arXiv:2301.02391v1 [math.NT] 6 Jan 2023

关于三次无理数的有效无理性指数

Dzmitry Badziahin

2023年1月9日

摘要

我们给出了三次代数数的有效无理性指数上界x，其最小多项式为 $x^3 - tx^2 - a$。特别地，我们证明，在情形 $|t| > 19.71a^{4/3}$ 下，该上界变得非平凡，也就是说，优于刘维尔的经典上界。此外，在条件 $|t| > 86.58a^{4/3}$ 下，我们为所有足够大的 $q \in \mathbb{Z}$ 给出了表达式 $||qx||$ 的显式下界。这些结果基于近期发现的三次无理数的连分数 [1]，并改进了 Wakabayashi 目前已知的最佳界。

Keywords: 三次无理数、连分数、无理性指数、有效无理性指数 数学主题分类（2010）：11J68、11J70、11J82

1 引言

无理实数 x 的无理性指数 $\lambda(x)$ 定义为满足下列不等式的实数 λ 的上确界：

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < q^{-\lambda} \tag{1}$$

该不等式有无穷多个有理数解 p/q。由经典的狄利克雷定理可知，对于所有 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，$\lambda(x) \geqslant 2$。另一方面，欣钦定理表明，关于勒贝格测度，几乎所有 $x \in \mathbb{R}$ 都满足 $\lambda(x) = 2$。二十世纪上半叶，人们对估计实代数数的无理性指数颇感兴趣。这一研究于1955年随着罗斯的工作达到顶峰 [8]，罗斯确立了最佳可能结果，即对于任意代数 $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，$\lambda(x) = 2$。遗憾的是，这一结果是非有效的，也就是说，对于 $\lambda > 2$，它无法让我们找出所有满足（1）的有理数 p/q。因此，例如，它不能用于求解图厄方程

$$F(p, q) = c$$

整数 p、q，其中 $F \in \mathbb{Z}[x, y]$ 是次数为 $d \geqslant 3$ 的齐次多项式，而 c 是某个整数参数。此后，许多数学家一直致力于研究代数数无理性指数的有效结果。

给定 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，我们将 x 的有效无理性指数定义为正实数 $\lambda_{eff}(x)$，使得对于所有 $\lambda > \lambda_{eff}(x)$，都存在一个可有效计算的 $Q > 0$，使不等式 (1) 的所有既约有理数解均满足 $q \leqslant Q$。

对于代数实数 x，所有已知的关于 $\lambda_{eff}(x)$ 的上界都远弱于罗斯定理。首先，刘维尔的经典定理指出 $\lambda_{eff}(x) \leqslant d$，其中 d 是 x 的次数。因此，关于 $\lambda_{eff}(x)$ 的任何非平凡上界都应严格小于

d。刘维尔界的一项重要改进基于 Feldman 对对数线性形式理论的精化 [6]。这一方法的优点是，它对所有代数数都给出 $\lambda_{eff}(x) < d$。然而， $\lambda_{eff}(x)$ 与 d 之间的差异通常极小。关于这一方法的最新成果，请参阅 Bugeaud 的著作 [5]。关于这个问题的其他重要进展，请参阅 [3, 4] 及其中的参考文献。

本文聚焦于三次无理数的情形。乘以某个整数并平移一个有理数后，我们总能确保所得三次 x 的最小多项式为 $x^3 + px + q$，其中 p、$q \in \mathbb{Z}$。还请注意，这种变换不会改变 x的（有效）无理性指数。Bombieri、van der Poorten 和 Vaaler 于 1996年首次针对这些特定值 x，给出了关于 $\lambda_{eff}(x)$ 的一般性结果 [4]。他们证明，在条件 $|p| > e^{1000}$ 和 $|p| \geqslant q^2$ 下，有

$$\lambda_{eff}(x) \leqslant \frac{2\log(|p|^3)|}{\log(|p|^3/q^2)} + \frac{14}{(\log(|p|^3/q^2))^{1/3}}.$$

随后，Wakabayashi [9] 改进了该界，并证明 $\lambda_{eff}(x) \leqslant \lambda_w(p, q)$。在条件

$$|p| > 2^{2/3}3^4|q|^{8/3}\left(1 + \frac{1}{390|q|^3}\right)^{2/3} \tag{2}$$

并且当 p和 q较大时，它渐近表现为 $\lambda_w(p, q) \sim 2 +$（4 log $|q|$ +2log 108）/（3 log $|p|$）。

本文借助最近发现的、最小多项式为 $x^3 - tx^2 - a \in \mathbb{Z}[x]$ 的三次无理数 [1] 的连分数渐近分数，研究能够对 $\lambda_{eff}(x)$ 得到怎样的估计。已有结果表明，只要 $|t|^3 > 12a > 0$，该方程中绝对值最大的实根就具有如下连分数展开

$$x = \mathbf{K}\left[\begin{array}{cccc} & 3(12k+1)(3k+1)\alpha & 3(12k+5)(3k+2)\alpha & 3(12k+7)(6k+5)\alpha & 3(12k-1)(6k+1)\alpha \\ t & (2i+1)t^2 & (2i+1)t & 2(2i+1)t^2 & (2i+1)t \end{array}\right].$$

这里，i 是相应部分商的指标，且 $k = \left[\frac{i}{4}\right]$。注意，变量替换 $y = \frac{q}{x}$ 将三次 x 从 [4, 9] 变换为本文中满足 $t = -p$ 和 $a = -q^2$ 的数。

所得的 $\lambda_{eff}(x)$ 上界（见定理 1 和 2）取决于 a 和 t 的素因子分解，但无论如何都优于 [9] 中的结果。定理 1 指出，在条件 $|t|^3 > 12|a|$ 下，上述三次方程的最大实根满足

$$||qx|| \geqslant \tau(t,a)q^{-\lambda(t,a)}(\log(8|t_1|q))^{\lambda(t,a)-1/2}, \quad \text{for all } q > Q_0(t,a),$$

其中，$\tau(t,a)$ $\lambda(t,a)$ 和 $q_0(t,a)$ 的所有取值均已明确给出。该不等式在条件 $|t| > 86.58a^{4/3}$ 下总能为 $\lambda_{eff}(x)$ 给出非平凡的上界。它等价于条件 $|p| > 86.58|q|^{8/3}$，比 (2) 更优；即使不考虑方括号中的项，我们也有 $|p| > 128.57|q|^{8/3}$。此外，参数 a 不必具有 $-q^2$ 的形式，因此本文中的许多三次数并不能直接对应到 [4, 9] 中的三次数。除此之外，定理 2 为 $\lambda_{eff}(x)$ 给出了更优的上界，但没有像上文那样给出 $||qx||$ 的显式下界。一旦 $|t| > 19.71a^{4/3}$，该界就总是非平凡的。t 与 a 之间的这些界在第3节中给出。

2 预备知识和主要结果

考虑方程 $x^3 - tx^2 - a = 0$ 的实根，它在同一方程的其他根中具有最大的绝对值。注意，$a \neq 0$，否则 x 就不是三次的。此外，必要时用 $-x$ 替换 x，即可保证 $a > 0$。

接下来，利用标准的连分数变换（见 [1, 引理 1]），我们可以从 x的连分数中约去 t 和 $3a$ 的一些公因数。令 $g_1 := \gcd(t^2, 3a)$，且$g_2 := \gcd(t, 3a/g_1)$。为方便起见，记 $t^2 = g_1 t_2$、 $t = g_2 t_1$ 和 $3a = g_1 g_2 a^*$。我们将 x的以下部分商除以 g_1： β_1、a_1、β_2； β_3、a_3、β_4；.....； β_{2k-1}、a_{2k-1}、β_{2k}、.....。之后，我们将以下部分商除以 g_2: β_0、a_0、β_1； β_2、a_2、β_3；.....；β_{2k}、a_{2k}、β_{2k+1}、.....。所得连分数与初始连分数具有相同的极限 x。为了使 β_0成为整数，我们考虑数 x/g_2，而不是 x。其连分数为

$$\mathbf{K}\begin{bmatrix} & (12k+1)(3k+1)a^* & (12k+5)(3k+2)a^* & (12k+7)(6k+5)a^* & (12k-1)(6k+1)a^* & \dots \\ t_1 & (2i+1)t_2 & (2i+1)t_1 & 2(2i+1)t_2 & (2i+1)t_1 & \end{bmatrix} \tag{3}$$

我们定义以下概念:

$$c_6 = c_6(t_1, t_2, a^*) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{64t_1t_2 + 270a^*}}{2^{7/4}ec_1} & \text{if } t > 0 \\ \dfrac{\sqrt{64|t_1t_2| - 54a^*}}{2^{7/4}ec_1} & \text{if } t < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$c_7 = c_7(t_1, t_2, a^*) := \begin{cases} \dfrac{2^{7/4}ec_1(16t_1t_2 + 9a^*)}{9a^*\sqrt{64t_1t_2 + 270a^*}} & \text{if } t > 0 \\ \dfrac{2^{23/4}ec_1(|t_1t_2| - 3a^*)}{9a^*\sqrt{64|t_1t_2| - 54a^*}} & \text{if } t < 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中， $c_1 = c_1(a^*)$在（10）中定义。接下来,

$$\tau = \tau(t_1, t_2, a^*) := \frac{g_2 \cdot (\log c_7)^{1/2}}{8c_6^8(8|t_1|)^{\frac{\log c_6}{\log c_7}}}; \quad q_0 = q_0(t_1, t_2, a^*) := \frac{c_7^4}{8|t_1|}. \tag{6}$$

本文的主要结果是

定理 1 对所有整数 $q \geqslant q_0$，有

$$||qx|| > \tau q^{-\lambda} \log(8|t_1|q)^{-\lambda - 1/2}$$

其中 $\lambda = \frac{\log c_6}{\log c_7}$。特别地， $\lambda_{eff}(x) \leqslant \lambda$。

如第 5 节所示，常数 c_1 可以替换为在（11）中定义的更大常数 c_2。但在这种情形下，要像定理 1 中那样写出明确的不等式会困难得多（但理论上是可行的）。我们不在此处给出其精确形式，而仅陈述以下结果。设 c_6^* 和 c_7^* 的定义方式分别与 c_6 和 c_7 相同，但使用常数 c_2 代替 c_1。

定理 2 x 的有效无理性指数满足

$$\lambda_{eff}(x) \leqslant \lambda^* := \frac{\log c_6^*}{\log c_7^*}.$$

3 结果分析

定理 1 在$\log c_6 \log c_7$ 严格小于 2 时，即 $c_6 < c_7^2$ 时，为 $||qx||$ 提供了一个非平凡的下界。根据 (4) 和 (5)，对于 $t > 0$，这等价于

$$\frac{\sqrt{64t_1t_2 + 270a^*}}{2^{7/4}ec_1} < \frac{2^{7/2}e^2c_1^2(16t_1t_2 + 9a^*)^2}{81a^{*2}(64t_1t_2 + 270a^*)}$$

$$\iff \qquad a^{*2}(64t_1t_2+270a^*)^{3/2} < \frac{2^{21/4}e^3c_1^3}{81}(16t_1t_2+9a^*)^2.$$

定义参数 u，使得 $16t_1t_2 = ua^{*4} - 9a^*$。另外，为方便起见，定义 $\tau := \frac{2^{21/4}e^3c_1^3}{81}$。那么，最后一个不等式可改写为

$$a^{*2}(4ua^{*4}+234a^*)^{3/2} < \tau u^2 a^{*8} \quad \iff \quad 4ua^{*3}+234 < \tau^{2/3}u^{4/3}a^{*3}.$$

注意，对于 $u \geqslant \left(\frac{4}{\tau^{2/3}} + \frac{234}{64a^{*3}}\tau^{4/3}\right)^3$，有

$$\tau^{2/3}u^{4/3}a^{*3} \geqslant \left(4 + \frac{234}{64a^{*3}}\tau^2\right)\cdot ua^{*3} \geqslant 4ua^{*3} + \frac{234\tau^2}{64a^{*3}}\cdot\frac{4^3}{\tau^2}a^{*3} = 4ua^{*3}+234$$

并且条件 $c_6 < c_7^2$ 得到满足。

回想一下，$t_1t_2 = t^3/(g_1g_2)$ 且 $a^* = 3a/(g_1g_2)$。因此，$16t_1t_2 > ua^{*4} - 9a^*$ 等价于 $16t^3 > \frac{81}{(g_1g_2)^3}ua^4 - 27a$。

由定义 (10) 可知，c_1，因此 τ 取决于 a^* 的素因数分解。若 $3 \nmid a^*$，则总有 $c_1 > 0.0924$，进而推出 $\tau > 0.00744$，并且

$$\left(\frac{4}{\tau^{2/3}} + \frac{234}{64a^{*3}}\tau^{4/3}\right)^3 \leqslant 104.97^3.$$

另一方面，我们有 $g_1g_2 \geqslant 3$。

最后可得，对于 $t > 0$，只有当 $t > \frac{104.97}{3}\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{1/3}a^{4/3} \approx 60.08a^{4/3}$ 时，关于 $\lambda_{eff}(x)$ 的非平凡界才总能达到；然而，对于许多对 a 和 t，在实质上更弱的条件下也能满足该界。

在情形 $3 \mid a^*$ 下，我们得到 $c_1 > 0.13329$，因此 $\tau > 0.0223$ 且

$$\left(\frac{4}{\tau^{2/3}} + \frac{234}{64a^{*3}}\tau^{4/3}\right)^3 \leqslant 50.42^3.$$

于是，当 $t > 50.42\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{1/3}a^{4/3} \approx 86.57a^{4/3}$ 时，可得到非平凡的界。

情形 $t < 0$ 的处理方式类似。条件 $c_6 < c_7^2$ 等价于

$$\frac{\sqrt{64|t_1t_2| - 54a^*}}{2^{7/4}ec_1} < \frac{2^{7/2}e^2c_1^2(16|t_1t_2|-48a^*)^2}{81a^{*2}(64|t_1t_2|-54a^*)}$$

$$\iff \qquad a^{*2}(64|t_1t_2|-54a^*)^{3/2} < \tau(16|t_1t_2|-48a^*)^2.$$

定义 u，使得 $16|t_1t_2| = ua^{*4} + 48a^*$。那么最后一个不等式可改写为

$$4ua^{*3} + 138 < \tau^{2/3}u^{4/3}a^{*3}.$$

可以验证，对于 $u \geqslant \left(\frac{4}{\tau^{2/3}} + \frac{138\tau^{4/3}}{64a^{*3}}\right)^3$，最后一个不等式成立。与正的 t 的情形一样，当 $3 \nmid a^*$ 时，右侧总是小于 104.93^3；当 $3 \mid a^*$ 时，右侧小于 50.42^3。因此，对于 $3 \nmid a^*$，只要 $|t|^3 > \frac{104.93^3\cdot 81}{3^3\cdot 16}a^4 + 9a$，条件 $c_6 < c_7^2$ 就总是成立，而这可由 $|t| > 60.06a^{4/3}$ 推出。对于 $3 \mid a^*$，类似的计算得到 $|t|^3 > \frac{50.42^3\cdot 81}{16}a^4 + 9a$，这可由 $|t| > 86.58a^{4/3}$ 推出。

对于定理 2，可以重复上述相同的分析。在这种情形下，计算中的常数c_1 应替换为 c_2。我们有，若 $3 \nmid a^*$，则它始终满足$c_2 \geqslant 0.1939$，这进而推出 $\tau \geqslant 0.0688$，然后

$$\left(\frac{4}{\tau^{2/3}} + \frac{234}{64a^{*3}}\tau^{4/3}\right)^3 \leqslant 23.93^3.$$

若 $3 \mid a^*$，则有 $c_2 \geqslant 0.2797$、$\tau \geqslant 0.206$，并且

$$\left(\frac{4}{\tau^{2/3}} + \frac{234}{64a^{*3}}\tau^{4/3}\right)^3 \leqslant 11.47^3.$$

最后，对于情形 $3 \nmid a^*$，若 $|t|^3 > \frac{23.93^3 \cdot 81}{3^3 \cdot 16}a^4 + 9a$，则条件 $c_6 < c_7^2$ 总是成立，这可由 $|t| > 13.72a^{4/3}$ 推出。对于情形 $3 \mid a^*$，类似的计算可得 $|t| > 19.71a^{4/3}$。

4 优美、便利且完美的连分数 s

定义 1 设 x 是一个由下式给出的连分数

$$x = \mathbf{K}\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \end{bmatrix}; \quad \beta_i, a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

对于给定的正整数 k、r，满足 $-1 \leqslant r \leqslant k$，我们定义

$$\gamma_{k,r} := \prod_{\substack{i=k-r \\ 2|(i-k+r)}}^{k+r} \beta_i, \quad \gamma_{k,-1} := 1.$$

若 $d \mid a_k$，且对所有正整数 $r \leqslant k$，都有 $a_{k-r}\beta_{k+r}\gamma_{k,\ r-2} \equiv -a_{k+r}\gamma_{k,\ r-1}$ (模 d)，则称 x 在指标 k 处是 d-优美的，其中 d、$k \in \mathbb{N}$。若 x 在指标 k 处是 (d, r)-完美的，其中$0 \leqslant r \leqslant k$，则称其在指标 k 处是 d-优美的，且满足 $\beta_{k-r} \equiv \beta_{k+r+1} \equiv 0$ (模 d)。

如果从位置 k_0 起，对于所有 $0 \leqslant r \leqslant k - k_0$ 都满足上述相同条件，我们称 x 在索引 k 处最终是 d-良好的。在本文中，k_0 通常是一个固定的绝对常数。如果不会对其取值产生混淆，我们将在正文中省略它。

令 p_n/q_n 为 x 的第 n 个渐近分数。定义以下矩阵

$$S_n := \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}; \qquad C_n := \begin{pmatrix} a_n & \beta_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据连分数理论，我们知道 $S_n = C_nC_{n-1}\cdots C_0$。为了缩短这个乘积，我们使用通常的记号，但按降序排列：$S_n = \prod_{i=n}^{0} C_i$。

引理 1 设连分数 x 从位置 k_0 起在索引 k 处最终是 d-良好的。那么对于所有 $0 \leqslant r \leqslant k - k_0$，都有

$$\prod_{i=k+r}^{k-r} C_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{k,r} \\ \gamma_{k,r-1} & 0 \end{pmatrix} \pmod{d}.$$

此外，如果 x 在索引 k 处是 (d, r)-完美的，那么 $\prod_{i=k+r+1}^{k-r} C_i \equiv \mathbf{0}$（模 d）。

Proof.

我们对 r 使用归纳法进行证明。对于 $r = 0$，该命题显然成立。假设该命题对 r 成立，并验证它对 $r + 1$也成立。

$$\begin{aligned} \prod_{i=k+r+1}^{k-r-1} C_i &\equiv \begin{pmatrix} a_{k+r+1} & \beta_{k+r+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{k,r} \\ \gamma_{k,r-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k-r-1} & \beta_{k-r-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} a_{k-r-1}\beta_{k+r+1}\gamma_{k,r-1} + a_{k+r+1}\gamma_{k,r} & \beta_{k-r-1}\beta_{k+r+1}\gamma_{k,r-1} \\ \gamma_{k,r} & 0 \end{pmatrix} \pmod{d}. \end{aligned}$$

根据在指标 k处的 d-优良连分数的条件，最后一个矩阵同余于 $\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{k,\ r+1} \\ \gamma_{k,\ r} & 0 \end{pmatrix}$。如果 x 在指标 k 处是 (d,r)-完美的，那么 $\gamma_{k,\ r} \equiv 0 \pmod{d}$，并且我们有

$$\prod_{i=k+r+1}^{k-r} C_i \equiv \begin{pmatrix} a_{k+r+1} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{k,r} \\ \gamma_{k,r-1} & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{0} \pmod{d}.$$

⊠

由定义可轻易推出， d-友好连分数还具有另外两个性质：

- 设 d_1、 d_2 为两个互质的正整数。如果一个连分数在相同的位置 k_0 上、同一索引 k 处最终是d_1-友好的，并且最终是 d_2-友好的，那么它在索引 k处最终是 d_1d_2-友好的。

- 如果一个连分数在索引 k 处最终是 d-友好的，那么对于 d的所有正整数因子 e ，它在相同位置、相同索引处也最终是 e-友好的。

定义 2 如果存在一个模 m 的剩余类序列（c_r）$_{0\leqslant r\leqslant \lfloor k/2\rfloor}$ ，使得对于所有正整数$r \leqslant k$ （分别为 $r \leqslant k - k_0$），均有：我们称连分数 x 在索引 k 处是（最终） d-便利的。

- $\beta_{k+r+1} \equiv c_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\beta_{k-r}$ （模 d）；
- 若 r为奇数，则 $a_{k+r} \equiv -c_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}a_{k-r}$ （模 d）；
- 若 r 为偶数，则 $a_{k+r} \equiv -a_{k-r}$ （模 d）。

引理 2 设 $d > 2$。那么，在指标 k 处最终为 d-便利型的任意连分数，也最终为 d-优美型。对于 $d = 2$，在指标 k 处满足$a_k \equiv 0$ （模 d）的任意 d-便利型连分数，也为 d-优美型。

Proof. 首先，对于 $d > 2$ 和 $r = 0$ ，条件 $a_{k+r} \equiv -a_{k-r}$ （模 d）意味着$a_k \equiv 0$ （模 d），这正是 d-优美型连分数的第一个条件。

其次，可以验证， d-便利型连分数的第一个条件意味着，对于奇数r， $\gamma_{k,\ r} \equiv c_{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\gamma_{k,\ r-1}\beta_{k-r} \equiv \gamma_{k,\ r-1}\beta_{k+r+1}$（模 d）。于是我们得到

$$a_{k-r-1}\beta_{k+r+1}\gamma_{k,r-1} \equiv a_{k-r-1}\gamma_{k,r} \equiv -a_{k+r+1}\gamma_{k,r} \pmod{d}$$

并且满足 d-优良连分数的第二个条件。

第三，当 r 为偶数时，我们得到 $c_{r/2}\gamma_{k,r} \equiv c_{r/2}\gamma_{k,r-1}\beta_{k-r} \equiv \gamma_{k,r-1}\beta_{k+r+1}$ (模 d)，因此

$$a_{k-r-1}\beta_{k+r+1}\gamma_{k,r-1} \equiv c_{r/2}a_{k-r-1}\gamma_{k,r} \equiv -a_{k+r+1}\gamma_{k,r} \pmod{d}.$$

同样， d-优良连分数的第二个条件也成立。

⊠

5 S_n 的元素的整除性

引理 3 令 $k \in \mathbb{N}$、 $k \geqslant 2$ 和 d 为 $2k+1$ 的任意整数因子。连分数 (3) 从位置 2 起最终是 d-方便的。此外，对于 $k \equiv 3 \pmod 4$ 和 $d = 2$，同一结论也成立。

在接下来的讨论中，我们将始终处理从位置 2 起最终为 d-方便或 d-良好的连分数。因此，为了使表述简洁，我们省略“最终”和“从位置 2 起”这两个词，并称连分数 (3) 为 d-方便或 d-良好。

PROOF. 我们将根据 k 模 4 的不同情形，分别检查 d-便捷连分数的条件。

情形 $k = 4m + 1$。此时 $m \equiv -\frac{3}{8}$（模 d），我们利用 (3) 计算

$$a_{k+4r} \equiv 8rt_2, \quad \beta_{k+4r} = a^*(12m + 1 + 12r)(3m + 1 + 3r) \equiv \frac{a^*}{16}(24r - 7)(24r - 1) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r+1} \equiv (8r + 2)t_1, \quad \beta_{k+4r+1} \equiv \frac{a^*}{16}(24r + 1)(24r + 7) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r+2} \equiv 2(8r + 4)t_2, \quad \beta_{k+4r+2} \equiv \frac{a^*}{8}(24r + 5)(24r + 11) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r-1} \equiv (8r - 2)t_1, \quad \beta_{k+4r-1} \equiv \frac{a^*}{8}(24r - 11)(24r - 5) \pmod{d}.$$

现在可以很容易地检查索引为 k 时 d-便捷连分数的条件，其中 c_r 为常数 1 序列。

在所有其他情形中，我们采用相同的方法。

情形 $k = 4m + 2$。此时 $m \equiv -\frac{5}{8}$（模 d），并且

$$a_{k+4r} \equiv 8rt_1, \quad \beta_{k+4r} \equiv \frac{a^*}{16}(24r - 5)(24r + 1) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r+1} \equiv 2(8r + 2)t_2, \quad \beta_{k+4r+1} \equiv \frac{a^*}{8}(24r - 1)(24r + 5) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r+2} \equiv (8r + 4)t_1, \quad \beta_{k+4r+2} \equiv \frac{a^*}{8}(24r + 7)(24r + 13) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r-1} \equiv (8r - 2)t_2, \quad \beta_{k+4r-1} \equiv \frac{a^*}{16}(24r - 13)(24r - 7) \pmod{d}.$$

容易验证，对于 $s \equiv 0$, 1（模 4），有 $\beta_{k+s+1} \equiv 2\beta_{k-s}$（模 d）；对于 $s \equiv 2$, 3（模 4），有 $\beta_{k+s+1} \equiv 2^{-1}\beta_{k-s}$（模 d）。此外，对于 $s \equiv 1$（模 4），有 $a_{k+s} \equiv 2a_{k-s}$（模 d）；对于 $s \equiv 3$（模 4），有 $a_{k+s} \equiv 2^{-1}a_{k-s}$（模 d）。因此，d-便捷连分数的条件得到验证，其中序列 c_s 以 2、2^{-1} 为周期。

情形 $k = 4m + 3$, $d \neq 2$。那么 $m \equiv -\frac{7}{8}$(模 d)，并且

$$a_{k+4r} \equiv 16rt_2, \quad \beta_{k+4r} \equiv \frac{a^*}{8}(24r - 7)(24r - 1) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r+1} \equiv (8r + 2)t_1, \quad \beta_{k+4r+1} \equiv \frac{a^*}{8}(24r + 1)(24r + 7) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r+2} \equiv (8r + 4)t_2, \quad \beta_{k+4r+2} \equiv \frac{a^*}{16}(24r + 5)(24r + 11) \pmod{d};$$

$$a_{k+4r-1} \equiv (8r - 2)t_1, \quad \beta_{k+4r-1} \equiv \frac{a^*}{16}(24r - 11)(24r - 5) \pmod{d}.$$

接下来可以检验常数 1 序列c_r在指标 k 处是否满足 d-便利连分数的条件。

情形 $k = 4m + 3$, $d = 2$。在这种情形下，很容易看出 $a_{k+4r} \equiv 0 \pmod 2$, $a_{k+4r+1} \equiv a_{k+4r+3} \equiv t_1 \pmod 2$, $a_{k+4r+2} \equiv t_2 \pmod 2$; $\beta_{k+4r} \equiv \beta_{k+4r+1} \equiv a^* \pmod 2$ 且

$\beta_{k+4r+2} \equiv \beta_{k+4r-1} \pmod 2$。因此，连分数在指标 k 处是 2-便利的，其常数 1 序列为 c_r。

情形 $k = 4m$。那么 $m \equiv -\frac{1}{8} \pmod d$，并且

$$a_{k+4r} \equiv 8rt_1, \quad \beta_{k+4r} \equiv \frac{a^*}{8}(24r-5)(24r+1) \pmod d;$$

$$a_{k+4r+1} \equiv (8r+2)t_2, \quad \beta_{k+4r+1} \equiv \frac{a^*}{16}(24r-1)(24r+5) \pmod d;$$

$$a_{k+4r+2} \equiv (8r+4)t_1, \quad \beta_{k+4r+2} \equiv \frac{a^*}{16}(24r+7)(24r+13) \pmod d;$$

$$a_{k+4r-1} \equiv 2(8r-2)t_2, \quad \beta_{k+4r-1} \equiv \frac{a^*}{8}(24r-13)(24r-7) \pmod d.$$

接下来可以验证，周期序列为 c_r、周期为 2^{-1},2 的 d-便捷连分数满足相关条件。

⊠

引理2和引理3表明，对于适当选取的 d，x 在每个指标 $k \geqslant 2$ 处都是 d-优良的。下一步，我们证明，对于几乎所有素数 p，在无穷多个经过精心选取的指标 k 和 t 处，它也都是 (p,t)-完美的。这一事实将使我们能够证明，$C_kC_{k-1}\cdots C_1$ 的所有元素都是某个较大幂次的 p 的倍数。

首先，考虑情形 $p > 2$ 和 $p \mid a^*$。令 $s \in \mathbb{N}$ 满足 $p^s || a^*$。取某个 $1 \leqslant l \leqslant s$ 对应的 $q = p^l$。若记 $q = 2m+1$，则有 $q \mid \alpha_k$，对于$k = m + rq = {(2r+1)_2}^{q-1}$，其中 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$。显然，对于任意这样的 k，x 在指标 k 处都是 $(q,0)$-完美的。根据引理 1，我们可以将乘积 S_k 划分为 $\left\lfloor \frac{2k+q-1}{2q} \right\rfloor$组，使得每组中所得乘积矩阵的所有元素都是 q 的倍数。最后，我们结合所有 $1 \leqslant l \leqslant s$ 对应的 q^l 的信息，推得乘积 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 的所有元素都能被整除

$$p^{\sum_{i=1}^{s} \left\lfloor \frac{2k+p^i-1}{2p^i} \right\rfloor}.$$

接下来，考虑情形 $p = 2$ and $p \mid a^*$。对于所有 $k \equiv 3 \pmod 4$，我们有 $p \mid a_k$，并且容易看出，对于所有这样的 k，x 在指标 k 处是 $(p,0)$-完美的。然后，像前一种情形那样应用引理 1，可得 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 的所有元素都能被 $2^{\lfloor k/4 \rfloor}$. 整除

对于情形 $p = 2$，结果稍弱一些。由 (3) 可验证，对所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 都有 $\beta_{8m+2} \equiv \beta_{8m+5} \equiv 0 \pmod 2$，因此 x 在指标 $8m+3$ 处是 $(2,1)$-完美的。然后引理 1 推出 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 的所有元素都能被 $2^{\lfloor (k+3)/8 \rfloor}$. 整除

最后，在下面的引理中，我们考虑 $p \in \mathbb{N}$ 不整除 a^* 的剩余情形。

引理 4 设 $p \in \mathbb{N}$ 满足 $\gcd(p,6) = 1$。那么，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，矩阵乘积 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 的所有元素都能被整除

$$p^{\left\lfloor \frac{3k+p-2}{3p} \right\rfloor}.$$

Proof. 我们通过依次考察所有情形来证明，这些情形取决于 p 模 12 的结果。

情形 $p = 12m+1$。那么，借助 (3) 可以验证，对于所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\equiv \beta_{4(m+rp)+1} \equiv \beta_{4(2m+rp)} \equiv \beta_{4(4m+rp)+1} \equiv \beta_{4(5m+rp)+2} \equiv \beta_{4(7m+rp)+3} \equiv \beta_{4(8m+rp)+2} \\ &\equiv \beta_{4(10m+rp)+3} \equiv \beta_{4(11m+rp)+4} \pmod p \end{aligned}$$

且 $0 \equiv a_{6m+rp}$ （模 p）。根据引理 3，我们由此得出， x 在所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 对应的指标 $k = 6m + 2rp$ 处是 $(p, 2m-1)$-完美的，并且在指标 $k = 6m + (2r+1)p$处是 $(p, 2m)$-完美的。由引理 1 可知，以下矩阵乘积的所有元素都能被 p 整除:

$$\prod_{i=8m+2rp}^{4m+2rp+1} C_i, \qquad \prod_{i=20m+2rp+2}^{16m+4rp+1} C_i.$$

最后，可以很容易验证，对于 $k = (n+1)p - \frac{p-1}{3}$，乘积 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 包含 $n+1$个上述形式的块。因此，其中所有元素都能被 p^{n+1}整除。

其他情形可用类似的方法处理。

情形 $p = 12m + 5$。可以验证，对于所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\equiv \beta_{4(m+rp)+2} \equiv \beta_{4(2m+rp)+3} \equiv \beta_{4(4m+rp)+6} \equiv \beta_{4(5m+rp)+9} \equiv \beta_{4(7m+rp)+12} \equiv \beta_{4(8m+rp)+13} \\ &\equiv \beta_{4(10m+rp)+16} \equiv \beta_{4(11m+rp)+19} \pmod{p} \end{aligned}$$

且 $0 \equiv a_{6m+rp+2}$ (模 p)。于是，由引理 3 可知，对于所有 $r \in \mathbb{Z}$， x 在指标 $k = 6m + 2rp$ 处是 $(p, 2m)$-完美的，并且在指标 $k = 6m + (2r+1)p$处是 $(p, 2m-1)$-完美的。再由引理 1 可知，以下乘积的所有元素都能被 p整除:

$$\prod_{i=8m+2rp+3}^{4m+2rp+2} C_i, \qquad \prod_{i=20m+2rp+9}^{16m+4rp+6} C_i.$$

对于 $k \geqslant (n+1)p - \frac{p-2}{3}$，可以很容易验证，乘积 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 包含 $n+1$ 个上述形式的块。因此，其中所有元素都能被 p^{n+1}整除。

情形 $p = 12m + 7$。那么对所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\equiv \beta_{4(m+rp)+3} \equiv \beta_{4(2m+rp)+4} \equiv \beta_{4(4m+rp)+9} \equiv \beta_{4(5m+rp)+12} \equiv \beta_{4(7m+rp)+17} \equiv \beta_{4(8m+rp)+18} \\ &\equiv \beta_{4(10m+rp)+23} \equiv \beta_{4(11m+rp)+26} \pmod{p} \end{aligned}$$

且 $0 \equiv a_{6m+rp+3}$ (模 p)。由引理 3 和引理 1 可知，下列乘积的所有元素都能被 p 整除:

$$\prod_{i=8m+2rp+4}^{4m+2rp+3} C_i, \qquad \prod_{i=20m+2rp+12}^{16m+4rp+9} C_i.$$

对于 $k \geqslant (n+1)p - \frac{p-1}{3}$，容易验证乘积 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 含有 $n+1$ 个上述形式的块。因此，其所有元素都能被 p^{n+1} 整除。

情形 $p = 12m + 11$。那么对所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\equiv \beta_{4(m+rp)+4} \equiv \beta_{4(2m+rp)+7} \equiv \beta_{4(4m+rp)+14} \equiv \beta_{4(5m+rp)+19} \equiv \beta_{4(7m+rp)+26} \equiv \beta_{4(8m+rp)+29} \\ &\equiv \beta_{4(10m+rp)+36} \equiv \beta_{4(11m+rp)+41} \text{ (模 } p) \end{aligned}$$

且 $0 \equiv a_{6m+rp+5}$ （模 p）。引理 3 和引理 1 表明，以下乘积中的所有元素都能被 p 整除:

$$\prod_{i=8m+2rp+7}^{4m+2rp+4} C_i, \qquad \prod_{i=20m+2rp+19}^{16m+4rp+14} C_i.$$

对于 $k \geqslant (n+1)p - \frac{p-2}{3}$，不难验证，乘积 $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 包含 $n+1$ 个上述形式的块。因此，它的所有元素都能被 p^{n+1} 整除。

在这四种情形中，对于 $k \geqslant (n+1)p - \frac{p-2}{3}$， $\prod_{i=k}^{2} C_i$ 的所有元素都能被 p^{n+1} 整除。用 k 表示后，我们得到 p 的这个幂为

$$\left\lfloor \frac{k + \frac{p-2}{3}}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3k + p - 2}{3p} \right\rfloor.$$

⊠

我们将 $\prod_{i=n}^{1} C_i$ 的所有整除性质结合起来，得到以下结果

命题 1 设 a^* 的素因数分解为 $a^* = 2^{\sigma_0} p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \cdots p_d^{\sigma_d}$，其中 σ_0 可以等于零，而其他指数 σ_i 均严格为正。定义 $\mathbb{P}_1 := \{p_1, \ldots, p_d\}$,$\mathbb{P}_2 := \mathbb{P} \setminus (\mathbb{P}_1 \cup \{2, 3\})$。若 $2 \mid a^*$，则

$$\gcd(p_n, q_n) \geqslant 2^{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor} \prod_{p_i \in \mathbb{P}_1} p_i^{\sum_{j=1}^{\sigma_i} \left\lfloor \frac{2n + p^j - 1}{2p^j} \right\rfloor} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{\left\lfloor \frac{3n+p-2}{3p} \right\rfloor}. \tag{7}$$

若 $2 \nmid a^*$，则

$$\gcd(p_n, q_n) \geqslant 2^{\left\lfloor \frac{n+3}{8} \right\rfloor} \prod_{p_i \in \mathbb{P}_1} p_i^{\sum_{j=1}^{\sigma_i} \left\lfloor \frac{2n + p^j - 1}{2p^j} \right\rfloor} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{\left\lfloor \frac{3n+p-2}{3p} \right\rfloor}. \tag{8}$$

现在，我们给出 (7) 和 (8) 的更简洁下界，然后再给出稍好一些的下界；经过一番努力，这些下界仍可对足够大的 n变为有效下界。注意，$\left\lfloor \frac{2n+p^j-1}{2p^j} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$ 且 $\left\lfloor \frac{3n+p-2}{3p} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$。为方便起见，若 $3 \nmid a^*$，我们仍通过设定 $p_{d+1} := 3, \sigma_{d+1} := 0$，将 3 加入集合 $\mathbb{P}_1$。于是

$$2^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2^i}} \cdot \prod_{p_j \in \mathbb{P}_1} p_j^{\sum_{i=1}^{\sigma_j} \left\lfloor \frac{n}{p_j^i} \right\rfloor} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor} \cdot \prod_{p_j \in \mathbb{P}_1} p_j^{\sum_{i=\sigma_j+1}^{\infty} \frac{n}{p_j^i}} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{n}{p^i}} \geqslant n! \geqslant \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

最后一个不等式推知

$$\gcd(p_n, q_n) \geqslant \sqrt{2\pi n} (c_1 n)^n \tag{9}$$

其中 $c_1 = c_1(a^*)$ 定义为

$$c_1 = \begin{cases} 2^{-3/4} \exp\left(-1 - \sum_{p_j \in \mathbb{P}_1} \frac{\ln p_j}{p_j^{\sigma_j}(p_j - 1)} - \sum_{p \in \mathbb{P}_2} \frac{\ln p}{p(p-1)} \right) & \text{if } 2 \mid a^*; \\ 2^{-7/8} \exp\left(-1 - \sum_{p_j \in \mathbb{P}_1} \frac{\ln p_j}{p_j^{\sigma_j}(p_j - 1)} - \sum_{p \in \mathbb{P}_2} \frac{\ln p}{p(p-1)} \right) & \text{if } 2 \nmid a^*. \end{cases} \tag{10}$$

c_1 在情形 $\mathbb{P}_1 = \{3\}$ （其中 $\sigma_1 = 0$）下达到最小值。于是 $c_1 \approx 0.0924$。然而，如果$a^* = 3$，那么 $c_1 \approx 0.1333$。一般来说，整除 a^* 的小素数的平方越多， c_1 的值就越大。

对于足够大的 n，我们可以给出 $\gcd(p_n, q_n)$ 的更好的渐近下界估计。关于 n 的确切条件可以有效地计算出来，但计算过程并不简便。考虑一个素数 $p \in \mathbb{P}_2$。如果存在某个整数 k，使得 $p^{\left\lfloor \frac{3n+p-2}{3p} \right\rfloor}$ 相比 $p^{\lfloor n/p \rfloor}$ 多出一个 p 的因子，那么

$$\frac{n}{p} < k \leqslant \frac{3n + p - 2}{3p} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n}{k} < p \leqslant \frac{3n - 2}{3k - 1}.$$

我们还有 $\prod_{p\in\mathbb{P}_1} p \asymp 1$，其中隐含常数仅取决于 a^*，而不取决于 n。定义集合

$$K := \bigcup_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}, \frac{3n-2}{3k-1} \right]$$

那么 p_n、q_n 的最大公因数为 $\geqslant T \cdot \sqrt{2\pi n}(c_1 n)^n$，其中

$$T \asymp \prod_{p\in\mathbb{P}\cap K} p = \exp\left(\sum_{p\in K\cap\mathbb{P}} \ln p \right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\theta\left(\frac{3n-2}{3k-1} \right) - \theta\left(\frac{n}{k} \right) \right) \right),$$

其中 $\theta(x)$ 是第一切比雪夫函数。众所周知（例如参见 [7]），当 x 足够大时，$|\theta(x) - x| < \frac{x}{2\ln x}$。因此，对于 $y > x$，有 $\theta(y) - \theta(x) \geqslant y - x - \frac{y}{\ln y}$。这意味着

$$\sum_{k=1}^{\sqrt{\ln n}} \left(\theta\left(\frac{3n-2}{3k-1} \right) - \theta\left(\frac{n}{k} \right) \right) \geqslant \sum_{k=1}^{\sqrt{\ln n}} \frac{n-2k}{k(3k-1)} - O\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}} \right) = n \sum_{k=1}^{\sqrt{\ln n}} \frac{1}{k(3k-1)} - O\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}} \right).$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，当 n 足够大时，最后一个表达式可以变得大于 $(\tau-\varepsilon)n$，其中 τ：$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(3k-1)} \approx 0.741102$。因此 $T \gg e^{(\tau-\varepsilon)n} = \gamma^{n(1-\varepsilon)}$，其中 $\gamma = e^{\tau}$。最后，我们得到

$$\gcd(p_n, q_n) \gg ((c_2 - \delta)n)^n, \quad \text{where } c_2 = c_1 \cdot \gamma, \tag{11}$$

δ 可以任意小，而不等式中的隐含常数只依赖于 a^* 和 δ，但不依赖于 n。对于情形 $a^* = 1$，当常数 c_1 取最小可能值时，我们得到 $c_2 \approx 0.1939$。相应地，对于 $a^* = 6$，有 $c_2 \approx 0.2797$。

6 分母 q_n 的下界和上界

本节将给出分母 q_n 的上界和下界，并与 q_{n-1} 进行比较。由于 q_n、q_{n-1} 和 q_{n-2} 之间的递推公式取决于 n 模 4，因此比较 q_{4k} 和 q_{4k+4} 是合理的。

我们采用 [1] 中的一些记号。记

$$T_{4k} := \begin{pmatrix} p_{4k} & q_{4k} \\ p_{4k-4} & q_{4k-4} \end{pmatrix}$$

那么由 [1, （69）和（70）可得]

$$T_{4k+4} = \begin{pmatrix} a_{k11} & a_{k12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S_{4k} \tag{12}$$

其中 a_{k11} 和 a_{k12} 是 $C_{4k+4}C_{4k+3}C_{4k+2}C_{4k+1}$ 中相应的指标。根据（3），计算得

$$\begin{aligned} a_{k11} = 2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)(t_1t_2)^2 &+6(8k+5)(8k+7)(36k^2+55k+16)a^*t_1t_2 \\ &+(12k+5)(12k+11)(3k+2)(6k+7)a^{*2} \end{aligned}; \tag{13}$$

$$a_{k12} = 2(12k+1)(3k+1)(8k+7)a^*t_1((8k+5)(8k+9)t_1t_2 + 2(36k^2+63k+25)a^*).$$

为简化记号，我们将 $a_{k12} = 2$（$12k+1$）（$3k+1$）（$8k+7$）a^*t_1p（k）记作，其中 p（k）是关于 k、参数为 t_1t_2 和 a^* 的多项式。

那么，对 [1, 引理 16] 的证明稍作调整即可得到

引理 5 设 $a^* \in \mathbb{N}$ 和 t_1、$t_2 \in \mathbb{Z}$ 满足 $12a^* \leqslant |t_1t_2|$。那么，q_{4k+4} 和 q_{4k} 满足以下关系

$$|q_{4k+4}| > (8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)(t_1t_2+2a^*)^2|q_{4k}|. \tag{14}$$

现在我们将给出分母 q_{4k+4} 和 q_{4k}之间的反向不等式。三个这样的连续分母由方程 [1, (72)]联系起来:

$$q_{4k+4} = a_{k11}q_{4k} + (dq_{4k-4} - b_{k21}q_{4k})\frac{a_{k12}}{b_{k22}}, \tag{15}$$

其中 b_{k21}/d 和 b_{k22}/d 是 $C_{4k-2}^{-1}C_{4k-1}^{-1}C_{4k}^{-1}$ 中相应的元素，即

$$d = -(12k-7)(12k-5)(12k-1)(3k-1)(6k-1)(6k+1)a^{*3}, \tag{16}$$

$$b_{k21} = -(12k-5)(6k-1)a^* - 2(8k-3)(8k-1)t_1t_2,$$

$$b_{k22} = 2(8k-1)t_1((8k-3)(8k+1)t_1t_2 + 2(36k^2-9k-2)a^*) =: 2(8k-1)t_1p(k-1).$$

引理 6 令 a^*、t_1、t_2 与引理 5 中相同。则 q_{4k+4} 和 q_{4k} 满足以下关系:

$$|q_{4k+4}| \leqslant 2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)\left(t_1t_2 + \frac{135}{32}a^*\right)^2|q_{4k}|, \quad \textit{if } t_1t_2 > 0, \tag{17}$$

$$|q_{4k+4}| \leqslant 2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)\left(t_1t_2 + \frac{27}{32}a^*\right)^2|q_{4k}|, \quad \textit{if } t_1t_2 < 0. \tag{18}$$

Proof. 首先，我们估计 (15) 中的各项。由于 $|t_1t_2| \geqslant 12a^*$，对于所有 $k \geqslant 1$，我们得到 $\pi_{12}(12k-5)(6k-1)(12a^*) < (8k-3)(8k-1)(12a^*) \leqslant (8k-3)(8k-1)|t_1t_2|$。因此

$$|b_{k21}| \leqslant 3(8k-3)(8k-1)|t_1t_2|. \tag{19}$$

接下来，由引理 5 可得

$$|dq_{4k-4}| \leqslant \frac{(12k-7)(12k-5)(12k-1)(3k-1)(6k-1)(6k+1)a^{*3}}{(8k-5)(8k-3)(8k-1)(8k+1)(t_1t_2+2a^*)^2}q_{4k}.$$

由于 $|t_1t_2 + 2a^*| \geqslant 10a^*$ 和 $12a^* \leqslant |t_1t_2|$，可以验证

$$|dq_{4k-4}| < (8k-3)(8k-1)|t_1t_2q_{4k}|. \tag{20}$$

接下来,我们有 $(8k+5)(8k+9)|t_1t_2| > 12(36k^2+63k+25)a^*$，因此始终有

$$\frac{|p(k)|}{(8k+5)(8k+9)|t_1t_2|} \in \begin{cases} \left[1, \frac{7}{6}\right] & \text{if } t_1t_2 \geqslant 0; \\ \left[\frac{5}{6}, 1\right] & \text{if } t_1t_2 < 0. \end{cases}$$

最后这个不等式进而表明，对于 $k \geqslant 1$，比值 a_{k12}/b_{k22} 始终为正，并且满足

$$\frac{a_{k12}}{b_{k12}} \leqslant \frac{6(12k+1)(3k+1)(8k+7)a^*}{8k-1}. \tag{21}$$

假设 $t_1t_2 \geqslant 0$。在这种情形下，最后一个不等式结合 (19) 和 (20) 可推出

$$\left|(dq_{4k-4} - b_{k21}q_{4k})\frac{a_{k12}}{b_{k22}}\right| \leqslant 24(8k-3)(8k+7)(12k+1)(3k+1)a^*t_1t_2q_{4k}.$$

可以验证，对所有 $k \geqslant 1$,

$$\frac{6(8k+5)(8k+7)(36k^2+55k+16)+24(8k-3)(8k+7)(12k+1)(3k+1)}{2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)} < \frac{135}{16} \tag{22}$$

and

$$\frac{81}{256} < \frac{(12k+5)(12k+11)(3k+2)(6k+7)}{2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)} \leqslant \frac{23}{66} < 1. \tag{23}$$

这些界与公式 (13) 和方程 (15) 一起，推出了关于 $k \geqslant 1$ 的不等式 (17)。最后，根据方程 $q_4 = a_{011}q_0 + a_{012}q_{-1}$ 和 $q_{-1} = 0$，很容易验证此界对 $k = 0$ 成立。

考虑情形 $t_1 < 0$。可以验证，对所有 $k \geqslant 1$,

$$\frac{321}{187} \geqslant \frac{6(8k+5)(8k+7)(36k^2+55k+16)}{2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)} \geqslant \frac{27}{16}. \tag{24}$$

这与条件 $|t_1t_2| > 12a^{*2}$ 一起意味着，对于所有 $k \in \mathbb{N}$, $a_{k11} > 0$、q_{4k} 和 q_{4k+4} 的符号相同。接下来，由于 $(12k-5)(6k-1)a^* < (8k-3)(8k-1)|t_1t_2|$, 可得 $b_{k21} > 0$；进而根据 (20) 和 $\frac{a_{k12}}{b_{k22}} > 0$, 项 $(dq_{4k-4} - b_{k21}q_{4k})\frac{a_{k12}}{b_{k22}}$ 的符号与 $a_{k11}q_{4k}$ 相反。由此可得 $|q_{4k+4}| \leqslant |a_{k11}q_{4k}|$。最后，不等式 (23) 与 (24) 一起确立了界 (18)。

⊠

引理 6 立即推出，对于 $t_1t_2 > 0$,

$$|q_{4k}| \leqslant 2^k \left(t_1t_2 + \frac{135}{32}a^*\right)^{2k} (8k+1)!! \leqslant 16k \left(8 \cdot 2^{1/4}e^{-1}\sqrt{t_1t_2 + \frac{135}{32}a^*}\right)^{4k} k^{4k}.$$

情 况 $t_1t_2 < 0$ 可以用类似的方法处理。最后，我们得到估计

$$|q_{4k}| \leqslant 16kc_3^{4k}k^{4k}, \tag{25}$$

其中

$$c_3 = c_3(t_1, t_2, a^*) = \begin{cases} 8 \cdot 2^{1/4}e^{-1}\sqrt{t_1t_2 + \frac{135}{32}a^*} & \text{if } t_1t_2 > 0 \\ 8 \cdot 2^{1/4}e^{-1}\sqrt{|t_1t_2| - \frac{27}{32}a^*} & \text{if } t_1t_2 < 0. \end{cases}$$

Lem题 7 在与前一个引理中相同的 a^*、t_1、t_2 条件下，有 s

$$|q_{4k+4}| \geqslant 2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)\left(t_1t_2 + \frac{9}{16}a^*\right)^2 |q_{4k}|, \quad \textit{if } t_1t_2 > 0, \tag{26}$$

$$|q_{4k+4}| \geqslant 2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)\left(t_1t_2 + 3a^*\right)^2 |q_{4k}|, \quad \textit{if } t_1t_2 < 0. \tag{27}$$

Proof. 若 $t_1t_2 > 0$，则有 $q_{4k+4} > a_{k11}q_{4k}$。于是，(23) 中的下界与 (24) 中的下界共同推出界 (26)。

现在假设 $t_1t_2 < 0$。那么，正如我们在引理 6 的证明中所示， $b_{k21} > 0$ 和dq_{4k-4} 以及 $b_{k21}q_{4k}$ 符号相反。结合 $\frac{a_{k12}}{b_{k22}} > 0$、不等式 (21) 和 $0 < b_{k21} \leqslant 2(8k-3)(8k-1)|t_1t_2|$，可进一步推出

$$|q_{4k+4}| \geqslant |a_{k11}q_{4k}| - \frac{b_{k21}a_{k12}}{b_{k22}}|q_{4k}| \geqslant (a_{k11} + 12(8k-3)(12k+1)(3k+1)(8k+7)a^*t_1t_2)|q_{4k}|$$

我们需要证明该表达式

$$a_{k11}+12(8k-3)(12k+1)(3k+1)(8k+7)a^*t_1t_2-2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)\,(t_1t_2+3a^*)^2$$

始终为正。请注意，将 (13) 代入其中并展开括号后，含有 $(t_1t_2)^2$ 的项消失了。 $a^*t_1t_2$ 对应的项于是等于

$$-6(8k+7)(160k^3+1532k^2+1063k+196)a^*t_1t_2$$

以及 a^{*2} 对应的项为

$$-(71136k^4+212976k^3+227970k^2+102633k+16240)$$

（这些计算是借助 Wolfram Mathematika 完成的）。最后，可以验证，在情形 $|t_1t_2|>12a^*$ 中，第一项的绝对值总是大于第二项的绝对值，因此整个表达式为正。

注。通过进行更精细的计算，可以将 $(t_1t_2+3a^*)^2$ 中的系数 3 略微减小。不过，我们决定不再进一步增加这些本已繁琐的计算的复杂性。

⊠

与 (25) 类似，可以为 $|q_{4k}|$ 找到更简短的下界。利用已知不等式 $(8k+1)!!\geqslant 8k(8k/e)^{2k}$，引理 7 可推出

$$|q_{4k}|\geqslant 8kc_4^{4k}k^{4k}, \tag{28}$$

其中

$$c_4=c_4(t_1,t_2,a^*)=\begin{cases} 8\cdot 2^{1/4}e^{-1}\sqrt{t_1t_2+\frac{9}{16}a^*} & \text{if } t_1t_2>0\\ 8\cdot 2^{1/4}e^{-1}\sqrt{|t_1t_2|-3a^*} & \text{if } t_1t_2<0.\end{cases}$$

7 x与渐近分数之间的距离

由 [1, 引理 17] 可知，在条件 $12a^*\leqslant|t_1t_2|$下，有

$$\left|x-\frac{p_{4k}}{q_{4k}}\right|<2\left|\frac{p_{4k}}{q_{4k}}-\frac{p_{4k+4}}{q_{4k+4}}\right|.$$

为了估计右侧，我们使用矩阵方程 [1, (72)]:

$$T_{k+1}=\begin{pmatrix} a_{k11}-a_{k12}\frac{b_{k21}}{b_{k22}} & \frac{da_{k12}}{b_{k22}}\\ 1 & 0\end{pmatrix}T_k.$$

注意， d 的值实际上取决于 k （见公式 (16)）。为了强调这种依赖关系，本节中我们将其记为 $d(k)$。于是，上述方程给出以下公式：

$$\left|\frac{p_{4k}}{q_{4k}}-\frac{p_{4k+4}}{q_{4k+4}}\right|=\frac{\left|\prod_{i=1}^k\frac{d(i)a_{i12}}{b_{i22}}\right|\cdot|p_0q_4-q_0p_4|}{q_{4k}q_{4k+4}}.$$

我们首先计算它的乘积项：

$$\left|\prod_{i=1}^k\frac{d(i)a_{i12}}{b_{i22}}\right|=\prod_{i=1}^k\frac{2(12i-7)(12i-5)(12i-1)(3i-1)(6i-1)(6i+1)(12i+1)(3i+1)(8i+7)a^{*4}|t_1p(i)|}{2(8i-1)|t_1p(i-1)|}$$

$$= \frac{(8k+7)|p(k)|}{7|p(0)|} \cdot \frac{(3k+1)(6k+1)(12k+1)a^{*4k}(12k)!}{2^{6k}3^{4k}(4k)!}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{3}(3k+1)(6k+1)(12k+1)(8k+7)|p(k)|}{7|p(0)|} \cdot \left(\frac{12^2k^2a^*}{2\sqrt{2}e^2}\right)^{4k}.$$

接下来，由 (12) 可得 $k=0$ $|p_0q_4-p_4q_0|=14a^*t_1|p(0)|$。最后，我们将所有这些界与 $|q_{4k}|$ 的下界 (26)、(27) 和 (28) 合并，得到

$$\left|x-\frac{p_{4k}}{q_{4k}}\right| \leqslant \frac{2\sqrt{3}(3k+1)(6k+1)(12k+1)(8k+7)|t_1a^*p(k)|}{2(8k+3)(8k+5)(8k+7)(8k+9)(|t_1t_2|-3a^*)^2\cdot 64k^2} \cdot \left(\frac{12^2a^*}{2\sqrt{2}e^2c_4^2}\right)^{4k}$$

为简化右边，注意到$\frac{(3k+1)(6k+1)(12k+1)}{(8k+3)(8k+5)(8k+9)} < \frac{27}{64}$。接下来，由于 $|t_1t_2| \geqslant 12a^*$，可得 $|p(k)| = |(8k+5)(8k+9)t_1t_2 + 2(36k^2+63k+25)a^*| \leqslant 2(8k+5)(8k+9)|t_1t_2|$，对所有 $k \geqslant 1$ 均小于 $442k^2|t_1t_2|$。最后，$(|t_1t_2|-3a^*)^2 \geqslant \frac{9}{16}(t_1t_2)^2$。将所有这些不等式合并起来，得到：

$$\left|x-\frac{p_{4k}}{q_{4k}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}\cdot 27\cdot 442|t_1^2t_2a^*|}{64\cdot(9/16)\cdot 64(t_1t_2)^2} \cdot \left(\frac{72a^*}{\sqrt{2}e^2c_4^2}\right)^{4k} \leqslant |t_1|c_5^{4k}, \tag{29}$$

其中

$$c_5 = \begin{cases} \frac{9a^*}{(16t_1t_2+9a^*)} & \text{if } t_1t_2>0 \\ \frac{9a^*}{16(|t_1t_2|-3a^*)} & \text{if } t_1t_2<0. \end{cases}$$

8 估计无理性指数

本节将证明定理 refth1 和 2。考虑 $p_k^* := p_{4k}/\gcd(p_{4k},q_{4k})$和$q_k^* := q_{4k}/\gcd(p_{4k},q_{4k})$。显然，它们都是整数，且由(25)结合(9)可得

$$|q_k^*| \leqslant 4\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\left(\frac{c_3}{4c_1}\right)^{4k} =: 4\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\cdot c_6^{4k}. \tag{30}$$

对于任意的 $\delta>0$，当 k 足够大时，可以利用不等式 (11) 得到 t

$$|q_k^*| \ll 16k\left(\frac{c_3}{4(c_2-\delta)}\right)^{4k} \ll \left(\frac{c_3}{4c_2}+\delta_1\right)^{4k} =: (c_6^*+\delta_1)^{4k} \tag{31}$$

其中，当 k 足够大时，$\delta_1>0$ 可以任意接近于零。将 b_k^* 的上界记为 $Q(k,t,a)$。

接下来，将最后两个不等式与 (29) 结合，得到

$$||q_k^*x|| \leqslant |t_1|c_5^{4k}\cdot 4\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\left(\frac{c_3}{4c_1}\right)^{4k} \leqslant 4|t_1|\sqrt{k}\left(\frac{c_3c_5}{4c_1}\right)^{4k} =: 4|t_1|\sqrt{k}c_7^{-4k} \tag{32}$$

or

$$||q_k^*x|| \ll \left(\frac{4c_2}{c_3c_5}-\delta_2\right)^{-4k} =: (c_7^*-\delta_2)^{-4k} \tag{33}$$

其中，δ_2 可以任意小，而 k 足够大，具体取决于 δ_2。将 $||q_k^*x||$ 的上界记为 $R(k,t,a)$。

考虑任意的$q \geqslant {}_{2R}{}^{1}{}_{1}{}^{t(,,a)} = q_0$。现在我们施加条件 $c_7 > e^{1/4}$。在这种情形下，通过考察$\sqrt{k}c_7^{-4k}$的导数，可以验证它在$k \geqslant 1$时严格递减。因此，存在唯一的 $k \geqslant 2$，使得 $R(k,t,a) < \frac{1}{2q} \leqslant R(k-1,t,a)$。令 $p \in \mathbb{Z}$ 满足 $||qx|| = |qx - p|$。由于两个向量 (p_k^*, q_k^*) 和 (p_{k+1}^*, q_{k+1}^*) 线性无关，因此其中至少有一个与(p,q)线性无关。设这个向量为(p_k^*, q_k^*)。于是我们估计下面行列式的绝对值：

$$1 \leqslant \left| \begin{array}{cc} q & q_k^* \\ p & p_k^* \end{array} \right| \leqslant \left| \begin{array}{cc} q & q_k^* \\ p - qx & p_k^* - q_k^* x \end{array} \right| \leqslant qR(k,t,a) + ||qx||Q(k,t,a).$$

由于 $qR(k,t,a) < \frac{1}{2}$，我们必有 $||qx|| \geqslant (2Q(k,t,a))^{-1}$。类似地，若 (p,q) 与 (p_{k+1}^*, q_{k+1}^*) 线性无关，则有 $||qx|| \geqslant (2Q(k+1,t,a))^{-1}$。后一项下界较弱。现在，我们需要将不等式右端改写为关于 q 而非 k的表达式。

由于 $\frac{1}{2q} \leqslant R(k-1,t,a)$，我们有

$$\frac{c_7^{4(k-1)}}{8|t_1|\sqrt{k-1}} \leqslant q \quad \Longrightarrow \quad k - 1 \leqslant \frac{\log(8|t_1|q) + \log\log(8|t_1|q)}{4\log c_7}.$$

最后一个推论可通过处理对数的标准技巧来证明，参见 [1,(41)]。

最后，将最后一个下界代入 k中的 $||qx|| \geqslant (2Q(k+1,t,a))^{-1}$，得到

$$||qx|| \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2(k+1)}c_6^{4(k+1)}} \geqslant \frac{2\sqrt{\pi}(\log c_7)^{1/2}}{8\sqrt{6}c_6^8(\log(8|t_1|q) + \log\log(8|t_1|q))^{1/2} \cdot (8|t_1|q)^{\frac{\log c_6}{\log c_7}}(\log(8|t_1|q))^{\frac{\log c_6}{\log c_7}}}.$$

$$\geqslant \frac{(\log c_7)^{1/2}}{8c_6^8(8|t_1|)^{\frac{\log c_6}{\log c_7}}} \cdot q^{-\frac{\log c_6}{\log c_7}}(\log(8|t_1|q))^{-\frac{\log c_6}{\log c_7} - \frac{1}{2}} = \frac{\tau}{g_2} q^{-\lambda}(\log(8|t_1|q))^{-\lambda - \frac{1}{2}}.$$

最后，为完成定理 1 的证明，我们回顾一下：为方便起见，我们实际上使用的是数 x/g_2，而不是 x，也就是说，上述不等式针对的是 $||qx/g_2||$。因此，需要将两边都乘以 g_2。

关于定理 2，我们使用不等式 (31) 和 (33)。在这种情形下，计算要简单得多，并且对于任意的 $\delta_3 > 0$ 以及足够大的整数 q，我们得到

$$||qx|| \geqslant q^{-\frac{\log c_6^*}{\log c_7^*} - \delta_3}$$

换句话说，$\lambda_{eff}(x)$ 6 对数 c_6^*对数 c_7^*。定理 2 的证明至此完成。

参考文献

[1]D. Badziahin. 三次劳朗级数的连分数. 预印本. https://arxiv.org/pdf/2211.08663.[2] A. Baker. 某些代数数的有理逼近.伦敦数学会会刊 14 (1964), No 3, 385–398.[3] M. A. Bennett. 某些代数数的有效无理性测度. 澳大利亚数学会会刊 62 (1997), 329–344.

[4] E. Bombieri, A.J. van der Poorten, J. D. Vaaler. 数域三次扩张的无理性的有效度量. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 23 (1996年) No 2, 211–248.[5] Y. Bugeaud. 对数线性形式及其应用. European Mathematical So- ciety (2018).[6] N. I. Feldman. 代数数对数线性形式的改进估计. Mat. Sb. 77 (1968), 256–270（俄文）。英文译文见 Math. USSR. Sb. 6 (1968), 393–406.[7] J. B. Rosser, L. Schoenfeld. 素数的某些函数的近似公式. Illinois J. Math., 6 (1962), 64–94.[8] K. F. Roth. 代数数的有理逼近.Mathematika, 2 (1955年), 337– 360.[9] I. Wakabayashi, 负判别式的三次 Thue 不等式. J. Number Theory, 97 (2002), No 2, 225–251.