点。我们对 v_{in}进行局部补图；值得注意的是，这不会改变 $M_{\mathcal{D}}$的条目。然而，该操作也会使 v_{in} 的每个邻居的相位增加 $\frac{\pi}{2}$（这是由于乘以 S），因此我们重复这一过程，直到该主元的相位消失。局部补图变换是一个 ZX 等价恒等式，因此是对我们的图 [40]执行的有效操作。

最后，如果主元 p_1与 p_2之间存在边，我们可以对它们各自对应的输入节点 v_1 和 v_2应用另一种变换 ϕ 将这些边移除。令 N_1 为 v_1 的邻居以及 v_1 自身构成的集合，并相应地定义 N_2。ϕ 的作用是切换集合 $N_1\times N_2$中的所有边，包括边的重数。这意味着，被切换两次的边不会受到影响。任何形如（v，v）的自环，都视为对顶点 v进行一次 Z 操作。此外，ϕ 还会执行一项



图。 2 将一系列操作编译为 ZXCF 的示意映射图 .

额外的局部操作，作用于 HZ 中的每个节点 v_1 和v_2，但由于 v_1 和 v_2 是输入顶点，因此可以移除这项操作。这样一来，我们交换了 v_1 和 v_2 的邻居，同时切换了想要翻转的那条主元-主元边（p_1，p_2）。请注意，ϕ 不会违反简化行阶梯形规则，因为完成此过程后，我们只需通过行操作即可将邻居换回原状（且不进行任何切换）。此外，这不会给节点 p_1 和 p_2添加任何局部操作，因为它们各自只属于 N_1和 N_2中的一个，因此不会接受 Z 操作。重复此过程，直到不再有主元-主元边。可以证明， ϕ 是一个有效的 ZX 等价恒等式（van de Wetering [44]）。

完成这一步后，从 Clifford 编码器到 ZXCF 的变换便完成了。尽管这个过程看起来可能很漫长，但所有这些步骤都可以高效、系统地完成，无需回头修正先前的规则。具体而言，该算法需要 $O(n^3)$ 时间。为编码器创建 HK 图需要应用 $O(n)$ 个 Pauli 投影，每个投影都可以在 $O(n^2)$ 时间内完成。创建 HK 形式后，诸如对矩阵进行行简化之类的操作也需要 $O(n^3)$ 时间。我们认为，最坏情况下的时间复杂度无法进一步降低，但启发式运行时间改进和优化仍有很大空间。

B. 从表格出发

如图2所示，我们通过将不完整的稳定子表转换为 Clifford 编码器，然后应用上述方法来编译它。我们将反向构造电路，从输出端开始，逐步回溯至输入端。对于 $k \times n$ 表，首先绘制 n 条输出线。每一步，我们先通过应用 Clifford 操作简化该表，然后“测量移除”一个量子比特，从而从表中删除一行和一列。如此归纳重复，最终得到一个将 $n-k$ 个量子比特映射为 n 个量子比特的 Clifford 电路。

每一步的过程都从寻找一个 Clifford 操作 U 开始，它将第一个稳定子变为 $Z_1 = Z \otimes I \otimes \cdots \otimes I$，具体方式由 Gottesman-Knill 定理决定。我们将 U 添加到正在构建的电路开头。然后将其余各行与第一行相乘，直到整个表格的第一列除第一行外均只含有 I。这始终可以做到，因为矩阵每一行中的 n 个量子比特对应的 Pauli 算符必须彼此对易。随后，我们通过反向应用 $\langle 0|$ ，对计算基测量的+1 结果进行后选择。沿电路的正向读取时，这等价于将一个辅助量子比特初始化为 $|0\rangle$ 态。U 与测量的效果等价于应用 $\frac{I+P}{2}$，其中 P 是稳定子表格的第一行。这等价于对该稳定子的 $+1$测量结果进行后选择。测量该量子比特后，我们从表格中移除其对应的行和列，并在一个包含 $n-1$ 个量子比特和 $k-1$ 行的表格上重复此过程，直到没有剩余行。此时，尚未测量的其余 $n-k$条线路便成为电路中的输入量子比特。最后，我们为这些量子比特绘制$n-k$ 条输入线路。

III. 规范性证明与应用

A. 典范性证明

接下来，我们证明所提出的 ZXCF 确实是规范的。换言之，同一子空间的两个等价稳定子表—— n 量子比特希尔伯特空间的生成元——将映射到同一个 ZXCF。理想情况下，我们可以在稳定子表及其生成的 ZXCF 之间建立清晰的对应关系。Kissinger 在 CSS码中实现了这种对应关系 [30]，其中，一类稳定子中的每个泡利算符，即 X 或 Z，在 ZX 图中都有对应的边。然而，这种技术需要付出代价：引入没有自由边的额外顶点，这些顶点对应于该码的稳定子。我们发现，对于

一般稳定子码的 ZXCF，甚至对于某些 CSS码，所得图会高度依赖于编码的稳定子；稳定子表的微小变化可能导致 ZXCF 发生巨大变化。

因此，我们认为，通过寻找 ZXCF 图与表格之间的显式对应关系或逆映射来证明唯一性，会相当复杂。为此，我们改用计数论证：由于 ZXCF 图和稳定子表的总数相等，因此给定一个表格时，ZXCF 是唯一的。这一论证并未阐明这两种表示之间的联系，但优点是简单。

引理III.1. 含有 n 个量子比特和 k 行的稳定子表的数量，等于含有 n 个输出和 $n-k$ 个输入的 ZXCF 图的数量。

首先，在 n 个量子比特上具有 k 个稳定子的部分稳定子表的数量为

$$\frac{\prod_{i=1}^{k} 2\cdot 4^n/2^{i-1} - 2\cdot 2^{i-1}}{\prod_{i=1}^{k} 2^k - 2^{i-1}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{2^{2n-i+2}-2^i}{2^k-2^{i-1}}. \quad (1)$$

对于每一行 i，有 $2\cdot 4^n$ 个可能的 Pauli 字符串（包括符号），但要求它们与前面的行对易，因此计数需除以2^{i-1}。在这 $2\cdot 4^n/2^{i-1}$ 个有效字符串中，有 2^{i-1} 个字符串是前面字符串的线性组合；对于与前面字符串仅符号相反的字符串，计数需乘以 2。

不过，我们的计数重复了，因为对于特定的表格，有许多种方法可以找到一组稳定子生成元。特别是，为 Clifford 编码器选择一组生成元时，第一个生成元有2^k-1 种选择（去掉单位元）。接下来有 2^k-2 种方法选择下一个元素，因为不能选择迄今已选元素张成空间中的任何元素。如此反复归纳，便得到上面的分母。

接下来，相同n 和 k 对应的 ZXCF 图的数量可以表示为以下四重递归函数 f 在 $p=o=0$处的取值。

$$f(n,k,p,o) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=k=0 \\ A_{n,k,p,o} + B_{n,k,p,o} & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$A_{n,k,p,o} = 2^o f(n-1,k,p+1,o) \quad (3)$$

若 $n\neq k$ 且 $A_{n,\ k,\ p,\ o}=0$ 若 $n=k$，且其中

$$B_{n,k,p,o} = (2^{2p+o+2}+2) f(n-1,k-1,p,o+1) \quad (4)$$

若 $k\neq 0$ 且 $B_{n,\ k,\ p,\ o}=0$ 若 $k=0$。

当 $n=k=0$时，该函数以空表格为基本情形。此函数的推导留待附录给出。求解其显式形式可得

$$f(n,k,p,o) = 2^{o(n-k)} \prod_{i=1}^{k} \frac{(2^{n+1}-2^i)(2^{n-i+1+2p+o}+1)}{2^k-2^{i-1}}. \quad (5)$$

通过标准的归纳法可以验证$f(n,k,0,0)$ 给出的表达式与方程（1）相同，这证明 ZXCF 确实是规范的。

B. 在量子码中的应用

为了更具体地展示 ZXCF 的结构，我们以熟知的量子码为例给出三个示例。首先考虑 Shor 提出的九量子比特码 [26], ，它使用 9 个物理量子比特来编码 1 个逻辑量子比特。Shor 码可表示为以下稳定子表

$$\begin{bmatrix} Z & Z & I & I & I & I & I & I & I \\ Z & I & Z & I & I & I & I & I & I \\ I & I & I & Z & Z & I & I & I & I \\ I & I & I & Z & I & Z & I & I & I \\ I & I & I & I & I & I & Z & Z & I \\ I & I & I & I & I & I & Z & I & Z \\ X & X & X & X & X & X & I & I & I \\ X & X & X & I & I & I & X & X & X \end{bmatrix}. \quad (6)$$

应用我们的编译方法，得到图3(a) 中所示的 ZXCF。输出包含三个相同的扇区，其中两个具有经哈达玛变换的输出，另一个则没有。这与我们通过考察 Shor 码的未归一化量子比特表示所得到的预期相符，$(|000\rangle \pm |111\rangle)^{\otimes 3}$。我们可以将其与图3(b) 中一个同样简单但非规范的形式进行比较，这种形式可以通过启发式方法构造。我们通过应用一条 ZX 规则绘制了图3(b)：该规则将具有两条经哈达玛变换的边的 Z 节点替换为一条未经哈达玛变换的边。这个图的可视化方式有些相似——在某些意义上也更简单——但节点与量子比特之间没有明显的对应关系，因此对信息传播或纠缠结构的解释也变得模糊。

当所讨论的编码器用于纠错时，我们还可以进一步简化 ZXCF。具体而言，在传输编码量子比特时，如果对编码施加局部 Clifford 操作，可纠正的错误集合并不会改变，因为 p-量子比特

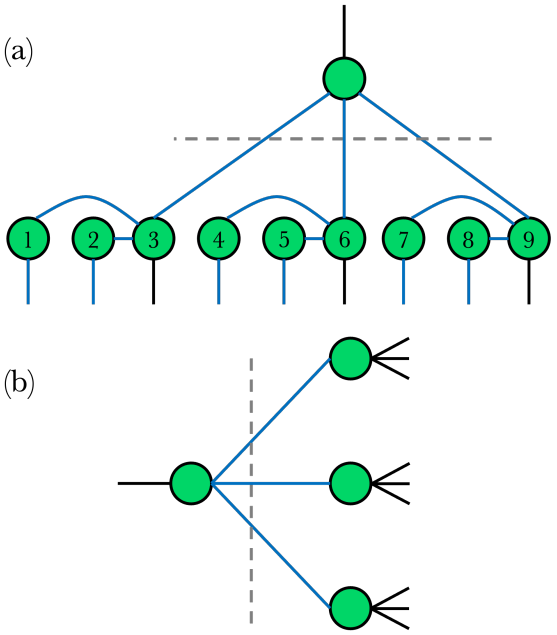


图 3. (a) 九量子比特码的 ZXCF 与 (b) 非规范变体的对比。

泡利错误的空间保持不变。因此，我们可以忽略纠错编码器中经哈达玛变换的输出边以及输出节点上的相位。由此，任何码都存在一个在局部 Clifford 操作意义下等价的表示，其 ZXCF 仅由一个半二分图构成。因此，我们证明了：

定理 III.2. 对于任意稳定子码，至少存在一个等价码，可表示为不含局部 Clifford 操作的半二分图。

一个类似的例子是 Steane 七量子比特码，它是许多容错量子计算方案中的核心构造 [42]。该码由一个不完整的稳定子矩阵表示

$$\begin{bmatrix} I & I & I & X & X & X & X \\ I & X & X & I & I & X & X \\ X & I & X & I & X & I & X \\ I & I & I & Z & Z & Z & Z \\ I & Z & Z & I & I & Z & Z \\ Z & I & Z & I & Z & I & Z \end{bmatrix}. \tag{7}$$

在我们的 ZXCF 中，该码呈现为图 4所示的形式。具体而言，图中的节点就是立方体的角点。在 Duncan 和 Lucas [45] 的另一种研究背景下，也给出了类似的图示。

我们观察到，7 量子比特码的稳定子恰好位于节点标签二进制表示中的 1 所在位置。我们可以看到优美的

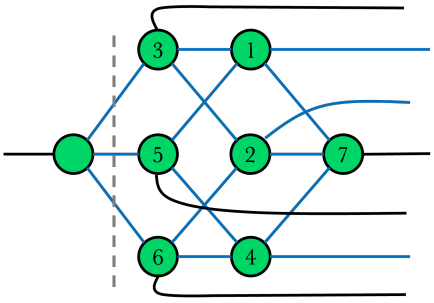


图 4. 七量子比特码的 ZXCF。图中的 8 个节点构成一个布尔立方体的顶点。

对称性，见图 4 ，其中展示了节点的位置及其二进制表示。节点 0 相邻的节点不是 1、2 和 4（其二进制表示分别为 001、010 和 100），原因是 ZXCF 规则要求经 Hadamard 门变换的输出边不能连接到编号较小的节点。

最后一个例子是五量子比特码，这是能够实现任意单量子比特错误纠正的最小码，并且已在实验中得到研究 [27, 46]。其不完整的稳定子表示如下

$$\begin{bmatrix} X & Z & Z & X & I \\ I & X & Z & Z & X \\ X & I & X & Z & Z \\ Z & X & I & X & Z \end{bmatrix}. \tag{8}$$

我们的方法生成的 ZXCF 如图5所示。

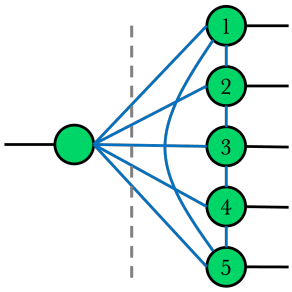


图 5. 五量子比特码的 ZXCF。

请注意，稳定子表只是第一行的 4 个循环置换。ZXCF 在输出中明确反映了这种循环结构。

IV. 结论与展望

我们介绍了一种量子编译器，可将克利福德编码器和不完全稳定子表映射为 ZX 演算中的唯一图形形式。我们将典范形式表示为一个半二分

图，其输入量子比特与输出量子比特之间的关系直观地展示了从输入到输出的信息传播，以及输出的纠缠结构。随后，我们证明了该编译器在算法上的效率与正确性。

我们的编译技术向着将ZX演算用作通用量子纠错编码操作的实用表示迈进了一步。ZXCF技术能否推广到Clifford门之外——我们的构造至关重要地依赖这些门——是探索基于ZX的量子编译器的下一步。很可能，若要为通用门集设计这种编译器的推广版本，所得的ZX形式将不是规范的。否则，该编译器便可用于检验任意量子电路是否相等，而这是一项计算上很困难的任务。不过，考虑其他受限的电路族，或放宽唯一性的要求，仍为构造其他实用的图形化编译器留下了空间。

一个有趣的后续研究方向，是探索将我们的ZXCF 应用于将魔态分解为稳定子态的线性组合。另一个重要方向是借助图论工具，分析码的质量与其在 ZXCF 表示中的性质之间的对应关系。例如，某种特定的连通结构或许有助于构造具有理想码率或阈值的编码。更深入地理解这种对应关系，或许能为设计新的量子码提供更好的方法。

致谢

ABK受美国国家科学基金会（NSF）资助，资助编号为CCF-1729369。PWS受NSF资助，资助编号为CCF-1729369；并获NSF科学与技术中心“信息科学”项目资助，资助编号为CCF-0939370；还获美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心、量子优势协同设计中心（C2QA）资助，合同编号为DE-SC0012704；此外还获NTT研究奖AGMT DTD 9.24.20资助。

[1] L. K. Grover, 《用于数据库搜索的快速量子力学算法》, 载于 *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing* 1996 212 219 ( ) pp. – . [2] P. W. Shor, 《量子计算机上用于质因数分解和离散对数的多项式时间算法》, 《SIAM评论》41, 303 (1999). [3] Z. Brakerski, P. Christiano, U. Mahadev, U. Vazi- rani, and T. Vidick, 《来自单个量子设备的量子性密码学测试与可认证随机性》, 《美国计算机协会会刊》(JACM) 68, 1 2021( ). [4] E. Farhi, D. Gosset, A. Hassidim, A. Lutomirski, and P. Shor, 《来自纽结的量子货币》, 载于 *Proceedings of the 3rd Innovations in Theoretical Computer Science Conference* 2012 276 289 ( ) pp. – . [5] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, 《量子模拟》, 《现代物理学评论》86, 153 (2014). [6] H.-Y. Huang, R. Kueng, and J. Preskill, 《仅凭极少量测量预测量子系统的多种属性》, 《自然·物理》16, 1050 (2020). [7] A. Harrow, P. Hayden, and D. Leung, 《量子态的超密编码》, 《物理评论快报》92, 187901 (2004). [8] M. A. Nielsen and I. Chuang, 《量子计算与量子信息》(2002). [9] A. Kandala, K. Temme, A. D. C´orcoles, A. Mezza- capo, J. M. Chow, and J. M. Gambetta, 《误差缓解拓展含噪量子处理器的计算能力》, 《自然》567, 491 (2019)。

[10] M. V. Larsen、X. Guo、C. R. Breum、J. S. Neergaard-Nielsen 和 U. L. Andersen, 《确定性生成二维簇态》, 《科学》366, 369（2019年）。[11] F. Arute、K. Arya、R. Babbush、D. Bacon、J. C. Bardin、R. Barends、R. Biswas、S. Boixo、F. G. Brandao、D. A. Buell、 *et al.*, 《利用可编程超导处理器实现量子霸权》, 《自然》574, 505（2019年）。[12] H. Wang、J. Qin、X. Ding、M.-C. Chen、S. Chen、X. You、Y.-M. He、X. Ji ang、L. You、Z. Wang、 *et al.*, 《在 1 0 14 维希尔伯特空间中利用 20 个输入光子和 60 模干涉仪进行玻色子采样》, 《物理评论快报》123, 250503（2019年）。[13] C. K. Andersen、A. Remm、S. Lazar、S. Krinner、N. Lacroix、G. J. Norris、M. Gabureac、C. Eichler 和 A. Wallraff, 《表面码中的重复量子错误检测》, 《自然·物理》16, 875（2020年）。[14] A. Bouland 和 T. Giurgica-Tiron, 《高效通用量子编译：一种无逆 Solovay-Kitaev 算法》, arXiv 预印本 arXiv:2112 02040 10 48550 2112 02040 2021 . . /arXiv. . ( )。[15] V. Kliuchnikov、D. Maslov 和 M. Mosca, 《利用常数个辅助量子比特，通过 Clifford 和 T 电路渐近最优地逼近单量子比特酉算符》, 《物理评论快报》110, 190502 2013( )。[16] V. Kliuchnikov、D. Maslov 和 M. Mosca, 《由 Clifford 和 T 门生成的单量子比特酉算符的快速高效精确合成》, arXiv 预印本 arXiv:1206.5236 10.48550/arXiv.1206.5236（2012年）。

[17] N. J. Ross 和 P. Selinger，《最优无辅助量子比特 Clifford+ T 近似 Z 旋转》，Quantum Inf. Comput. 16，901（2016年）。[18] V. Kliuchnikov、D. Maslov 和 M. Mosca，《利用单量子比特量子 Clifford 和 T 电路对单量子比特酉算符进行实用近似》，IEEE Transactions on Computers 65，161（2015年）。[19] P. Selinger，《高效地用 Clifford+T 近似单量子比特算符》，arXiv 预印本 arXiv:1212.6253 10.48550/arXiv.1212.6253（2012年）。[20] M. Maronese、L. Moro、L. Rocutto 和 E. Prati，《量子编译》，载于 *Quantum Computing Environments* 2022 39 74（施普林格，）页码 –。[21] L. Moro、M. G. Paris、M. Restelli 和 E. Prati，《基于深度强化学习的量子编译》，Communications Physics 4，178（2021年）。[22] D. Gottesman，*Stabilizer codes and quantum error correction*（加州理工学院，1997年）。[23] A. Y. Kitaev，《利用不完美门进行量子纠错》，载于 *Quantum communication, computing, and measurement* 1997 181 188（施普林格，）页码 –。[24] S. B. Bravyi 和 A. Y. Kitaev，《带边界晶格上的量子码》，arXiv 预印本 quant-ph/9811052 10.48550/arXiv.quant-ph/9811052（1998年）。[25] A. G. Fowler、M. Mariantoni、J. M. Martinis 和 A. N. Cleland，《表面码：迈向实用的大规模量子计算》，Physical Review A 86，032324（2012年）。[26] P. W. Shor，《降低量子计算机存储器中退相干的方案》，Physical Review A 52，R2493（1995年）。[27] D. Gottesman，《量子纠错与容错量子计算简介》，arXiv 预印本 arXiv:0904 2557 10 48550 0904 2557 2009 . . / arXiv. . ( )。[28] A. T. Hu 和 A. B. Khesin，《用于量子电路模拟的改进图形式》，Physical Review A 105，022432（2022年）。[29] T. McElvanney 和 M. Backens，《适用于含 Pauli 测量的 MBQC 模式的完备保流重写规则》，arXiv 预印本 arXiv:2205.02009 10.4204/EPTCS.394.5（2022年）。[30] A. Kissinger，《无相位 ZX 图是 CSS 码（……或者如何通过图形直观理解表面码）》，arXiv 预印本 arXiv:2204 14038 10 48550 2204 14038 2022 . . /arXiv. . ( )。[31] Z. Wu、S. Cheng 和 B. Zeng，《级联图码的 ZX 演算方法》，arXiv 预印本 arXiv:2304.08363 10.48550/arXiv.2304.08363（2023年）。[32] N. Chancellor、A. Kissinger、S. Zohren、J. Roffe 和 D. Horsman，《用于量子纠错设计与验证的图形结构》，Quantum Science and Technology 10.1088/2058-9565/acf157（2016年）。[33] B. Coecke 和 R. Duncan，《相互作用的量子可观测量》，载于 *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*（施普林格，2008年），页码 298–310。

[34] T. Peham、L. Burgholzer 和 R. Wille，《使用 ZX 演算对量子电路进行等价性检查》，IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems 12，662（2022年）。[35] A. Cowtan 和 S. Majid，《表面码模型的量子双方面》，Journal of Mathematical Physics 63，042202（2022年）。[36] J. van de Wetering，《使用全局门构建量子电路》，New Journal of Physics 23，043015（2021年）。[37] R. D. East、J. van de Wetering、N. Chancellor 和 A. G. Grushin，《作为 ZX 图的 AKLT 态：量子态的图式推理》，PRX Quantum 3，010302（2022年）。[38] N. de Beaudrap 和 D. Horsman，《ZX 演算是一种用于表面码晶格手术的语言》，Quantum 4，218（2020年）。[39] A. Kissinger 和 J. van de Wetering，《减少量子电路中的非 Clifford 门数量》，Physical Review A 102，022406（2020年）。[40] M. Backens，《ZX 演算对稳定子量子力学是完备的》，New Journal of Physics 16，093021（2014年）。[41] S. Aaronson 和 D. Gottesman，《改进稳定子电路的模拟》，Physical Review A 70，052328（2004年）。[42] A. Steane，《多粒子干涉与量子纠错》，Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 452，2551（1996年）。[43] R. Duncan、A. Kissinger、S. Perdrix 和 J. Van De Wetering，《使用 ZX 演算对量子电路进行图论简化》，Quantum 4，279（2020年）。[44] J. van de Wetering，《面向量子计算机从业者的 ZX 演算》，arXiv 预印本 arXiv:2012.13966，10.48550/arXiv.2012.13966（2020年）。[45] R. Duncan 和 M. Lucas，《使用 Quantomatic 验证 Steane 码》，arXiv 预印本 arXiv:1306.4532，10.48550/arXiv.1306.4532（2013年）。[46] E. Knill、R. Laflamme、R. Martinez 和 C. Negrevergne，《量子计算机基准测试：五量子比特纠错码》，《物理评论快报》86，5811（2001年）。

附录 A：补充证明

我们先证明引理 II.5。一般而言，可以将算符写成投影算符的线性组合 $|\phi\rangle\langle\psi|$，再将刁矢翻转为右矢。这个过程称为 Choi-Jamio-lkowski 同构。我们将说明如何在 ZX 演算中执行类似的变换，并将其规范化为 HK 形式。

证明。 我们将把编码器图转换为 Clifford 电路，然后将该电路的输出（输入为全-$|+\rangle$态）映射为 HK 形式。ZX 编码器图中的任何 X（红色）节点，都可以转换为具有相同相位的 Z （绿色）节点，并在其周围加上 Hadamard 门。现在，我们可以将输入边视为输出边，从而把 ZX 编码器图解释为一个态（即 Choi-Jamio-łkowski 同构的 ZX 版本）。

现在，我们的 ZX 图计算的是一个态，因此可以完全用以下基本操作及其对应的电路操作来表示。首先，可以有一个仅带一个输出的 Z 节点，或者一个仅带一个输出的节点。在电路中，它们分别对应一个 $|+\rangle$ 量子比特，或一次后选择的 $\langle+|$ 测量。我们还可以有一条经过 Hadamard 门作用的边，或一个带有 $\frac{\pi}{2}$ 相位的节点；在电路中，它们分别表示为 H 门或 S 门。最后，我们可以有一个度数为 3 的 Z 节点，它有 2 个输入和 1 个输出，或 1 个输入和 2 个输出，分别起到合并或分裂的作用。这等价于在两个量子比特之间执行 CX 操作，其中第二个量子比特分别在 CX 门之前初始化为 $|0\rangle$ ，或在 CX 门之后通过 $\langle 0|$ 测量进行后选择。

任何 ZX 图都可以用这些操作表示 [40]。此外，在应用这些操作时，我们可以持续追踪当前态的 HK 形式。（Hu 和 Khesin [28]方法说明了如何在逐一应用这些操作时保持图处于 HK 形式。）所有这些步骤都可以高效完成 [28], 因此，我们可以高效地将 ZX 图转换为相应的 HK 形式稳定子态。

□

接下来我们给出定理 II.6 的证明。

证明。关键步骤是证明，对部分邻接矩阵 $M_{\mathcal{D}}$ 进行行操作所对应的操作，可以在不改变相应稳定子表表示的情况下完成。为此，我们来考察稳定子作用于编码器图时的情形。

稳定子是一个 Pauli 矩阵。假设我们应用任意一行——一个稳定编码器输出的 Pauli 字符串。（该行可以是由 X 和 Z 组成、带有全局相位的字符串。）也就是说，这个字符串沿着图的输出边传递。当这些算符穿过输出顶点上的局部 Clifford 操作时，它们会变成不同的算符。例如，考虑一个 X 算符（由带有 π 相位的 X 节点表示）穿过输出节点 v 的一条自由输出边。（画个例子可能有助于理解。）根据 ZX 演算的 π 规则，这会产生一个全局相位、v 上局部相位的取反，以及连接到 v 的每条相邻内部边上各一个 X 节点。每个 X 节点沿内部边移动时，都会经过内部 Hadamard 门的共轭变换，最终以 Z 的形式到达边的另一侧。

总之，整个稳定子的作用在视觉上就像一场编排好的舞蹈，节点依次完成以下步骤。

1. 泡利矩阵越过输出边上的 H 门，其中一些矩阵会改变颜色（$X \leftrightarrow Z$）。

2. Z 稳定子中的节点只需将其相位加到图中的节点上，而X 节点则分裂为多个 X 节点，每条连接到输出节点 v的内部边对应一个，并使 v的每个邻居都发生相位翻转。

这一系列操作完成后，所有添加的相位必然相互抵消，添加的全局相位也会恢复为 1，因为该字符串是一个稳定子。

但请注意，任何单个 X （或表示为iXZ的 Y）穿过输出节点 v 后（若输出边上存在 Hadamard 门，则还需先经过该门），都可能产生一些算符（表示为 X 或 Z 节点），这些算符会通过连接到输入节点的内部边作用于输入节点。但归根结底，输入边上的所有算符都必须因稳定子作用而相互抵消。这意味着，每个输入节点都必须连接到偶数个节点，稳定子会在这些节点上作用X ，或者在自由输出边上的 Hadamard 门之后作用 Y 门。

因此，对于任意一对输入节点，我们可以通过（施加 Hadamard 门的）内部边，将其中一个节点的所有邻居连接到另一个节点，而不改变上述稳定子的奇偶效应。这相当于在 $M_{\mathcal{D}}$ 中将两行相加。

最后，我们注意到，任意一对内部边上都施加了 Hadamard 门，因此，如果同一对 Z 节点之间有两条边，我们可以根据 ZX 演算规则将它们同时移除。换言之，我们实际上可以在 $M_{\mathcal{D}}$ 上任意执行模 2 行操作。显然，这些操作不会违反边规则与阿达马规则。

这使我们可以对 $M_{\mathcal{D}}$ 进行行化简，以满足简化行阶梯形规则。 □

本节最后推导 ZXCF 图的递归计数公式，该公式见方程（2）。为推导 f，设想我们从两个空箱开始，必须将 $n-k$ 个输出节点分配为主元（情况 A）或非主元（情况 B），其中主元需要与输入节点匹配。当前主元数量记为 p，非主元输出的数量记为 o。

假设我们希望下一个输出节点是（$\mathcal{P}$中的）主元。由于主元与输入之间存在一一对应关系，因此只有在 $n > k$ 时才能添加主元。简化行阶梯形规则完全限定了主元与输入节点之间的匹配关系，它会将输入和主元一并排序。Clifford 规则规定，主元节点不能执行局部 Clifford 操作，因此我们只需选择连接这些主元与已分配节点的边。由于主元之间没有边，且该主元只与一个输入相连，因此我们恰好有 2° 种可能。完成分配后，p 增加 1，n 减少 1（输入数和输出数都会减少，因为该主元与一个输入相匹配）。

假设我们希望下一个输出节点是非主元（位于 $\mathcal{O}$ 中）。那么，我们必须同时选择局部 Clifford 操作，以及它与先前已指定顶点之间的边。如果选择不将该节点连接到任何 p 已指定的输入、p 已指定的主元或 o 已指定的顶点，那么就可以在该节点上放置 6 种局部 Clifford 操作中的任意一种。然而，只要存在上述任何一条边，由于 Hadamard 规则，我们就不能对输出边应用 Hadamard 门。因此，局部 Clifford 操作还剩 4 种选择。这样总共有 $4(2^{2p+o}-1)+6 = 2^{2p+o+2}+2$ 种可能。最后，我们将输出量子比特的数量减一，同时保持输入数量不变。